九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

双線形時系列モデルに成り立つ中心極限定理について

中村, 博和

https://doi.org/10.15017/2920706

出版情報：経済論究. 69, pp.17-30, 1987-11-26. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

双線形時系列モデルに成り立つ中心極限定理について

中　村　博　和

目　次

1. 序

本稿の目的は Granger and Andersen [3] などで研究されている双線形時系列モデル BL (P, Q, S, R)

$$x_t=\sum_{i=1}^{P}a_i x_{t-i}+\sum_{i=1}^{Q}b_i e_{t-i}+\sum_{k=1}^{S}\sum_{l=1}^{R}c_{kl}x_{t-k}e_{t-l}+e_t \tag{1.1}$$

のなかで比較的単純な形式のモデルをとりあげ，それらのモデルにしたがう定常過程に成り立つ中心極限定理を考察することである。

中心極限定理は確率論および統計理論で中心のひとつになる定理であり，確率変数列が独立でない場合についても様々な条件のもとでの研究がなされている。

そのなかで定常過程にもとづく時系列解析の分野では，入力が独立同一分布にしたがう確率変数列である線形過程 $\{x_t \mid t\in \boldsymbol{Z}\}$

$$x_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j e_{t-j},\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|<\infty \tag{1.2}$$

を考えるときに，$Ex_{t+s}x_t=\gamma_s$ として

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}x_t\right),\quad \sqrt{n}\left(\frac{1}{n-s}\sum_{t=1}^{n-s}x_{t+s}x_t-\gamma_p\right)$$

などの統計量の漸近分布が正規分布になるという結果が古典的である。そしてその証明はM従属な確率変数列に中心極限定理が成り立つという事実にもとづいておこなわれるのが通常である。

双線形時系列モデルにしたがう定常過程は（1.2）のような形式にはかけないが，類似の表現が可能である。したがって本稿の中心となる部分も，やはり，M従属な確率変数列に成り立つ中心極限定理を経由しての考察である。

また最近ではマルチンゲール中心極限定理を利用した時系列モデル解析の研究がおこなわれているが，本稿ではマルチンゲール中心極限定理から導かれたエルゴード的な定常過程に関する中心極限定理の適用について言及する。

2.　双線形時系列モデル

本稿では次の２つの形式の双線形時系列モデルを考える。

（A）　BL (P, 0, P, 1)

$$x_t=\sum_{i=1}^{P} a_j x_{t-j}+\sum_{j=1}^{P} b_j x_{t-j} e_{t-1}+e_t. \tag{2.1}$$

（B）　単純な優対角（対角）モデル

$$x_t=a x_{t-l} e_{t-k}+e_t,\quad l \geqq k>0. \tag{2.2}$$

(B) で $k=1$ の場合のモデルは (A) のモデルの特別な場合となるが，それ以外のときにはそうなってはいない。

(2.1)，(2.2) のいずれのモデルにおいても $\{e_t \mid t \in \boldsymbol{Z}\}$ は平均が０で分散が１の同一分布にしたがう独立確率変数列とし，４次のモーメントをもつとする。

(2.1) のモデルは以下のように行列とベクトルを定めることによって，(2.3) のような状態空間表現ができる。

$$\underset{p\times p}{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_p \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \underset{p\times p}{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_p \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T=(1,0,\cdots\cdots,0),\quad X_t^T=(x_t, x_{t-1},\cdots\cdots, x_{t-p+1})$$

（Tは転置を表わす記号）

$$X_t = AX_{t-1} + BX_{t-1}e_{t-1} + Ce_t \tag{2.3}$$

このとき，⊗を行列のクロネッカー積を表わす記号として，$p^2 \times p^2$ の行列 $A \otimes A + B \otimes B$ の固有値がすべて単位円内にあれば

$$X_t = Ce_t + \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} (A + Be_{t-i}) Ce_{t-r}. \tag{2.4}$$

という形式の定常過程 $\{X_t \mid t \in \boldsymbol{Z}\}$ が定義できて，これは (2.3) をみたす。同じ条件のもとで，逆に，(2.3) を満足する定常過程，$\{X_t \mid t \in \boldsymbol{Z}\}$ は (2.4) の表現が可能である (M. B. Rao, et al [8])。

$\{x_t \mid t \in \boldsymbol{Z}\}$ を下記の (2.5) のように定義すれば (2.2) のモデルについても上述したことと同じ内容のことがいえる。

$$x_t = e_t + \sum_{r=1}^{\infty} a^r \left(\prod_{j=0}^{r-1} e_{t-k-jl} \right) e_{t-rl}. \tag{2.5}$$

さらに (2.2) のモデルにしたがう定常過程については $a^4 E(e_t^4) < 1$ ならば4次のモーメントをもつ (Granger and Andersen [3])。

以上の事実にもとづいて，本稿では，(2.3)，(2.2) のモデルにしたがう定常過程とは，それぞれ (2.4)，(2.5) のように表現される定常過程をさすことにする。

(注)

① 本稿で定常というときは強定常をさしている。

② たとえば (2.5) のような形式の定常過程を双線形時系列モデルにしたがうことから双線形系列とよんでもよいが，[9] で (2.5) とは異なる形式の定常過程が双線形系列と定義されているので本稿では (2.5) の系列を双線形系列とはよばない。

3. 中心極限定理

以下でモデル (2.3)，(2.2) にしたがう定常過程，つまり (2.4)，(2.5) の形式の定常過程に成り立つ中心極限定理を考察するが，まず前半部分では必要になる定義と定理を述べる。それらの事項についての詳しい内容は Villegas [9]，Marsaglia [5] が参考になる。

$X \in \boldsymbol{R}^p$ のノルムを $|X|$ であらわす。$\boldsymbol{R}^p$ 値確率ベクトル $X = (x_1, \cdots\cdots, x_p)$ と

$Y=(y_1,\cdots\cdots,y_p)$ の内積は

$$(X,Y)=\sum_{i=1}^{p} Ex_i y_i$$

で定義され，X のノルムは

$$\|X\|_p \equiv \sqrt{(X,X)}$$

で定義される。

定義 3.1

(1)　点列 $\{a_{ij}|i,j=1,2,\cdots\cdots\}$ に対して

$$\lim_{j\to\infty}(\lim_{i\to\infty}\sup|a_{ij}-a|)=0$$

のとき二重点列 $\{a_{ij}\}$ は a に iterated sense で収束するといい

$$\operatorname*{ilim}_{ij} a_{ij}=a$$

と表わす。

(2)　確率ベクトルの二重列 $\{X_{ij}|i,j=1,2,\cdots\cdots\}$ は任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して

$$\operatorname*{ilim}_{ij} P(|X_{ij}-X|>\varepsilon)=0$$

のとき X に iterated sense で確率収束するといい

$$\operatorname*{iplim}_{ij} X_{ij}=X$$

と表わす。

(3)　$P,\{P_{ij}|i,j=1,2,\cdots\cdots\}$ をそれぞれ X, X_{ij} の確率分布とするとき任意の有界連続関数 f に対して

$$\operatorname*{ilim}_{ij}\int f\mathrm{d}p_{ij}=\int f\mathrm{d}p$$

ならば X_{ij} は X に iterated sense で分布収束するといい

$$X_{ij} \Rightarrow\Rightarrow X$$

と表わす。

定理 3.1 (Villegas [9])

$\{X_{ij}|i,j=1,2,\cdots\cdots\}$，$\{X_i|i=1,2,\cdots\cdots\}$ を確率ベクトル列とする。

(1)　$\begin{cases} X_{ij} \Rightarrow\Rightarrow X \\ \mathrm{iplim}(X_i-X_{ij})=0 \end{cases}$

ならば X_i は X に分布収束する。

(2) X_j が X に分布収束し，j を固定したとき X_{ij} が X_j に分布収束するならば

$$X_{ij} \Rightarrow\Rightarrow X.$$

確率ベクトル列 $\{X_j | j=1, 2, \cdots\cdots\}$ は $s-r>M$ のとき，$\{X_1, \cdots\cdots, X_r\}$ と $\{X_s, X_{s+1}, \cdots\cdots, X_n\}$ が独立なら M 従属であるという。

定理 3.2 (Villegas [9])

$\{X_j | j=1,2,\cdots\cdots\}$ を M 従属なベクトル値定常過程とする。$S_n=X_1+\cdots\cdots+X_n$ とおくと $n^{-\frac{1}{2}}(S_n-ES_n)$ の分布は $n\to\infty$ のとき，平均が0で分散 Γ の正規分布に収束する。ここで

$$\Gamma=\sum_{h=-M}^{M}\Gamma(h),\ \Gamma(h)=E(X_{t+h}-EX_{t+h})(X_t-EX_t)^T.$$

以上の準備のもとで，まず (2.4) の形式のベクトル値定常過程 $\{X_t | t\in \boldsymbol{Z}\}$ に関して $n^{-\frac{1}{2}}$ (S_n-ES_n) の極限分布を考える。

次の補題は (2.4) の $\{X_t\}$ の存在証明のなかであらわれている。

補題 3.1 $\{\lambda_i\}$ を行列 $A\otimes A+B\otimes B$ の固有値の集合とし

$$\lambda=\operatorname*{Max}_i\{|\lambda_i|\}$$

とおくと，$r\geqq 2$ のとき

$$E\left[\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)_{kl}\right]^2<K\lambda^{r-1},$$
$$(k,\ l=1,\ 2, \cdots\cdots, p).$$

ここでKは k, l, t に無関係な定数であり，$(A)_{kl}$ は行列 A の (k,l) 要素を表わす。

証明. $(A\otimes A)_{hk;lm}$ をクロネッカー積にあらわれる A の (h,k) 要素と (l,m) 要素の積とすると

$$(A)_{kl}^2=(A\otimes A)_{kl;kl}.$$

したがって

$$E\left[\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)_{kl}\right]^2$$
$$=E\left(\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)\otimes\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)\right)_{kl;kl}$$

$$=E\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\otimes(A+Be_{t-j})\right)_{kl;kl}$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{r-1}E\,(A+Be_{t-j})\otimes(A+Be_{t-j})\right)_{kl;kl}$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{r-1}E\,(A+Be_{t})\otimes(A+Be_{t})\right)_{kl;kl}$$

$$=\left((A\otimes A+B\otimes B)^{r-1}\right)_{kl;kl}$$

$$<K\lambda^{r-1}.$$ ∎

補題 3.2 $(Y)_l$ でベクトル Y の第 l 要素をあらわし，$Ee_t^4<\infty$ とする。補題3.1と同じ λ に対して，$r\geqq 2$ のとき

$$E\left[\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})\,Ce_{t-r}\right)_l\right]^2<L\lambda^{r-1}.$$
$$(l=1,\cdots\cdots,p)$$

ここで L は t と l に無関係な定数。

証明。シュワルツの不等式をもちいて

$$E\left[\left(\prod_{i=1}^{r}(A+Be_{t-j})\,Ce_{t-r}\right)_l\right]^2$$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)_{lk}((A+Be_{t-r})Ce_{t-r})_k\right]^2$$

$$\leqq E\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\prod_{j=1}^{r-1}(A+Be_{t-j})\right)_{lk}^2\right]E\left[\sum_{k=1}^{p}\left((A+Be_{t-r})\,Ce_{t-r}\right)_k^2\right] \qquad (3.1)$$

ここで

$$E((A+Be_{t-r})Ce_{t-r})_k^2$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{p}(A)_{kh}(C)_h e_{t-r}+\sum_{h=1}^{p}(B)_{kh}(C)_h\,e_{t-r}^2\right]^2.$$

$Ee_t^4<\infty$ だからこれは A, B, C および，$Ee_t^4=\sigma$（任意の $t\in\boldsymbol{Z}$）のみに依存する定数でおさえられる。したがって（3.1）と補題3.1をもちいて，l と t に無関係な定数 L が存在して

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})\,Ce_{t-r}\right)_l\right]^2<L\lambda^{r-1}.$$ ∎

定理 3.3 $\{X_t \mid t\in\boldsymbol{Z}\}$ を（2.4）で定義される定常過程とする。行列 $A\otimes A+B\otimes B$ と A の固有値はすべて単位円にあるとする。

$$S_n=X_1+\cdots\cdots+X_n$$

とおくとき，$n^{-\frac{1}{2}}(S_n-ES_n)$ の分布は $n\to\infty$ のとき平均が 0 で分散が Γ の正規分布に収束する。ここで

$$\begin{cases}\Gamma=\Gamma(0)+(I-A)^{-1}\Gamma(1)+\Gamma(1)^T(I-A^T)^{-1}\\ \Gamma(h)=COV(X_{t+h},X_t).\end{cases}$$

証明。(2.4) の右辺の和の部分を m までの和にして次のように定義される定常過程 $\{X_{tm}|t\in\boldsymbol{Z}\}$ をつくる。

$$X_{tm}=Ce_t+\sum_{r=1}^{m}\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})Ce_{t-r} \tag{3.2}$$

$\{e_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ の独立性から $\{X_{tm}\}$ は m 従属な定常過程である。

したがって

$$S_{nm}=X_{1m}+X_{2m}+\cdots\cdots+X_{nm}$$

とおくと定理 3.2 より $n^{-\frac{1}{2}}(S_{nm}-ES_{nm})$ の分布は $n\to\infty$ のとき平均が 0 で分散が Γ_m の正規分布に収束する。

$$\begin{cases}\Gamma_m=\sum_{h=-m}^{m}\Gamma_m(h)\\ \Gamma_m(h)=COV(X_{t+hm},X_{tm}).\end{cases}$$

ここで $\Gamma_m(h)$ が存在していること，つまり $\{X_{tm}\}$ が 2 次強定常であることは以下のようにしてわかる。補題 3.2 より，$(X_{tm})_l$ を X_{tm} の第 l 要素として

$$[E(X_{tm})_l^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[E\left((Ce_t)_l+\left(\sum_{r=1}^{m}\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})Ce_{t-r}\right)_l\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq(C)_l+\sum_{r=1}^{m}K'\lambda^{\frac{r-1}{2}}\ (\lambda \text{ は補題3.2の } \lambda)$$

である。ここで $\lambda<1$ だから，任意の m に対して

$$E(X_{tm})_l^2<\infty\ (l=1,2,\cdots\cdots,p).$$

同じようにして X_{tm} が $m\to\infty$ のとき X_t に平均 2 乗収束することがわかり，$\{X_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ は 2 次強定常である。よって

$$\Gamma(h)=COV(X_{t+h},X_t)$$

が存在して，h に関して一様に

$$\Gamma_m(h)\to\Gamma(h)\ (m\to\infty)$$

がわかる。直接的にはこの収束は以下のように評価される。$\lambda_1=\sqrt{\lambda}$ として，

$$|E(X_{t+h})_k(X_t)_l - E(X_{t+h,m})_k(X_{tm})_l|$$
$$\leqq |E[(X_{t+h})_k - (X_{t+h,m})](X_{tm})_l|$$
$$+|E(X_{t+h})_k[(X_t)_l - (X_{tm})_l]|$$
$$\leqq \{E[(X_{t+h})_k - (X_{t+h,m})_k]^2\}^{\frac{1}{2}} \{E(X_{tm})_l^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{E(X_{t+h})_k^2\}^{\frac{1}{2}} \{E[(X_t)_l - (X_{tm})_l]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$< K\lambda_1^{m+1}$ （K は m, h に無関係な定数）　(3.3)

$$\mu_m = EX_{tm} = \sum_{j=0}^{m-1} A^j BC.$$

$$\mu = EX_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j BC = (I-A)^{-1}BC$$

だから，η を A の固有値の絶対値の最大値として

$$|(\mu\mu^T)_{kl} - (\mu_m\mu_m^T)_{kl}|$$
$$= |(\mu)_k(\mu)_l - (\mu_m)_k(\mu_m)_l|$$
$$\leqq |(\mu)_k[(\mu)_l - (\mu_m)_l]| + |(\mu_m)_l[(\mu)_k - (\mu_m)_k]|$$

$\leqq K'\eta^{m+1}$ （K' は m, h に無関係な定数）

よって $\lambda_* = \max(\lambda_1, \eta)$ とすると，適当な定数 L をとれば，k, l, h に関して一様に

$$|(\Gamma(h))_{kl} - (\Gamma_m(h))_{kl}| < L\lambda_*^{m+1} \tag{3.4}$$

が成り立つ。

一方，$\{X_t\}$ は (2.3) をみたすから (2.3) の形式にもとづいて

$$\Gamma(h) = A^{h-1}\Gamma(1) \quad (h \geqq 2, 3, \cdots\cdots)$$

がえられる (T. S. Rao [7])。

したがって

$$\sum_{h=0}^{\infty} \Gamma(h) = \Gamma(0) + (I-A)^{-1}\Gamma(1).$$

$h>0$ として，$\Gamma(h)^T = \Gamma(-h)$ より

$$\sum_{h=-\infty}^{-1} \Gamma(h) = \Gamma^T(1)(I-A^T)^{-1}.$$

よって (3.4) より

$$\left|\sum_{h=-\infty}^{\infty} (\Gamma(h))_{kl} - \sum_{h=-m}^{m} (\Gamma_m(h))_{kl}\right|$$

$$\leqq\left|\sum_{-\infty}^{-m-1}(\Gamma(h))_{kl}\right|+\left|\sum_{h=-m}^{m}(\Gamma(h)-\Gamma_m(h))_{kl}\right|+\left|\sum_{m+1}^{\infty}(\Gamma(h))_{kl}\right|$$

$$\leqq\left|\sum_{-\infty}^{-m-1}(\Gamma(h))_{kl}\right|+2L(m+1)\lambda_*^{m+1}+\left|\sum_{m+1}^{\infty}(\Gamma(h))_{kl}\right|\to 0\ (m\to\infty).$$

つまり，

$$\Gamma_m\to\Gamma\quad(m\to\infty).$$

したがって定理3.1 (2)より $n^{-\frac{1}{2}}(S_{nm}-ES_{nm})$ は iterated sense で平均が 0 で分散が Γ の正規分布に収束する。

定理 3.1 (1) より

$$\underset{nm}{\mathrm{iplim}}[n^{-\frac{1}{2}}(S_n-ES_n)-n^{-\frac{1}{2}}(S_{nm}-ES_{nm})]=0$$

を示せばよいが，これは，チェビシェフの不等式から

$$\underset{nm}{\mathrm{ilim}}\|n^{-\frac{1}{2}}(S_n-ES_n)-n^{-\frac{1}{2}}(S_{nm}-ES_{nm})\|_p^2=0$$

が成り立てば成立する。

$\{Y_{tm}|t\in\boldsymbol{Z}\}$ を

$$Y_{tm}=X_t-X_{tm}=\sum_{r=m+1}^{\infty}\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})Ce_{t-r}$$

で定義すると，$\{Y_{tm}\}$ は 2 次強定常であり

$$EY_{tm}=\sum_{r=m}^{\infty}A^rBC.$$

$$\|n^{-\frac{1}{2}}\{(S_n-S_{nm})-E(S_n-S_{nm})\}\|_p^2$$

$$=\frac{1}{n}\left\|\sum_{t=1}^{n}\{(X_t-X_{tm})-E(X_t-X_{tm})\}\right\|_p^2$$

$$=\frac{1}{n}\left\|\sum_{t=1}^{n}(Y_{tm}-EY_{tm})\right\|_p^2$$

$$=\sum_{h=0}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\beta_m(h)\quad. \tag{3.5}$$

ここで

$$\beta_m(h)=(Y_{t+hm}-EY_{t+hm},Y_{tm}-EY_{tm})$$
$$=\sum_{j=1}^{p}E(Y_{t+hm}-EY_{t+hm})_k(Y_{tm}-EY_{tm})_k\quad.$$

mを固定したとき

$$\sum_{h=0}^{\infty}\beta_m(h)<\infty$$

を示す。

$$E(Y_{t+hm}-EY_{t+hm})_k(Y_{tm}-EY_{tm})_k$$

$$=E\left[\sum_{r=m+1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{s=m+1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Ce_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k\right]$$

$$=\sum_{s,r=m+1}^{\infty}E\left[\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Be_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k\right] \tag{3.6}$$

補題 3.2 から

$$\sum_{s=m+1}^{\infty}\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}\left|E\left(\prod_{j=1}^{r}(A+B_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\prod_{j=1}^{s}(A+B_{t-j})Ce_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k\right|\right)<\infty$$

がわかるから，(3.6) については

$$\sum_{s=m+1}^{\infty}\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}E\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Ce_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k\right)$$

の形式の和を考えてよい。

$h\geqq m+1$ とするとき，$m+1\leqq r\leqq h$ なるrに対して２つの確率変数

$$\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r},\quad \prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Ce_{t-s}$$

は独立になる。よって

$$\sum_{r=m+1}^{\infty}E\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k$$

$$\left.\times\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Ce_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k\right)$$

$$=\sum_{r=h+1}^{\infty}E\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})Ce_{t+h-r}-A^{r-1}BC\right)_k$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-j})Ce_{t-s}-A^{s-1}BC\right)_k$$

$$\leqq\sum_{r=h+1}^{\infty}\left\|\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t+h-j})\,Ce_{t+h-r}\right)_k\right\|_1$$

$$\times\left\|\left(\prod_{j=1}^{s}(A+Be_{t-s})\,Ce_{t-s}\right)_k\right\|_1$$

$$<K\lambda_1^{s-1}\sum_{r=h+1}^{\infty}\lambda_1^{r-1}$$

$$=K'\lambda_1^{s-1}\lambda_1^{h} \qquad (K,\ K'\text{は定数})$$

したがって

$$|\beta_m(h)|<pK''\lambda_1^{m}\lambda_1^{h} \qquad (h\geqq m+1)$$

となり

$$\sum_{h=0}^{\infty}|\beta_m(h)|<\infty \tag{3.7}$$

がわかる。

(3.7) から

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{h=0}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\beta_m(h)=\sum_{h=0}^{\infty}\beta_m(h) \tag{3.8}$$

次に

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\beta_m(h)=0 \tag{3.9}$$

を示す。

$$|\beta_m(h)|^2=|(Y_{tm}-EY_{tm},Y_{t+hm}-EY_{t+hm})|^2$$
$$\leqq\|Y_{tm}\|_p^2\,\|Y_{t+hm}\|_p^2 \quad .$$

補題3.2より

$$\|(Y_{tm})_l\|_1=\left\|\sum_{r=m+1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-j})Ce_{t-r}\right)_l\right\|_1$$
$$\leqq\sum_{r=m+1}^{\infty}\left\|\left(\prod_{j=1}^{r}(A+Be_{t-i})Ce_{t-r}\right)_l\right\|_1$$
$$<L\sum_{r=m+1}^{\infty}\lambda_1^{r-1}=\frac{L}{1-\lambda_1}\lambda_1^{m}$$

したがって h に無関係な定数 K が存在して

$$|\beta_m(h)|<K\lambda_1^{2m} \quad (h\geqq 0).$$

よって

$$\left|\sum_{h=0}^{\infty}\beta_m(h)\right|$$
$$\leqq\sum_{h=0}^{m}|\beta_m(h)|+\sum_{h=m+1}^{\infty}|\beta_m(h)|=K(m+1)\lambda_1^{2m}+pK''\lambda_1^{2m+1}$$
$$\to 0 \qquad (m\to\infty)$$

となり (3.9) がえられる。

(3.5), (3.8), (3.9) から

$$\lim_{m\to\infty}(\limsup_{n\to\infty}\|n^{-\frac{1}{2}}(S_n-S_{nm})-E(S_n-S_{nm})\|_p^2)=0$$

がえられる。 ∎

$\Gamma(0)$, $\Gamma(1)$については, $\{e_t\}$が正規確率変数列のときには, T. S. Rao [7] などが参考になる。

(2.5) の形式の定常過程 $\{x_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ についても 定理 3.3 の証明と 同様の手法をもちいることが可能であるが, 以下では, マルチンゲール中心極限定理から導かれている次の定理の適用について述べる。

定理 3.4 (Hall and Heyde [4])

$\{x_t(\omega)=x_0(T^t\omega)|t\in\boldsymbol{Z}\}$ を確率空間 (Ω, $\mathfrak{F}$, P) で定義された平均 0 のエルゴード的な 2 次強定常過程とする。$\mathfrak{M}_0$ を $\mathfrak{M}_0\subset T^{-1}\mathfrak{M}_0$ をみたす $\mathfrak{F}$ の部分 σ 集合体とし, $\mathfrak{M}_k=T^{-k}\mathfrak{M}_0$ とする。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(E(E(x_0|\mathfrak{M}_{-m}))^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(x_0-E(x_0|\mathfrak{M}_m))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]<\infty \tag{3.10}$$

ならば, $\{x_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ に中心極限定理が成り立つ。

(2.5) で $k=l$ と $k\neq l$ の場合にわけて, $\{x_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ が (3.10) の条件をみたすことを確認すればよい。

$k=l$ の場合には $Ex_t=a$ となっているから, $y_t=x_t-a$ とおくと

$$Ey_t=0,\ Ey_t^2<\infty.$$

$\mathfrak{M}_0$ は $\{e_{-j}(\omega)=e_0(T^{-j}\omega)|j\geqq 0\}$ で生成される σ 集合体とする。

$$x_0=e_0+ae_{-k}^2+\sum_{r=2}^{\infty}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}e_{-k-kj}\right)e_{-rk}$$

の右辺は平均 2 乗収束しているから

$$E\{(E(y_0|\mathfrak{M}_{-m}))^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=E\left(E\left(e_0+ae_{-k}^2-a+\lim_{n\to\infty}\sum_{r=2}^{n}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}e_{-k-jk}\right)e_{-rk}|\mathfrak{M}_{-m}\right)\right)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left(\left(E\left(e_0+ae_{-k}^2-a+\sum_{r=2}^{n}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}e_{-k-jk}\right)e_{-rk}|\mathfrak{M}_{-m}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\{e_t\}$ の独立性に注意すれば, $m>k$ のときこれが 0 になることが容易にわかるから, (3.10) が成立する。

$k>l$ の場合も 同じようにして (3.10) がみたされることが 簡単にわかるか

ら次の定理をえる。

定理 3.5　$\{x_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ が (2.5) で定義されるとき

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}x_t-E\sum_{t=1}^{n}x_t\right)$$

の極限分布は正規分布になる。

(例)　$x_t=ax_{t-2}e_{t-1}+e_t$

を考えると,

$$Ex_t=0,\quad Ex_t^2=(1-a^2)^{-1},\quad Ex_{t+h}x_t=0\quad(h>0)$$

となるから,

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t=1}^{n}x_t\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\frac{1}{1-a^2}\right).$$

4次のモーメントをもつ条件が (2.2) の場合にはわかっているので, $z_t=x_tx_{t-1}$ とおくとき $\{z_t|t\in\boldsymbol{Z}\}$ についても上述の議論をくり返すことができるが（たとえば $k=l=1$ のときの Hall and Heyde [4]）本稿では省略する。

(注)

共分散行列というべきところを単に分散とよんでいるが混乱はないだろう。

4. む　す　び

3節で双線形時系列モデルにしたがう系列に成り立つ中心極限定理を考察したが，その結果とモデルの統計解析のつながりにはふれなかった。

Hall and Heyde [4] は，3節後半の内容と関連する箇所で，単純な双線形時系列モデル

$$x_t=ax_{t-1}e_{t-1}+e_t$$

のモーメント法によるパラメータ推定について簡単な解析をおこなっているが，その内容は不完全である。また，Akamanam, et al [1] は双線形時系列モデルにしたがう系列のエルゴード性を指摘し，モーメント法の可能性を示唆している。中村 [6] で検討しているように双線形時系列モデルのモーメント法によるパラメータ推定は，単純なモデルに限定したとしても，かなり複雑

であり，系列の平均と自己共分散のみでおこなうことはできない。2乗した系列の自己共分散などをもちいればモーメント法は可能であるが，その場合には Hall and Heyde [4] が述べているような推定量の漸近的性質を極限定理をもちいて調べるという手続きはそれほど簡単ではない。またその際には4次以上のモーメントの存在が必要になるから，パラメーターのとりうる値にかなりの制約をおくことになるし，複雑なモデルに関しては高次モーメントが存在する条件があきらかにされなければならない。

参考文献

[1] S. I. Akamanam, M. B. Rao and K. Subamanyam (1986), "On the ergocity of bilinear time series models", *Journal of Time Series Analysis*, 7, 157-163.

[2] W. A. Fuller (1976), "*Introduction to Statistical Time Series*", Wiley.

[3] C. W. J. Granger and A. P. Andersen (1978), "*An Introduction to Bilinear Time Series Models*", Vandenhoeck and Ruprecht.

[4] P. Hall and C. C Heyde (1980), "*Martingale Limit Theory and Its Application*", Academic Press.

[5] G. Marsaglia (1954), "Iterated limits and the central limit theorem for dependent random variables", *Proc. Am. Math. Soc.* 5, 987-991.

[6] 中村博和 (1987)), "単純な双線形時系列モデルのモーメント法によるパラメータ推定", 九州大学大学院経済論究67号, 119-132.

[7] T. S. Rao (1981), "On the theory of bilinear time series models", *J. R. Statist. Soc.* B. 43, 244-255.

[8] M. B. Rao, T. S. Rao and A. M. Walker (1983), "On the existence of some bilinear time series models", *Journal of Time Series Analysis*, 4, 95-110.

[9] C. Villegas (1976), "On a multivariate central limit theorem for stationary bilinear process", *Stochastic Processes and their Applications*, 4, 121-133.