

新古典派モデルによる債務循環論の一定式化

長島, 正治

<https://doi.org/10.15017/2920741>

出版情報：経済論究. 73, pp.127-145, 1989-03-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

新古典派モデルによる 債務循環論の一定式化

長 島 正 治

目次

- I はじめに
- II モデル
- III 第1段階
- IV 第2段階
- V 第3段階
- VI むすびにかえて
数学付録

I. はじめに

本稿の目的は、経済発展論における債務循環論を若干の仮定の下で、新古典派1財モデルにより定式化し、その定式化の中から債務循環論から得られる諸結果を導きだし、さらに債務循環論を通じての発展途上国の資本ストックの動きを、ソロー〔7〕における資本ストックの動きと比較・検討することにある。

発展途上国における債務問題、特に累積債務の問題が論議されるようになって久しい。最近では、単に発展途上諸国の問題としてだけでなく、先進諸国を含む国際貿易において安定した貿易関係の維持や、偏って過剰に蓄積された外貨を世界中にうまく環流させ、取り引きの円滑化を計る目的のためにも債務・経済援助の問題は非常に大きなウエイトを占めて論議されるようになってきている。

経済援助の形態には、先進諸国政府からの資金の貸付・贈与や国際復興開発銀行（IBRD）、国際金融公社（IFC）、アジア開発銀行（ADB）などの公的な金融機関からの融資、または先進諸国の民間企業や商業銀行などからの貸付な

どがある。またこれらの経済援助のほかにも発展途上国への政府・民間からの技術援助、人材派遣なども数多く行われている。近年先進諸国からの贈与の形態をとる援助が増加の傾向を示しているが、いまだ発展途上国への援助総額の大部分を政府、民間、公的機関からの貸付が占めているのが現状である。

経済援助、債務問題に関する研究も数多く行われており、その中で発展途上国が経済発展のために外国に援助を要請する際の一方法を示したものにギャップ理論 (gap theory) がある。これは McKinnon〔4〕や Fei and Paauw〔3〕に代表される研究であり、発展途上国が決定した目標 GNP 成長率達成のための投資額と国内貯蓄とのギャップを計算し、線形計画法を用いて最適な借入を行うというものである。

このギャップ理論をさらに発展させたものが債務循環論 (theory of debt cycle) である。これは Avramovic〔2〕, Mikesell〔5〕等によって成された研究であり、発展途上国の債務が循環する過程を3つの段階に分けて分析するものである。つまり、第一段階においては国内の投資と貯蓄のギャップを賄うために援助が要請される。ただし、この段階では返済は行われない。そして、資本ストックの蓄積に伴う生産量の増大によって国内の貯蓄が増大し、国内貯蓄が投資額を上回るようになると、第二段階に入る。第二段階においては国内貯蓄が投資額を上回った分を債務残高の利払いに充てる。しかし、いまだ利払い全額を賄うほどの額ではないので、不足分はさらに援助で賄われる。さらに国内の資本ストックの蓄積が進み、国内の余剰が債務残高の利払い分を越えると、すなわち元本の一部をも返済できるようになると、第三段階に入る。そして、すべての債務残高の返済が完了したところでこの段階は終了する。この債務循環論によると、途上国の資本ストックが小さく投資が生産に与える効果が十分でないとき、または途上国の国内の貯蓄率が低く、国内投資のために十分な国内貯蓄が得られないとき、累積した債務の支払いが困難になる。

Takagi〔8〕においては、発展途上国における低所得グループと中所得グループの債務問題を新古典派のフレームワークの中で定式化・分析しているが、債務循環論自体を新古典派1財モデルによって定式化した研究は存在しないようにおもわれる。

したがって、以下では通常の新古典派1財モデルのフレームワークの中で、Takagi〔8〕によって設定された援助関数を用いて、上述した債務循環論のそれぞれの段階を定式化し⁽¹⁾、その中で定式化された経済が、どのような資本ストックと債務残高の蓄積経路を辿るのか、Solow〔7〕に代表される新古典派成長論との比較において検討する。また、どの段階において債務支払いが困難になる状況が発生するのかについても検討する。

その結果、この定式化において次のことが明らかになる。資本ストックの動きに関して、第一段階での離陸に成功した経済は、資本ストックがソロー〔7〕の長期定常均衡の水準に達したところで債務の返済を開始し、その後過剰に蓄積された資本ストックによってその債務の返済を行い、債務返済を完了したところでソロー〔7〕の長期定常均衡の資本ストックの水準に落ち着く。

また、債務支払いが困難になる状況は、第一段階において経済の初期の状態および先進国からの借入を受けた状態が最小臨界努力曲線の左側に位置するときに現れ、第二段階以降は債務支払いが困難になる可能性はほとんどなくなることがわかる。

註

- (1) ここでの定式化において、投資は目標 GNP 成長率達成のための望ましい投資額とはせず、国内の資本ストックと先進諸国からの援助によって内生的に決定される投資を用いる。

II. モデル

以下に展開される議論においてその基本となるモデルは、外国からの経済援助を表す関数を除いて、経済成長論における Solow〔7〕の新古典派1財モデルを基盤としている。

経済は単一の財からなる経済を想定し、その財の生産量を Y とする。また財の生産にあたっては生産要素として資本ストック K 、と労働力 L が用いられるとする。この関係を生産関数 F として次のように表す。

$$Y = F(K, L). \quad (1)$$

ただし、この生産関数は新古典派的な well-behaved な生産関数であると仮定する。したがって、この生産関数を新しく F とは異なった生産関数 f として定義し直すと、

$$y=f(k) \quad (2)$$

となる。ここで y は 1 人当たりの生産量、 k は 1 人当たりの資本ストックすなわち資本装備率である。

人口の成長率 n ($n>0$) は外生的に所与であるとし、したがって次のように表すことができる。

$$\dot{L}=nL. \quad (3)$$

また投資がすべて資本蓄積につながるとすれば、

$$I=K \quad (4)$$

となる。

貯蓄は、国民所得に限界貯蓄性向 s をかけただけなされるものとし、

$$S=sY.$$

また、この国の輸入は、輸出と資本の純流入分によって賄われるものとする。

次に外国からの経済援助であるが、ここでの援助はすべて先進国政府、世界銀行 (IBRD)、先進国の民間企業、商業銀行などからの借入であるとする。したがって、ここでは先進国からの技術援助や資本の直接投資などは除外して考察するものとする。援助の総額は A で表し、 A は A^1 と A^2 よりなるものとする。したがって、

$$A=A^1+A^2 \quad (5)$$

ここで、 A^1 は先進国政府からの借款や世界銀行などの公的機関からの借入を表し、具体的に次のように表すことができるものとする。

$$A^1=La^1\{Y/L; \beta\} \quad (6)$$

すなわち、先進国政府からの借款や公的機関からの貸付は、1 人あたりの国民所得 Y/L の大きさによってその 1 人当たりの大きさが決まり、その 1 人当たりの援助額に人口 L を掛けた額が行われるものとする。ただし、

$$a^1\{0; \beta\}>0$$

である。これは 1 人当たり国民所得がゼロの国においても公的機関からの経済

援助が受けられることを意味する。ここで、 β は先進諸国政府が経済外的に決定する対発展途上国向けの援助総額を表す外生パラメータである。

他方、 A^2 は先進諸国の民間企業や商業銀行などの私的機関からの借入を表す。ここで、 D はこの国の債務残高を表すものとすれば、 A^2 は具体的に次のように表すことができるであろう。

$$A^2 = A^2(Y, D). \quad (7)$$

ただし、

$$\partial A^2 / \partial Y > 0, \quad \partial A^2 / \partial D < 0$$

である。つまり、民間企業や商業銀行などの私的機関からの借入は国民所得総額 Y と債務残高 D の関数であり、国民所得がゼロのときこれら私的機関からの借入はゼロであり、国民所得が増加するにつれてこれら私的機関からの借入は増加する。また、関数 A^2 は国民所得 Y と債務残高 D についての一次同次関数であると仮定する。

註

- (1) 援助関数 A^1, A^2 はそれぞれ Takagi [8] において定式化されたものである。

Ⅲ. 第1段階

この段階は債務循環論 (theory of debt cycle) における最初の段階であり、極めて資本装備率の低い発展途上国が資本装備率を上昇させ、速やかに経済発展を行うために先進諸国からの経済援助を導入する段階である。

ここでは、この国の国内貯蓄と外国からの経済援助を合わせた額の投資を行い、経済発展のために不足している資本ストックの蓄積を行う。しかしながらこの段階では先進諸国からの借入に対する利子支払いを含む一切の返済は行われぬ。なぜならば、利子支払いを含む返済を行うための余剰が国内にまだ存在しないからである。

したがって、

$$I = S + A^1 + A^2. \quad (8)$$

$$\dot{D} = A^1 + A^2. \quad (9)$$

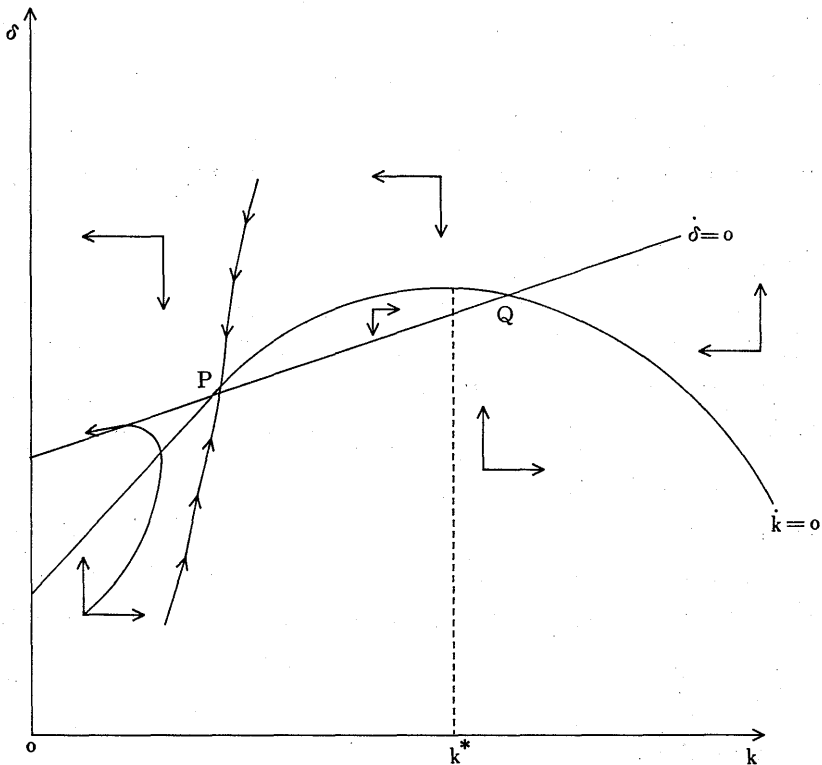
ここで1人当たりの債務残高を δ で表すとすれば、モデルは以下の連立微分方程式体系に集約される。

$$\dot{k} = sf(k) + a^1\{f(k); \beta\} + A^2\{f(k), \delta\} - nk. \quad (8)'$$

$$\dot{\delta} = a^1\{f(k); \beta\} + A^2\{f(k), \delta\} - n\delta. \quad (9)'$$

第一段階の $\dot{k}=0$ 線、 $\dot{\delta}=0$ 線は (図 1) のように表される⁽¹⁾。ただし、第一段階における経済は、いまだ経済発展が十分に達成されていない状態であるので、このような経済においては1人当たりの国民所得の増加に伴う公的援助の減少はないものと考えることができる⁽²⁾。

(図 1) は位相図の第一象限内に交点が 2 つ存在するケースであり⁽³⁾、このケースにおける $\dot{k}=0$ 線と $\dot{\delta}=0$ 線の交点 P は鞍点 (saddle point) となり不



(図 1)

安定であるのに対し、もう一つの交点 Q は安定である⁽⁴⁾。点 P に関して、この点に収束する経路 (path) が存在し、これが最小臨界努力曲線 (minimum critical effort curve) と呼ばれるものである。数学的には唯一この均衡解に収束する経路であるが、経済的には経済発展における成功と失敗を分ける役割を果たすものである。

最小臨界努力曲線よりも左側に経済の初期の状態が位置するならば、この経済の資本装備率は時間が経過するにつれてしだいにゼロに近づき債務のみが存続する状態になり、経済発展は失敗することになる。つまり、資本装備率が極めて低い発展途上国が先進国からの経済援助で経済発展を行おうとすると、経済は公的機関からの援助を中心にある程度拡大するが、しかしながら国民所得水準が低いために民間企業や商業銀行などの私的機関からの貸付が十分に得られず、やがて経済は縮小傾向を示すようになる。したがって、この発展途上国にとって第一段階の経済発展が成功するためには、初期時点においてこの経済が最小臨界努力曲線の右側に位置することが必要である。いま、最小臨界努力曲線の左側に経済が位置しているとき、公的機関からの援助総額が増大すると、すなわち外生的なパラメータである β の値が増加すると、(図 1) における $\dot{k}=0$ 、 $\dot{\delta}=0$ の両曲線とも上方シフトするが、このとき点 P が右上方に移動するのか、それとも左上方に移動するのかは不確定である。したがって、この経済が第一段階の経済発展に成功するためには、先進国の公的機関からの援助額の増加と同時に国内の貯蓄率を増加させるような政策をとることが必要である。そのような政策を行うことによって、(図 1) の $\dot{k}=0$ 線は援助額の増加分以上に上方シフトし、したがって点 P は左上方に移動するからである⁽⁵⁾。

最小臨界努力曲線よりも右側に経済の初期の状態が位置するならば、この経済の資本装備率と 1 人当たりの債務残高は時間が経過するにつれて、点 Q の座標が示す資本装備率と 1 人当たりの債務残高の値に収束してゆく。この場合 1 人当たりの債務残高は増加しているが、資本装備率も同様に増加しているので、このことは債務循環論における経済発展の第一段階は成功したということの意味するのである。

(8)式より、第一段階においては $I > S$ 、すなわち国内の投資額は国内の貯

蓄額を上回っている。経済が発展するにつれて、すなわち資本ストックの蓄積が進むにつれて、生産の拡大に伴う国内貯蓄が増加する。そして、投資水準と国内の貯蓄が一致したとき、言い換えると資本装備率 k が、

$$sf(\hat{k}) - n\hat{k} = 0 \quad (10)$$

が成り立つような \hat{k} の水準まで増加したとき、債務循環論の第一段階は終了し、第二段階へ移行するのである。

註

- (1) (図 1) の $\hat{k}=0$, $\delta=0$ 線の形状に関しては数学付録を参照のこと。
- (2) このことは、 $da^1/df=0$ 、であることを意味する。
- (3) (図 1) において、 $\hat{k}=0$, $\delta=0$ 両線の交点、すなわち均衡解の数は必ずしも 2 つであるとは限らない。位相図の第一象限内に交点が一つしか存在しないとき、経済は (図 1) におけるよりも、発展が成功する領域がより広くなる。また、数学的には $\delta=0$ 線は $\hat{k}=0$ 線の右上がりの部分と右下がりの部分のどちらで交わっても構わない。ただし経済学的には $\hat{k}=0$ 線が右下がりの部分で交わっている場合を考察する方がより現実的である。
- (4) 詳細については数学付録を参照のこと。
- (5) これは、Takagi[8] において得られた結果と同じものである。

IV. 第二段階

第一段階においては、発展途上国が先進国からの経済援助と国内の貯蓄との合計で投資を行い、国内の資本ストックを蓄積しはじめる経路を定式化した。そこでは、どのような発展途上国でも債務循環論に沿ってうまく経済発展できるわけではないということがわかった。つまり、先進諸国からの経済援助額が増大しても、途上国内部で貯蓄率を上昇させるような経済政策を平行して行わなければ、経済が発展する経路に乗ることができない場合が存在するのである。

第二段階においては、第一段階で発展の経路に乗った経済が、債務残高と同時に資本ストックをも徐々に蓄積し、資本装備率 k が (10) 式を満たすような \hat{k} の水準を越え、国内に若干の余剰が発生しはじめている。しかしながら、この余剰はまだ債務残高の利払いを全額賄えるほどの大きさではなく、利払いに不

足する分をいまだ先進諸国からの借入で賄わなければならない程の大きさでしかない。

したがって、債務循環論の第二段階は次式のように定式化することができる。

$$I = S + A^1 + A^2 - \{r^1 \lambda D + r^2 (1 - \lambda) D\}. \quad (11)$$

$$\dot{D} = A^1 + A^2 - \{r^1 \lambda D + r^2 (1 - \lambda) D\}. \quad (12)$$

(11), (12)式を1人当たりの債務残高 δ と資本装備率 k に直せば、この第二段階の経済は次の2本の連立微分方程式体系で表すことができる。

$$\dot{k} = sf(k) + a^1 \{f(k); \beta\} + A^2 \{f(k), \delta\} - \{r^1 \lambda + r^2 (1 - \lambda)\} \delta - nk. \quad (11)'$$

$$\dot{\delta} = a^1 \{f(k); \beta\} + A^2 \{f(k), \delta\} - \{r^1 \lambda + r^2 (1 - \lambda)\} \delta - n\delta. \quad (12)'$$

ここで、 r^1 , r^2 はそれぞれ先進国の公的機関からの借入利子率と私的機関からの借入利子率であり、先進国側によって外生的に与えられるものであるとする。また λ は債務残高の返済比率であり、 r^1 , r^2 に対応して固定的に決まっているものとする。

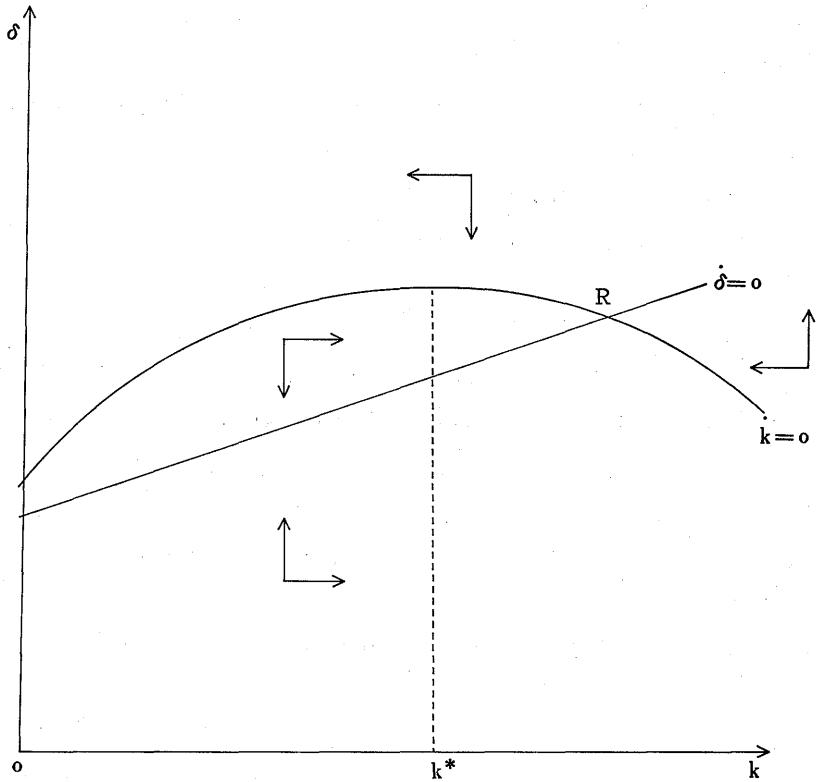
(11)', (12)' から得られる $\dot{k}=0$, $\dot{\delta}=0$ の位相図を描くと (図2) のようになる⁽¹⁾。

債務循環論の第一段階の定式化における位相図は、均衡解の数によって3通りのパターンが考えられたが、第二段階の定式化においては唯一 (図2) で描かれている位相図のパターンしか存在しない⁽²⁾。

(図2)において $\dot{k}=0$ 線は (図1)における $\dot{k}=0$ 線と同様に、資本装備率 k が k^* よりも小さいとき右上がりの曲線であり、 $k=k^*$ のとき水平となり、 k が k^* よりも大きいとき右下がりの曲線になる。ただし、 $\dot{k}=0$ 線自体が (図1)における $\dot{k}=0$ 線よりも、ほぼ全体的に下方シフトしており、 $\dot{k}=0$ 線の勾配も (図1)におけるそれより緩やかになっている。

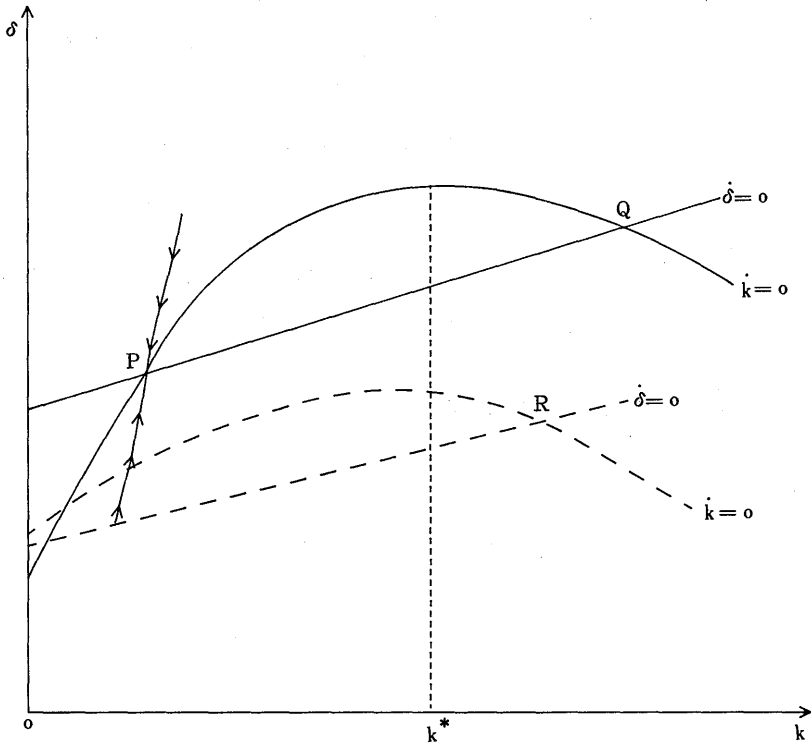
他方、 $\dot{\delta}=0$ 線は第一段階の定式化における $\dot{\delta}=0$ と同様に、正なる δ 切片を持つ右上がりの線として描くことができる。そしてまた $\dot{k}=0$ 線同様、(図1)における $\dot{\delta}=0$ 線よりも下方にシフトしている。

したがって、均衡解Rの座標も (図1)における点Qよりも左下方に移動している。ここで、(図2)における均衡解である点Rは安定的な均衡解であるこ



(図 2)

とがわかる。第一段階で先進諸国からの経済援助によって経済の離陸 (take off) を果たし、第一段階における長期均衡点 Q に収束する経路を辿っていた経済は、資本装備率 k が(10)式を満たす \hat{k} の水準を越えると第二段階に入る。この段階に入ると、経済は新たな長期均衡点 R に向かって収束する経路を辿りはじめ。第一段階においては、最小臨界努力曲線が位相図の第一象限内に存在するケースが考えられ、この曲線より左側に位置した経済は経済発展すなわち経済の離陸に失敗した。しかし第二段階の位相図においては、最小臨界努力曲線の右側に経済は存在すると考えられるのである。したがって、第一段階における経済の離陸失敗のようなケースは、ここでは起こらないものと考えることができる。



(図 3)

第一段階で考察した (図 1) と、第二段階の (図 2) を重ね合わせると次の (図 3) になる。

註

- (1) (図 2) における $\dot{k}=0$, $\dot{\delta}=0$ 線の形状に関しては数学付録を参照のこと。
- (2) (図 2) において、 $\dot{k}=0$ 線と $\dot{\delta}=0$ 線の切片を比較すると、 $\dot{k}=0$ 線の切片の方が $\dot{\delta}=0$ 線の切片よりも大きいことがわかる。したがって、第二段階における位相図は (図 2) のみとなる。

V. 第三段階

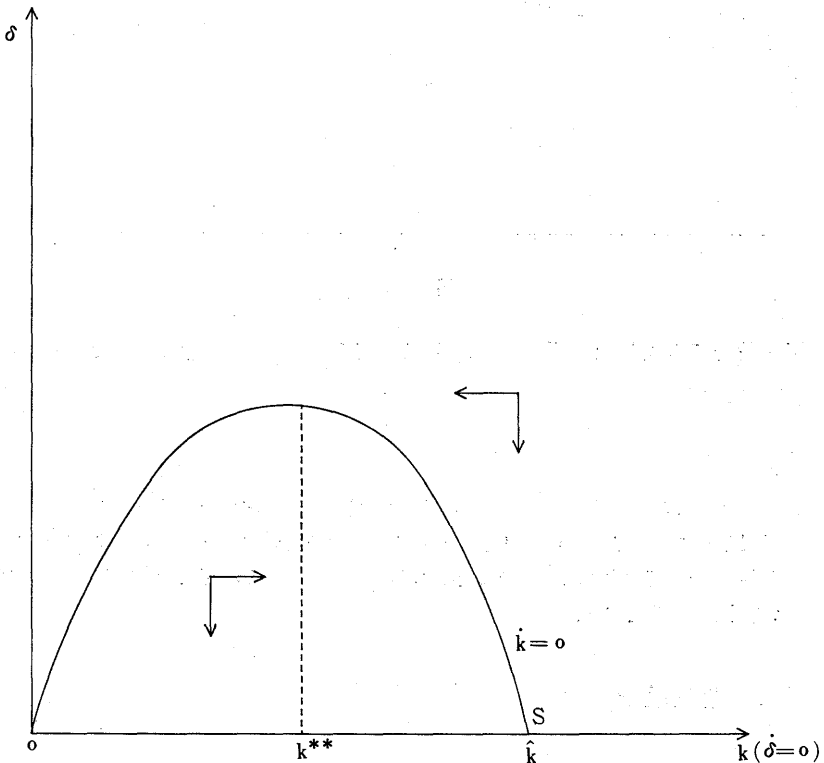
第二段階においては、国内に発生した若干の余剰分を債務残高の利払い分の

一部分に充てられる程度の大きさまで経済が発展した。しかしながら、第一段階、第二段階を通して先進諸国の公的・私的機関から借り入れた債務残高の元本に関しては、いまだ返済を全く行っていない。したがって、この第三段階は、債務残高における利払い分以上を返済し、最終的には債務残高が消滅してしまうまでの最終段階となるのである。

この段階においては、もはや先進国からの経済援助はなく、国内に発生した余剰分で債務残高を返済するのであるから、したがって債務循環論の第三段階は次のように定式化できる。

$$I = S - \alpha \{r^1 \lambda D + r^2 (1 - \lambda) D\}. \quad (13)$$

$$\dot{D} = -\alpha \{r^1 \lambda D + r^2 (1 - \lambda) D\}. \quad (14)$$



(図 4)

ここで α は定数 ($\alpha > 1$) である。(13), (14)式を1人当たりの債務残高 δ と資本装備率 k に直せば, 第三段階もまた第一段階, 第二段階と同様に2本の連立微分方程式体系で表すことができる。

$$\dot{k} = sf(k) - \alpha\{r^1\lambda + r^2(1-\lambda)\}\delta - nk. \quad (13)'$$

$$\dot{\delta} = -\alpha\{r^1\lambda + r^2(1-\lambda)\}\delta - n\delta. \quad (14)'$$

(13)', (14)' から得られる $\dot{k}=0$ 線, $\dot{\delta}=0$ 線の位相図を描くと(図4)のようになる^ω。

(図4)における $\dot{k}=0$ 線は,(図1),(図2)における $\dot{k}=0$ 線とは異なり, 原点を通る曲線である。また, $\dot{k}=0$ 線の変曲点の k の座標も, k^* ではなく k^{**} となる。ここで k^{**} は k^* よりも小さい⁽²⁾。したがって, $k < k^{**}$ のとき $\dot{k}=0$ 線は原点を通る右上がりの曲線であり, $k = k^{**}$ のとき水平となり, $k > k^{**}$ のとき右下がりの曲線になる。

他方,(図4)における $\dot{\delta}=0$ 線もまた(図1),(図2)の $\dot{\delta}=0$ 線とは異なり, 原点を通り k 軸上に重なる直線となる。

したがって, 均衡解は2つ存在し, ひとつは原点であり, もうひとつは k 軸上の点Sである。この2つの均衡解のうち, 点Sの k の座標は, ほかでもない第一段階から第二段階へ移行する際の指標となった \hat{k} の値に等しく, そしてまたこの \hat{k} の値は Solow [7]によって示された新古典派成長論の安定的な均衡解である資本装備率の値にほかならない。つまり, 第一段階, 第二段階を通じて蓄積された過剰な資本ストックによって生産を行い, そこから生まれる国内貯蓄の余剰分によって債務残高の返済を行うに従って, 国内の資本ストックは徐々に減少し, 最終的に債務の返済が完了するような長期均衡点においては, 新古典派成長論における長期定常状態の資本装備率 \hat{k} に落ち着くのである。

註

(1) (図4)の $\dot{k}=0$ 線, $\dot{\delta}=0$ 線の形状に関しては数学付録を参照のこと。

(2) ここにおける k^{**} は, $sf'(k) = n$ を満たす k である。他方 k^* は, $(s + \partial A^2 / \partial f) f'(k) = n$ を満たす k であり, $\partial A^2 / \partial f > 0$, であるから, $k^* > k^{**}$ であることがわかる。

VI. むずびにかえて

以上の定式化および分析によって、我々は次のようないくつかの結果を得た。国内の資本ストックが小さく、生産量が限られている途上国が経済援助によって経済の離陸を計ろうとするとき、債務支払いが不可能になるケースは第一段階において現れた。そのようなケースにおける単なる貸付額の増加は、そのような国々の経済の離陸にとって必ずしも有効ではない。経済の離陸のためには、同時に国内の貯蓄を増やすような政策を行わなければならない。

また、経済援助によって資本ストックを蓄積し経済発展を成し遂げた経済においては、経済援助によって新古典派成長論における安定的な均衡解の資本装備率の水準を越えた高い資本装備率で生産が行われ、債務残高の返済が行われなければならない。そして、最終的に債務残高の返済を終了した段階では、新古典派成長論における長期定常均衡解の資本装備率の水準に落ち着くのである。

このように、これらの定式化によって、債務循環論で述べられていることから、すなわち発展途上国が先進諸国からの経済援助によって経済の離陸を成し遂げるケースと、失敗するケースが存在するということが、そして失敗するケースにおいては、経済がどのような状況のときに発生するのかが説明される。そしてさらに経済が離陸した場合、どのような経路を辿って返済が完了した段階での長期均衡点へ向かうのかということが、新古典派成長論との比較を通して明らかになったのである。

数学付録

A 第一段階

$$\dot{k} = sf(k) + a^1 \{f(k); \beta\} + A^2 \{f(k), \delta\} - nk. \quad (8)'$$

$$\dot{\delta} = a^1 \{f(k); \beta\} + A^2 \{f(k), \delta\} - n\delta. \quad (9)'$$

両式をゼロに保つような曲線を考察するために、(8)' 式、(9)' 式をそれぞれゼロと置いたものを、それぞれ関数、

$$\phi(k, \delta) = 0$$

$$\psi(k, \delta) = 0$$

と置く。陰関数定理より、

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\phi=0} = - \frac{\left\{ s + \frac{\partial A^2}{\partial f} \right\} f'(k) - n}{\frac{\partial A^2}{\partial \delta}}. \quad \left(\text{但し, } \frac{da^1}{df} = 0 \right)$$

ここで、

$$\left\{ s + \frac{\partial A^2}{\partial f} \right\} f'(k) = n$$

を満たす k を k^* と定義すれば、

$$k < k^* \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\phi=0} > 0.$$

$$k > k^* \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\phi=0} < 0.$$

したがって、 $\dot{k}=0$ 線は $k < k^*$ のとき右上がりとなり、 $k > k^*$ のとき右下がりとなる。

同様に、関数 $\psi(k, \delta) = 0$ についても陰関数定理より、

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\psi=0} = - \frac{\frac{\partial A^2}{\partial f} f'(k)}{\frac{\partial A^2}{\partial \delta} - n} > 0.$$

したがって、 $\dot{\delta}=0$ 線は右上がりとなる。

$\dot{k}=0$ 線の右上がり部分では、 $\partial\phi/\partial k > 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k が増加し、左側では k が減少する。 $\dot{k}=0$ 線の右下がり部分では、 $\partial\phi/\partial k < 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k は減少し、左側では k は増加する。他方、 $\partial\psi/\partial\delta < 0$ であるから $\dot{\delta}=0$ 線の上側では δ は減少し、下側では δ は増加する。

この2本の微分方程式体系のヤコビ行列式は、

$$|J| = \frac{\partial\phi}{\partial k} \frac{\partial\psi}{\partial\delta} - \frac{\partial\phi}{\partial\delta} \frac{\partial\psi}{\partial k}$$

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial\delta} \frac{\partial\phi}{\partial\delta} \left[\left(-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial k}}{\frac{\partial\phi}{\partial\delta}} \right) - \left(-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial k}}{\frac{\partial\phi}{\partial\delta}} \right) \right].$$

点 P の近傍では,

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\psi=0} > \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\psi=0}$$

であるから, $|J| < 0$, したがって点 P は鞍点 (saddle point).

点 Q の近傍では,

$$|J| = \frac{\partial\phi}{\partial k} \frac{\partial\phi}{\partial\delta} - \frac{\partial\phi}{\partial\delta} \frac{\partial\phi}{\partial k} > 0.$$

$$\text{トレース} : \left(\frac{\partial\phi}{\partial k} + \frac{\partial\phi}{\partial\delta} \right) < 0.$$

したがって, 点 Q は安定点.

B 第二段階

$$\dot{k} = sf(k) + a^1\{f(k); \beta\} + A^2\{f(k), \delta\} - \{r^1\lambda + r^2(1-\lambda)\}\delta - nk. \quad (11)'$$

$$\dot{\delta} = a^1\{f(k); \beta\} + A^2\{f(k), \delta\} - \{r^1\lambda + r^2(1-\lambda)\}\delta - n\delta. \quad (12)'$$

両式をゼロに保つような曲線を考察するために, (11)' 式, (12)' 式をそれぞれゼロと置いたものを, それぞれ関数,

$$\mu(k, \delta) = 0$$

$$\xi(k, \delta) = 0$$

と置く. 陰関数定理より,

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\mu=0} = -\frac{\left\{s + \frac{\partial A^2}{\partial f}\right\} f'(k) - n}{\frac{\partial A^2}{\partial \delta} - \{r^1\lambda + r^2(1-\lambda)\}}. \quad \left(\text{但し, } \frac{da^1}{df} = 0 \right)$$

ここで, 第一段階と同様に,

$$\left\{s + \frac{\partial A^2}{\partial f}\right\} f'(k) = n$$

を満たす k を k^* と定義すれば,

$$k < k^* \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\mu=0} > 0$$

$$k > k^* \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\mu=0} < 0$$

したがって、 $\dot{k}=0$ 線は $k < k^*$ のとき右上がりとなり、 $k > k^*$ のとき右下がりとなる。

同様に、関数 $\xi(k, \delta) = 0$ についても陰関数定理より、

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\xi=0} = - \frac{\frac{\partial A^2}{\partial f} f'(k)}{\frac{\partial A^2}{\partial \delta} - \{r^1 \lambda + r^2 (1-\lambda)\} - n} > 0.$$

したがって、 $\dot{\delta}=0$ 線は右上がりとなる。

$\dot{k}=0$ 線の右上がり部分では、 $\partial \mu / \partial k > 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k が増加し、左側では k が減少する。 $\dot{k}=0$ 線の右下がり部分では、 $\partial \mu / \partial k < 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k は減少し、左側では k は増加する。他方、 $\partial \xi / \partial \delta < 0$ 、であるから $\dot{\delta}=0$ 線の上側では δ は減少し、下側では δ は増加する。

この2本の微分方程式体系のヤコビ行列式は、

$$|J| = \frac{\partial \mu}{\partial k} \frac{\partial \xi}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial \delta} \frac{\partial \xi}{\partial k} > 0.$$

$$\text{トレース} : \left(\frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right) < 0.$$

したがって、点Rは安定点。

C 第三段階

$$\dot{k} = sf(k) - \alpha \{r^1 \lambda + r^2 (1-\lambda)\} \delta - nk. \quad (13)'$$

$$\dot{\delta} = -\alpha \{r^1 \lambda + r^2 (1-\lambda)\} \delta - n\delta. \quad (14)'$$

両式をゼロに保つような曲線を考察するために、(13)' 式、(14)' 式をそれぞれゼロと置いたものを、それぞれ関数、

$$\theta(k, \delta) = 0$$

$$\omega(k, \delta) = 0$$

と置く。陰関数定理より、

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\theta=0} = -\frac{sf'(k)-n}{-\alpha\{r^2\lambda+r^2(1-\lambda)\}}$$

ここで、

$$sf'(k)=n$$

を満たす k を k^{**} と定義すれば、

$$k < k^{**} \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\theta=0} > 0$$

$$k > k^{**} \text{ のとき} \quad \left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\theta=0} < 0$$

したがって、 $\dot{k}=0$ 線は $k < k^{**}$ のとき右上がりとなり、 $k > k^{**}$ のとき右下がりとなる。

同様に、関数 $\omega(k, \delta)=0$ についても陰関数定理より、

$$\left. \frac{d\delta}{dk} \right|_{\omega=0} = -\frac{0}{-\alpha\{r^2\lambda+r^2(1-\lambda)\}-n}$$

したがって、 $\dot{\delta}=0$ 線は原点を通り水平な線、すなわち k 軸に重なる線となる。

$\dot{k}=0$ 線の右上がり部分では、 $\partial\theta/\partial k > 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k が増加し、左側では k が減少する。 $\dot{k}=0$ 線の右下がり部分では、 $\partial\theta/\partial k < 0$ 、であるから $\dot{k}=0$ 線の右側では k は減少し、左側では k は増加する、他方、 $\partial\omega/\partial\delta < 0$ であるから $\dot{\delta}=0$ 線の上側では δ は減少し、下側では δ は増加する。

この 2 本の微分方程式体系のヤコビ行列式は、

$$|J| = \frac{\partial\theta}{\partial k} \frac{\partial\omega}{\partial\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial\delta} \frac{\partial\omega}{\partial k} > 0.$$

$$\text{トレース} : \left(\frac{\partial\theta}{\partial k} + \frac{\partial\omega}{\partial\delta} \right) < 0.$$

したがって、点 S は安定点。

参考文献

- [1] Avramovic, Dragoslav., *Debt Servicing Capacity and Postwar Growth in International Indebtedness* (Baltimore: Johns Hopkins Press, 1958).
- [2] —, et al., *Economic Growth and External Debt* (Baltimore: Johns Hopkins Press, 1964).

- [3] Fei, John C. H. and Paauw, Douglas S., "Foreign Assistance and Self-Help: A Reappraisal of Development Finance," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, 1965.
- [4] McKinnon, Ronald I., "Foreign Exchange Constraints in Economic Development and Efficient Aid Allocation," *Economic Journal*, Vol. 74, 1964.
- [5] Mikesell, Raymond F., *The Economics of Foreign Aid* (Chicago: Aldine, 1968).
- [6] Papanek, Gustav F., "The Effect of Aid and Other Resource Transfers on Savings and Growth in Less Developed Countries," *Economic Journal*, Vol. 82, 1972.
- [7] Solow, R. M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, 1956.
- [8] Takagi, Y., "Aid and Debt Problems in Less-Developed Countries," *Oxford Economic Papers*, Vol. 33, 1981.
- [9] Tobin, James., "A Dynamic Aggregative Model," *Journal of Political Economy*, Vol. 63, 1955.

