単純な双線形モデルを撹乱項にもつ線形回帰モデルについて

中村, 博和

https://doi.org/10.15017/2920740

出版情報：経済論究. 73, pp.113-125, 1989-03-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

単純な双線形モデルを攪乱項にもつ線形回帰モデルについて

中　村　博　和

目　次

1. 序

単純な優対角双線形時系列モデルは

$$\eta_t = a\eta_{t-k}u_{t-\ell} + u_t \qquad (k>\ell) \qquad (1.1)$$

という形式の非線形時系列モデルである。ここで $\{u_t|t\in\mathbf{Z}\}$ は4次のモーメントが存在する独立同一分布にしたがう確率系列であるとする。このような優対角モデルに対して，パラメータ a に関する適当な条件をもとで（1.1）の式を満足する2次強定常列が存在しており，それは平均0の無相関列つまりホワイトノイズになっている。ところがそのような $\{\eta_t|t\in\mathbf{Z}\}$ の3次の自己混合モーメントまで調べてみると，例えば

$$\eta_t = a\eta_{t-2}u_{t-1} + u_t$$

にしたがうよう $\{\eta_t\}$ に対して $\mathrm{E}u_t^2=\sigma^2$ として

$$\mathrm{E}\eta_t\eta_{t-1}\eta_{t-2} = \frac{a\sigma^4}{1-a^2\sigma^2}$$

という結果がえられ，$\{\eta_t\}$ はホワイトノイズであるが独立系列ではないことがわかる。つまり確率系列 $\{\eta_t\}$ はある時点において自己自身の過去の情報が

与えられたとき線形的には予測不可能（平均0でしか予測できない）であるが，(1.1) の形からわかるように，非線形な形式では予測量が構成できるような確率系列である。

一方，Tong〔7〕，Quinn〔8〕等で考察の対象となっているマルコフ型双線形モデル

$$\eta_t = a\eta_{t-1} + c\eta_{t-1}u_t + u_t \tag{1.2}$$

（$\{u_t | t \in \boldsymbol{Z}\}$ は (1.1) のときと同じ）

にしたがう定常系列は1次の自己回帰モデルにしたがう定常系列と同一の自己相関のパターンを示す。しかしモデルの形式が異なるという事実がまず第一に条件付分散が

$$\mathrm{Var}(\eta_t | \eta_{t-1}, \eta_{t-2} \cdots) = (c\eta_{t-1}^2 + 2c\eta_{t-1} + 1)\sigma^2$$

というように過去の値に依存するという特性においてあらわれている。

以上のように2つの双線形時系列モデル (1.1) 及び (1.2) は単純なモデルではあるが，線形モデルではえられず，モデルに非線形性を導入してはじめてえられる特性をもったモデルとなっている。しかし (1.1) の優対角モデルについていえば，それ自体がひとつの時系列に対して適用される場合は想定しがたく，例えば Granger-Andersen〔4〕は経済時系列に線形時系列モデルをあてはめたのちにえられる残差系列に優対角モデルをもちいてモデル全体の予測力を向上させることを試みている。一方マルコフ型双線形モデルはもちろんそれ自身がなんらかの意味ある系列にあてはめうるモデルであると考えられるが，他の使用法としては，回帰モデルの残差系列に系列相関が認められるとき1次の自己回帰モデルがもちいられることが多いという事実を考慮に入れればそのような場合にマルコフ型双線形モデルを想定するという用い方も可能であろう。

本稿では上述のような考え方を背景として以下の2つのモデル

$$\text{(M1)} \quad \begin{cases} y_t = bx_t + \eta_t \\ \eta_t = a\eta_{t-k}u_{t-l} + \eta_t \end{cases}$$

$$\text{(M2)} \quad \begin{cases} y_t = bx_t + \eta_t \\ \eta_t = a\eta_{t-1} + c\eta_{t-1}u_t + u_t \end{cases}$$

について推定問題を中心に簡単な考察をおこなう。以下内容的には，2節では2つの双線形モデルのパラメター推定についていくつかの結果を示し，3節では回帰方程式のパラメターの最小2乗推定量を中心にした考察をおこなう。

2. 双線形時系列モデル

以下で $\{u_t\}$ はつねに $\mathrm{E}u_t=0$，$\mathrm{E}u_t^2=\sigma^2$ の独立同一分布にしたがう確率系列とする。

（I） 優対角モデル

$a^2\sigma^2<1$ のとき

$$\eta_t=u_t+\sum_{r=1}^{\infty}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}u_{t-k-j\ell}\right)u_{t-r\ell} \tag{2.1}$$

で定義される $\{\eta_t\}$ は2次強定常系列であり

$$\eta_t=a\eta_{t-\ell}u_{t-k}+u_t \qquad (\ell>k\geqq 1) \tag{2.2}$$

という関係式をみたしている。したがって本稿ではモデル (2.1) にしたがう定常系列とは (2.1) の $\{\eta_t\}$ であるとする。

優対角モデルのパラメータ a に対しての Yule-Walker 型推定量について中村〔6〕で論じたが，そこでは3次の自己混合モーメントを十分考慮に入れてなかったために推定量が一意的にさだまらないという不都合が生じていた。実際には3次の自己混合モーメントをもちいると以下のようにパラメター a のモーメント法による推定は可能になる。

まず Kumar〔5〕の計算結果を述べておく。

$$\begin{aligned}R_3(\ell,k)&=\mathrm{E}\eta_t\eta_{t-\ell}\eta_{t-k}\\&=\mathrm{E}(a\eta_{t-\ell}u_{t-k}+u_t)\eta_{t-\ell}\eta_{t-k}\\&=a\mathrm{E}(\eta_{t-\ell}^2\eta_{t-k}u_{t-k})\\&=a\mathrm{E}\eta_{t-\ell}^2u_{t-k}(a\eta_{t-k-\ell}u_{t-2k}+u_{t-k})\\&=a\sigma^2\mathrm{E}\eta_{t-\ell}^2=a\sigma^2\mu_2\end{aligned}$$

2乗した系列の自己共分散列については

$$R^{(2)}(h)=COV(\eta_t^2,\ \eta_{t+h}^2)$$

とおいて

$$R^{(2)}(h)=a^2\sigma^2R^{(2)}(h-\ell) \qquad (h>\ell).$$

とくに $h=l+1$ として

$$R^{(2)}(\ell+1)=a^2\sigma^2R^{(2)}(1).$$

したがって

$$\begin{cases} a^2\sigma^2=\dfrac{R^{(2)}(\ell+1)}{R^{(2)}(1)} \\ a\sigma^2=\dfrac{R_3(\ell,\ k)}{\mu_2} \end{cases}.$$

よって

$$a=\frac{\mu_2R^{(2)}(\ell+1)}{R_3(\ell,k)R^{(2)}(1)} \tag{2.3}$$

がえられる。

(2.3) で右辺の式にあらわれるモーメントをその自然な推定量でおきかえれば一致推定量となる a の Yule-Walker 型推定量がえられる。

中村〔6〕でモーメント法による単純な双線形時系列モデルのパラメター推定を考えたときと同様に上述の方法でえられる推定量も最尤法や条件付最小2乗法などの非線形の数値的最適化をともなう推定方法の初期推定値として意味をもつと考えられる。

(Ⅱ) マルコフ型双線形モデル

マルコフ型双線形モデル

$$\eta_t=a\eta_{t-1}+c\eta_{t-1}u_t+u_t \tag{2.4}$$

は，$a^2+c^2\sigma^2<1$ のとき

$$\eta_t=\sum_{r=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{r-1}(a+cu_{t-j})u_{t-r} \tag{2.5}$$

という2次強定常解をもっており，序で述べたように

$$\begin{cases} E\eta_t=0 \\ E\eta_t\eta_{t+s}=a^sEu_t^2=a^s\dfrac{\sigma^2}{1-a^2-c^2\sigma^2} \end{cases}$$

となっている。

マルコフ型双線形モデルのパラメターaの推定量として

$$\hat{a}=\frac{\sum_{t=2}^{T}\eta_{t-1}\eta_t}{\sum_{t=2}^{T}\eta_{t-1}^2} \tag{2.6}$$

が一致推定量となる Yule-Walker 型推定量として考えられるが（中村〔6〕），この型の推定量についてさらに次のことがいえる。

定理１　$\{\eta_t\}$ が四次モーメントをもつとするとき

$$\sqrt{T}(\hat{a}-a)\xrightarrow{D}N(0,\ v).$$

$$v=\frac{c^2\sigma^2\mu_4+2c\sigma^2\mu_3}{(\mu_2)^2}+(1-a^2-c^2\sigma^2)$$

$$\mu_j=\mathrm{E}(\eta_t)^j \qquad i=2,3,4.$$

証明　以下で和はすべて２から T までとする。

$$\hat{a}=\frac{\sum\eta_t\eta_{t-1}}{\sum\eta_{t-1}^2}=\frac{\sum(a\eta_{t-1}+c\eta_{t-1}u_t+u_t)\eta_{t-1}}{\sum\eta_{t-1}^2}$$

より

$$\sqrt{T}(\hat{a}-a)=\frac{\sum(c\eta_{t-1}^2+\eta_{t-1})u_t/\sqrt{T}}{\sum\eta_{t-1}^2/T} \tag{2.7}$$

エルゴード定理より

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum\eta_{t-1}^2=\mathrm{E}\eta_t^2=\frac{\sigma^2}{1-a^2-c^2\sigma^2}\ . \tag{2.8}$$

$\sum(c\eta_{t-1}^2+\eta_{t-1})u_t/\sqrt{T}$ の極限分布についてはマルチンゲール中心極限定理をもちいれば（Billingsley〔２〕）

$$\frac{\sum(c\eta_{t-1}^2+\eta_{t-1})u_t}{\sqrt{T}}\xrightarrow{D}N(0,c^2\sigma^2\mu_4+2c\sigma^2\mu_3+\sigma^2\mu_2). \tag{2.9}$$

がわかる。■

(2.6)，(2.7)，(2.8) より定理の結果がえられる。

定理１の $\mathrm{E}\eta_t^4<\infty$ という仮定は

$$\mathrm{E}(a+cu_t)^4<1 \tag{2.10}$$

のときにはみたされることが (2.5) から容易にわかる。とくに $\{u_t\}$ を正規

確率変数列とするなら（2.9）は

$$a^4+ba^2c^2\sigma^2+3c^4\sigma^4<1$$

という条件になる。またこのときには μ_2 だけでなく μ_3 と μ_4 も a, c, σ^2 の3つのパラメターで表現されるから定理1の v もこの3つのパラメターによってかきあらわすことができるが，それはかなり複雑な式になる（μ_3 と μ_4 については Tong〔7〕参照)。

中村〔6〕ではパラメター c の推定についてもモーメント法で推定量を求める手続きを考察したが，そこでえられた結果はモーメント法の限界を示していた。そこで以下では a の推定は（2.6）でおこなうという前提のもとで c の推定について別の手続きを考える。

序で述べたように

$$f_t=\eta_t-a\eta_{t-1}$$

とおくとき $\mathfrak{F}_t$ を $\{\eta_{t-j}\,|\,j\geqq 0\}$ で生成される σ 集合体として

$$\mathrm{E}(f_t^2\,|\,\mathfrak{F}_{t-1})=c^2\sigma^2\eta_{t-1}^2+2c\sigma^2\eta_{t-1}+\sigma^2.$$

$\{Z_t\}$ を

$$Z_t=f_t^2-\mathrm{E}(f_t^2\,|\,\mathfrak{F}_{t-1})$$

で定義し，a を与えられているとして

$$Q_T(c,\ \sigma^2)=\sum_{t=2}^{T}Z_t^2$$

を最小にする c と σ^2 の求める手続きを考えると，これは通常の条件付最小2乗法に近い感覚になる。ここで a を（2.6）の $\hat{a}$ でおきかえておけばこの方法は数値的非線形最適化によって比較的簡単におこなえるであろう。このようにしてえられる推定量がどのような性質をもつのかはひとつの問題であるが，それは別の機会に論じることにする。

3. 回帰モデルの推定

序で述べた2つのモデルのうちまず第1のモデル

$$(\mathrm{M}.1)\begin{cases} y_t = bx_t + \eta_t \\ \eta_t = a\eta_{t-\ell}u_{t-k} + u_t \qquad (\ell > k \geqq 1) \end{cases}$$

について考える。

$$\boldsymbol{x}' = (x_1, \cdots\cdots\cdots, x_T), \quad \boldsymbol{y}' = (y_1, \cdots\cdots\cdots, y_T)$$

とおくと回帰方程式のパラメター b の最小2乗推定量は

$$\hat{b} = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}.$$

$\{\eta_t\}$ は平均0の無相関な定常系列だから $\hat{b}$ は最良線型不偏推定量である。さらに

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1} \to 0 \qquad (T \to \infty) \tag{3.1}$$

のとき $\hat{b}$ は b の一致推定量となることも通常の線形回帰モデルの理論で知られているとうりである。

パラメター b を上述のように最小2乗推定量 $\hat{b}$ で推定したときには，双線形モデルのパラメター a については例えば2節で述べたように Yule-Walker 型推定量を初期値として用いる条件付最小2乗推定をおこなえばよいが，$\{\eta_t\}$ は観測されない系列であるから残差系列 $\{\hat{\eta}_t\}$

$$\hat{\eta}_t = y_t - \hat{b}x_t$$

を $\{\eta_t\}$ の代用としてもちいなければならない。このときに説明変数列に関する条件 (3.1) のもとで $\hat{b}$ が一致推定量であるから

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{\eta}_t = \eta_t$$

がわかる。

説明変数列に関してさらに条件をつけ加えると次のことが示される。

定理2.1

(i) 説明変数列 $\{x_t\}$ が

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^{T} x_{t+j}^2}{T} = S(\neq 0)$$

が j に関して一様収束という条件をみたすとき

$$\sqrt{T}(\hat{b} - b) \xrightarrow{D} N\left(0;\ \frac{\sigma_\eta^2}{S}\right)$$

$$\sigma_\eta^2 = \mathrm{E}\eta_t^2.$$

(ii) (i)の条件に加えて

$$|x_t|\leqq K \qquad (t=1,2,\cdots\cdots\cdots)$$

とすると

$$\hat{\eta}_t-\eta_t=O_p(T^{-\frac{1}{2}}).$$

証明

((i)) $\boldsymbol{\eta}'=(\eta_1,\cdots,\eta_1)$ とすると

$$\sqrt{T}(\hat{b}-b)=\sqrt{T}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\eta}$$

$$=\left(\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}{T}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{T}}$$

だから

$$\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{T}}\xrightarrow{D}N(0,\ S\sigma_\eta^2)$$

を示せばよい。

$\{\eta_t(M)\}$ を

$$\eta_t(M)=u_t+\sum_{r=1}^{M}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}u_{t-k-jt}\right)u_{t-rt}$$

で定義して

$$\eta_t^{M+1}=\eta_t-\eta_t(M)$$

とする。

$\{\eta_t(M)\}$ は平均0の 2次強定常系列であり $2Ml$ 歩従属である。そして $\{\eta_t(M)\}$ 及び $\{\eta_t^{M+1}\}$ はいずれも無相関列であることが簡単な計算によってわかる。

$\{\eta_t(M)\}$ と $\{\eta_t^{M+1}\}$ をつかうと

$$\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{T}}=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}x_t\eta_t(M)+\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}x_t\eta_t^{M+1} \qquad (3.2)$$

$\eta_t(M)$ は η_t に $M\to\infty$ のとき平均2乗収束しているから

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\Sigma x_t\eta_t^{M+1}\right)=\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}{T}\mathrm{Var}(\eta_t^{M+1})\longrightarrow 0 \qquad (M\to\infty)$$

及び

$$\mathrm{Var}(\eta_t(M)) \longrightarrow \sigma_\eta^2 \qquad (M\to\infty).$$

したがって (3.2)より $T\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\Sigma x_t\eta_t(M)\xrightarrow{D}N(0, S\mathrm{Var}(\eta_t(M)))$$

がわかればよい (Fuller〔3〕246 p.)。

$$A_t=\mathrm{E}(x_{t+2Mt}\eta_{t+2Mt}(M))^2$$
$$+2\sum_{j=1}^{2Mt}\mathrm{E}\{x_{t+2Mt}\eta_{t+2Mt}(M)x_{t+2Mt-j}\eta_{t+2Mt-j}(M)\}$$

で定義される列 $\{A_t\}$ を考えると $\{\eta_t(M)\}$ の特性より

$$A_t=x_{t+2Mt}^2\mathrm{Var}(\eta_t(M)).$$

定理の仮定より

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}A_{t+j}=S\mathrm{Var}(\eta_t(M)) \qquad (t\text{ に関し一様})$$

よって M 歩従属な 確率系列に 成り立つ 中心極限 定理 (Fuller〔3〕246p.)をもちいて

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}x_t\eta_t(M) \longrightarrow N(0, S\mathrm{Var}(\eta_t(M))).$$

がわかる。

(ii) $\hat{\eta}_t-\eta_t=(\hat{b}-b)x_t$

だから(ⅰ)の結果より明らか。

$\{\hat{\eta}_t\}$ をつかった標本自己相関についても次の評価ができる。

定理2.2

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{T-h}x_{t+j}x_{t+j+h}}{T}=g(h) \qquad (t\text{ に関し一様})$$

とするとき

$$\frac{\sum_{j=1}^{T-h}\hat{\eta}_{t+h}\hat{\eta}_t}{T}-\frac{\sum_{j=1}^{T-h}\eta_{t+h}\eta_t}{T}=O_p(T^{-1}).$$

証明

$$\hat{\eta}_t\hat{\eta}_{t+h}=(\hat{b}-b)^2x_tx_{t+h}+(\hat{b}-b)x_{t+h}\eta_t+(\hat{b}-b)x_t\eta_{t+h}+\eta_t\eta_{t+h}.$$

よって

$$\frac{\sum\hat{\eta}_t\hat{\eta}_{t+h}}{T}-\frac{\sum\eta_t\eta_{t+h}}{T}$$

$$=\frac{1}{T}\{\sqrt{T}(\hat{b}-b)\}^2\frac{\sum x_t x_{t+h}}{T}+\frac{1}{T}\sqrt{T}(\hat{b}-b)\frac{\sum x_{t+h}\eta_t}{\sqrt{T}}$$

$$+\frac{1}{T}\sqrt{T}(\hat{b}-b)\frac{x_t\eta_{t+h}}{\sqrt{T}}$$

上式の右辺で

$$\frac{\sum x_{t+h}\eta_t}{\sqrt{T}},\ \frac{\sum x_t\eta_{t+h}}{\sqrt{T}}\xrightarrow{D}N(0,\ S\sigma_\eta^2)$$

が定理2.1の(ⅰ)の証明と同様にしてわかる。したがって定理2.1(ⅰ)の結果とあわせて右辺の各項はすべて $O_p(T^{-1})$ である。

次に第2のモデル

$$(\mathrm{M2})\begin{cases}y_t=bx_t+\eta_t\\ \eta_t=a\eta_{t-1}+c\eta_{t-1}u_t+u_t\end{cases}$$

について考える。 ▮

(M2) のモデル回帰方程式のパラメターbの最小2乗推定量 $\hat{b}$

$$\hat{b}=(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$$

は $\{\eta_t\}$ が系列相関をもつからもちろん最良線型不偏推定量とはならないが以下のようなことはいえる。

定理3.1

(ⅰ) $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\to\infty\,(T\to\infty)$ ならば $\hat{b}$ は一致推定量。

(ⅱ) $\lim_{T\to\infty}\frac{\sum x_{t+j}x_{t+j+h}}{T}=g(h)$ 　　(t に関し一様)

かつ

$$|g(h)|\leqq K \qquad (h=1,2,\cdots\cdots\cdots)$$

ならば

$$\sqrt{T}(\hat{b}-b)\longrightarrow N(0,\ (g(o))^{-2}S)$$

$$S=\left\{g(o)+2\sum_{h=1}^{\infty}g(h)a^h\right\}\sigma_\eta^2.$$

証明

（ⅰ） 1次の自己回帰モデルを攪乱項にもつ回帰モデルの最小2乗推定量は自己回帰モデルの共分散構造の特性によって定理の仮定があるとき一致推定量になる（Amemiya〔1〕185p.） 2節にかいたように $\{\eta_t\}$ は1次の自己回帰モデルと同一の共分散構造をもっているから $\hat{b}$ が b の一致推定量になることがわかる。

（ⅱ）

$$\eta_t(M)=u_t+\sum_{r=1}^{M}\left\{\prod_{j=1}^{r-1}(a+cu_{t-j})\right\}u_{t-r}$$

とおくと $\{\eta_t(M)\}$ は平均0の2次強定常系列であり M 歩従属。

$$A_t=x_{t+M}^2\mathrm{Var}(\eta_t+(M))$$
$$+2\sum_{j=1}^{M}x_{t+M-j}x_{t+M}\mathrm{Cov}(\eta_{t+M-j}(M),\ \eta_{t+M}(M))$$

で定義される列に対して仮定より

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}A_{t+j}=g(o)\mathrm{Var}(\eta_t(M))+2\sum_{h=1}^{M}g(h)\mathrm{Cov}(\eta_o(M),\ \eta_h(M))$$
$$=S_M$$

したがって

$$\frac{\sum x_t\eta_t(M)}{\sqrt{T}}\longrightarrow N(0,\ S_M). \qquad (3.3)$$

$\eta_t(M)$ は η_t に $M\to\infty$ のとき平均2乗収束しており

$$\mathrm{Cov}(\eta_h,\ \eta_o)=a^h\sigma_\eta^2$$

より

$$|S_M-S|$$
$$\leqq K\left\{\sum_{h=o}^{M}\left|\mathrm{Cov}(\eta_h(M),\eta_o(M))-\mathrm{Cov}(\eta_h,\eta_o)\right|\right\}+K\frac{a^{M+1}}{1-a}\sigma_\eta^2. \qquad (3.4)$$

(3.4) 式で

$$|\mathrm{Cov}(\eta_h(M),\ \eta_o(M))-\mathrm{Cov}(\eta_h,\eta_o)|$$
$$\leqq\{\mathrm{E}|\eta_h(M)-\eta_h|^2\}^{\frac{1}{2}}\{\mathrm{E}|\eta_o(M)|^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{\mathrm{E}|\eta_h|^2\}^{\frac{1}{2}}\{\mathrm{E}|\eta_o(M)-\eta_o|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq [\{\mathrm{E}|\eta_o(M)|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\mathrm{E}|\eta_o(M)|^2\}^{\frac{1}{2}}] \left\{\sigma^2 \frac{(a^2+c^2\sigma^2)^{M+1}}{1-a^2-c^2\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

であり，$a^2+c^2\sigma^2<1$ であるから

$$\lim_{M\to\infty} S_M = S. \tag{3.5}$$

$$\sqrt{T}(\hat{b}-b) = \frac{\sum x_t\eta_t(M)/\sqrt{T}}{\sum x_t^2/T} + \frac{\sum x_t(\eta_t-\eta_t(M))/\sqrt{T}}{\sum x_t^2/T}$$

だから，定理2.1(i)と同様の理由で(3.3)及び(3.5)から

$$\sqrt{T}(\hat{b}-b) \longrightarrow N(0,\ (g(o))^{-2}S)$$

が示される。 ▮

2節で考えたパラメター a の Yule-Walker 型推定量を残差列をつかって構成したときにも次のことがいえる。

定理3.2　定理3.1の仮定のもとで

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}_t}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\eta}_{t-1}^2}$$

に対して

$$\sqrt{T}(\hat{a}-a) \xrightarrow{D} N(O, v).$$

ただし v は定理1の v と同じ。

証明　和はすべて $t=2$ から T までとする。

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{T}\left(\frac{\sum \hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}_t}{\sum \hat{\eta}_{t-1}^2} - a\right)$$

とすると。

$$S_1 = \sum \hat{\eta}_t\hat{\eta}_{t-1}/\sqrt{T} - a\sum \hat{\eta}_{t-1}^2/\sqrt{T}$$

$$S_2 = \sum \hat{\eta}_{t-1}^2/T.$$

S_1 と S_2 はそれぞれ

$$S_1 = \frac{\sum \eta_{t-1}\eta_t}{\sqrt{T}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{T}} - \frac{a\sum \eta_{t-1}^2}{\sqrt{T}} + \lambda_2$$

$$S_2 = \frac{\sum \eta_{t-1}^2}{T} + \frac{\lambda_3}{T}$$

とかける。ここで

$$\lambda_1=(b-\hat{b})^2\sum x_t x_{t-1}+(b-\hat{b})\sum x_t \eta_{t-1}+(b-\hat{b})\sum x_{t-1}\eta_t$$

$$\lambda_2=a\sqrt{T}\left(\frac{\sum\hat{\eta}_t^2}{T}-\frac{\sum\eta_t^2}{T}\right)$$

$$\lambda_3=(b-\hat{b})\sum x_t^2+2(b-\hat{b})\sum x_t\eta_t.$$

定理2.1の結果及びその証明より

$$\mathrm{plim}\frac{\lambda_1}{\sqrt{T}}=0,\quad \mathrm{plim}\frac{\lambda_3}{\sqrt{T}}=0,\quad \mathrm{plim}\lambda_2=0$$

がわかるから $\sqrt{T}(\hat{a}-a)$ に対して定理1と同じ結果が成立する。

4. あとがき

本稿では単純な双線形モデルを撹乱項にもつ線形回帰モデルについて簡単な理論的考察をおこなった。線形過程を撹乱項にもつ回帰モデルについて多くの研究がなされている状況を考えればまだ多くの事柄が考察されるべき問題として残っている。また本稿では回帰モデルも一変数の単純な場合に限定したが，それの多変数への拡張は比較的容易であると考えられる。

参考文献

〔1〕 Amemiya, T. (1986) "*Advanced Econometrics*", Basil-Blacwell.

〔2〕 Billingsley, P. (1961) "The Lindeberg-Lévy Theorem for Martingales", *Proc. Amer. Math. Soc.* 12, 788-792.

〔3〕 Fuller, W. A. (1976) "*Introduction to Statistical Time Series*", Wiley.

〔4〕 Granger, C. W. J. and A. P. Andersen (1978) "*An Introduction to Bilinear Time Series Models*", Vandenhoeck and Ruprecht.

〔5〕 Kumar, K. (1986) "On the Identification of Some Bilinear Time Series Models", *J. of Time Series Anal*, 7, 117-122.

〔6〕 中村博和 (1987) "単純な双線形時系列モデルのモーメント法によるパラメター推定"，九州大学大学院経済論究67号，119-132.

〔7〕 Tong, H. (1981) "A Note on a Markov Bilinear Stochastic Process in Discrete Time", *J. of Time Series Anal.* 2, 279-284.

〔8〕 Quinn, B. G. (1982) "A Note on the Existence of Strictly Stationary Solutions to Bilinear Equations", *J. of Time Series Anal.* 3, 249-252.