KP方程式の代数幾何解の退化について

中屋敷, 厚
津田塾大学数学科

https://doi.org/10.15017/2924847

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.20-24, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 04 (pp. 20 - 24)

KP方程式の代数幾何解の退化について

中屋敷 厚（NAKAYASHIKI Atsushi）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

KP 方程式の代数幾何解の退化について

中屋敷　厚 (NAKAYASHIKI Atsushi)

津田塾大学数学科

1　はじめに

最近 15 年ほどの児玉裕二らの研究 [3] で KP 方程式のソリトン解は有限次元のグラスマン多様体の構造を反映した網目状の模様を生成することが明らかにされた．ソリトン解は特異有理曲線に対応する解と考えられ、高種数非特異代数曲線に対応する解（代数幾何解）は、極限でソリトン解を作り出すと期待されるという意味で、より根本にある解と考えられる。代数幾何解にもソリトン解と同様の多様な構造があると期待される．その手掛かりを得るために代数幾何解がどんなソリトン解に退化するか調べることが有効であろう．そういう考えで数年間超楕円曲線や特別な (n, s) 曲線に対応する代数幾何解の（一般化）ソリトン解への退化の研究を行ってきた．代数幾何解は代数曲線のテータ関数で表される．代数幾何解の退化を調べようとすると、テータ関数の退化を調べる必要があり、それは結局周期行列の極限の計算に帰着する．しかし周期行列の極限の計算をするには、ホモロジーの基底を具体的に作る必要があり、それは超楕円曲線など一部の代数曲線を除いて難しい問題である．論文 [5, 6, 1] では周期行列の極限の計算を回避する方法として佐藤グラスマンを用いる方法を提案した．佐藤グラスマンは KP 階層の解（正確にはタウ関数が形式的べき級数で表される解）のパラメータ空間（初期値空間）であるが、代数幾何解については対応する佐藤グラスマンの点は曲線上の関数の情報から定められている．代数曲線が具体的に与えられたとき、その上の関数の極限を調べることは比較的簡単にできるので、代数幾何解の極限を周期行列の極限の計算を経由することなく計算できるのである．このような佐藤グラスマンを用いた計算は、有理曲線への退化だけでなく、種数正の代数曲線が種数正の代数曲線に退化する場合にも有効である [1]．その場合得られる解は、ソリトン解と代数幾何解が混じった解と考えられる．本稿では例として、超楕円曲線と $(3, 3m+1)$ 曲線のある退化について考え, ソリトンと代数幾何解が混じっている様子が明示的にわかるような解の表示が導かれることを説明する．

本稿に関するより詳しい内容は [7] をご覧ください．

2　代数曲線とその退化

$m \geq 2$, $n \geq 1$ として次のような代数曲線の退化を考える.

$$y^m = \prod_{j=1}^{mn+1} (x-\alpha_j) \quad \longrightarrow y^m = (x-\alpha)^m \prod_{j=1}^{m(n-1)+1} (x-\alpha_j), \;\; m=2,3. \tag{1}$$

極限をとる前の代数曲線 ($C_{m,n}$ とする) では、α_j はすべて相異なるとする. 又 α はどの α_j とも異なるとし、極限は α_j, $j = m(n-1)+2, ..., mn+1$ を α に近づけるというものである. $C_{m,n}$ の種数は $g = \frac{1}{2}nm(m-1)$, 極限をとった後の代数曲線の種数 g' は $g' = g - \frac{1}{2}m(m-1)$ となる.

$C_{m,n}$ は $x = \infty$ に対応する無限遠点をただ一つ持つ. これも ∞ という記号で表す. ∞ における局所座標 z として $x = z^{-m}$, $y = z^{-mn-1}(1+O(z))$ となるものをとる.

3　代数曲線に対応する解

この節では代数曲線のデータから佐藤グラスマンの点を決める方法について説明する.

C を種数 g のコンパクトリーマン面とし、その上の一点 p_∞ とその点における局所座標 z を固定する. 非負整数 n と C 上の p_∞ とは異なる N 点 p_1, ..., p_N に対し、C 上の有理形関数で p_∞ には任意位数の極を許し、p_j には高々一位の極しか持たないようなもののなすベクトル空間を $W(p_1 + \cdots + p_N + *\infty)$ で表す.

変数 z のローラン級数のなすベクトル空間を $\mathbb{C}((z))$ とし, π をローラン級数に対してその 0 以下べき部分を対応させる写像とする:$\pi : \mathbb{C}((z)) \longrightarrow \mathbb{C}[z^{-1}]$. このとき佐藤グラスマン (UGM) とは $\mathbb{C}((z))$ の部分空間 V で, π の V への制限の核と余核が共に等しい次元を持つ有限次元ベクトル空間であるようなもの全体のなす空間として定義される. この条件は V が $\mathbb{C}[z^{-1}]$ と同じ大きさを持つことを数学的に定式化したものと考えられる.

局所座標 z で展開することにより $W(p_1 + \cdots + p_N + *\infty)$ を $\mathbb{C}((z))$ の部分空間と思うことができるが、このとき次が成り立つ.

命題 1 $z^{g-N}W(p_1 + \cdots + p_N + *\infty) \in \mathrm{UGM}$.

UGM の点を与えると KP 階層の解（タウ関数）が定数倍を除いてただ一つ決まる. 逆に KP 階層の任意の形式的べき級数解はこのようにして得られる [8]. ここで KP 階層とは $\tau(t)$, $t = {}^t(t_1, t_2, t_3, ...)$, に対する次の双線形方程式のことである.

$$\int \tau(t-s-[z^{-1}])\tau(t+s+[z^{-1}])\mathrm{e}^{-2\sum_{j=1}^{\infty} s_j z^j} \frac{dz}{2\pi i} = 0. \tag{2}$$

ただし $s = (s_1, s_2, s_3, ...)$, $[z^{-1}] = (z^{-1}, z^{-2}/2, z^{-3}/3, ...)$, 積分は z^{-1} の係数をとることを意味する. $u = 2(\log \tau(t))_{t_1 t_1}$ とすると u は KP 方程式

$$3u_{t_2 t_2} + (-4u_{t_3} + 6uu_{t_1} + u_{t_1 t_1 t_1})_{t_1} = 0, \tag{3}$$

を満たす.

UGM の点から KP 階層の解を構成する場合, 解はシューア関数展開の形で与えられる. 以下ではタウ関数はそのシューア関数展開の初項（分割の大きさが最小の項) がシューア関数そのものになるように定数倍を選ぶものとする.

4 タウ関数

前節の C として $C_{m,n}$ を, p_∞ として ∞ をとる. $N=0$ の場合の UGM の点 $z^g W(*\infty)$ に対応するタウ関数を $\tau_{m,n}(t)$ とする. $\tau_{m.n}(t)$ は KP 階層の m リダクションとして得られる方程式の解になっており、$C_{m,n}$ のシグマ関数 $\sigma_{m,n}(u)$, $u={}^t(u_1,...,u_g)$ を用いた次の形の表示を持つ [4].

$$\tau_{m,n}(t)=\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{\infty}c_i t_i+\frac{1}{2}\widehat{q}(t)}\sigma_{m,n}(Bt). \tag{4}$$

ここで $\{c_i\}$ は曲線から決まる定数, $\widehat{q}(t)$, Bt は

$$Bt={}^t(\sum_{j=1}^{\infty}b_{i,j}t_j)_{1\le i\le g}, \qquad \widehat{q}(t)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\widehat{q}_{i,j}t_i t_j.$$

の形で、$\widehat{q}_{i,j}$, $b_{i,j}$ はやはり曲線から決まる定数である. 詳しくは [4, 7] を見てください.

命題 1 で $N\ge 1$ の場合は対応するタウ関数は, $\tau_{m,n}(t)$ を用いるて表示される.

命題 2 $N\ge 1$, $z(p_i)=z_i$ とすると $z^{g-N}W(p_1+\cdots+p_N+*\infty)$ に対応するタウ関数は次で与えられる.

$$\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{N}\eta(z_j^{-1})}\tau_{m,n}(t-\sum_{j=1}^{N}[z_j]). \tag{5}$$

ここで $\eta(z)=\sum_{j=1}^{\infty}t_j z^j$, $[z]=(z,z^2/2,z^3/3,...)$.

これはタウ関数のシグマ関数による表示 (4) を用いて、KP 階層の波動関数 (Baker-Akhiezer 関数) を計算することにより証明される.

ここでソリトン解についても復習しておく. 自然数 $N<M$, パラメータ $\kappa_1,...,\kappa_M$, $N\times M$ 行列 $A=(a_{i,j})$ を与えると、KP 階層のソリトン解が次のように定まる [3].

$$\tau(t)=\sum_{I=(i_1<\cdots<i_N)}\Delta_I A_I \mathrm{e}^{\eta(\kappa_{i_1})+\cdots+\eta(\kappa_{i_M})}, \tag{6}$$

$$\Delta_I=\prod_{p<q}(\kappa_{i_q}-\kappa_{i_p}), \quad A_I=\det(a_{p,i_q})_{1\le p,q\le N},$$

このようにソリトン解は指数関数 $\mathrm{e}^{\eta(\kappa_{i_1})+\cdots+\eta(\kappa_{i_M})}$ の 1 次結合として書けるような解である.

5 タウ関数の退化公式—超楕円曲線の場合—

(1) に現れる α は今複素数と考えているので、その平方根 $\alpha^{1/2}$ を一つ決める.

定理 1 *$C_{2,n}$ の退化 (1) に対応するタウ関数 $\tau_{2,n}(t)$ の極限は次で与えられる.*

$$\begin{aligned}\lim \tau_{2,n}(t) &= C\mathrm{e}^{-2\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^l t_{2l}}\\ &\quad\times\Big(\mathrm{e}^{\eta(\alpha^{1/2})}\tau_{2,n-1}(t-[\alpha^{-1/2}])+(-1)^n\mathrm{e}^{\eta(-\alpha^{1/2})}\tau_{2,n-1}(t-[-\alpha^{-1/2}]\Big).\end{aligned}$$

ここで C はある定数である.

この公式の右辺はソリトンを作る指数関数 $\mathrm{e}^{\pm\eta(-\alpha^{1/2})}$ と代数幾何解 $\tau_{2,n-1}(t)$ から構成されており、ソリトンと代数幾何解が混じっている様子が明確に見えるような表示になっている．さらに研究会での講演の後に筧三郎氏が指摘したように右辺は代数幾何解に頂点作用素 [2] を作用させたものになっている．これから, 今の場合, 頂点作用素の作用により種数が正の代数曲線上に 2 重点と呼ばれる特異点が生成されている事が分かる．一般にも、代数幾何解のある種の退化は代数幾何解に頂点作用素を作用させて得られることが期待される．また、代数幾何解に頂点作用素を作用させることにより、代数幾何解を背景とするソリトン解を系統的に作り出すことができることも分かる．

さて上記の公式を繰り返し適用すると, $\tau_{2,0}(t)$ に帰着する．$C_{2,0}$ は $y^2 = x - \alpha_1$ で有理曲線であるが, 対応するタウ関数は $\alpha_1 = 0$ のときは $\tau_{2,0} = 1$ となる．従って $\tau_{2,m}(t)$ の極限でソリトン解が得られることが分かる．$\alpha_1 \neq 0$ のときは $\tau_{2,0}(t)$ は指数関数の 2 次式で与えられる．この場合 $\tau_{2,m}(t)$ の極限は遠方で 0 でない定数に近づくソリトン解となる．

$\tau_{2,m}(t)$ は KdV 階層の解になっているので、得られるソリトン解は皆 KdV 階層の解である．

6　タウ関数の退化公式—(3,3m+1) 曲線の場合—

この場合は α の三乗根 $\alpha^{1/3}$ を一つ決める．これは $x = \alpha$ となる $C_{3,m}$ 上の点 $(\alpha, y(\alpha))$ を一つ決めることに対応する．$\omega = \mathrm{e}^{2\pi i/3}$ と置く．

定理 2 *$C_{3,n}$ の退化 (1) に対応するタウ関数 $\tau_{3,n}(t)$ の極限は次で与えられる．*

$$\begin{aligned}\lim \tau_{3,n}(t) \;=\; & \frac{(-1)^n}{27y(\alpha)^5}\mathrm{e}^{-6\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^l t_{3l}} \sum_{0\le i<j\le 2, 0\le k\le 2} \omega^{i+k+2j}(1-\omega^{i-j}) \\ & \times \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(C_{i,j,k}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{\eta(\omega^i\alpha^{1/3})+\eta(\omega^j\alpha^{1/3})+\eta(\omega^k\beta^{1/3})} \\ & \times \tau_{3,n-1}(t-[\omega^{-i}\alpha^{-1/3}]-[\omega^{-j}\alpha^{-1/3}]-[\omega^{-k}\beta^{-1/3}]\Big)\Big|_{\beta=\alpha}\end{aligned}$$

ここで $C_{i,j,k}$ はある定数である．

ソリトンと代数幾何解が混じった様子が見えるのは超楕円曲線の場合と同様であるが、タウ関数のパラメータに関する微分が現れているところが、超楕円曲線の場合との大きな違いである．これは $C_{3,n}$ の有理曲線への退化を考えるとソリトンではなく一般化ソリトン [5] が得られることに対応する現象である．この場合も $\tau_{3,0}(t)$ は $\alpha_1 = 0$ なら 1, $\alpha_1 \neq 0$ なら指数関数の 2 次式となることは超楕円曲線の場合と同様である．

References

[1] J. Bernatska, V. Enolski and A. Nakayashiki, Sato Grassmannian and degenerate sigma function, to appear in Comm. Math. Phys., arXiv:1810.01224

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations, Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory, M. Jimbo and T. Miwa (eds.), World Scientific, Singapore, 1983, 39-119.

[3] Y. Kodama, KP solitons and the Grassmannians, Springer, 2017.

[4] A. Nakayashiki, Sigma function as a tau function, *IMRN* **2010-3** (2010), 373-394.

[5] A. Nakayashiki, Degeneration of trigonal curves and solutions of the KP-hierarchy, *Nonlinearity* **31** (2018), 3567-3590.

[6] A. Nakayashiki, On reducible degeneration of hyperelliptic curves and soliton solutions, *SIGMA* **15** (2019), 009, 18 pages.

[7] A. Nakayashiki, One step degeneration of trigonal curves and mixing of solitons and quasi-periodic solutions of the KP equation, submitted to Proceedings of XXXVIII workshop on geometric methods in physics, arXiv:1911.06524.

[8] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, Nolinear Partial Differential Equations in Applied Sciences, P.D. Lax, H. Fujita and G. Strang (eds.), North-Holland, Amsterdam, and Kinokuniya, Tokyo, 1982, 259-271.