# 確率的な周期的一次元離散粒子系の漸近的ふるまいについての分解予想

大橋, 遼
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/2924844

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.1-6, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

**Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2**

***Diversity in the research of nonlinear waves***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

**Article No. 01** (pp. 1 - 6)

# 確率的な周期的一次元離散粒子系の漸近的ふるまいについての分解予想

**大橋 遼（Ohashi Haruka）**

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2020**

# 確率的な周期的一次元離散粒子系の漸近的ふるまいについての分解予想

東大数理科学研究科 大橋 遼 (Ohashi Haruka)

## 1 分解予想

### 1.1 設定

環状に箱を並べ、一つの箱に高々一つ球が配置されている状況を考える。球は周囲の状況に応じて確率的にひとつづつ右回りに動く。

- 箱の総数は $L$ 個、球の総数は $M$ 個 $(L \geq M)$
- 右回りに箱に $1, ..., L$ と番号をつける。
- 球は、時刻 $t$ に一つ前が開いていれば、時刻 $t+1$ に一定の確率 $(\neq 0, 1)$ で一つ進む。

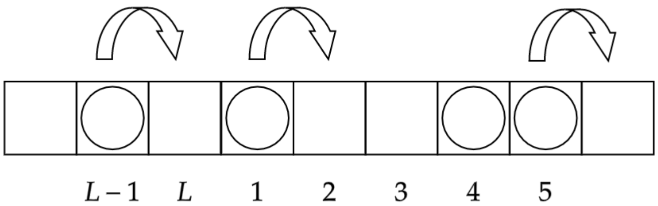


図 1 各球は、目の前の箱が空いているときに確率的にそこに進む。どの球も動かない確率、一つの球が動き他の球は動かないという確率、...、動ける球がすべて動く確率は、いずれも正である。

箱 $i$ $(i = 1, ..., L)$ の状態を $\alpha_i$ と書く。すなわち

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & (\text{箱 } i \text{ に球が入っているとき}) \\ 0 & (\text{箱 } i \text{ に球が入っていないとき}) \end{cases}$$

このとき系全体の状態は $(\alpha_1, ..., \alpha_L) \in \{0, 1\}^L$ で記述できる。(なお、$\alpha_1 + ... + \alpha_L = M$)
平行移動不変で、唯一に定常分布をもつ。

ここで、定常分布で状態 $(\alpha_1,...,\alpha_L)$ となる確率を $P_{L,M}(\alpha_1,...,\alpha_L)$ と書く。
( $\sum_{\alpha_1,...,\alpha_L} P_{L,M}(\alpha_1,....,\alpha_L)=1$ )
また、連続する $n$ 個の箱に注目する。平行移動不変より、特にこれを箱 1 から箱 $n$ だと思ってよい。
箱 $i$ の状態が $\beta_i\in\{0,1\}$ となる確率を、
$P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n):=\sum_{\alpha_{n+1},...,\alpha_L} P_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n,\alpha_{n+1},...,\alpha_L)$
と書く。

### 1.2　分解予想

さてここで、箱と球の数 $L,M$ の比率（球の密度）を一定にしながら系のサイズを十分大きくした場合を考える。
数値計算により、次のような性質が発見された。([1])

**予想 1.** (分解予想)
$n\geq 0$、$\beta_1,...,\beta_n\in\{0,1\}$ および $a\in[0,1]$ をとる。$M/L\to a$ 、$L,M\to\infty$ で $P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n)$ は収束する。
さらに $n\geq 3$ について、同様の極限で、
$P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n)P^{(n-2)}_{L,M}(\beta_2,...,\beta_{n-1})-P^{(n-1)}_{L,M}(\beta_2,...,\beta_n)P^{(n-1)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_{n-1})\to 0$
となる。

とくに、収束先 $\lim_{L,M\to\infty} P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n)$ を $[\beta_1,...,\beta_n]$ と略記すると、この予想は次のように書ける。

- $[\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta_n][\beta_2,...,\beta_{n-1}]=[\beta_2,....,\beta_{n-1},\beta_n][\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1}]$
- $[\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta_n]=\dfrac{[\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta_n][\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1}]}{[\beta_2,...,\beta_{n-1}]}$
  $([\beta_2,...,\beta_{n-1}]\neq 0)$

## 2　Zero Range Process における分解予想

### 2.1　Zero Range Process の一般論

Zero Range Process(以下 ZRP と略す) とは上のようなモデルと良い対応を持つものである。
以後、箱の列を道、各球を車と見立てる。ZRP は車の速度（=「球の移動確率」）が車間距離に依存するような場合に用いられ、特に簡単なモデルでは定常分布等が非常に簡潔に記述でき、渋滞等の観測も明瞭である。
環状に箱を並べ、一つの箱に高々一つ球が配置されている状況を考える。球は周囲の状況に応じて確率的にひとつづつ右回りに動く。

- 箱（道）の総数は $L$ 個、球（車）の総数は $M$ 個 $(L\geq M)$
  $N:=L-M$ は車間距離の合計に対応する。
- 箱には右回りに $1,...,L$、車には左回りに $1,...,M$ と番号を付ける。

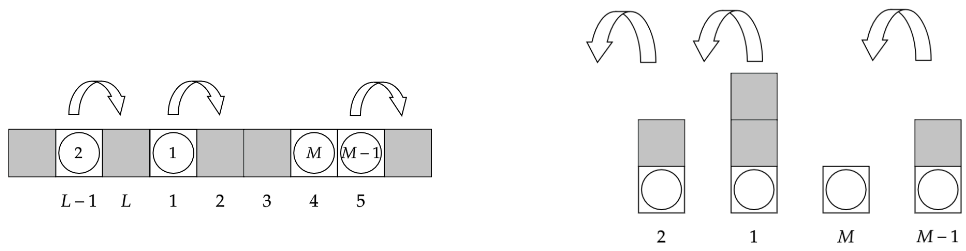


図 2　左は道の中の各車の位置を表すモデルとするならば、右は各車の車間距離を特に記述するモデルである。左で車が一つ右回りに進むことは、右において車間距離が左周りに一つ移動することに対応している。

球（車）は一つ前の箱が開いていれば、その車の車間距離に応じた確率（$\neq 0$）で一つ進む。（なお、ランダムアップデートを考えている）
$u(n)$：車間距離 $n$ を持つ車が一つ進む確率（車の速度）とし、ここでは $u(0)=0$、さらに $n>0$ について $u(n)>0$ を仮定する。
この系は平行移動不変であり、唯一に定常分布を持つ。この定常状態は、次のように簡潔に記述できることが知られている ([2])。

**定理 1.** (ZRP の定常分布) 定常分布において、車 $1,...,M$ の車間距離がそれぞれ $n_1,...,n_M$ となる確率を $P(n_1,...,n_M)$ とすると、
$P(n_1,...,n_M)=\dfrac{1}{Z_{M,L}}f(n_1)f(n_2)...f(n_M)$
なお、$f(n):=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{1}{u(1)u(2)...u(n)} & n\geq 1\end{cases}$ 、
$Z_{M,L}:=\sum_{n_1+...+n_M=L}f(n_1)f(n_2)...f(n_M)$

## 2.2　ZRP における分解予想とその証明

ここで、以下のような前提を入れる:
「ある $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、$u(k)=u(k+1)=u(k+2)=...$」これは、車間距離が $k$ 以上であれば車の速度は一定ということに対応する。(ドライバーが前方の車を考慮に入れる距離が $k$ 程度)
定常分布で状態 $(\alpha_1,...,\alpha_L)$ となる確率を $P_{L,M}(\alpha_1,...,\alpha_L)$、箱 1 から箱 $n$ の状態が $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in\{0,1\}$ となる確率を $P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ と書く (先ほどの確率セルオートマトンのときと同様の定義)。
これらについて、次の分解予想が成立する。

**定理 2.** (分解予想)
$n\geq 1$、$\beta_1,...,\beta_n\in\{0,1\}$ および $a\in[0,1]$ をとる。$M/L\to a$ 、$M,L\to\infty$ で $P^{(n)}_{L,M}(\beta_1,...,\beta_n)$ は収束する。収束先を $[\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta_n]$ と書くと、「$n\geq k+2$」について次の等式が成立する:
$[\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1},\beta_n][\beta_2,...,\beta_{n-1}]=[\beta_2,....,\beta_{n-1},\beta_n][\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-1}]$

*Proof.* 証明は、$[\beta_1, ..., \beta_n]$ を具体的に書き下すことによって行う。時間のスケールを変えることにより、$u(k) = u(k+1) = ... = 1$ と思ってよい。($f(k) = f(k+1) = ...$ である)
まず、$\dfrac{Z_{M,N-1}}{Z_{M,N}}$ および $\dfrac{Z_{M-1,N}}{Z_{M,N}}$ が収束することを示す。

$F(z) := f(0) + f(1)z + f(2)x^2 + ...$ とする。$f(k) = f(k+1) = ...$ より、収束半径は 1 である。
$Z_{M,N} = \sum_{n_1+...+n_M=L} \prod_{i=1}^M f(n_i)$ より、$(F(z))^M = Z_{m,0} + Z_{M,1}z + Z_{M,2}z^2 + ...$ である。
コーシーの積分公式を利用すると、$Z_{M,N} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{(F(z))^M}{z^{N+1}}dz$ ($C$:0 を囲む閉曲線)
$g(z) := \log F(z) - \dfrac{N}{M}\log z$ を用いると、(与式) $= \displaystyle\int_C \frac{1}{z}\exp Mg(z)dz$ である。
$M$ と $N$ が十分大として鞍点法でこれを評価する。

$g'(z) = 0$ なる $z$ は $(0,1)$ 内に唯一存在する。これを $z_0$ とする。積分経路である $C$ をこの点を通る適切な曲線に変えると、鞍点法を用いて
$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{(F(z))^M}{z^{N+1}}dz \sim \frac{F(z_0)^M}{z_0^{N+1}\sqrt{2\pi|g''(z_0)|}}$
と評価可能である。さらに、$M, N \to \infty, \dfrac{M}{L} \to a$ ( $\dfrac{N}{M} \to \dfrac{1-a}{a}$ ) とすれば $z_0 \to \exists v \in (0,1)$ と収束し、
$\dfrac{Z_{M,N-1}}{Z_{M,N}} \to v$ 、 $\dfrac{Z_{M-1,N}}{Z_{M,N}} \to \dfrac{1}{F(v)}$

以下実際に $[\beta_1, ..., \beta_n]$ を具体的に計算するが、一つ例にとって計算すればほかの場合もほぼ同じことである。ここでは $[1,0,0,1,0]$ を導出しよう。(箱 1 に 1、...、箱 5 に 0 が入る確率)
箱 1 に 1 が入る確率は $\dfrac{M}{L}$ である。箱 1 に入る車の番号を 2、箱 4 の車を 1 とする。車 2 の車間距離が 2、車 1 の車間距離が 1 以上という意味なので先の定常分布の表示から
$P^{(N)}_{L,M}(1,0,0,1,0) = \dfrac{M}{L}\dfrac{\sum_{n_2=2, n_1\geq 1, \sum_i n_i = N}\prod_{i=1,...,M} f(n_i)}{Z_{M,N}}$
$= \dfrac{M}{L}f(2)\displaystyle\sum_{n_1\geq 1} f(n_1)\frac{\sum_{n_3+...+n_M=N-2-n_1}\prod_{i\geq 3} f(n_i)}{Z_{M,N}}$
$= \dfrac{M}{L}f(2)\displaystyle\sum_{n_1\geq 1} f(n_1)\frac{Z_{N-2-n_1,M-2}}{Z_{N,M}}$
ここで $M, N \to \infty, \dfrac{M}{L} \to a$ により、$[1,0,0,1,0] = af(2)\displaystyle\sum_{n_1\geq 1} f(n_1)\frac{v^{n_1+2}}{F(v)^2}$ と記述できる。

一般に、$p := \dfrac{1}{F(v)}$ とすると、

- $\alpha_1, ..., \alpha_n$ に 1 が含まれる場合

$$[\underbrace{0,...,0}_{m_\ell}, 1, \underbrace{0,...,0}_{m_{\ell-1}} 1, ..., 1\, \underbrace{0,...,0}_{m_2}, 1, \underbrace{0,...,0}_{m_1}]$$
$$= a(p\sum_{s=m_1}^{\infty} f(s)v^s)f(m_2)...f(m_{\ell-1})p^{\ell-1}v^{m_2+...+m_{\ell-1}}(p\sum_{t=m_\ell}^{\infty} f(t)v^t) \tag{1}$$

- それ以外

$$[\underbrace{0,...,0}_{m}] = ap\sum_{i\geq 0}(i+1)f(m+i)v^{m+i}$$

以上のような具体的な記述と、$f(k) = f(k+1) = ...$ を踏まえて計算すると、$n \geq k+2$ について $[\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n][\beta_2, ..., \beta_{n-1}] = [\beta_2, ...., \beta_{n-1}, \beta_n][\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}]$ が成立する。

□

# 3　分解予想の言いかえ

## 3.1　分解予想と同値な命題

$\beta \in \{0,1\}$ について、$\overline{\beta} := 1-\beta$ とする。この時、自明に次が成立する:

- $[\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}] = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n] + [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \overline{\beta_n}]$
- $[\beta_2, ..., \beta_n] = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n] + [\overline{\beta_1}, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n]$

これらの性質のみを用いて、次の命題が成立する。

**定理 3.** (分解予想と同値な命題) 以下の 3 条件は同値である。

- 任意の $n \geq k+2$ について、
$$[\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n][\beta_2, ..., \beta_{n-1}] = [\beta_2, ...., \beta_{n-1}, \beta_n][\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}]$$
- 任意の $n \geq k+2$ について、
$$[\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n][\overline{\beta_1}, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \overline{\beta_n}] = [\overline{\beta_1}, \beta_2, ...., \beta_{n-1}, \beta_n][\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \overline{\beta_n}]$$
- 任意の $n \geq k$、$w_1 \in \{0,1\}^n$ および、$w_0 \in \{0,1\}^m$、$w_2 \in \{0,1\}^\ell$ $(n, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ について、
$$[w_0, w_1, w_2][w_1] = [w_0, w_1][w_1, w_2]$$

## 3.2　解釈

特に三つ目の条件の $[w_0, w_1, w_2][w_1] = [w_0, w_1][w_1, w_2]$ について、$\dfrac{[w_0, w_1, w_2]}{[w_1, w_2]} = \dfrac{[w_0, w_1]}{[w_1]}$ と変形し、特に $w_0 = (1)$、$w_1$ の長さ $n$ を $k$ (ドライバーが前方の車を考慮に入れる距離) と固定すれば、以下のように解釈が可能である:

ある局所的な交通状況 $(w_1, w_2)$ があったとき、車のドライバーがその交通状況のすぐ後ろに車を付ける確率 $\dfrac{[1, w_1, w_2]}{[w_1, w_2]}$ は $\dfrac{[1, w_1]}{[w_1]}$ と等しく、すなわちドライバーが考慮に入れる範囲の状態 $w_1$ にのみ依存する。

# 4　まとめ

- 確率セルオートマトンについて計算で確認されていた「分解予想」を Zero range process という確率過程で読み替えて証明した。
- 上記の「分解予想」と同値な条件で、交通流の性質として言語化しやすいものを導出した。

# 参考文献


[1] K. Endo, D. Takahashi and J. Matsukidaira, On fundamental diagram of stochastic cellular automata with a quadratic conserved quantity, NOLTA, 7 (2016)

[2] M R Evans and T Hanney 2005 J. Phys. A: Math. Gen. 38 R195