オペレーター形式での非可換ソリトン

浜中, 真志
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/2924846

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.13-19, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 03 (pp. 13 - 19)

オペレーター形式での非可換ソリトン

浜中 真志（HAMANAKA Masashi）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

オペレータ形式での非可換ソリトン

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　浜中真志 (Masashi HAMANAKA)

E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

非可換空間上の可積分系の定式化にはスター積を用いる記述とオペレータを用いる記述がある. 非可換空間では一般に特異点の解消が起こり非可換空間特有のソリトンが存在する. オペレーター形式は特異点の記述に優れている. この記事ではゲージ理論における非可換可積分系を題材としてオペレータ形式でのソリトン解を構成する. 特にシフトオペレーターを用いた解生成法や特異点除去法を議論する.

1　非可換空間上の場の理論

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

ここで, $\theta^{\mu\nu}$ は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる[1]. この関係式は, 量子力学の正準交換関係 $[q, p] = i\hbar$ に類似しており, 「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. 分布の広がりの幅は大体 $\sqrt{|\theta^{\mu\nu}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{\mu\nu} \to 0$ で特異性が復活する.

本記事では特異点解消にまつわる新しい解について議論する. この解は可換極限で特異な配位に帰着するため. 非可換空間特有の解であると言える. 可換空間で特異性は非可換空間に拡張すると見やすくなるため非可換空間上でうまく取り扱うことで非特異な解に戻すことが可能である. これについても少し触れたい.

なおこの記事で「非可換」と書いたときはすべて非可換空間を意味するとし, NC (=Non-Commutative) と略記することがある.

非可換ユークリッド空間上場の理論を記述する方法は, Moyal 積を用いる記述とオペレーターでの記述の 2 つが知られている．両者の記述は等価であり，Weyl 変換により 1 対 1 に結ばれている (例えば [12]).

1.1　Moyal 積を用いる記述

Moyal 積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである [15]：

$$f \star g(x) := \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{(x')}\partial_\nu^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x.} \tag{1.2}$$

Moyal 積は, 結合則が成り立ち：$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$, 座標関数同士の非可換性 (1.1) を再現する：$[x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu}$. Moyal 積 (1.2) は，非可換パラメータで以下のように展開できる：$f \star g(x) = f(x)g(x) + (i/2)\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + O(\theta^2)$. 可換極限 $\theta^{\mu\nu} \to 0$ で普通の積に戻る.

[1] 非可換空間上のゲージ場の理論においては, 非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ は背景フラックスに関係し, 手で与えられるものである.

非可換空間上のゲージ場の理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積をすべて Moyal 積に置き換えることで得られる．ただしゲージ場 A_μ に対する以下のゲージ変換の下，理論は不変でなければならない．

$$A_\mu \ \mapsto \ g^{-1} \star A_\mu \star g + g^{-1} \star \partial_\mu g, \quad g(x) \in G. \tag{1.3}$$

例えば，この記述での 非可換 Anti-Self-Dual (ASD) Yang-Mills 方程式は以下のように与えられる．

$$F^\star_{\mu\nu} = -(*F^\star)_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

Hodge 作用素 $*$ は可換のときと同様，以下のように定義される：$(*F^\star)_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\star\rho\sigma}$. 場の強さは以下のように定義される：

$$F^\star_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [\,A_\mu,\, A_\nu]_\star. \tag{1.5}$$

一つ注意として，上記の非可換ゲージ変換 (1.3) の下共変的に変換するために，$G = U(1)$ であっても $[A_\mu,\, A_\nu]_\star$ の項が不可欠である．このため，非可換ゲージ理論はゲージ群が「abelian」であっても「non-abelian」な性質を示す．またゲージ群の $U(1)$ パートがさまざまな場面で重要な役割を果たす [6,12,17]．

ゲージ理論に属さない低次元の可積分方程式の非可換版も存在する．$(1+1)$ 次元の時空に住む方程式の例をいくつか挙げる (時空座標を (t,x) とし, $[t,x]=i\theta$ の非可換性を入れる．微分記号は $\dot{u} := \partial f/\partial t,\ u' := \partial f/\partial x$ とする)：

- 非可換 KdV 方程式：$4\dot{u} = u''' + 3\,(u'\star u + u \star u')$
- 非可換 非線形 Schrödinger 方程式：$i\dot{\psi} = \psi'' - 2\varepsilon\psi\star\bar{\psi}\star\psi,\ (\varepsilon = \pm 1)$.
- 非可換 変形 KdV 方程式：$4\dot{v} = v''' - 3\,(v\star v\star v' + v'\star v\star v)$.

  (非可換 KdV 方程式と非可換 Miura 変換で結ばれている：$u = v' - v\star v$.)

$(2+1)$ 次元の時空に住む可積分方程式も多く知られている．これらは Lax 形式での記述を下に非可換化を行えば導出される [7,10]. 非可換 ASD Yang-Mills 方程式からのリダクションで得ることもできる [8]. 時間について無限階の微分方程式であるが, これらはすべて無限個の保存量, N ソリトン解といった可積分な性質を備えている．

1.2　オペレーターでの記述

今度は, 座標の非可換性 (1.1) から出発して非可換ゲージ理論を定義する．簡単のため非可換 2 次元平面 ($[x^1,x^2]=i\theta$) を考える．新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z},\ \hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ が分かる．これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる．これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^\infty \mathbb{C}|n\rangle$ である．ここで, $|n\rangle := \left\{(\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right\}|0\rangle,\ (n = 0,1,\ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす．

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}|m\rangle\langle n|. \tag{1.6}$$

微分は次のように定義される：

$$\partial_\mu \hat{f} := [\hat{\partial}_\mu, \hat{f}] := [-i(\theta^{-1})_{\mu\nu}\hat{x}^\nu, \hat{f}]. \tag{1.7}$$

交換子積として定義されるためLeibniz則を満たすわけだが, オペレータ $\hat{\partial}_\mu$ の具体形は $\partial_\mu \hat{x}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ を満たすように定められる.

積分はFock空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースとして定義される：

$$\int dx^1 dx^2 \ \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \ := \ 2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}. \tag{1.8}$$

ここで，非可換ソリトンの研究で重要な演算子の例としてシフト演算子を紹介する．$\hat{P}_k$ を $\mathcal{H}$ の k 次元部分空間への射影演算子としたとき，以下を満たす演算子 $\hat{U}_k$ をシフト演算子と呼ぶ：

$$\hat{U}_k \hat{U}_k^\dagger = 1, \quad \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k = 1 - \hat{P}_k. \tag{1.9}$$

例えば2次元において，ランク k の射影演算子 $\hat{P}_k = \sum_{p=0}^{k-1} |p\rangle\langle p|$ に関するシフト演算子として以下のものが考えられる：

$$\hat{U}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} |n\rangle\langle n+k|. \tag{1.10}$$

文字通り「ラベルを k だけシフトする」演算子である．

4次元においては，非可換性を $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta_1, [\hat{x}^3, \hat{x}^4] = i\theta_2$ (他はゼロ) のように入れるのが標準的である (階数4の反対称行列の標準形). このとき2種類の生成消滅演算子が定義され, 4次元空間上の場 $\hat{f} = \hat{f}(\hat{x})$ は，Fock 空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に作用する演算子となり，占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}) \ = \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{+\infty} f_{m_1,m_2,n_1,n_2}|m_1, m_2\rangle\langle n_1, n_2|. \tag{1.11}$$

ただし $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ $(n_1, n_2 = 0, 1, \ldots)$. オペレーター形式での非可換ASD Yang-Mills方程式は以下の通り：

$$\hat{F}_{z_1\bar{z}_1} + \hat{F}_{z_2\bar{z}_2} = 0, \quad \hat{F}_{z_1 z_2} = 0. \tag{1.12}$$

先述の $(1+1)$ 次元非可換可積分方程式はオペレータ形式では以下のようになる.

- 非可換 KdV 方程式：$4\dot{\hat{u}} = \hat{u}''' + 3\,(\hat{u}'\hat{u} + \hat{u}\hat{u}')$
- 非可換 非線形 Schrödinger 方程式：$i\dot{\hat{\psi}} = \hat{\psi}'' - 2\varepsilon\hat{\psi}\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$.
- 非可換 変形 KdV 方程式：$4\dot{\hat{v}} = \hat{v}''' - 3\,(\hat{v}\hat{v}\hat{v}' + \hat{v}'\hat{v}\hat{v})$.

見た目はMoyal積を用いた方程式と同じように見えるが, 実際はかなり異なる. これらは u_{mn} といった (無限サイズの) 行列要素に関する差分方程式である. 単なる (無限サイズの) 行列型への拡張とも異なる. (時空変数 t, x は離散変数 m, n に化けている.) 3節で具体例を紹介する.

1.3 Weyl 変換

ここで紹介した 2 つの記述は等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. Moyal 積を用いる記述における場 $f(x^1, x^2)$ は, Weyl 変換によって, オペレータでの記述における場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ にうつされる. Weyl 変換により, 場や掛け算だけでなく, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, 両者の記述は等価になる. 対応関係は以下の通り：

	Moyal 積を用いる記述	オペレーター形式での記述
場	普通の関数 $f(x^1, x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn} \lvert m\rangle\langle n\rvert$
積 $(\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g})$	スター積 結合則：$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h}) = (\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^\mu, x^\nu]_\star := x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}$	$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$
微分	$\partial_\mu f$ 特に $\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu{}^\nu$	$\partial_\mu \hat{f} := [\underbrace{-i(\theta^{-1})_{\mu\nu}\hat{x}^\nu}_{=:\, \hat{\partial}_\mu}, \hat{f}]$ 特に $\partial_\mu \hat{x}^\nu = -i(\theta^{-1})_{\mu\rho}[\hat{x}^\rho, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu{}^\nu$
積分	$\int dx^1 dx^2\ f(x^1, x^2)$	$2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$
曲率	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_\star$	$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$ $= [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] - i(\theta^{-1})_{\mu\nu}$ (ただし $\hat{D}_\mu := \hat{\partial}_\mu + \hat{A}_\mu$)
(ii) の行列要素 $\vert$ $\left(\begin{array}{c} x^1\text{-}x^2 \text{平面} \\ \text{で回転対称} \end{array}\right)$ $\downarrow$	$\sqrt{\frac{n!}{m!}}\left(2r^2/\theta\right)^{\frac{m-n}{2}} e^{i(m-n)\varphi} \times$ $2(-1)^n L_n^{m-n}(2r^2/\theta) e^{-\frac{r^2}{\theta}}$ $\vert$ $\left(\begin{array}{c} \varphi \text{ に依らない} \\ \Leftrightarrow m = n \end{array}\right)$ $\downarrow$	$\lvert n\rangle\langle m\rvert$ $\vert$ $\left(\begin{array}{c} (\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger \hat{a} \text{ と可換} \\ \Leftrightarrow m = n \end{array}\right)$ $\downarrow$
ある射影	$2(-1)^n L_n(2r^2/\theta) e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\lvert n\rangle\langle n\rvert$

ここで, (r, φ) は極座標, $L_n^\alpha(x)$ は次式で定義される Laguerre 多項式である：

$$L_n^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{1.13}$$

(特に $L_n(x) := L_n^0(x)$.) 注意すべきことは, オペレーター形式での曲率の式で, $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくったため, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu](= i(\theta^{-1})_{\mu\nu})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{\mu\nu}$ が現れたことである. 共変微分オペレータ $\hat{D}$ を用いたオペレーター形式での非可換 ASD Yang-Mills 方程式は以下の通り：

$$[\hat{D}_{z_1}, \hat{D}_{\bar{z}_1}] + [\hat{D}_{z_2}, \hat{D}_{\bar{z}_2}] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right) = 0, \quad [\hat{D}_{z_1}, \hat{D}_{z_2}] = 0. \tag{1.14}$$

2 ゲージ理論における自己Bäcklund変換

この節では, 非可換ゲージ理論における可積分方程式を不変に保つ変換を用いて自明解からソリトン解を構成する.

ゲージ理論においてはゲージ変換が定義される. これは物理を変えない. 簡単のため $G = U(1)$ とするが非可換 ASD Yang-Mills 方程式は非線形方程式のままであり十分非自明である.

共変微分オペレーターに対する次の変換を考える.

$$\hat{D}_{z_i} \to \hat{U}_k^\dagger \hat{D}_{z_i} \hat{U}_k \tag{2.1}$$

ほとんどゲージ変換のように見えるが, $\hat{U}_k$ がシフト演算子である (ユニタリ演算子でない) ため, 非自明な変換となる. この変換は一般に運動方程式を不変に保つ [12,13] ため, 真空解といった自明解から非自明な (ソリトン) 解が構成される.

この変換を単純に ASD Yang-Mills 方程式に適用するとうまくいかない. なぜなら, 前節最後に注意したように曲率は共変微分オペレータを用いて書き表すと定数を含み, (2.1) の下, 共変的に変換しないからである.

4次元非可換ASD Yang-Mills 方程式にも (1.14) のように一般に定数が現れるが, $\theta_2 = -\theta_1 (=: \theta)$ (非可換パラメータが反自己双対) の状況では式全体が共変的に変換し, 真空解から新しい解を生成することができる [1]. 生成された解は $k = 1$ のとき以下のようになる.

$$\hat{F}_{z_1\bar{z}_1} = -\hat{F}_{z_2\bar{z}_2} = \frac{1}{2\theta}\hat{P}_1, \quad \hat{P}_1 := |0,0\rangle\langle 0,0|,$$

第2Chern 類 $(-1/16\pi^2)\mathrm{Tr}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}$ は $(2\pi\theta)^{-2}\hat{P}_1$ と計算される. Weyl 変換を用いて Moyal 積を用いた記述にうつすと, $(\pi\theta)^{-2}\exp(-r^2/\theta)$(ガウシアン) となり 4 次元中で 1 点に局在した配位であることと可換極限が特異であることが分かる. インスタントン数は 1 となり非可換特有の非自明なインスタントン解であることも分かる. (モノポールへの応用も含めたより詳しい議論は [5,6,9,11] にある.)

これを他の高次元の方程式に応用する. $G = U(1)$ とする.

- 8 次元非可換 $Spin(7)$ インスタントン方程式[2]

  8次元ユークリッド空間の座標を x^μ $(\mu = 1, \cdots, 8)$ とし, 非可換性を $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta_1, [\hat{x}^3, \hat{x}^4] = i\theta_2, [\hat{x}^5, \hat{x}^6] = i\theta_3, [\hat{x}^7, \hat{x}^8] = i\theta_4$ (他はゼロ) のように導入する (階数 8 の反対称行列の標準形). このとき 4 種類の生成消滅演算子が定義され, 4 次元空間上の場 $\hat{f} = \hat{f}(\hat{x})$ は，Fock 空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$ に作用する演算子となる.

  非可換 $Spin(7)$ インスタントン方程式は以下のような 4 曲率の和に関する 7 つの方程式系である (具体形は例えば [4] 460 ページにある):

$$\begin{aligned} \hat{F}_{12} + \hat{F}_{34} + \hat{F}_{56} + \hat{F}_{78} &= 0, \\ \hat{F}_{13} + \hat{F}_{42} + \hat{F}_{57} + \hat{F}_{86} &= 0, \\ &\vdots \quad . \end{aligned}$$

[2]名前が紛らわしいのだが, ゲージ群が $Spin(7)$ の方程式ではなく, $Spin(7)$ ホロノミーを持つ多様体上で定義される方程式である.

曲率を共変微分オペレーターで書き表したとき, ここでの非可換性では最初の式のみ定数項が現れる. $1/\theta_1+1/\theta_2+1/\theta_3+1/\theta_4=0$ のとき, 変換 (2.1) を適用することができ, 8 次元中で 1 点に局在した非自明な高次元インスタントン解が得られる [2,16].

- 4 次元非可換 Kapustin-Witten 方程式

  最後に (ゲージ群の随伴表現に属する) ヒッグス場 $\hat{\Phi}_\mu$ とゲージ場 $\hat{A}_\mu$ に関する 4 次元ユークリッド空間上の非可換 Kapustin-Witten 方程式を考える. この方程式は S 双対性とラングランズ対応の関わり [14] を議論する際現れたものであるが, 結び目理論との対応も指摘されている [19]. 非可換 $Spin(7)$ インスタントン方程式からの次元還元としても得られる以下のような 7 つの方程式系である:

$$\begin{array}{rcl} \hat{F}_{12}+[\hat{\Phi}_1,\hat{\Phi}_2]+[\hat{D}_3,\hat{\Phi}_4]-[\hat{D}_4,\hat{\Phi}_3] & = & 0 \\ & \vdots & . \end{array}$$

  4 次元であるが非可換パラメータの階数を 2 とし, $[\hat{x}^1,\hat{x}^2]=i\theta$ だけを課す. このとき以下の変換は非可換 Kapustin-Witten 方程式を不変に保つ $(j=1,2,3)$：

$$\hat{D}_\mu\to\hat{U}_k^\dagger\hat{D}_\mu\hat{U}_k,\quad \hat{\Phi}_j\to\hat{U}_k^\dagger\hat{\Phi}_j\hat{U}_k,\quad \hat{\Phi}_4\to\hat{U}_k^\dagger\hat{\Phi}_4\hat{U}_k-i\frac{x^3}{\theta}\hat{P}_k. \tag{2.2}$$

  真空解から生成した解は非自明な解であり, 4 次元中 2 次元的に広がったソリトン (渦) であることが分かる.

同様に他のさまざまなゲージ理論の方程式に適用することができる. $Spin(7)$ インスタントンとその次元還元 [3] の非可換版については岡部央昂氏 (名古屋大多元数理) がすべて解を与えた [16].

3 結論・展望

すでにページ数を超過してしまい時間もなくなったため, 特異点除去法の議論は割愛する. 最後にオペレータ形式での可積分方程式を差分方程式の形で書き下してみる. $(1+1)$ 次元の非可換非線形シュレーディンガー方程式を考える. 1 節で議論した通り, $[\hat{t},\hat{x}]=i\theta,\ \hat{z}=\hat{t}+i\hat{x},\ \hat{a}:=(1/\sqrt{2\theta})\hat{z},\ \hat{a}^\dagger:=(1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ より, $\partial_t\hat{f}=[\hat{\partial}_z+\hat{\partial}_{\bar{z}},\hat{f}]=(1/2\theta)[\hat{z}-\hat{\bar{z}},\hat{f}]=(1/\sqrt{2\theta})[\hat{a}-\hat{a^\dagger},\hat{f}]$, $\partial_x\hat{f}=(-i/\sqrt{2\theta})[\hat{a}+\hat{a^\dagger},\hat{f}]$, に注意すると, 以下の差分方程式が得られる:

$$\begin{aligned} & i\frac{1}{\sqrt{2\theta}}\left(\sqrt{m+1}\psi_{m+1,n}+\sqrt{n+1}\psi_{m,n+1}-\sqrt{m}\psi_{m-1,n}-\sqrt{n}\psi_{m,n-1}\right) \\ & =\frac{-1}{2\theta}\left(\sqrt{(m+2)(m+1)}\psi_{m+2,n}+\sqrt{(n+2)(n+1)}\psi_{m,n+2}\right. \\ & -2\sqrt{(m+1)(n+1)}\psi_{m+1,n+1}-2\sqrt{mn}\psi_{m-1,n-1}+2(m+n+1)\psi_{m,n} \\ & -2\sqrt{(m+1)n}\psi_{m+1,n-1}-2\sqrt{m(n+1)}\psi_{m-1,n+1} \\ & \left.+\sqrt{m(m+1)}\psi_{m-2,n}+\sqrt{n(n+1)}\psi_{m,n-2}\right)-2\varepsilon\sum_{k,l}\psi_{mk}\bar{\psi}_{kl}\psi_{ln}. \end{aligned}$$

(ただし, 添え字が負になる場合は $\psi_{mn}=0$ と約束した.) ゲージ場の理論では, このような記述を経由せず議論したが, 差分方程式の形で議論することももちろんできる. この場合, シフトオペレータの作用はまさに差分方程式のラベルをシフトする変換となっている. 低次元の方程式はゲージ対称性を持たないため, 先述の解生成法は適用できないように思われるが, 差分方程式としてうまいシフト変換を考えれば, 何か別の Bäcklund 変換が見い出せるかもしれない.

Acknowledgements

応力研の非線形波動の研究会にはこれまで何度かお世話になりました. 私のような可積分系の非専門家にとって, 発表の機会を与えていただけるこの研究会はとても貴重で有意義でした. この場をお借りして世話人のみなさま参加者のみなさまに感謝申し上げます. この研究は科学研究費補助金 (No.23740182) から経済援助を受けています.

References

[1] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0104**, 001 (2001) [hep-th/0009142].

[2] D. Bak, K. M. Lee and J. H. Park, Phys. Rev. D **66**, 025021 (2002) [hep-th/0204221].

[3] S. A. Cherkis, Lett. Math. Phys. **105**, no. 5, 641 (2015) [arXiv:1403.6836].

[4] E. Corrigan, C. Devchand, D. B. Fairlie and J. Nuyts, Nucl. Phys. B **214** (1983) 452.

[5] 浜中 真志, "Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories," 素粒子論研究 104-3 (2001-12) C87.[3]

[6] 浜中 真志, "Recent Developments in Non-Commutative Gauge Theory," 素粒子論研究 104-5 (2002-2) E27.

[7] M. Hamanaka, J. Math. Phys. **46** (2005) 052701 [hep-th/0311206].

[8] M. Hamanaka, Nucl. Phys. B **741** (2006) 368 [hep-th/0601209].

[9] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103**, 034 (2001) [hep-th/0010221].

[10] M. Hamanaka and K. Toda, Phys. Lett. A **316**, 77 (2003) [hep-th/0211148].

[11] K. Hashimoto, JHEP **0012**, 023 (2000) [hep-th/0010251].

[12] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," [hep-th/0102076].

[13] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012**, 024 (2000) [hep-th/0010060].

[14] A. Kapustin and E. Witten, Commun. Num. Theor. Phys. **1**, 1 (2007) [hep-th/0604151].

[15] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99.

[16] H. Okabe, private note (2017 年 12 月).

[17] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162].

[18] R. S. Ward, Nucl. Phys. B **236** (1984) 381.

[19] E. Witten, "Fivebranes and Knots," [arXiv:1101.3216].

[3]浜中が書いた解説記事は, 浜中のホームページ `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html` から入手可能です.