九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

交通流を記述する非線形離散モデルであるルール184FCAの超離散解析

東, 康平
東京大学数理科学研究科

薩摩, 順吉
武蔵野大学工学部数理工学科

時弘, 哲治
東京大学数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/2924848

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.25-30, 2020-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 05 (pp. 25 - 30)

交通流を記述する非線形離散モデルであるルール184FCAの超離散解析

東 康平（**Higashi Kohei**），薩摩 順吉（**Satsuma Junkichi**），
時弘 哲治（**Tokihiro Tetsuji**）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

交通流を記述する非線形離散モデルである ルール１８４ FCA の超離散解析

東京大学数理科学研究科　　東 康平　　Kohei Higashi
武蔵野大学工学部数理工学科　　薩摩 順吉　　Junkichi Satsuma
東京大学数理科学研究科　　時弘 哲治　　Tokihiro Tetsuji

概要

交通流を記述する FCA モデルを提案した。これは、適切な極限のもとで、Burgers 方程式とルール 184ECA の発展方程式に帰着する。本講演では、このモデルの基本図が 2 次元的な領域となり、その領域内の各点で安定であることを示す。また、広い初期条件のもとで、超離散化されたシステムの解は、有限時間で定常解に収束することを示す。

1　はじめに

交通流を記述する非線形離散モデルを提案した [1]. 本研究ではそのモデルを詳しく解析することで，主に以下二つの結果を得たので紹介する.

- 周期境界条件のもとで基本図は 2 次元的な領域となり，その領域はいたるところ安定であること.
- 超離散化解析において，広い初期条件のもとで有限時間で速度 1 の進行波解に収束すること.

結果を述べる前に，簡単にモデルについて説明する.
道路を 1 次元空間とみなし，空間と時間をそれぞれ幅 $\Delta x, \Delta t$ で刻み，時刻 t のとき，区間 $x \sim x + \Delta x$ に存在する車の台数を $N(x,t)$ とする．さらに，$N(x,t)$ のうち，時間 Δt が経過したとき，次の区間 $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$ に進む車の割合を $b(x,t)$ とする (図 1).

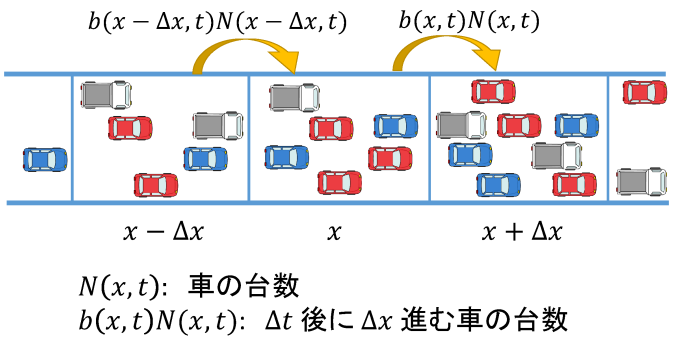

図 1　区間を移動する車の台数の表現.

時間 Δt が経過したのち，区間 $x \sim x + \Delta x$ に存在する車の台数は

$$N(x, t + \Delta t) = N(x, t) - b(x, t)N(x, t) + b(x - \Delta x, t)N(x - \Delta x, t) \tag{1}$$

と表される．次に，$b(x, t)$ の函数形を考える．各区間で収容可能な車の最大台数を $N_{\max}$ とする．区間 $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$ に車が存在しなければ $b(x, t) = 1$，車が $N_{\max}$ 台存在すれば $b(x, t) = 0$ とし，この二つの条件を満たす最も簡単な函数として

$$b(x, t) = 1 - \frac{N(x + \Delta x, t)}{N_{\max}} \tag{2}$$

を採用する (図 2).

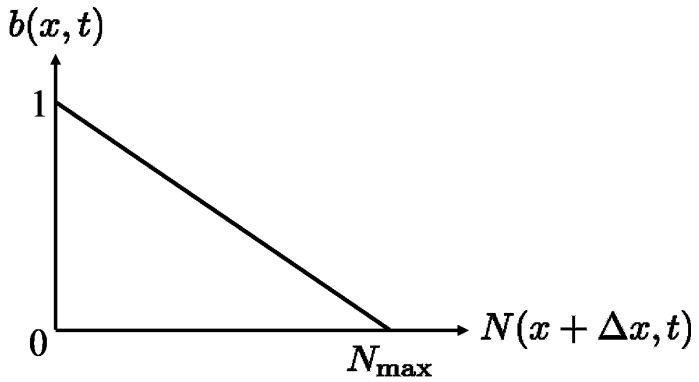

図 2　b の函数形.

この函数 (2) を (1) に代入すると，

$$N(x, t + \Delta t) = N(x - \Delta x, t) + \frac{N(x, t)}{N_{\max}}(N(x + \Delta x, t) - N(x - \Delta x, t)) \tag{3}$$

を得る．式を簡潔に表記するために，$\rho_n^t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(n\Delta x, t\Delta t)}{N_{\max}}$ と変数変換すると，(3) は

$$\rho_n^{t+1} = \rho_{n-1}^t + \rho_n^t(\rho_{n+1}^t - \rho_{n-1}^t) \tag{4}$$

となる．構成方法より，$0 \leq \rho_n^t \leq 1$ である．方程式 (4) は，適切な連続極限をとることで Burgers 方程式に帰着し [1], ρ_n^t の値を $\{0, 1\}$ に限る極限でルール 184 エレメンタリーセルオートマトン （ECA）の発展方程式となる．いずれも交通流のモデルとして基本的な方程式である．これらの性質より方程式 (4) はルール１８４ファジーセルオートマトン (FCA) として扱うことができる.

2　定常状態と基本図

方程式 (4) に周期境界条件

$$\rho_n^t = \rho_{n+N}^t, \qquad (N \in \mathbb{Z}_{>0}) \tag{5}$$

を課したとき, 車の密度 s と平均流量 Q は,

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\rho_i^t, \tag{6}$$

$$Q^t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1-\rho_{i+1}^t)\rho_i^t, \tag{7}$$

で定義される.

システムの定常解は N の偶奇によって異なる. サイト数が偶数 $N=2M$ のとき,

一様解

$$^\forall n, ^\forall t, \quad \rho_n^t = s, \tag{8}$$

対応する流量は,

$$Q = s(1-s), \tag{9}$$

速度 1 の２周期解

$$\begin{aligned} &^\forall n, ^\forall t,\ \rho_n^{t+1} = \rho_{n-1}^t, \\ &\rho_{2m-1}^t = \alpha, \rho_{2m}^t = \beta, \end{aligned} \tag{10}$$

対応する流量は,

$$Q(s) = s(1-s) + c^2 \qquad (|c| \le \min(s, 1-s)), \tag{11}$$

速度 1 の自由走行解

$$\begin{aligned} ^\forall n ^\forall t \quad &\rho_n^{t+1} = \rho_{n-1}^t, \\ &\rho_n^t \rho_{n+1}^t = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

対応する流量は,

$$Q = s, \tag{13}$$

速度 -1 の渋滞走行解

$$\begin{aligned} ^\forall n ^\forall t \quad &\rho_n^{t+1} = \rho_{n+1}^t, \\ &(1-\rho_n^t)(1-\rho_{n+1}^t) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

対応する流量は,

$$Q = 1 - s, \tag{15}$$

の四つの定常解をもつ. ただし, $0 \le s, \alpha, \beta \le 1$ である. サイト数が奇数のときは, 一様解, 自由走行解, 渋滞走行解の三つとなる.

各定常解の線形化解析について, 以下の命題が成り立つ.

命題 1　これら定常解の周りで線形化解析すると，どの点においても全ての固有値の絶対値は 1 以下であるが，絶対値 1 の固有値も存在する．

N が偶数の場合，2 周期解以外の定常解は，摂動に対して不安定であり 2 周期解に収束する．また，$x^t_{n-t} = \rho^t_n$ とすると，$x^{t+1} = (1 - x^t_{n+1})x^t_n + x^t_{n+1}x^t_n$ より最大値が単調減少し，最小値が単調増加することがわかる．2 周期解 $\{..., \alpha, \beta, \alpha, \beta, ...\}$ に対し，摂動 $0 < |\varepsilon_i| \ll 1$ を加えると，最大，最小値の単調性から $\varepsilon = max_i[|\varepsilon_i|]$ に対して，

$$|\alpha - \alpha'| < \varepsilon, \quad |\beta - \beta'| < \varepsilon \tag{16}$$

となり安定．N が奇数の場合，定常解は摂動に対して一様解に収束する．まとめると，以下の命題が成りたつ．

命題 2　基本図は，N が偶数の場合，領域 $s(1 - s) \leq Q \leq \min[\mathrm{s}, 1 - \mathrm{s}]$ であり，領域内部は安定である．N が奇数の場合，曲線 $Q = s(1 - s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ および直線 $Q = s$ $(0 \leq s \leq M/(2M + 1))$, $Q = 1 - s$ $((M + 1)/(2M + 1) \leq s \leq 1)$ であり，曲線部分が安定である．

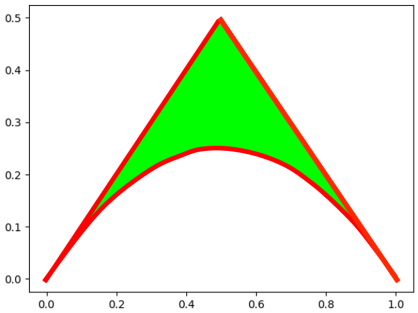

図 3　基本図．横軸は密度，縦軸は平均流量．N が偶数の場合は緑色の領域であり，奇数の場合は赤線の 3 曲線

3　超離散化解析

ルール 1 8 4 FCA(4) は − 符号があるためそのままでは超離散化できない．そこで，$\rho^t_n = u^t_n, 1 - \rho^t_n = v^t_n$ とおくと，

$$\begin{cases} u^{t+1}_n = v^t_n u^t_{n-1} + u^t_n u^t_{n+1} \\ v^{t+1}_n = u^t_n v^t_{n+1} + v^t_n v^t_{n-1} \\ u^t_n + v^t_n = 1 \end{cases} \tag{17}$$

を満たすので

$$u^t_n = e^{-U^t_n/\epsilon}, \; v^t_n = e^{-V^t_n/\epsilon}$$

とし，超離散極限をとると，次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} U_n^{t+1} = \min\left[V_n^t + U_{n-1}^t,\, U_n^t + U_{n+1}^t\right] \\ V_n^{t+1} = \min\left[U_n^t + V_{n+1}^t,\, V_n^t + V_{n-1}^t\right] \\ \min\left[U_n^t,\, V_n^t\right] = 0 \end{cases} \tag{18}$$

この超離散系 (18) は，初期条件で $\min\left[U_n^t,\, V_n^t\right] = 0$ を満たすように与えると決定論的に時間発展する．すなわち，

命題 3　$\min\left[U_n^0,\, V_n^0\right] = 0$ ならば任意の t に対して $\min\left[U_n^t,\, V_n^t\right] = 0$. 従って，この超離散系 (18) は決定論的力学系である．

この超離散系には以下の命題が成り立つ．周期的もしくは，遠方で一定の境界条件，任意の初期条件に対して，解は必ず有限時間で速度 1 の進行波解に収束することが証明できる．正確には次の命題が成り立つ．

命題 4　$t = 0$ で ${}^{\forall}n,\, V_n^0 = 0$ とする．このとき，以下の境界条件 (a) または (b) の下では，ある有限な時間ステップ T が存在し，$t \geq T$ ならば任意の n に対して $U_n^t = U_{n-t+T}^T$ が成り立つ．
(a) ${}^{\exists}N \in \mathbb{Z}_{>0},\ {}^{\forall}n,\, U_{N+n}^0 = U_n^0$. (周期境界条件)
(b) ${}^{\exists}N \in \mathbb{Z}_{>0},\, {}^{\exists}c_-,\, c_+ > 0,\, n \leq -N \to U_n^0 = c_-,\, n \geq N \to U_n^0 = c_+$（遠方で一定値）．

この命題は $\min_n U_n^t$ が保存量であることと，U_n^t が初期値の正整数係数の一次式であり，t についての単調減少関数となることなどから従う．

解の例　　初期条件を，ステップ函数のように

$$\forall n,\ V_n^0 = 0, \tag{19}$$
$$\{U_n^0\} = \{..., 21, 21, 21, 1, 1, 1, ...\} \tag{20}$$

とすると，数ステップ後に，

$$\{..., 21, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 1, ...\} \tag{21}$$

のように間隔がフィボナッチ数をなして拡がり，これを保ったまま速度 1 で進行する定常解となる．

本研究に関する詳細や各証明は，[2] を参照されたい．

4　まとめと今後の課題

ルール 184FCA を交通流のモデルとして解析し，サイト数が偶数の周期系では，基本図がある 2 次元領域であり，奇数の場合には，定常状態の基本図はこの領域の境界をなす 3 つの曲

線であることを示した．この領域が安定であることが分かった．決定論的力学系となるルール184FCA の超離散化を行った．0, ∞ を含まない初期条件に対しては，すべての解が有限な時間ステップで速度 1 の進行波解に収束することを証明した．また，この系では解の明示的な表示が容易であることが分かった．今後，境界条件を変更し，開放系とした場合についての考察を行いたい．さらに，このモデルを一般化した FCA やその超離散系についても考察したい．

参考文献

[1] 東 康平，糠谷　樹，薩摩 順吉，友枝 明保，武蔵野大学数理工学センター紀要，第 4 号，(2019), 5.

[2] K.Higashi, J,Satsuma and T.Tokihiro, Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow.(in preparation)