九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

max型拡散セル・オートマトンのチューリング不安定性解析

村田, 実貴生
東京農工大学大学院工学研究院

https://doi.org/10.15017/2924845

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.7-12, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 02 (pp. 7 - 12)

max型拡散セル・オートマトンのチューリング不安定性解析

村田 実貴生（**MURATA Mikio**）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

max 型拡散セル・オートマトンのチューリング不安定性解析

東京農工大学大学院工学研究院　村田実貴生　(MURATA Mikio)

概　要　反応拡散現象を表す基本的なセル・オートマトンとして,「max 型拡散セル・オートマトン」を提案した．今報告では，max 型拡散セル・オートマトンにおけるチューリング不安定性の定義を与え，max 型拡散セル・オートマトンのチューリング不安定性解析を行う．また，反応拡散方程式のチューリング不安定性との共通点や相違点について考察する．

1　max 型拡散セル・オートマトン

以下で定義されるセル・オートマトンを文献 [1] では反応拡散セル・オートマトンと呼んでいたが，既存のセル・オートマトンと区別するため，max 型拡散セル・オートマトン（MDCA) と呼ぶことにする．

時間変数 n と空間変数 j をもつ従属変数を U_n^j，V_n^j とし，$(U_n^j, V_n^j) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$ とする．p, q を 0 以上の整数,

$$\left\{U_n^j\right\}_p = \max\left(U_n^{j+p}, U_n^{j-p}\right), \qquad \left\{V_n^j\right\}_q = \max\left(V_n^{j+q}, V_n^{j-q}\right),$$

$u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3 \in \{0,1\}$ として，セル・オートマトンのルールを

$\left\{U_n^j\right\}_p, \left\{V_n^j\right\}_q$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
U_{n+1}^j	u_3	u_2	u_1	u_0
V_{n+1}^j	v_3	v_2	v_1	v_0

と定める．$(u_3u_2u_1u_0)_2$ を十進表記した数を u，$(v_3v_2v_1v_0)_2$ を十進表記した数を v として，各ルールを「ルール u-v (p,q) の MDCA」または「MDCA u-v (p,q)」と書くことにする．p, q を固定したとき，ルールの数は 256 個ある．なお，このセル・オートマトンは反応拡散方程式の超離散化の一般化となっており，例えば，グレイ・スコットモデルの超離散化からはルール 8-7 や 8-2 などを得ることができる [2]．ルールの中には等価なセル・オートマトンがあり，U_n^j と V_n^j の変数の役割を交換することで，ルール $(u_3u_2u_1u_0)_2$-$(v_3v_2v_1v_0)_2$ (p,q) の MDCA はルール $(v_3v_1v_2v_0)_2$-$(u_3u_1u_2u_0)_2$ (q,p) の MDCA に移る．また $q=0$ のとき，$\left\{V_n^j\right\}_0 = V_n^j$ であり，V_n^j の 0 と 1 の役割を交換することで，ルール $(u_3u_2u_1u_0)_2$-$(v_3v_2v_1v_0)_2$ $(p,0)$ の MDCA はルール $(u_2u_3u_0u_1)_2$-$(\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_0\bar{v}_1)_2$ $(p,0)$ の MDCA に移る．ルール u-$(15-u)$ のとき，時刻 $n=0$ から始めたとき，$V_1^j = \overline{U_1^j} = 1 - U_1^j$ となる．したがって，$V_0^j = \overline{U_0^j}$ を満たす初期値のみを考えることで次のルールの 1 成分セル・オートマトンへ簡約することができる．

$\{U_n^j\}_p, \left\{\overline{U_n^j}\right\}_q$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
U_{n+1}^j	u_3	u_2	u_1	u_0

特に $p, q = 1, 0$ のときには，以下のルール番号のエレメンタリーセル・オートマトン (ECA) になる．

ルール	$(p,q)=(1,1)$	$(p,q)=(1,0)$	$(p,q)=(0,1)$	$(p,q)=(0,0)$
0-15	0	0	0	0
1-14	0	4	32	0
2-13	5	1	19	51
3-12	5	5	51	51
4-11	160	200	128	204
5-10	160	204	160	204
6-9	165	201	147	255
7-8	165	205	179	255
8-7	90	50	76	0
9-6	90	54	108	0
10-5	95	51	95	51
11-4	95	55	127	51
12-3	250	250	204	204
13-2	250	254	236	204
14-1	255	251	223	255
15-0	255	255	255	255

2　チューリング不安定性

この章では，MDCA のチューリング不安定性を定義し，ルール u-$(15-u)$ の MDCA のチューリング不安定性を調べる．

拡散効果がない場合，つまり $(p,q)=(0,0)$ の場合に $U_{n+1}^j=U_n^j$, $V_{n+1}^j=V_n^j$ となる点を平衡点と定める．ルール u-$(15-u)$ の MDCA については，次のような平衡点を持つことが分かる．

MDCA 0-15, 1-14, 8-7, 9-6 : $(U_n^j,V_n^j)=(0,1)$ が平衡点

MDCA 2-13, 3-12, 10-5, 11-4 : 平衡点無し

MDCA 4-11, 5-10, 12-3, 13-2 : $(U_n^j,V_n^j)=(0,1)$, $(1,0)$ が平衡点

MDCA 6-9, 7-8, 14-1, 15-0 : $(U_n^j,V_n^j)=(1,0)$ が平衡点

反応拡散方程式においては，平衡点まわりで一様定常解に収束しない空間周期解が存在するときに，チューリング不安定性が存在すると判断される．そこで，MDCA においてはチューリング不安定性を次のように定義する．

MDCA のチューリング不安定性

MDCA のチューリング不安定性 $\Longleftrightarrow$

- $(p,q)=(0,0)$ のとき，一様定常解に収束
- $(p,q)\neq(0,0)$ のとき，空間周期解

となる初期値が存在

まず，平衡点の状況から，チューリング不安定性が存在する候補は MDCA 0-15, 1-14, 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8, 14-1, 15-0 であることが分かる．これらについて，周期 6 まで空間周期解を調べる．

まず，拡散パラメータが異なる場合で ECA と等価になる $(p,q)=(1,0)$ のときは，以下のよう

な空間周期解が存在する．空間周期解の表示について

U_n^j	$\cdots$	1	0	1	0	$\cdots$
U_{n+1}^j	$\cdots$	1	0	1	0	$\cdots$

のような定常解を '10' と表し，

U_n^j	$\cdots$	1	0	1	0	$\cdots$
U_{n+1}^j	$\cdots$	0	1	0	1	$\cdots$
U_{n+2}^j	$\cdots$	1	0	1	0	$\cdots$

のような振動解を '10-01' と表すことにする．

$(p,q)=(1,0)$ のとき，

MDCA 0-15 (ECA 0): なし

MDCA 1-14 (ECA 4): 10, 100, 1000, 10000, 10100, 100000, 101000

MDCA 8-7 (ECA 50): 10-01, 110-001, 1100-0011, 11010-00101, 110100-001011

MDCA 9-6 (ECA 54): 1100-0011, 1110-0001-1011-0100, 111110-000001-100011-010100

MDCA 6-9 (ECA 201): 110, 1100, 1110, 1000-0010, 11100, 11110, 11010-11000, 111100, 111110, 111010-111000

MDCA 7-8 (ECA 205): 10, 100, 110, 1100, 1110, 10100, 11010, 11100, 11110, 110100, 111010, 111100, 111110

MDCA 14-1 (ECA 251): 10-01

MDCA 15-0 (ECA 255): なし

したがって，MDCA 1-14, 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8, 14-1 についてはチューリング不安定性が存在している，と主張できる．

反応拡散方程式においては，1 成分系ではチューリング不安定性は存在せず，存在するのは 2 成分以上の系である．一方，MDCA においては 1 成分に簡約した系でチューリング不安定性が存在している．$\left\{\overline{U_n^j}\right\}_q$ に依存しない真に 1 成分の反応拡散方程式に対応すると考えられる MDCA 0-15, 3-12, 12-3, 15-0 にはチューリング不安定性は存在せず，反応拡散方程式とセル・オートマトンでチューリング不安定性について同様の状況が成り立っている，と主張できる．

次に，拡散パラメータが等しい場合で ECA と等価になる $(p,q)=(1,1)$ のときは，以下のような空間周期解が存在する．

$(p,q)=(1,1)$ のとき，

MDCA 0-15, 1-14 (ECA 0): なし

MDCA 8-7, 9-6 (ECA 90): 110, 11110-10010-01100, 111100-100111

MDCA 6-9, 7-8 (ECA 165): 100, 11100-01000-01011, 110000-000110

MDCA 14-1, 15-0 (ECA 255): なし

したがって，MDCA 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8 については拡散パラメータが等しい場合もチューリング不安定性が存在している，と主張できる．

反応拡散方程式において，拡散係数が同じ場合にはチューリング不安定性が生じないことが示されている．一方，MDCA においては MDCA 1-14, 14-1 のように拡散パラメータが異なる場合のみチューリング不安定性が生じるものもあるが，MDCA 8-7, 9-6, 6-9, 7-8 のように拡散パラメータが同じ場合にもチューリング不安定性が生じるものがあることが分かる．

2.1　空間 2 次元 max 型拡散セル・オートマトン

空間 2 次元においては，正方格子の場合はフォン・ノイマン近傍とムーア近傍が考えられ，その他にも六角格子と三角格子の場合のそれぞれの近傍系で MDCA が定義できる．今報告ではフォン・ノイマン近傍の場合を取り上げる．

時間変数 n と空間変数 j と k をもつ従属変数を $U_n^{j,k}$，$V_n^{j,k}$ とし，$(U_n^{j,k}, V_n^{j,k}) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$ とする．p, q を 0 以上の整数,

$$\left\{U_n^{j,k}\right\}_p = \max\left(U_n^{j+p,k}, U_n^{j-p,k}, U_n^{j,k+p}, U_n^{j,k-p}\right),$$
$$\left\{V_n^{j,k}\right\}_q = \max\left(V_n^{j+q,k}, V_n^{j-q,k}, V_n^{j,k+q}, V_n^{j,k-q}\right),$$

$u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3 \in \{0,1\}$ として，セル・オートマトンのルールを

$\left\{U_n^{j,k}\right\}_p, \left\{V_n^{j,k}\right\}_q$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
$U_{n+1}^{j,k}$	u_3	u_2	u_1	u_0
$V_{n+1}^{j,k}$	v_3	v_2	v_1	v_0

と定める．$(u_3u_2u_1u_0)_2$ を十進表記した数を u，$(v_3v_2v_1v_0)_2$ を十進表記した数を v として，各ルールを「ルール u-v (p,q) の MDCA」または「MDCA u-v (p,q)」と書くことにする．p, q を固定したとき，ルールの数は 256 個ある．なお，このセル・オートマトンは空間 2 次元の反応拡散方程式の超離散化の一般化となっており，例えば，空間 2 次元のグレイ・スコットモデルの超離散化からはルール 8-7 や 8-2 などを得ることができる [2]．等価なセル・オートマトンについても空間 1 次元のときと同様であり，$U_n^{j,k}$ と $V_n^{j,k}$ の変数の役割を交換することで，ルール $(u_3u_2u_1u_0)_2$-$(v_3v_2v_1v_0)_2$ (p,q) の MDCA はルール $(v_3v_1v_2v_0)_2$-$(u_3u_1u_2u_0)_2$ (q,p) の MDCA に移る．また $q = 0$ のとき，$\left\{V_n^{j,k}\right\}_0 = V_n^{j,k}$ であり，$V_n^{j,k}$ の 0 と 1 の役割を交換することで，ルール $(u_3u_2u_1u_0)_2$-$(v_3v_2v_1v_0)_2$ $(p,0)$ の MDCA はルール $(u_2u_3u_0u_1)_2$-$(\bar{v}_2\bar{v}_3\bar{v}_0\bar{v}_1)_2$ $(p,0)$ の MDCA に移る．ルール u-$(15-u)$ のとき，時刻 $n = 0$ から始めたとき，$V_1^{j,k} = \overline{U_1^{j,k}} = 1 - U_1^{j,k}$ となる．したがって，$V_0^{j,k} = \overline{U_0^{j,k}}$ を満たす初期値のみを考えることで次のルールの 1 成分セル・オートマトンへ簡約することができる．

$\left\{U_n^{j,k}\right\}_p, \left\{\overline{U_n^{j,k}}\right\}_q$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
$U_{n+1}^{j,k}$	u_3	u_2	u_1	u_0

このセル・オートマトンにおいて $U_n^{j,k} = W_n^j$ を満たす場合 (平面波解) を考えると，

$$\left\{W_n^j\right\}_p = \max\left(W_n^{j+p}, W_n^{j-p}, W_n^j\right), \qquad \left\{\overline{W_n^j}\right\}_q = \max\left(\overline{W_n^{j+q}}, \overline{W_n^{j-q}}, \overline{W_n^j}\right)$$

であり，次の 1 次元セル・オートマトンと等価になることが分かる．

$\left\{W_n^j\right\}_p, \left\{\overline{W_n^j}\right\}_q$	$1,1$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
W_{n+1}^j	u_3	u_2	u_1	u_0

特に $p, q = 1,0$ のときには，以下のルール番号の ECA になる．

ルール	$(p,q)=(1,1)$	$(p,q)=(1,0)$	$(p,q)=(0,1)$	$(p,q)=(0,0)$
0-15	0	0	0	0
1-14	0	0	0	0
2-13	1	1	51	51
3-12	1	1	51	51
4-11	128	204	128	204
5-10	128	204	128	204
6-9	129	205	179	255
7-8	129	205	179	255
8-7	126	50	76	0
9-6	126	50	76	0
10-5	127	51	127	51
11-4	127	51	127	51
12-3	254	254	204	204
13-2	254	254	204	204
14-1	255	255	255	255
15-0	255	255	255	255

平衡点については，空間 1 次元の場合と同じになるから，チューリング不安定性が存在する候補は MDCA 0-15, 1-14, 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8, 14-1, 15-0 であることが分かる．これらについて，周期 6 まで空間周期解を調べる．

$(p,q)=(1,0)$ のとき，

MDCA 0-15, 1-14 (ECA 0): なし

MDCA 8-7, 9-6 (ECA 50): 10-01, 110-001, 1100-0011, 11010-00101, 110100-001011

MDCA 6-9, 7-8 (ECA 205): 10, 100, 110, 1100, 1110, 10100, 11010, 11100, 11110, 110100, 111010, 111100, 111110

MDCA 14-1, 15-0 (ECA 255): なし

したがって，MDCA 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8 についてはフォン・ノイマン近傍でもチューリング不安定性が存在している，と主張できる．

$(p,q)=(1,1)$ のとき，

MDCA 0-15, 1-14 (ECA 0): なし

MDCA 8-7, 9-6 (ECA 126): 1110-1011, 11110-10011, 111100-100111

MDCA 6-9, 7-8 (ECA 129): 1000-0010, 11000-00010, 110000-000110

MDCA 14-1, 15-0 (ECA 255): なし

したがって，MDCA 8-7, 9-6 と MDCA 6-9, 7-8 についてフォン・ノイマン近傍でも拡散パラメータが等しい場合にチューリング不安定性が存在している，と主張できる．

なお，空間 2 次元の他の近傍系の場合は，平面波解の方向をうまくとって空間 1 次元のセル・オートマトンにすることで，同様の結果を得ることができる．また，平面波解の進行方向を変えれば，異なるチューリングパターンの存在が示せる．

3 チューリング不安定性を起因とするパルス型定常解

文献 [1] では，MDCA のパルス型定常解やパルス型進行解について報告した．それらを「空間周期が ∞ の周期解」と考えれば，報告した解の中にチューリング不安定性を起因とする解が存在

する．結果は以下の通り．

$(p,q)=(1,0)$ のとき，

(e_3,e_3)-定常解：MDCA 9-9, 9-11, 10-11, 11-9, 11-11

U_n^j	$\cdots$	1	1	0	1	1	$\cdots$
V_n^j	$\cdots$	1	1	0	1	1	$\cdots$

(e_0,e_0)-定常解：MDCA 2-2, 10-2

U_n^j	$\cdots$	0	0	1	0	0	$\cdots$
V_n^j	$\cdots$	0	0	1	0	0	$\cdots$

$(p,q)=(1,1)$ のとき，

(e_2,e_2)-定常解：MDCA 6-1

U_n^j	$\cdots$	1	1	0	0	0	1	1	$\cdots$
V_n^j	$\cdots$	0	0	0	1	0	0	0	$\cdots$

また，従属変数の役割の交換により，他のルールの MDCA のチューリング不安定性も示すことができる．なお，ここで挙げた MDCA はほとんどが平衡点が 1 個であるが，MDCA 9-11 は $(U_n^j,V_n^j)=(1,1)$, $(0,1)$ が平衡点であり，平衡点が複数ある MDCA でチューリング不安定性が生じている例となっている．

4 まとめ

max 型拡散セル・オートマトン (MDCA) について，チューリング不安定性の定義を与え，空間 1 次元とフォン・ノイマン近傍の場合の MDCA にその意味でのチューリング不安定性が存在することを示した．なお，今回取り扱った 2 成分 2 値 MDCA は拡散効果がない場合の状態遷移により 19 種類に分類できるが，そのうちチューリング不安定性が生じる可能性があるのは 4 種類であることが分かる．

MDCA は極めて簡単な数理モデルであるが，反応拡散方程式と同様の性質を有しているものであると著者は考えている．MDCA を反応拡散現象の数理モデルとして活用し，今回の調査結果を反応拡散現象の解明に役立てることが今後の課題である．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 16K21024 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] 村田 実貴生, 連立型反応拡散セル・オートマトンの進行波, 応用力学研究所研究集会報告 **28AO-S6** (2017), 7–12.

[2] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **20** (2015), 173–187.