BKP方程式のソリトン解の分類

田中, 悠太
早稲田大学基幹理工学研究科

丸野, 健一
早稲田大学理工学術院

児玉, 裕治
オハイオ州立大学

https://doi.org/10.15017/2924849

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.31-36, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 06 (pp. 31 - 36)

BKP 方程式のソリトン解の分類

田中 悠太（Tanaka Yuta），丸野 健一（Maruno Ken-ichi），児玉 裕治（Kodama Yuji）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

BKP 方程式のソリトン解の分類

早稲田大学基幹理工学研究科　○田中悠太（Yuta TANAKA）
早稲田大学理工学術院　丸野健一（Ken-ichi MARUNO）
オハイオ州立大学　児玉裕治（Yuji KODAMA）

イントロダクション

KP 方程式は代表的なソリトン方程式であり，KP 方程式のソリトン解は Wronskian 表示や Gramian 表示を持つ．KP 方程式の Wronskian 表示のソリトン解に対して Cauchy-Binet の公式を適用して τ 関数を指数関数の和の形に展開すると係数として係数行列の最大次の小行列式が現れるため，KP 方程式のソリトン相互作用を分類するという問題は全ての最大次小行列式が非負な行列を分類するという問題に帰着する．この問題に対して Chakravarty-Kodama は完全置換や⅃-diagram などの組み合わせ論的道具を用いて KP 方程式のソリトン相互作用の分類に成功した [1–4].

それに対して DKP(coupled KP) 方程式や BKP 方程式は Pfaffian 表示の解を持つ．DKP 方程式は Wronski 型 Pfaffian 解や Gram 型 Pfaffian 解を持ち，特に Wronski 型 Pfaffian 表示のソリトン解に対しては Cauchy-Binet の公式の Pfaffian 類似である Ishikawa-Wakayama の Pfaffian の和公式が適用でき，ソリトン相互作用の解析がある程度なされている [5,6]．一方で BKP 方程式については Wronski 型 Pfaffian 解が知られておらず，Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解に対して解析しやすい表示が得られていないためソリトン相互作用の解析は全くなされていない．

本稿では BKP 方程式の Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解に対して Ishikawa-Wakayama の Pfaffian の和公式が適用できる表示を与え，その表示を用いたソリトン相互作用の解析について考察する．

BKP 方程式のソリトン解の Gram 型 Pfaffian 表示

BKP 階層 [7–9] の方程式

$$\begin{aligned}
&[D_1^6 - 5D_1^3D_3 - 5D_3^2 + 9D_1D_5]\tau\cdot\tau = 0\\
&[D_1^8 + 7D_1^5D_3 - 35D_1^2D_3^2 - 21D_1^3D_5 - 42D_3D_5 + 90D_1D_7]\tau\cdot\tau = 0\\
&\qquad\vdots
\end{aligned} \tag{1}$$

は Gram 型 Pfaffian 解

$$\tau = \mathrm{Pf}(1,2,\dots,2N), \tag{2}$$

$$\mathrm{Pf}(i,j) = c_{i,j} + \int^{t_1} D_1 f_i\cdot f_j\,dt_1 \qquad (c_{i,j} = -c_{j,i}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_n} = \frac{\partial^n f_i}{\partial t_1^n} \qquad (n = 1,3,5,\dots) \tag{4}$$

を持つ [10,11]．ここで D_i は広田の D-演算子

$$D_i^m D_j^n g\cdot f := \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\mu+\nu}\binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^{(m-\mu)+(n-\nu)}g}{\partial t_i^{m-\mu}\partial t_j^{n-\nu}}\frac{\partial^{\mu+\nu}f}{\partial t_i^{\mu}\partial t_j^{\nu}} \tag{5}$$

である．分散関係式 (4) を満たすものとして

$$f_i = \sum_{j=1}^{M} b_{i,j} e^{\theta_j} \qquad (M \geq 2N), \tag{6}$$

$$\theta_j = \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_j^{2l-1} t_{2l-1} \qquad (\kappa_1^2 > \cdots > \kappa_M^2) \tag{7}$$

を選ぶとソリトン解が得られる．この時，Cauchy-Binet の公式を用いると Pfaffian の各成分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pf}(i,j) &= c_{i,j} + \int^{t_1} D_1 f_i \cdot f_j \, dt_1 \\
&= c_{i,j} - \int^{t_1} \begin{vmatrix} f_i & \partial_{t_1} f_i \\ f_j & \partial_{t_1} f_j \end{vmatrix} dt_1 \\
&= c_{i,j} - \int^{t_1} \left| \begin{pmatrix} b_{i,1} & \cdots & b_{i,M} \\ b_{j,1} & \cdots & b_{j,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \kappa_1 e^{\theta_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \kappa_M e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right| dt_1 \\
&= c_{i,j} + \sum_{1 \leq m < n \leq M} \begin{vmatrix} b_{i,m} & b_{i,n} \\ b_{j,m} & b_{j,n} \end{vmatrix} \frac{\kappa_m - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{\theta_m + \theta_n} \\
&= c_{i,j} + \sum_{1 \leq m < n \leq M} \left(b_{i,m} b_{j,n} \frac{\kappa_m - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{\theta_m + \theta_n} + b_{i,n} b_{j,m} \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} e^{\theta_n + \theta_m} \right) \\
&= c_{i,j} + \sum_{1 \leq \mu, \nu \leq M} b_{i,\mu} b_{j,\nu} \frac{\kappa_\mu - \kappa_\nu}{\kappa_\mu + \kappa_\nu} e^{\theta_\mu + \theta_\nu} \\
&= c_{i,j} + B^{\{i\}} E (B^{\{j\}})^\top \\
&= c_{i,j} + B^{\{i\}} E (B^\top)_{\{j\}} \\
&= (C + BEB^\top)^{\{i\}}_{\{j\}}
\end{aligned} \tag{8}$$

と変形できるので τ 関数は

$$\begin{aligned}
\tau &= \mathrm{Pf}(1, 2, \ldots, 2N) \\
&= \mathrm{Pf}[C + BEB^\top]
\end{aligned} \tag{9}$$

と表される．ただし各行列は

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2N} \quad (c_{i,j} = -c_{j,i}), \tag{10}$$

$$B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2N, \\ 1 \leq j \leq M}} \tag{11}$$

$$E = \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} e^{\theta_i + \theta_j} \right)_{1 \leq i,j \leq M} \tag{12}$$

であり，行列 A から第 $i_1, \ldots, i_m$ 行，第 $j_1, \ldots, j_n$ 列を抜き出した行列を $A^{\{i_1,\ldots,i_m\}}_{\{j_1,\ldots,j_n\}}$ と表す．ここで反対称行列 C は適当な正則行列 R を用いて

$$RCR^\top = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & O & & \\ & & \ddots & & & O \\ & & & 0 & 1 & \\ & O & & -1 & 0 & \\ \hline & & O & & & O \end{array} \right) =: J^{(L,N)} \quad (\mathrm{rank} C = \mathrm{rank} J^{(L,N)} = 2L,\, 0 \leq L \leq N) \tag{13}$$

とできるので適当なゲージ変換の後に RB を B と置き直せば

$$\tau = \mathrm{Pf}[J^{(L,N)} + BEB^\top] \tag{14}$$

としても一般性を失わないことに注意し，以下この形の解について解析する．

Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解の展開

BKP 方程式のソリトン解 (14) は

$$\begin{aligned}\tau &= \mathrm{Pf}[J^{(L,N)} + BEB^\top] \\ &= \mathrm{Pf}\left[\begin{pmatrix} I_{2N} & I_{2N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{(L,N)} & O_{2N} \\ O_{2N} & BEB^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2N} \\ I_{2N} \end{pmatrix}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

と変形されるので，Ishikawa-Wakayama の Pfaffian の和公式によって指数関数の和の形に展開できる．

公式 1 (Ishikawa-Wakayama の Pfaffian の和公式 [12])**.** $2n \times m$ 行列 A（$m \geq 2n$）と m 次反対称行列 B に対して

$$\mathrm{Pf}[ABA^\top] = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{2n}\leq m} \mathrm{Pf}[B^{\{i_1,\ldots,i_{2n}\}}_{\{i_1,\ldots,i_{2n}\}}]\det[A_{\{i_1,\ldots,i_{2n}\}}]$$

が成り立つ．

実際に展開すると

$$\begin{aligned}
\tau &= \mathrm{Pf}\left[\begin{pmatrix} I_{2N} & I_{2N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{(L,N)} & O_{2N} \\ O_{2N} & BEB^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2N} \\ I_{2N} \end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{2N}\leq 4N} \left|\begin{pmatrix} I_{2N} & I_{2N} \end{pmatrix}_{\{i_1,\ldots,i_{2N}\}}\right| \mathrm{Pf}\left[\begin{pmatrix} J^{(L,N)} & O_{2N} \\ O_{2N} & BEB^\top \end{pmatrix}^{\{i_1,\ldots,i_{2N}\}}_{\{i_1,\ldots,i_{2N}\}}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{L}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq L} \mathrm{Pf}\left[\begin{pmatrix} \left(J^{(L,N)}\right)^{\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}} & O_{2l\times(2N-2l)} \\ O_{(2N-2l)\times 2l} & \left(BEB^\top\right)^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}} \end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{L}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq L} \mathrm{Pf}\left[\left(BEB^\top\right)^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{L}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq L} \mathrm{Pf}\left[B^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}} E \left(B^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}\right)^\top\right] \\
&= \sum_{l=0}^{L}\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq L \\ 1\leq j_1<\cdots<j_{2N-2l}\leq M}} \left|B^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{\{j_1,\ldots,j_{2N-2l}\}}\right| \kappa_{j_1,\ldots,j_{2N-2l}} e^{\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_{2N-2l}}},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\kappa_{j_1,\ldots,j_n} := \prod_{1\leq\mu<\nu\leq n} \frac{\kappa_{j_\mu}-\kappa_{j_\nu}}{\kappa_{j_\mu}+\kappa_{j_\nu}} > 0 \qquad (\kappa_1^2 > \cdots > \kappa_M^2) \tag{17}$$

となり，係数行列 B によって τ 関数の正値性が決定される．ただしここで $[2N] = \{1, 2, \ldots, 2N\}$ とし

た．特に $L=N$ の時，式 (16) はさらに

$$
\begin{aligned}
\tau &= \sum_{l=0}^{N} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_l\le N\\ 1\le j_1<\cdots<j_{2N-2l}\le M}} \left| B^{[2N]\setminus\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{\{j_1,\ldots,j_{2N-2l}\}} \right| \kappa_{j_1,\ldots,j_{2N-2l}} e^{\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_{2N-2l}}} \\
&= \sum_{l=0}^{N} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{2l}\le M} \left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_l\le N} \left| B^{\{2i_1-1,2i_1,\ldots,2i_l-1,2i_l\}}_{\{j_1,\ldots,j_{2l}\}} \right| \right) \kappa_{j_1,\ldots,j_{2l}} e^{\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_{2l}}} \\
&= \sum_{l=0}^{N} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{2l}\le M} \mathrm{Pf}\left[\left(B^{\top} J^{(N,N)} B \right)^{\{j_1,\ldots,j_{2l}\}}_{\{j_1,\ldots,j_{2l}\}} \right] \kappa_{j_1,\ldots,j_{2l}} e^{\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_{2l}}},
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\mathrm{Pf}[A^{\phi}_{\phi}] \coloneqq 1 \tag{19}
$$

と変形できるので，τ 関数を展開した時の指数関数の係数として $B^{\top}J^{(N,N)}B$ の全ての偶数次主小行列の Pfaffian が現れる．次に $L<N$ の場合も適当なゲージ変換によって $L=N$ の場合に帰着させることを考える．具体例として $L=0$，$N=1$，$M=4$，$|B_{\{1,4\}}|,|B_{\{3,4\}}|\neq 0$ の時，

$$
\begin{aligned}
\tau =& \mathrm{Pf}[J^{(0,1)} + BEB^{\top}] \\
=& |B_{\{1,2\}}|\kappa_{1,2}e^{\theta_1+\theta_2} + |B_{\{1,3\}}|\kappa_{1,3}e^{\theta_1+\theta_3} + |B_{\{1,4\}}|\kappa_{1,4}e^{\theta_1+\theta_4} \\
&+ |B_{\{2,3\}}|\kappa_{2,3}e^{\theta_2+\theta_3} + |B_{\{2,4\}}|\kappa_{2,4}e^{\theta_2+\theta_4} + |B_{\{3,4\}}|\kappa_{3,4}e^{\theta_3+\theta_4} \\
\risingdotseq& 1 + a_{1,3}\kappa_{1,3}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{1,4}\kappa_{1,4}e^{\theta_1+\theta_4} + a_{2,3}\kappa_{2,3}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{2,4}\kappa_{2,4}e^{\theta_2+\theta_4} \\
&+ (-a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})\kappa_{1,2,3,4}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4} \qquad (\kappa_3 \to -\kappa_3, \kappa_4 \to -\kappa_4),
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,3} &= |B_{\{3,4\}}|^{-1}|B_{\{1,4\}}|\kappa_{1,3}^{-1}\kappa_{1,4}^{-1}\kappa_{3,4}^{-1}, \\
a_{1,4} &= |B_{\{3,4\}}|^{-1}|B_{\{1,3\}}|\kappa_{1,3}^{-1}\kappa_{1,4}^{-1}\kappa_{3,4}^{-1}, \\
a_{2,3} &= |B_{\{3,4\}}|^{-1}|B_{\{2,4\}}|\kappa_{2,3}^{-1}\kappa_{2,4}^{-1}\kappa_{3,4}^{-1}, \\
a_{2,4} &= |B_{\{3,4\}}|^{-1}|B_{\{2,3\}}|\kappa_{2,3}^{-1}\kappa_{2,4}^{-1}\kappa_{3,4}^{-1}
\end{aligned} \tag{21}
$$

となる．ただし $\risingdotseq$ はゲージ変換

$$
f \risingdotseq g \;\Leftrightarrow\; f = e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_3 t_3 + \cdots} g \tag{22}
$$

を意味し，式 (20) の 2 行目から 3 行目では $|B_{\{3,4\}}|\kappa_{3,4}e^{\theta_3+\theta_4}$ で括り出すゲージ変換を行った後に $-\kappa_3$，$-\kappa_4$ をあらためて κ_3，κ_4 と置き直す操作を行った．ここで

$$
\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{2,3}}{a_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_{1,3}a_{2,4}-a_{1,4}a_{2,3}}{a_{1,3}} \end{pmatrix} \leftrightarrow \tilde{B}^{\top}J^{(2,2)}\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 & 0 \\ -a_{1,4} & -a_{2,4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}
$$

なる新たな係数行列 $\tilde{B}$ をとると先程の議論から

$$
\begin{aligned}
\tau =& \mathrm{Pf}[J^{(0,1)} + BEB^{\top}] \\
\risingdotseq& 1 + a_{1,3}\kappa_{1,3}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{1,4}\kappa_{1,4}e^{\theta_1+\theta_4} + a_{2,3}\kappa_{2,3}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{2,4}\kappa_{2,4}e^{\theta_2+\theta_4} \\
&+ (-a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})\kappa_{1,2,3,4}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4} \\
=& \mathrm{Pf}[J^{(2,2)} + \tilde{B}E\tilde{B}^{\top}]
\end{aligned} \tag{24}
$$

と表示できることがわかる．ここでは具体例を用いて説明したが，一般の $J^{(L,N)}$，B 行列についても同様にして新たな係数行列 $\tilde{B}$ を与えることが可能である．これらのことをまとめると

- BKP 方程式の Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解は $\tau = \mathrm{Pf}[J^{(L,N)} + BEB^{\top}]$ と表示できる．
- $L=N$ の時，τ 関数を展開した時の指数関数の係数として $B^{\top}J^{(N,N)}B$ の全ての偶数次主小行列

の Pfaffian が現れる．

- $L < N$ の時，ある $\tilde{N} \times M$ 行列 $\tilde{B}$ が存在して $\tau \Bumpeq \mathrm{Pf}[J^{(\tilde{N},\tilde{N})} + \tilde{B}E\tilde{B}^\top]$ とゲージ変換できる．

となり，M 次反対称行列 $\overline{B}$ の $N \times M$ 行列 B を用いた $\overline{B} = B^\top J^{(N,N)} B$ という分解がゲージ変換分の自由度を除いて一意であることに注意すると次の結論が得られる．

主結果 1. BKP 方程式の Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解のソリトン相互作用を分類するという問題は，全ての偶数次主小行列の Pfaffian が非負である反対称行列を分類するという問題に対応する．

例 1 (BKP ソリトンの例)**.** $u = 2(\log\tau)_{xx}$（$t_1 = x, t_3 = y, t_5 = t$）のソリトン相互作用は次のようになる．

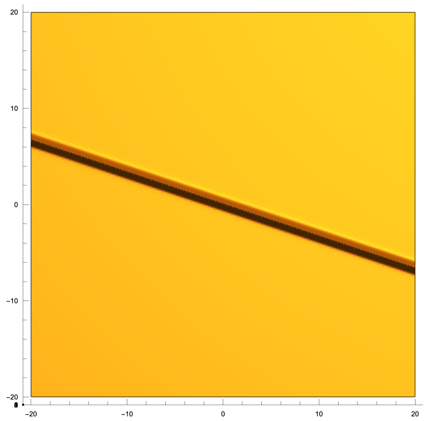


図 1: $\tau = \mathrm{Pf}[J^{(1,1)} + BEB^\top], B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 1$

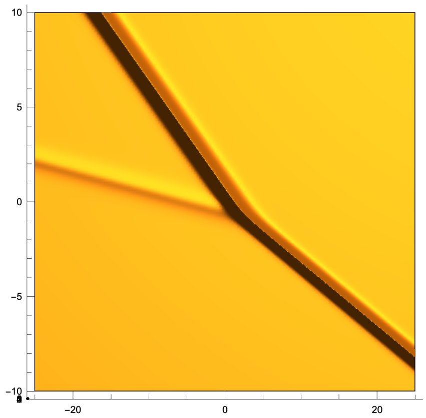
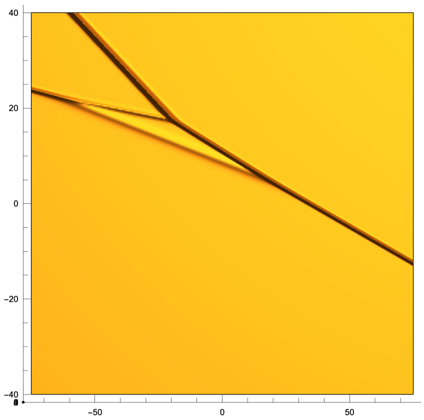
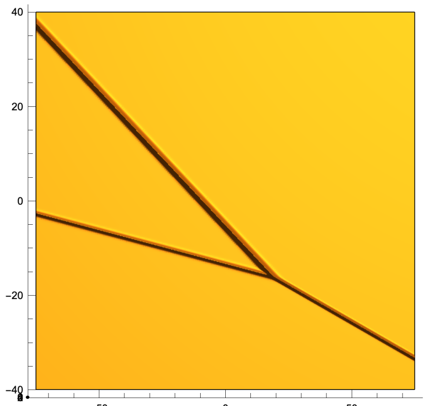


図 2: $\tau = \mathrm{Pf}[J^{(1,1)} + BEB^\top], B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = -1.5, \kappa_3 = 1$

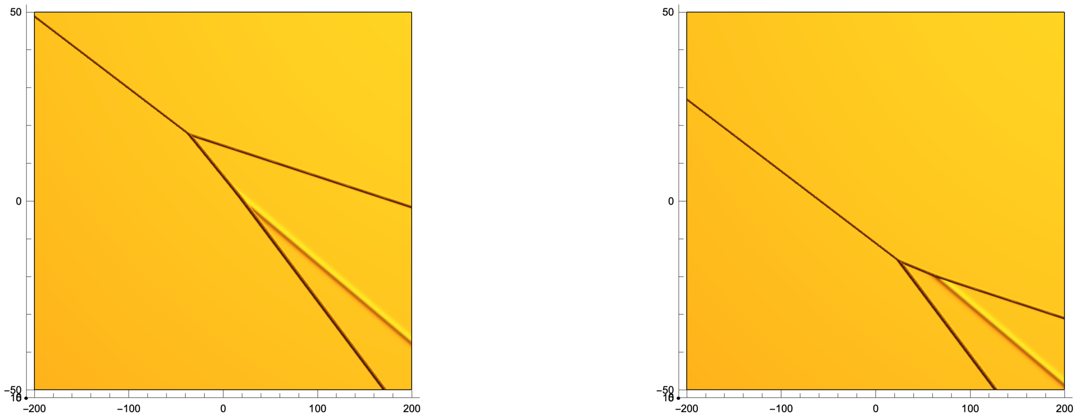


(a) $t = -3$



(b) $t = 3$

図 3: $\tau = \mathrm{Pf}[J^{(1,1)} + BEB^\top], B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = -1.5, \kappa_3 = 1$



(a) $t=-2$　　(b) $t=2$

図 4: $\tau=\mathrm{Pf}[J^{(1,1)}+BEB^{\top}], B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \kappa_1=2.5, \kappa_2=-2, \kappa_3=1.5, \kappa_4=-1$

まとめと今後の課題

BKP 方程式の Gram 型 Pfaffian 表示のソリトン解について Ishikawa-Wakayama の Pfaffian の和公式が適用できる表示を与え，τ 関数を展開した時の各指数関数の係数が反対称行列の偶数次主小行列の Pfaffian で与えられることを示した．特に BKP 方程式のソリトン相互作用を分類するという問題が，全ての偶数次主小行列が非負な反対称行列を分類するという問題に対応することがわかった．全ての偶数次主小行列が非負な反対称行列の分類に適した完全置換やJ-diagram に類する組み合わせ論的対応物を見つけること，及び三輪変換によって得られる離散 BKP 方程式のソリトン相互作用の解析が今後の課題である．

参考文献

[1] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 275209.

[2] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, Stud. Appl. Math. **123**, 83.

[3] Y. Kodama, L. K. Williams, 2011, PNAS. **108**, 8684.

[4] Y. Kodama, 2017, *KP Solitons and the Grassmanians – Combinatorics and Geometry of Two-Dimensinal Wave Patterns*, (Springer, Singapore).

[5] Y. Kodama, K. Maruno, 2006, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 4063.

[6] S. Kido, Y. Tanaka, Y. Watanabe, K. Maruno, S. Kakei, 2018, Reports of RIAM Symposium. 29AO-S7, 131.

[7] E. Date, M. Kashiwara, T. Miwa, 1981, Proc. Japan Acad. **57A**, 387.

[8] E. Date, M Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, 1982, Physica 4D, 343.

[9] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, 1981, J. Phys. Soc. Japan. **50**, 3813.

[10] R. Hirota, 1989, J. Phys. Soc. Japan. **58**, 2285.

[11] R. Hirota, 1989, J. Phys. Soc. Japan. **58**, 2705.

[12] M. Ishikawa, M. Wakayama, 1995, Linear Multilinear Algebra. **39**, 285.