射影凸関数について

渡辺, 淳一

https://doi.org/10.15017/2920744

出版情報：経済論究. 73, pp.197-202, 1989-03-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

射影凸関数について

渡　辺　淳　一

目 次

1　はじめに

伝統的経済分析，特に，生産理論や消費理論において，凸性の仮定は本質的役割を果たしている。しかし，このことは経済現象の忠実な表現のためというよりも，分析の簡便さのためという理由に重きが置かれていることが多いと思われる。このような問題意識の下で，Hackman-Passy〔1〕は凸性の一般化を行っている。本稿では，Hackman-Passy〔1〕によって定義された関数を分類しその性質を考察する。本稿のアウトラインは以下のとおりである。まず第2節で射影凸集合及び射影凸関数を定義し，それらの若干の性質について言及する。そして，第3節で射影凸関数に関連して，2つの関数を定義する。そして，それらの関数の性質及び射影凸関数との関係について検討する。

2　射影凸集合と射影凸関数

X_i を有限次元ユークリッド空間とし，$I=\{1, 2, \cdots, N\}$ とする。また，$\Pi_{i=1}^{N}X_i$ から X_k，$k\in I$，への射影を π^k，$k\in I$，で定義する。

〔定義1〕〔1〕

集合 $C\subset\Pi_{i=1}^{N}X_i$ が射影凸であるとは，任意の$x, y\in C$ と任意の $\lambda_i\in$ 〔0, 1〕, $i \in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N \in [0, 1]$ が存在し, $(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i + (1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N + (1-\lambda_N)y_N)$ がCに含まれることである。 ∎

定義より, 凸集合は射影凸である。

〔命題〕〔1〕

集合 $C \subset \Pi_{i=1}^{N} X_i$ が射影凸であるための必要十分条件は, 任意の集合 $\Pi_{i=1}^{N} D_i$, ただし $D_i \subset X_i$, $i \in I$, は凸, に対して, 任意の $\pi^k(C \cap \Pi_{i=1}^{N} D_i)$, $k \in I$, が凸となることである。 ∎

次に, 射影凸関数の定義を行なう。ここで, 関数 $f: R^N \to R$ が準凸であるとは, その任意のレベル集合 $S_\alpha = \{x \in S | f(x) \leqq \alpha\}$[1], $\alpha \in R$, が凸集合である, ということに注意しておく。

〔定義2〕〔1〕

関数 $f: S$[2] $\to R$ が射影凸であるとは, 任意のレベル集合 $S_\alpha = \{x \in S | f(x) \leqq \alpha\}$, $\alpha \in R$, が射影凸となることである。 ∎

上記の定義及び命題から明らかなように, 準凸関数は射影凸であり, 射影凸関数は任意の独立変数に関して準凸である。

射影凸関数について, 次の定理が成り立つ。

〔定理1〕

関数 $f: S$[3]$\to R$ が射影凸であるための必要十分条件は, 任意の $x, y \in S$ と任意の $\lambda_i \in [0, 1]$, $i \in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N \in [0, 1]$ が存在し

$$f[\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i + (1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N + (1-\lambda_N)y_N] \leqq \max\{f(x), f(y)\} \quad ①$$

となることである。

〔証明〕

fは①式を満たし, かつ, $x, y \in S_\alpha$ と仮定する。$x, y \in S$ かつ $\max\{f(x), f(y)\} \leqq \alpha$ なので, 任意の $\lambda_i \in [0, 1]$, $i \in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N \in [0, 1]$ が存在し,

$(\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N)\in S$

よって,

$f[\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N]\leqq\alpha$

ゆえに,

$(\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N)\in S_\alpha$

となり, S_α は射影凸である。

逆に, 任意の実数 α に対して S_α は射影凸であり, x, $y\in S$ であると仮定する。$\alpha=\max\{f(x), f(y)\}$ に対して, x, $y\in S_\alpha$ なので, 射影凸性の仮定より, 任意の $\lambda_i\in[0, 1]$, $i\in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N\in[0, 1]$ が存在して

$(\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N)\in S_\alpha$

よって

$$f[\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N] \leqq\alpha=\max\{f(x),f(y)\} \quad ∎$$

〔注〕
1) S は R^N の部分集合。
2) S は $\Pi_{i=1}^N X_i$ の部分集合。
3) これ以降, 集合 $S\subset\Pi_{i=1}^N X_i$ は射影凸であるとする。

3　狭義及び強意射影凸関数

本節では射影凸関数に関連して, 新たに 2 つの関数を定義し, 射影凸関数との関係を検討する。

〔定義 3〕

関数 $f: S\to R$ が狭義射影凸であるとは, 任意の x, $y\in S$, ただし $f(x)\neq f(y)$, と任意の $\lambda_i\in(0, 1)$, $i\in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N\in(0, 1)$ が存在し

$$f[\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N] <\max\{f(x), f(y)\}$$

となることである。 ■

定義より任意の狭義準凸関数は狭義射影凸である。また，狭義準凸関数ならば準凸である，という関係が成り立たないと同様に，ある狭義射影凸関数は射影凸ではない。

〔例題〕

関数 $f: R^2 \to R$ を次のように定義する。

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{if } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

定義２及び３より，fは狭義射影凸関数であるが，射影凸ではないことが容易に確かめられる。 ■

しかし，下半連続な狭義準凸関数は準凸であるように，下半連続な狭義射影凸関数は射影凸である。

〔定理２〕

関数 $f: S \to R$ を下半連続な狭義射影凸関数であるとする。このときfは射影凸である。

〔証明〕

$x, y \in S$ とする。$f(x) \neq f(y)$ ならば，fは射影凸性を満たす。したがって，$f(x)=f(y)$ と仮定し，このときfは射影凸であること，すなわち，任意の $\lambda_i \in (0,1)$, $i \in I$, に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N \in (0,1)$ が存在し

$$f[\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)x_N] \leqq f(x)$$

となることを示せばよい。ここで，ある $\mu_i \in (0,1)$, $i \in I$, が存在して，任意の $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_N \in (0,1)$ に対し

$$f[\mu_1 x_1+(1-\mu_1)y_1, \cdots, \mu_i x_i+(1-\mu_i)y_i \cdots, \mu_N x_N+(1-\mu_N)y_N] > f(x)$$

となると仮定する。$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_N$ を固定して

$$z=(\mu_1 x_1+(1-\mu_1)y_1, \cdots, \mu_i x_i+(1-\mu_i)y_i, \cdots, \mu_N x_N+(1-\mu_N)y_N)$$

とする。fは下半連続なので，ある $\alpha \in (0,1)$ が存在して

$$f(z) > f[\alpha x+(1-\alpha)z] > f(x)=f(y) \text{—②}$$

が成り立つ。zは $\alpha x+(1-\alpha)z$ とyの凸結合で表わされることに注意すると，

fの狭義射影凸性と $f[\alpha x+(1-\alpha)z]>f(y)$ より，$f(z)<f[\alpha x+(1-\alpha)z]$ を得るが，これは②式に矛盾。 ∎

最後に，射影凸関数の強意性の定義を行なう。

〔定義 4〕

関数 $f: S \to R$ が強意射影凸であるとは，任意の $x, y \in S$，ただし $x \neq y$，と任意の $\lambda_i \in (0, 1)$，$i \in I$，に対してある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_N \in (0, 1)$ が存在し

$$f[\lambda_1 x_1+(1-\lambda_1)y_1, \cdots, \lambda_i x_i+(1-\lambda_i)y_i, \cdots, \lambda_N x_N+(1-\lambda_N)y_N] < \max\{f(x), f(y)\}$$

となることである。 ∎

上記の定義より，強意射影凸関数は狭義射影凸関数であり，下半連続性が満たされていなくても，強意射影凸関数は射影凸である。

以下に，各関数の関係を図に示す。

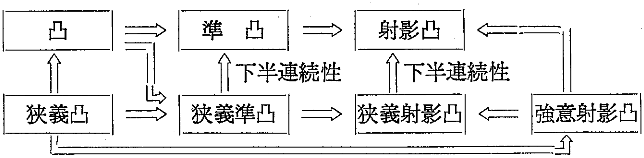

図1　関数の関係

4　あとがき

そもそも非線形計画において，目的関数の狭義準凸性は局所的最適解が大域的最適解であることを保証し，さらに強意準凸性は局所的な最適解が唯一の大域的なそれであることを保証するものであった。そして，本論で示されたように，射影凸，狭義射影凸，及び強意射影凸関数は，それぞれ，準凸，狭義準凸，及び強意準凸関数の一般化になっていた。ところが，射影凸関数において，狭義性あるいは強意性の条件は最適解の大域性を保証するものでもなく，ましてや一意性を保証するものでもないことに注意しておく。非線形計画問題において，狭義射影凸関数及び強意射影凸関数の果たす役割についての解明

は，擬射影凸関数や微分可能な射影凸関数との関連をも含めて，今後の課題としたい。

〔参考文献〕

〔1〕 Hackman, S. T. and U. Passy, "Projectively-Convex Sets and Functions", *Journal of Mathematical Economics*, 17, 1988.

〔2〕 Bazaraa, M. S. and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, 1979.

〔3〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.