

## 交通流を記述する非線形離散モデルであるルール 184FCAの超離散解析

東, 康平  
東京大学数理科学研究科

薩摩, 順吉  
武蔵野大学工学部数理工学科

時弘, 哲治  
東京大学数理科学研究科

<https://doi.org/10.15017/2924848>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019A0-S2, pp.25-30, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2  
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)  
Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2  
*Diversity in the research of nonlinear waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 05 (pp. 25 - 30)

## 交通流を記述する非線形離散モデルで あるルール184FCAの超離散解析

東 康平 (Higashi Kohei), 薩摩 順吉 (Satsuma Junkichi),  
時弘 哲治 (Tokihiro Tetsuji)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2020

# 交通流を記述する非線形離散モデルである ルール 184 FCA の超離散解析

東京大学数理科学研究科 東 康平 Kohei Higashi  
武蔵野大学工学部数理工学科 薩摩 順吉 Junkichi Satsuma  
東京大学数理科学研究科 時弘 哲治 Tokihiro Tetsuji

## 概要

交通流を記述する FCA モデルを提案した。これは、適切な極限のもとで、Burgers 方程式とルール 184ECA の発展方程式に帰着する。本講演では、このモデルの基本図が 2 次元的な領域となり、その領域内の各点で安定であることを示す。また、広い初期条件のもとで、超離散化されたシステムの解は、有限時間で定常解に収束することを示す。

## 1 はじめに

交通流を記述する非線形離散モデルを提案した [1]. 本研究ではそのモデルを詳しく解析することで、主に以下二つの結果を得たので紹介する。

- 周期境界条件のもとで基本図は 2 次元的な領域となり、その領域はいたるところ安定であること。
- 超離散化解析において、広い初期条件のもとで有限時間で速度 1 の進行波解に収束すること。

結果を述べる前に、簡単にモデルについて説明する。

道路を 1 次元空間とみなし、空間と時間をそれぞれ幅  $\Delta x, \Delta t$  で刻み、時刻  $t$  のとき、区間  $x \sim x + \Delta x$  に存在する車の台数を  $N(x, t)$  とする。さらに、 $N(x, t)$  のうち、時間  $\Delta t$  が経過したとき、次の区間  $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$  に進む車の割合を  $b(x, t)$  とする (図 1)。

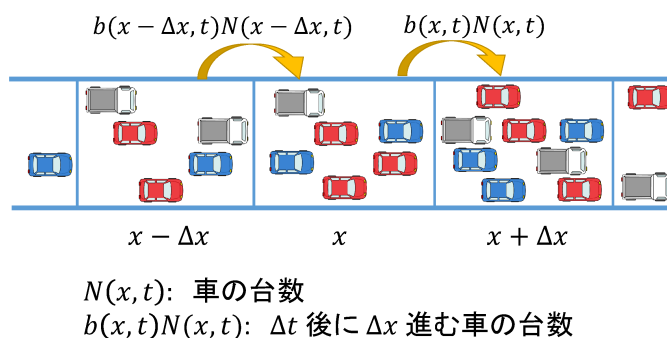


図 1 区間を移動する車の台数の表現.

時間  $\Delta t$  が経過したのち、区間  $x \sim x + \Delta x$  に存在する車の台数は

$$N(x, t + \Delta t) = N(x, t) - b(x, t)N(x, t) + b(x - \Delta x, t)N(x - \Delta x, t) \quad (1)$$

と表される。次に、 $b(x, t)$  の函数形を考える。各区間で収容可能な車の最大台数を  $N_{\max}$  とする。区間  $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$  に車が存在しなければ  $b(x, t) = 1$ 、車が  $N_{\max}$  台存在すれば  $b(x, t) = 0$  とし、この二つの条件を満たす最も簡単な函数として

$$b(x, t) = 1 - \frac{N(x + \Delta x, t)}{N_{\max}} \quad (2)$$

を採用する (図 2)。

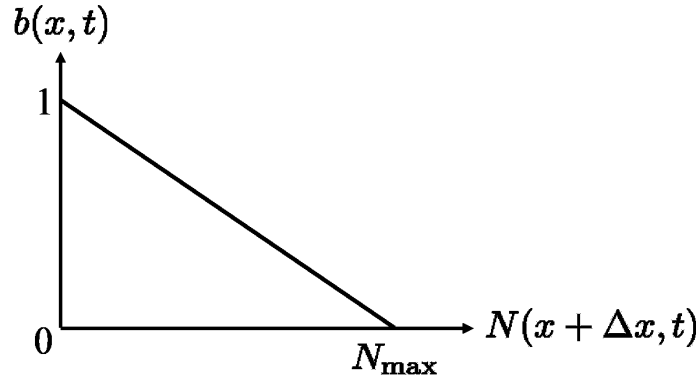


図 2  $b$  の函数形.

この函数 (2) を (1) に代入すると、

$$N(x, t + \Delta t) = N(x - \Delta x, t) + \frac{N(x, t)}{N_{\max}}(N(x + \Delta x, t) - N(x - \Delta x, t)) \quad (3)$$

を得る。式を簡潔に表記するために、 $\rho_n^t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(n\Delta x, t\Delta t)}{N_{\max}}$  と変数変換すると、(3) は

$$\rho_n^{t+1} = \rho_{n-1}^t + \rho_n^t(\rho_{n+1}^t - \rho_{n-1}^t) \quad (4)$$

となる。構成方法より、 $0 \leq \rho_n^t \leq 1$  である。方程式 (4) は、適切な連続極限をとることで Burgers 方程式に帰着し [1],  $\rho_n^t$  の値を  $\{0, 1\}$  に限る極限でルール 184 エレメンタリーセルオートマトン (ECA) の発展方程式となる。いずれも交通流のモデルとして基本的な方程式である。これらの性質より方程式 (4) はルール 184 ファジーセルオートマトン (FCA) として扱うことができる。

## 2 定常状態と基本図

方程式 (4) に周期境界条件

$$\rho_n^t = \rho_{n+N}^t, \quad (N \in \mathbb{Z}_{>0}) \quad (5)$$

を課したとき, 車の密度  $s$  と平均流量  $Q$  は,

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i^t, \quad (6)$$

$$Q^t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \rho_{i+1}^t) \rho_i^t, \quad (7)$$

で定義される.

システムの定常解は  $N$  の偶奇によって異なる. サイト数が偶数  $N = 2M$  のとき, 一様解

$$\forall n, \forall t, \quad \rho_n^t = s, \quad (8)$$

対応する流量は,

$$Q = s(1 - s), \quad (9)$$

速度 1 の 2 周期解

$$\begin{aligned} \forall n, \forall t, \quad \rho_n^{t+1} &= \rho_{n-1}^t, \\ \rho_{2m-1}^t &= \alpha, \rho_{2m}^t = \beta, \end{aligned} \quad (10)$$

対応する流量は,

$$Q(s) = s(1 - s) + c^2 \quad (|c| \leq \min(s, 1 - s)), \quad (11)$$

速度 1 の自由走行解

$$\begin{aligned} \forall n, \forall t \quad \rho_n^{t+1} &= \rho_{n-1}^t, \\ \rho_n^t \rho_{n+1}^t &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

対応する流量は,

$$Q = s, \quad (13)$$

速度  $-1$  の渋滞走行解

$$\begin{aligned} \forall n, \forall t \quad \rho_n^{t+1} &= \rho_{n+1}^t, \\ (1 - \rho_n^t)(1 - \rho_{n+1}^t) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

対応する流量は,

$$Q = 1 - s, \quad (15)$$

の四つの定常解をもつ. ただし,  $0 \leq s, \alpha, \beta \leq 1$  である. サイト数が奇数のときは, 一様解, 自由走行解, 渋滞走行解の三つとなる.

各定常解の線形化解析について, 以下の命題が成り立つ.

命題 1 これら定常解の周りで線形化解析すると、どの点においても全ての固有値の絶対値は 1 以下であるが、絶対値 1 の固有値も存在する。

$N$  が偶数の場合、2 周期解以外の定常解は、摂動に対して不安定であり 2 周期解に収束する。また、 $x_{n-t}^t = \rho_n^t$  とすると、 $x^{t+1} = (1 - x_{n+1}^t)x_n^t + x_{n+1}^t x_n^t$  より最大値が単調減少し、最小値が単調増加することがわかる。2 周期解  $\{\dots, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots\}$  に対し、摂動  $0 < |\varepsilon_i| \ll 1$  を加えると、最大、最小値の単調性から  $\varepsilon = \max_i[|\varepsilon_i|]$  に対して、

$$|\alpha - \alpha'| < \varepsilon, \quad |\beta - \beta'| < \varepsilon \quad (16)$$

となり安定。  $N$  が奇数の場合、定常解は摂動に対して一様解に収束する。まとめると、以下の命題が成り立つ。

命題 2 基本図は、  $N$  が偶数の場合、領域  $s(1-s) \leq Q \leq \min[s, 1-s]$  であり、領域内部は安定である。  $N$  が奇数の場合、曲線  $Q = s(1-s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) および直線  $Q = s$  ( $0 \leq s \leq M/(2M+1)$ ),  $Q = 1-s$  ( $(M+1)/(2M+1) \leq s \leq 1$ ) であり、曲線部分が安定である。

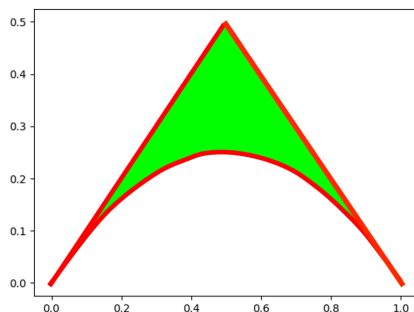


図 3 基本図. 横軸は密度, 縦軸は平均流量.  $N$  が偶数の場合は緑色の領域であり, 奇数の場合は赤線の 3 曲線

### 3 超離散化解析

ルール 1 8 4 FCA(4) は  $-$  符号があるためそのままでは超離散化できない。そこで、 $\rho_n^t = u_n^t, 1 - \rho_n^t = v_n^t$  とおくと、

$$\begin{cases} u_n^{t+1} = v_n^t u_{n-1}^t + u_n^t u_{n+1}^t \\ v_n^{t+1} = u_n^t v_{n+1}^t + v_n^t v_{n-1}^t \\ u_n^t + v_n^t = 1 \end{cases} \quad (17)$$

を満たすので

$$u_n^t = e^{-U_n^t/\epsilon}, \quad v_n^t = e^{-V_n^t/\epsilon}$$

とし、超離散極限をとると、次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} U_n^{t+1} = \min [V_n^t + U_{n-1}^t, U_n^t + U_{n+1}^t] \\ V_n^{t+1} = \min [U_n^t + V_{n+1}^t, V_n^t + V_{n-1}^t] \\ \min [U_n^t, V_n^t] = 0 \end{cases} \quad (18)$$

この超離散系 (18) は、初期条件で  $\min [U_n^t, V_n^t] = 0$  を満たすように与えると決定論的に時間発展する。すなわち、

命題 3  $\min [U_n^0, V_n^0] = 0$  ならば任意の  $t$  に対して  $\min [U_n^t, V_n^t] = 0$ . 従って、この超離散系 (18) は決定論的力学系である。

この超離散系には以下の命題が成り立つ。周期的もしくは、遠方で一定の境界条件、任意の初期条件に対して、解は必ず有限時間で速度 1 の進行波解に収束することが証明できる。正確には次の命題が成り立つ。

命題 4  $t = 0$  で  $\forall n, V_n^0 = 0$  とする。このとき、以下の境界条件 (a) または (b) の下では、ある有限な時間ステップ  $T$  が存在し、 $t \geq T$  ならば任意の  $n$  に対して  $U_n^t = U_{n-t+T}^T$  が成り立つ。

(a)  $\exists N \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall n, U_{N+n}^0 = U_n^0$ . (周期境界条件)

(b)  $\exists N \in \mathbb{Z}_{>0}, \exists c_-, c_+ > 0, n \leq -N \rightarrow U_n^0 = c_-, n \geq N \rightarrow U_n^0 = c_+$  (遠方で一定値) .

この命題は  $\min_n U_n^t$  が保存量であることと、 $U_n^t$  が初期値の正整数係数の一次式であり、 $t$  についての単調減少関数となることなどから従う。

解の例 初期条件を、ステップ関数のように

$$\forall n, V_n^0 = 0, \quad (19)$$

$$\{U_n^0\} = \{\dots, 21, 21, 21, 1, 1, 1, \dots\} \quad (20)$$

とすると、数ステップ後に、

$$\{\dots, 21, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 1, \dots\} \quad (21)$$

のように間隔がフィボナッチ数をなして拡がり、これを保ったまま速度 1 で進行する定常解となる。

本研究に関する詳細や各証明は、[2] を参照されたい。

## 4 まとめと今後の課題

ルール 184FCA を交通流のモデルとして解析し、サイト数が偶数の周期系では、基本図がある 2 次元領域であり、奇数の場合には、定常状態の基本図はこの領域の境界をなす 3 つの曲

線であることを示した。この領域が安定であることが分かった。決定論的力学系となるルール 184FCA の超離散化を行った。  $0, \infty$  を含まない初期条件に対しては、すべての解が有限な時間ステップで速度 1 の進行波解に収束することを証明した。また、この系では解の明示的な表示が容易であることが分かった。今後、境界条件を変更し、開放系とした場合についての考察を行いたい。さらに、このモデルを一般化した FCA やその超離散系についても考察したい。

## 参考文献

- [1] 東 康平, 糠谷 樹, 薩摩 順吉, 友枝 明保, 武蔵野大学数理工学センター紀要, 第 4 号, (2019), 5.
- [2] K.Higashi, J.Satsuma and T.Tokihiro, Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow.(in preparation)