A^(1)_N型ミューテーションの可積分性について

野邊, 厚
千葉大学教育学部

松木平, 淳太
龍谷大学理工学部

https://doi.org/10.15017/2924852

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.45-50, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University, Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 09 (pp. 45 - 50)

$A_N^{(1)}$ 型ミューテーションの可積分性について

野邊 厚（NOBE Atsushi），松木平 淳太（Matsukidaira Junta）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

$A_N^{(1)}$ 型ミューテーションの可積分性について

千葉大学教育学部　野邊 厚（NOBE Atsushi）[*]
龍谷大学理工学部　松木平 淳太（MATSUKIDAIRA Junta）[†]

概 要

クラスター代数の $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションから双有理写像力学系を導出し、保存量の具体的な構成を通して、双有理写像力学系の可積分性を示す。さらに、保存量を用いて双有理写像力学系を線形化し、一般解を求める。

1　はじめに

クラスター代数とは、2002 年に Fomin-Zelevinsky により発見された代数系であり [1]、以下のように定義される。はじめに、初期種子とよばれる変数（クラスター変数)、行列（交換行列）の組を用意する。この初期種子にミューテーションとよばれる操作（成分の双有理変換）を繰り返し適用し、得られた種子全体に含まれるクラスター変数が生成する多項式環をクラスター代数とよぶ。クラスター代数の生成元は初期クラスターの Laurent 多項式であることが Fomin-Zelevinsky によって示されており [1]、そのような性質を Laurent 性とよぶ。また、クラスター代数のミューテーションは交換行列を通して一般化 Cartan 行列と対応付け可能であり、有限型の Cartan 行列と対応するミューテーションのみ有限周期をもつことが知られている [2]。

本稿においては、アフィン $A_N^{(1)}$ 型 Cartan 行列と対応するミューテーションから $N+1$ 次元双有理写像力学系を導出し、N 個の保存量（初期変数の Laurent 多項式）を具体的に構成することで、得られた力学系の可積分性を示す。また、これらの保存量は、より低次の Laurent 多項式（N 個）の生成する基本対称式に他ならないことを示す。さらに、これらの保存量の生成元を用いて双有理写像力学系を線形化し、その一般解を求める。最後に双有理写像力学系の一般解から $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションのもとでのクラスター変数の一般項を明らかにする。

2　$A_N^{(1)}$ 型ミューテーションと双有理写像力学系

N を 2 以上の整数とする。次のような初期種子 $\Sigma_0=(\boldsymbol{x}_0,B_0)$（初期クラスター $\boldsymbol{x}_0$、初期交換行列 B_0）を与える：

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{N+1}),\qquad B_0=\begin{pmatrix} & -1 & & -1 \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix}$$

[*]〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1 丁目 3 3 番, e-mail: nobe@faculty.chiba-u.jp
[†]〒 520-2194 大津市瀬田大江町横谷 1-5, e-mail: junta@rins.ryukoku.ac.jp

ただし、交換行列 $B_0=(b_{ij})$ は次をみたす $N+1$ 次反対称行列であり

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)=(N+1,1) \text{ or } (i,j)=(i,i-1) \text{ for } 2\le i\le N+1\\ -1 & (i,j)=(1,N+1) \text{ or } (i,j)=(i,i+1) \text{ for } 1\le i\le N\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

その一般化 Cartan 行列 $A(B_0):=(2\delta_{ij}-|b_{ij}|)$ は $A_N^{(1)}$ 型である。また、交換行列 B_0 に対応するクイバー Q_0 は図 1 のようになる。

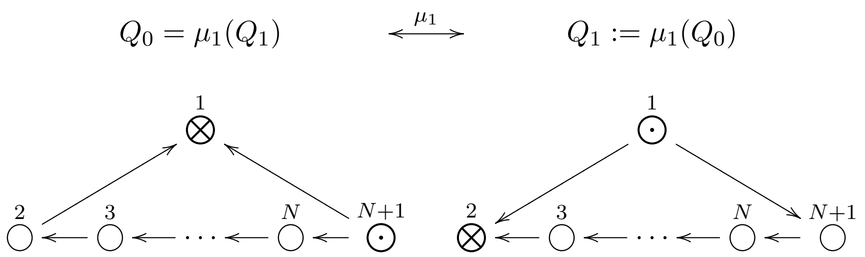

図 1: クイバー Q_0 とその頂点 1 におけるミューテーション $Q_1=\mu_1(Q_0)$。頂点 $\bigotimes$ は sink を表し、頂点 $\bigodot$ は source を表す。

交換行列 B_0 のミューテーションは対応するクイバー Q_0 のミューテーションと等価であり、Q_0 の頂点 1（sink）でのミューテーション μ_1 は、その頂点に出入りする矢を逆向きにすることで与えられる（図 1）。

置換 $\rho\in\mathfrak{S}_{N+1}$ のクイバー Q への作用 ρQ を次をみたすように定める：

$$\sharp\{Q \text{ の頂点 } i \text{ から } j \text{ への矢 }\}=\sharp\{\rho Q \text{ の頂点 } \rho^{-1}(i) \text{ から } \rho^{-1}(j) \text{ への矢 }\}$$

とくに ρ が右シフト

$$\rho=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & N+1\\ N+1 & 1 & \cdots & N\end{pmatrix}$$

ならば、ρQ は Q の矢を一斉に反時計回りに 1 頂点分だけずらしたものである。実際、図 1 のクイバー Q_0,Q_1 は $Q_1=\rho Q_0$ をみたすが、このような性質をもつクイバーを cluster mutation periodic quiver with period 1 とよぶ [3]。

クイバー Q_1 の頂点 2 は sink であるので、Q_1 の頂点 2 におけるミューテーション μ_2 は Q_0 の頂点 1 におけるミューテーション μ_1 と同様に与えられ、得られたクイバー $Q_2=\mu_2(Q_1)$ は $Q_2=\rho Q_1=\rho^2Q_0$ をみたす。以下同様に、μ_k を頂点 k でのミューテーションとし、得られたクイバーを $Q_k=\mu_k(Q_{k-1})$ とすると $Q_k=\rho Q_{k-1}=\rho^2Q_{k-2}=\cdots=\rho^kQ_0$ が成り立つ。クイバー Q_k に対応する交換行列を B_k とおくと、置換 ρ の周期性 $\rho^{N+1}=1$ より、クイバーおよび交換行列のミューテーション列 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{N+1}$ に関する周期性を得る：

$$Q_{N+1}=Q_0,\qquad B_{N+1}=B_0$$

交換行列 $B_0,B_1,\ldots,B_N$ の一般化 Cartan 行列 $A(B_0),A(B_1),\ldots,A(B_N)$ はすべて $A_N^{(1)}$ 型であるため、ミューテーション列 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{N+1}$ を $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションとよぶ。

$A_N^{(1)}$ 型ミューテーション $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N+1}$ を初期クラスター $\boldsymbol{x}$ に順に繰り返し適用したものを次のように表す：

$$\boldsymbol{x}_1 := \mu_1(\boldsymbol{x}), \quad \cdots, \quad \boldsymbol{x}_{N+1} := \mu_{N+1}(\boldsymbol{x}_N), \quad \boldsymbol{x}_{N+2} := \mu_1(\boldsymbol{x}_{N+1}), \quad \cdots$$

ここで、クラスター $\boldsymbol{x}_k$ は周期性をもたないため [2]、一般に $\boldsymbol{x}_k := \mu_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}_{k-1})$ とおく（$k \equiv \overline{k} \pmod{N+1}$、$1 \leq \overline{k} \leq N+1$）。また、クラスター変数および交換行列の成分を次のように表示する：

$$\boldsymbol{x}_k = (x_{1;k}, x_{2;k}, \cdots, x_{N+1;k}), \qquad B_k = \left(b_{ij}^k\right)$$

任意の正整数 $k > 0$ に対し、クラスター変数 $x_{j;k}$（$j = 1, 2, \ldots, N+1$）は、次の交換関係

$$x_{j;k} = \left(\mu_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}_{k-1})\right)_j = \begin{cases} \dfrac{1}{x_{j;k-1}} \displaystyle\prod_{i=1}^{N+1} x_{i;k-1}^{\max\left[b_{ij}^{k-1}, 0\right]} + \dfrac{1}{x_{j;k-1}} \displaystyle\prod_{i=1}^{N+1} x_{i;k-1}^{\max\left[-b_{ij}^{k-1}, 0\right]} & j = \overline{k}, \\ x_{j;k-1} & j \neq \overline{k}, \end{cases} \tag{1}$$

によって帰納的に与えられる。

いま、1 回の時間発展 $t \to t+1$ が $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションの合成 $\mu_{N+1} \circ \mu_N \circ \cdots \circ \mu_1$ と対応するような双有理写像力学系を構成するため、新しい変数 $\boldsymbol{x}^t := (x_1^t, x_2^t, \cdots, x_{N+1}^t)$ を導入する：

$$x_i^t := x_{i;(N+1)t} \quad (i = 1, 2, \ldots, N+1) \tag{2}$$

命題 1. 変数 x_i^t（$i = 1, 2, \cdots, N+1$）は次の関係式を満たす：

$$x_i^{t+1} = \frac{x_{i-1}^{t+1} x_{i+1}^t + 1}{x_i^t} \tag{3}$$

ただし、$x_0^{t+1} = x_{N+1}^t$ および $x_{N+2}^t = x_1^{t+1}$ とする。

（証明）　交換関係 (1) を用いて直接計算すればよい。 □

したがって、$N+1$ 次元双有理写像力学系

$$\varphi : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1}; \boldsymbol{x}^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_{N+1}^t) \mapsto \boldsymbol{x}^{t+1} = (x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, \ldots, x_{N+1}^{t+1})$$

を用いて、$A_N^{(1)}$ 型ミューテーション $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N+1}$ を解析することができる。

3　保存量

双有理写像力学系 $\varphi : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1}$ の初期値 $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ によって $\mathbb{Z}$ 上生成される Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}\left[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, \ldots, x_{N+1}^{\pm}\right]$ を $\mathbb{Z}\left[\boldsymbol{x}^{\pm}\right]$ と表示する。また、簡単のため、$p = p(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}) \in \mathbb{Z}\left[\boldsymbol{x}^{\pm}\right]$ に対し、$p(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_{N+1}^t) \in \mathbb{Z}\left[(\boldsymbol{x}^t)^{\pm}\right]$ を p^t と略記する（ただし $p^0 = p$）。

いま、Laurent 多項式 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{Z}\left[\boldsymbol{x}^{\pm}\right]$ を次のように定義する：

$$\lambda_i = \lambda_i(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}) := \frac{x_i + x_{i+2}}{x_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1), \tag{4}$$

$$\lambda_N = \lambda_N(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}) := \frac{1 + x_1 x_N + x_2 x_{N+1}}{x_1 x_{N+1}} \tag{5}$$

これらは φ の作用 $\varphi\lambda_i^t = \lambda_i^{t+1}$ に関して次のような周期性をもつ。

定理 1. 任意の非負整数 $t, n \geq 0$ に対し、次が成り立つ：

$$\lambda_i^{t+n} = \lambda_{i+n}^t \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

ただし、下付添え字は mod N で考える。とくに、λ_i^t は周期 N の周期性をもつ：

$$\lambda_i^{t+N} = \lambda_i^t \quad \text{for } {}^\forall t \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

（証明） 直接計算すればよい。 □

命題 2. Laurent 多項式 $\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_N^t$ によって $\mathbb{Z}$ 上生成される多項式環 $\mathbb{Z}\left[\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_N^t\right]$ を $\mathbb{Z}\left[\boldsymbol{\lambda}^t\right]$ で表す。このとき、任意の非負整数 $t \geq 0$ に対し次が成り立つ：

$$\mathbb{Z}\left[\boldsymbol{\lambda}^t\right] = \mathbb{Z}\left[\boldsymbol{\lambda}^0\right] = \mathbb{Z}\left[\boldsymbol{\lambda}\right] \subset \mathbb{Z}\left[\boldsymbol{x}^{\pm}\right]$$

（証明） $f = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$ に対し、置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ の f への作用を

$$\sigma f = \sigma f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) = f(\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \lambda_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(N)})$$

で定める。とくに σ を右シフト

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ N & 1 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}$$

とすると、定理 1 より、次が成り立つ：

$$f^{s+t} = f(\lambda_{1+t}^s, \lambda_{2+t}^s, \ldots, \lambda_{N+t}^s) = \sigma^t f^s$$

$s = 0$ とすると $\mathbb{Z}\left[\boldsymbol{\lambda}^t\right] \ni f^t = \sigma^t f^0 = \sigma^t f \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$ である。 □

系 1. λ_i（$i = 1, 2, \ldots, N$）の n 次基本対称式を $q_n \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$（$n = 1, 2, \ldots, N$）とおく：

$$q_n := \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\ldots,N\} \\ |I|=n}} \prod_{i \in I} \lambda_i$$

このとき、q_n^t（$n = 1, 2, \ldots, N$）は双有理写像力学系 φ の保存量である。すなわち、任意の非負整数 $t \geq 0$ に対して $q_n^t = \sigma^t q_n = q_n$ が成り立つ。

（証明） 定理 1 より明らか。 □

4 線形化と一般解

Laurent 多項式 λ_N を用いると、(3)（$i = 1$）より

$$x_1^{t+1} = \frac{x_{N+1}^t x_2^t + 1}{x_1^t} = \frac{\lambda_N^t x_1^t x_{N+1}^t - x_1^t x_N^t}{x_1^t} = \lambda_N^t x_{N+1}^t - x_N^t \tag{6}$$

を得る。同様に、(3)（$i = N+1$）を用いると

$$x_{N+1}^{t+1} = \frac{x_N^{t+1} x_1^{t+1} + 1}{x_{N+1}^t} = \frac{\lambda_N^{t+1} x_1^{t+1} x_{N+1}^{t+1} - x_2^{t+1} x_{N+1}^{t+1}}{x_{N+1}^t} = x_{N+1}^{t+1} \frac{\lambda_N^{t+1} x_1^{t+1} - x_2^{t+1}}{x_{N+1}^t}$$

より、次を得る：

$$x_2^{t+1} = \lambda_N^{t+1} x_1^{t+1} - x_{N+1}^t = \lambda_1^t x_1^{t+1} - x_{N+1}^t \tag{7}$$

さらに、Laurent 多項式 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}$ を用いると

$$x_{i+2}^{t+1} = \lambda_i^{t+1} x_{i+1}^{t+1} - x_i^{t+1} = \lambda_{i+1}^t x_{i+1}^{t+1} - x_i^{t+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{8}$$

を得る。このとき、(6–8) は $x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, \ldots, x_{N+1}^{t+1}$ に対する連立 1 次方程式と見なせる：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\lambda_1^t & 1 & & & \\ 1 & -\lambda_2^t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & -\lambda_N^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{t+1} \\ x_2^{t+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N+1}^{t+1} \end{pmatrix} = x_N^t \begin{pmatrix} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + x_{N+1}^t \begin{pmatrix} \lambda_N^t \\ -1 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \tag{9}$$

連立 1 次方程式 (9) の係数行列を $A \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], N+1)$ とし、A の第 j 列を右辺のベクトル $(-1, 0, \ldots, 0)^T, (\lambda_N^t, -1, 0, \ldots, 0)^T$ でそれぞれ置き換えた行列を $A_{j,1}, A_{j,2}$ とする。このとき、$A_{j,1}, A_{j,2} \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], N+1)$ であり、命題 2 より、行列式 $\det A_{i,1}, \det A_{i,2}$ はともに多項式環 $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$ に含まれる。時刻 $t = 0$ における $\det A_{i,1}, \det A_{i,2}$ をそれぞれ $\xi_{i,1}, \xi_{i,2} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$ とおく ($i = 1, 2, \ldots, N+1$)（$\sigma^t \xi_{i,1} = \det A_{i,1}, \sigma^t \xi_{i,2} = \det A_{i,2}$ に注意)。

さらに、行列 $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], 2)$ を次のようにおく：

$$M := \begin{pmatrix} \xi_{N,1} & \xi_{N,2} \\ \xi_{N+1,1} & \xi_{N+1,2} \end{pmatrix}$$

また、$\sigma \in \mathfrak{S}_N$ の $M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], 2)$ への作用を次で定める：

$$\sigma M := \begin{pmatrix} \sigma\xi_{N,1} & \sigma\xi_{N,2} \\ \sigma\xi_{N+1,1} & \sigma\xi_{N+1,2} \end{pmatrix}$$

$|A| = 1$ に注意して、クラメルの公式を用いて (9) を解くと、x_i^{t+1}（$i = 1, 2, \ldots, N+1$）は次のように与えられる：

$$x_i^{t+1} = \left(\sigma^t \xi_{i,1}\right) x_N^t + \left(\sigma^t \xi_{i,2}\right) x_{N+1}^t \tag{10}$$

こうして、双有理写像力学系 φ は線形化される。とくに、$i = N, N+1$ に対しては次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} x_N^{t+1} \\ x_{N+1}^{t+1} \end{pmatrix} = \left(\sigma^t M\right) \begin{pmatrix} x_N^t \\ x_{N+1}^t \end{pmatrix} = \left(\sigma^t M\right)\left(\sigma^{t-1} M\right) \cdots (\sigma M) M \begin{pmatrix} x_N \\ x_{N+1} \end{pmatrix} \tag{11}$$

正整数 $\ell > 1$ に対し

$$\mathcal{M}_\ell := \left(\sigma^{\ell-1} M\right)\left(\sigma^{\ell-2} M\right) \cdots \left(\sigma^1 M\right) M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], 2)$$

とおく。このとき、双有理写像力学系 $\varphi : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1}$ の一般解は次のように与えられる。

定理 2. 整数 $N > 2$ に対し、非負整数 $t \geq 0$ を $t = mN + k$（$m \geq 0,\ 0 \leq k \leq N-1$）と表す。このとき、双有理写像力学系 φ の一般解 x_i^t（$i = 1, 2, \ldots, N+1$）は次で与えられる：

$$x_i^{t+1} = \left(\sigma^k \xi_{i,1}, \sigma^k \xi_{i,2}\right) \mathcal{M}_k \left(\mathcal{M}_N\right)^m \begin{pmatrix} x_N \\ x_{N+1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, N+1) \tag{12}$$

（証明）各 $\xi_{i,j}$ は周期 N をもつ（$\sigma^N \xi_{i,j} = \xi_{i,j}$）ので、$\sigma^N M = M$ である。したがって、(10)、(11) より、(12) が成り立つ。 □

ミューテーション列 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N+1}$ が作用するとき、各クラスター変数は 1 回だけ更新される。(2) より、クラスター変数と双有理写像力学系の変数は次の関係式をみたす：

$$x_{i;(N+1)t+k} = \begin{cases} x_i^t & 0 \le k \le i-1 \\ x_i^{t+1} & i \le k \le N \end{cases}$$

したがって、定理 2 より、クラスター変数の一般項を得る。

クラスター変数は Laurent 性をもつことがよく知られているが [1]、$\sigma^k \xi_{i,1}, \sigma^k \xi_{i,2} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}]$、$\mathcal{M}_\ell \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{Z}[\boldsymbol{\lambda}], 2)$ および $\lambda_i \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{x}^\pm]$ より、定理 2 からクラスター変数 x_i^t の Laurent 性が直ちにしたがう。

系 2. 任意の非負整数 $t \ge 0$ に対し、$x_i^t \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{x}^\pm]$（$i = 1, 2, \ldots, N+1$）が成り立つ。 □

5　まとめ

$N \ge 2$ に対し、クラスター代数の $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションから $N+1$ 次元双有理写像力学系 $\varphi : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1}$ を導出し、N 個の保存量 $q_1, q_2, \ldots, q_N$ を用いて系の可積分性を示した。また、保存量の生成元である、初期変数の Laurent 多項式 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ を用いて力学系 φ を線形化し、一般解を求めた。先行研究 [4, 5] で考察した $A_1^{(1)}$ 型ミューテーションへの退化 $N \to 1$ においては、$\lambda_N = \lambda_1$（(5) を見よ）のみ生き残り、双有理写像力学系 $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の保存量となる。この保存量を用いて、$A_1^{(1)}$ 型ミューテーションも同様に線形化可能であり、一般解を構成できる。また、$A_2^{(2)}$ 型ミューテーションも同様に線形化可能であり、$A_1^{(1)}$ 型ミューテーションと可換な双有理写像力学系となることが示される [5]。$A_{2N}^{(2)}$ 型ミューテーションが線形化可能であるか、また、それは $A_N^{(1)}$ 型ミューテーションと可換であるか、などを明らかにすることは今後の課題である。

謝辞　本研究は千葉大学外部資金獲得プログラム多様型 B の支援を受けている。

参考文献

[1] Fomin S and Zelevinsky A, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002)

[2] Fomin S and Zelevinsky A, *Invent. Math.* **154** (2003)

[3] Fordy A and Marsh R, *J. Algbr. Comb.* **34** (2011)

[4] Nobe A, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016)

[5] Nobe A, *J. Math. Phys.* **60** (2019)