多項式近似による可変係数回帰モデルを用いた経済構造変化の検証

大屋, 幸輔

https://doi.org/10.15017/2920759

出版情報：経済論究. 76, pp.35-44, 1990-03-27. 九州大学大学院経済学会

多項式近似による可変係数回帰モデルを用いた経済構造変化の検証

大　屋　幸　輔

1. はじめに

経済構造を分析する手段として我々は経済モデルを用いるが，定式化されたモデルは既にそれまでの情報に基づいて構築されており，モデル外部からの影響に対しては非常に無力である．さらにモデルが定式化されたとしても経済モデル自身は諸経済変数間の関係を表現している関数であるので，これまでの計量モデルのようにモデルの推定期間においてモデル（関数）内のパラメータが一定であるという仮定は，現実の経済構造が安定的であるときに限って妥当性をもつものであり，近年のような不確実かつ不安定な経済構造のもとではそのような仮定は現実的ではない．

この種の問題を解決する手段としては以下の二つがある．(1)モデル内に不安定あるいは不確実要因を表す変数を取り込む，(2)モデルの推定期間においてモデル内のパラメータが一定であると仮定しない推定法を用いる．しかしながら(1)では，これまで定式化されているモデルを再構築する必要があり，さらに不安定性，不確実性を表現する変数が現実には観測不可能なデータであるので，もしそれらの要因をモデル内に取込むなら，確率変数を用いるモデルとなり，従来の推定法では効率的なパラメータの推定ができないことになる．これに対して(2)ではモデルの再構築という問題を避けることができるため，様々な推定法が開発されている．代表的なものとしてはカルマン・フィルターによる逐次推定法がある．この推定法はカルマン・フィルター・アルゴリズムを用いるため初期値を定めなくてはならない．しかも，このアルゴリズムから推定されて

くるパラメータは，初期値に対して非常に敏感であり，適当な初期値を定めなければ，得られるパラメータ推定値は有効なものとならない．また，どの時点でパラメータが変化しているかという問題に対して，逐次推定法による推定値はパラメータの変動の程度が大きい場合に，その決定に恣意的な要因を含んでしまう．

そこで本稿では，逐次推定法とは異なった推定法を用いることで，上述のような問題を解決できることを示す．次節では多項式近似された係数をもつ回帰モデルとその推定法を示し，3節では2節で示したモデルの係数方程式にたいして確率的な項を導入する．4節では本稿で提示した推定法を簡単な経済モデルに適用し，従来のカルマン・フィルターによる逐次推定法との比較を行う．

2. 多項式近似可変係数回帰モデル

モデルは定数項と k 個の説明変数からなる線形回帰モデル (2.1) である．

$$y_t=\beta_{0t}+\beta_{1t}X_{1t}+\cdots+\beta_{kt}X_{kt}+\varepsilon_t,\quad \varepsilon_t\sim N(0,\sigma^2) \tag{2.1}$$

ここで未知のパラメータは σ^2 と β_{it}，$i=0,\cdots,k$，$t=1,\cdots,T$

さらに β_{it} は以下の p_i-th order の多項式 (2.2) に従うとする．

$$\beta_{it}=\alpha_i(0)+\alpha_i(1)\tau(t)+\alpha_i(2)\tau(t)^2+\cdots+\alpha_i(p_i)\tau(t)^{p_i} \tag{2.2}$$

$$\tau(t)=(t-\bar{t})$$

ここで $\bar{t}$ は t の平均値．(以下 $\tau(t)$ は τ と略す)

(2.1) より

$$y_t=Z_t'\alpha+\varepsilon_t$$

$$Z_t'=[(1,\tau,\tau^2,\ldots,\tau^{p_0}),(X_{1t},\tau X_{1t},\tau^2X_{1t},\ldots,\tau^{p_1}X_{1t}),\ldots,$$
$$(X_{kt},\tau X_{kt},\tau^2X_{kt},\ldots,\tau^{p_k}X_{kt})]$$

$$\alpha'=[(\alpha_0(0),\ldots,\alpha_0(p_0)),(\alpha_1(0),\ldots,\alpha_1(p_1)),\ldots,(\alpha_k(0),\ldots,\alpha_k(p_k))]$$

さらに，以下の (2.3) のように表現し

$$y=\Gamma\alpha+\varepsilon \tag{2.3}$$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{pmatrix}, \quad \Gamma=\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_T' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

ここで $p_0, p_1, \cdots, p_k$ を所与とすれば，OLS 推定法により α，σ^2 の各推定量[1] は以下のようになる．

$$\hat{\alpha}=(\Gamma'\Gamma)^{-1}\Gamma' y \tag{2.4}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}(y-\Gamma\hat{\alpha})'(y-\Gamma\hat{\alpha}) \tag{2.5}$$

OLS 推定をする際に（$p_0, p_1, \cdots, p_k$）は所与であると仮定したが，実際には (2.2) の次数決定を以下の AIC を用いて行う．

(2.2) において，次数の組合せ（$p_0, p_1, \cdots, p_k$）をもつモデルを M（$p_0, p_1, \ldots, p_k$）とし，その AIC を (2.6) のように定義する．

$$AIC_M=T\ Log\ \hat{\sigma}^2(M)+2(p_0+p_1+\cdots+p_k+1) \tag{2.6}$$

ここで，$\hat{\sigma}^2(M)$ は各 Model の (2.5) から得られる．

この AIC_Mを 各 M (…) に対して 計算し，最小の AIC_M 値を与える M (…) を選択する．

3．Stochastic term をもつ多項式近似可変係数回帰モデル

2節では多項式近似による可変係数回帰モデルを定式化し，その次数決定と推定法を示した．本節では多項式に Stochastic term を導入することで一般化を行う[2]．前節で示されたモデル (2.1)，(2.2) のうちで (2.2) に対応する式として以下の (3.2) を用いる．

$$y_t=\beta_{0t}+\beta_{1t}X_{1t}+\cdots+\beta_{kt}X_{kt}+\varepsilon_t \tag{3.1}$$

$$\beta_{it}=\alpha_i(0)+\alpha_i(1)\tau+\alpha_i(2)\tau^2+\cdots+\alpha_i(p_i)\tau^{p_i}+\delta_i \tag{3.2}$$

$$\tau=(t-\bar{t})$$

(3.1)，(3.2) の撹乱項は以下のように正規分布し，ともに独立であると仮定する．

$\delta_i \sim N(0,\sigma_i^2), i=0,...,k$

$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2), t=1,...,T$

ここで未知のパラメータは σ^2, σ_i^2 と β_{it}, $i=0, \cdots, k$, $t=1, \cdots, T$

その他の記号は2節で用いたものと同じとする。

(3.1), (3.2) よりモデルは以下の (3.3) のように表現できる。

$$y=\Gamma\alpha+\Lambda \tag{3.3}$$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{pmatrix}, \quad \Gamma=\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_T' \end{pmatrix}, \quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_T \end{pmatrix}$$

ただし, $\lambda_t=\varepsilon_t+(\delta_0+\delta_1X_{1t}+\cdots+\delta_kX_{kt})$

$$E(\lambda_t)=0, \quad E[\lambda_t\lambda_s]=\begin{Bmatrix} \sigma^2+\sigma_0^2+\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2X_{it}^2, \ (t=s) \\ \\ \sigma_0^2+\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2X_{it}X_{is}, \ (t\neq s) \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_t \sim N(0,V)$$

(3.3) より尤度関数は以下の (3.4) となり

$$l(y|\Gamma,V,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\mathrm{T}}|V|}}\,exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\Gamma\alpha)'\,V^{-1}(y-\Gamma\alpha)\right\} \tag{3.4}$$

さらに対数尤度関数は (3.5) となる。

$$Log\ l(y|\Gamma,V,\alpha)\propto-\frac{1}{2}Log|V|-\frac{1}{2}(y-\Gamma\alpha)'\,V^{-1}(y-\Gamma\alpha) \tag{3.5}$$

次に分散共分散行列 V を変形して $V^*=\sigma^{-2}V$ と定義すると (3.5) は以下の (3.6) となる。

$$Log\ l(y|\Gamma,\sigma^2,V^*,\alpha)\propto$$

$$-\frac{\mathrm{T}}{2}Log\ \sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\Gamma\alpha)'\,V^{*-1}(y-\Gamma\alpha)-\frac{1}{2}Log|V^*| \tag{3.6}$$

(3.6) を最大にする σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ とし，さらに σ^2 に関して集約した対数尤度関数を以下の (3.7) とする。

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{\mathrm{T}}(y-\Gamma\alpha)'\,V^{*-1}(y-\Gamma\alpha)$$

$$Log\ l(y|\Gamma,V^*,\alpha)\propto-\frac{T}{2}Log(y-\Gamma\alpha)'\,V^{*-1}(y-\Gamma\alpha)-\frac{1}{2}Log|V^*| \tag{3.7}$$

また分散共分散行列 V^* を既知としたときの α の GLS 推定量である $\hat{\alpha}$ を (3.8) とし，$\alpha=\hat{\alpha}$ の条件下では (3.7) は以下の条件付き対数尤度関数 (3.9) になる．

$$\hat{\alpha}=(\Gamma'\,V^{*-1}\Gamma)^{-1}\Gamma'\,V^{*-1}y \tag{3.8}$$

$$Log l(y|\Gamma,V^*,a=\hat{\alpha})\propto-\frac{T}{2}Log(Ts^2)-\frac{1}{2}Log|V^*| \tag{3.9}$$

ただし

$$Ts^2=(y-\Gamma\hat{\alpha})'\,V^{*-1}(y-\Gamma\hat{\alpha})$$

(3.8) の導出に際して分散共分散行列 V^* を既知としたが，実際にその決定は (3.9) を用いて最尤法によって行う．さらに GLS 推定をする際に $(p_0, p_1,\cdots;p_k)$ は所与であると仮定したが，実際には以下の AIC_{MS} を用いて前節と同様に行う．

$$AIC_{MS}=T\ Log(Ts^2)+Log|V^*|+2[p_0+p_1+\cdots+p_k+(k+2)] \tag{3.10}$$

ここで対数尤度関数 (3.9) を V^* に関して最大化しなければならないが，そのために (3.9) を σ_i^2 に関して偏微分すると以下の (3.11) が得られる。この (3.11) を 0 とおいて，その解を解析的に求めればよいのであるが，(3.11) が非線形関数になっているために数値計算によって (3.11) の解を求め (3.9)の最大化を行う．

$$\frac{\partial Log\ l}{\partial\sigma_i^2}=\hat{\sigma}^{-2}y'\,WV^{*-1}FE_iF'\,V^{*-1}W'\,y-tr[V^{*-1}FEiF'] \tag{3.11}$$

$$W=[I-V^{*-1}\Gamma(\Gamma'\,V^{*-1}\Gamma)^{-1}\Gamma']$$

$$F=\begin{pmatrix}1 & X_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{k1}\\ 1 & X_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{k2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & X_{1T} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{kT}\end{pmatrix}\qquad E_i=\begin{array}{c}\downarrow \text{i-th column}\\ \begin{pmatrix}0\ 0\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ 0\\ 0\ 0\ 0\ \cdot & & \cdot\ \cdot\\ \cdot\ 0\ 0\ \cdot\ \cdot & & \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & \cdot\ \cdot\ 1\ \cdot\ \cdot & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & 0\ 0\ \cdot\\ \cdot\ \cdot & \cdot & 0\ 0\ 0\\ 0\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & 0\ 0\end{pmatrix}\end{array}\ \leftarrow\text{i-th row}$$

4.　適用例

本節では，前節までに導出した多項式近似による可変係数回帰モデルの推定法とカルマン・フィルターによる回帰モデルの逐次推定法とを経済モデルに対して適用し現実の経済構造の変動を調べる．ここで用いるモデルは，近年その構造がきわめて不安定であるといわれている為替レート決定に関する理論モデルである．為替レート決定に関するモデルは数多くあるが，そのどれもが完全な決定理論であるとはいえないのが実状である．そのなかでも，ここで用いるモデルの理論的基礎である購買力平価説（*ppp*）は為替レート決定に関する基本的な仮定とされている．しかし長期的には成立しているといわれる *ppp* も短期的には実際の為替レートから大きく乖離している．この原因は経済構造の変動に起因するところが大きい．そこでこの構造変化がどの様な形でおこったのかを調べることにする．分析に用いるモデルは以下のとおりである[3]．

$$Log\ e_t=\alpha_0+\alpha_1(Log\ wpi_t-Log\ wpi_t^*)+\alpha_2\cdot Log\ e_{t-1} \qquad (4\text{-}1)$$

データ

e_t　；為替レート（月末）

wpi_t；卸売物価指数（日本）

$wpi_t{}^*$；卸売物価指数（米国）

期間；1978年1月から1987年2月の月次データ．

OECD, Main Economic Indicators Historical Issue. より収集

1978年2月から1987年2月のデータを用いて最小二乗法（*OLS*）をおこなった結果は以下のようになる．

$$Log\ e_t=0.27+0.034\cdot(Log\ wpi_t-Log\ wpi_t^*)+0.995\cdot Log\ e_{t-1} \qquad (4\text{-}2)$$

短期弾力性（0.034）は1とは大きくかけ離れており，この時期における為替レートは *ppp* から，短期的に大きく乖離していることを示している．さらに長期弾力性は6.8となり，この期間で *ppp* によるモデルでは現実の経済構造を反映することが出来なかったことを示している．しかしながらこのことはま

た，推定に用いた標本期間中になんらかの構造変化がおこって推定結果をくるわせているのではないかと考えることが出来る．そこでこのモデルに対して前節で示した推定法を適用し，標本期間中にどのような構造変化がおこったのかを調べることにする．

OLS，カルマン・フィルター[4] による逐次推定と多項式近似の可変係数回帰モデル[5] による推定結果の比較（図１から図３）をみれば明らかなように，多項式近似の可変係数回帰モデルによる推定結果とカルマン・フィルターによる

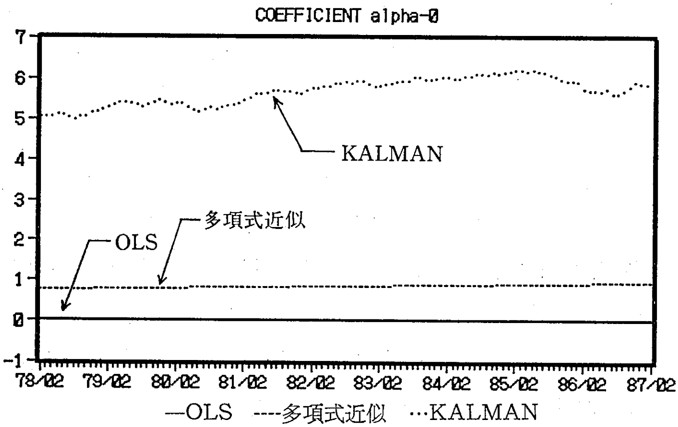

図　1

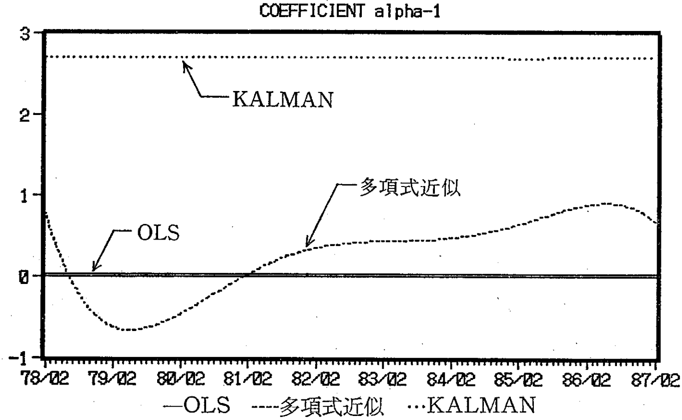

図　2

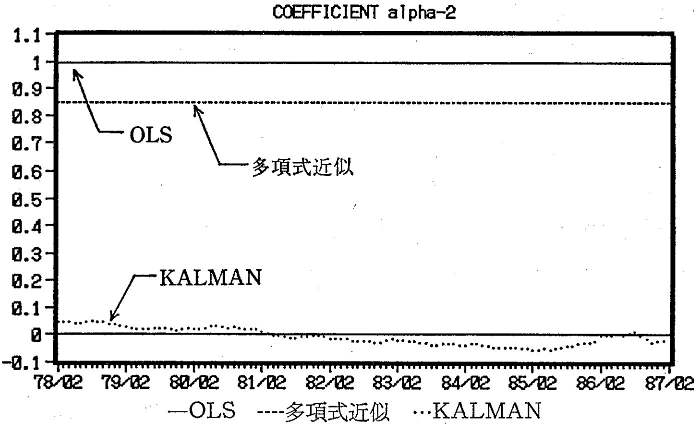

図　3

ものとでは大きく結果が異っていることがわかる。さらに図2において，多項式近似による推定では購買力平価説と密接に関係している係数 α_1 が1978年に減少した後（78年12月：第二次石油危機），1979年に上方に反転し（79年4月：金融引き締め），1982年初頭にその傾きが緩やかになり1985年に再度その傾きを増していることがわかる（83年3月：OPEC 原油価格値下げ，84年：米国高度成長，85年9月：プラザ合意）．すなわち1979年初頭に大きな構造変化が，1985年の初頭に小さな構造変化があったことが観察できる．しかしながら，カルマン・フィルターによる推定ではそのような変化は観察できない、また*OLS*推定と比べても，各パラメータに関して過大あるいは過小推定となっている．

5.　結語

構造変化の検出や，その変化の経過を分析する際に，これまで利用されてきたカルマン・フィルターによる回帰モデルの係数推定法に付随する問題を避けるために，本稿ではモデルの係数変化の経路に対して多項式近似[6]行ない，可変係数回帰モデルの推定を従来の重回帰モデルと同様の形に定式化しなおした．さらに回帰モデルの係数がモデルの推定期間中，一定であるかどうかの診断は各係数にあてはめた多項式の次数が0であるかどうかで判断することがで

きるようになっている．各多項式における次数の選択は回帰モデルの説明変数の選択法を利用することができ，本稿では *AIC* を用いたが *Mallows* の C_P 規準を用いてもよい．ただし *AIC* を利用するときは，この選択規準が漸近理論に基礎をおいているため，データ数が少ない場合にはモデルに含まれるパラメータ数（多項式の次数）を大きくできないのが欠点である．

これまでのように回帰モデルの係数変化の経路に対して *AR* モデルや *ARMA* モデルのような時系列モデルを利用すればパラメータ数の節約が期待できるが，その場合には回帰モデルの中に二種類の誤差，あるいはイノベーションが存在することになり，そのどちらをどれだけ小さくすることによって係数の推定を行うのかが新たな問題となってしまう．そこで本稿では決定論的に係数変化の経路に対して，特定の関数型をあてはめることで推定問題を単純化したのである．

注

1) σ^2 の推定量として (2.5) を用いているのは *AIC* が最尤法に基づいているためであり，データ数が推定すべきパラメーター数に比べてさほど大きくない場合には不偏推定量である

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{\left(T-\sum_{i=0}^{k}p_i\right)}(y-\Gamma\hat{\alpha})'(y-\Gamma\hat{\alpha})$$

を用いるべきである．

2) ここで一般化を行うというのは，あくまでも確率的な要因を付加することが可能であることを示すためであって，その様な一般化が必ずしもいい結果を与えるわけではない．

3) ここで用いたモデルによる外国為替市場における構造変化の分析に秋葉（1988）がある．モデルの推定期間は 1973.1—1987.7であり，1978.6—1978.7に弱い構造変化を，また1985.6—1985.7には大きな構造変化をしていることを結論づけている．

4) カルマン・フィルターによる逐次推定の際に必要である初期値を推定するためのデータ数は，はじめの $k+1$ 個から一個づつ増加させながら推定期間全体の予測誤差を最小にするように決定した．その結果，初期値推定に要したデータ数は10個であった．

5) 多項式近似の可変係数回帰モデルによる推定結果は，各パラメータの次数が 1，5，0 となり定数項は 1 次，α_1 は 5 次の多項式にしたがい，α_2 は 0 次となり変動しないことが判明した．

6)　多項式による外挿は避けなければならない．観測値の範囲内で得られた多項式は，その範囲内でのみ有効であって，その外側ではなんの意味もないことに注意すべきである．

参考文献

Amemiya, T (1985) *Advanced Econometrics*, Basil Blackwell.

Harvey, A. C. (1981) *Time Series Models*, Oxford: Philip Allan.

Kalman, R. E. (1960) "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions ASME Journal of Basic Engineering*, 82- 35-45.

秋葉弘哉 (1988)「外国為替市場における構造変化」『貯蓄経済理論研究会年報』第 4 巻，貯蓄経済研究センター．

坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎 (1983)『情報量統計学』共立出版．

中川　徹，小柳義夫 (1982)『最小二乗法による実験データ解析』東京大学出版会．