企業の市場評価に関する一考察 : モッシンの所論を中心として

工藤, 裕孝

https://doi.org/10.15017/2920705

出版情報：経済論究. 69, pp.1-15, 1987-11-26. 九州大学大学院経済学会

企業の市場評価に関する一考察

——モッシンの所論を中心として——

工　藤　裕　孝

目　次

Ⅰ 序　論

1960年代に，シャープ［6］，リントナー［2］，モッシン［3］[1] によって，資本資産評価モデル（capital asset pricing model, 略して CAPM）が展開された。この CAPM は，現在，財務理論の基礎概念となっている。

CAPM というのは，危険資産が多数存在する場合，すべての個人が危険資産にどのように投資するのが最適であるかという考えによって行動したときに，需要と供給の一致が生ずるような均衡価格に関する式のことである。従って，企業の価値を株式と社債の発行額の合計とみなすと，CAPM によって企業の価値，すなわち企業に対する市場の評価が決定されることになる。我々は，今後，企業の評価に関する式を市場評価公式と呼ぶことにする。

モッシンのモデルは，次の2点を明らかにしている点で，シャープ，リントナーよりも CAPM の静学的側面を明らかにしていると考えられる。すなわち，第1に，企業の実物投資を所与としていること。第2に，企業の資金調達を所与とし，企業による株式あるいは社債の新たな発行を除外していることである。

本論文は，モッシン［4］，［5］[2] のモデルを基本として，市場評価公式の

拡張を意図している。

以下第2節で，第3節において使用される記号を決めておく。第3節では，資本市場における均衡モデルを構築し，市場評価公式を導出する[3]。第4節では，第3節の仮定をゆるめて，第4節の市場評価公式がどのように変化するかを検討する。最後の第5節は，本論文で展開された分析の今後に残された課題を述べる。

我々は，第3節で2次効用関数を使用している。これは，数学的操作が簡単だからである。2次効用関数は，その期待効用をとると，E（期待値）と V（分散）のみで示すことができる[4]。第4節では，市場評価公式を拡張するに際して，投資家の行動基準として，$E-V$ 基準を採用している。すなわち，投資家はポートフォリオの選択にあたって，その分散（V）を最小にし，期待値（E）を最大にするようなポートフォリオを選択するものと仮定する。この $E-V$ 基準は，投資家の効用関数を特定化しないという点で，2次効用関数を利用した分析よりも制約が弱いということに注意しなければならない。

［注］

1）シャープ[6]では，説明が図を用いて行なわれている。その結果，均衡条件が不正確なものとなっている。モッシン[3]の主な目的は，この不正確さをなくすことにあった。しかし，均衡までのプロセスを取りあげていないために，シャープ[6]（p. 435）の有効フロンティアが線形化するという主張を無視した形になっている。この点が，桐谷[1]99ページ，102ページにおいて指摘されている。

2）モデルの定式化にあたって，たとえば，収益率のような比率が使われずに総収益が利用されている点は，モッシン・モデルの特徴と考えられる。

3）モッシン[5]，pp.68-71では，市場評価公式を導出するにあたって，均衡下の特徴をのべたいために，間接的方法がとられている。本論文では，直接，市場評価公式を導出している。

4）第3節（注2）参照。

Ⅱ　記　　　号

3節で使用する記号の意味を以下のように決めておく。

i ：投資家（$i=1,2,\cdots,m$）

W_i：期首の富

m_i：純貸付

j　：企業（$j=1,2,\cdots,n$）

Z_{ij}：投資家 i による j 企業発行済株式の持分比率

P_j：j企業株式の市場価値

Y_i：期末の富

r　：$1+r^*$，r^* は安全利子率

X_j：j 企業の総収益（$E(X_j)=\mu_j$，$\sigma_{jk}=E(X_j-\mu_j)(X_k-\mu_k)$）

$E(\cdot)$：期待演算子

d_j　：j 企業の負債額

v_j　：j 企業の市場価値，$v_j=P_j+d_j$

U_i：効用関数

Ⅲ　資本市場均衡モデル

仮定および定義を述べる。

［仮定１］投資家は，すべてリスク回避者である。

投資家は，危険が増加するほど，不測の損失を被る偶然が高まるのを嫌い，低く選好する。

［仮定２］投資家は，ポートフォリオを選択する場合に，その期待効用を最大化する。

［仮定３］モデルは，純粋交換モデルであり，交換対象は債券（bonds）[1]と普通株（company ordinary shares）の２種類である。

債券は，利子率が一定であり，企業あるいは投資家自身によって発行される。企業の投資および資金調達決定は所与とされる。

〔定義〕X_j は，確率変数であり，j 企業の総収益とする。

［仮定４］投資家の期待は同質である。すなわち，すべての投資家にとって，μ_j，σ_{jk}（$j=1,\cdots,n$，$k=1,\cdots,n$）は，同一の値となる。

これは，市場で入手可能な証券の将来収益に関する推定値に対して，全ての

投資家が同意することを意味している。すなわち，投資家は全てポートフォリオ選択を，総収益X_jの同一の期待値μ_jおよび共分散σ_{jk}に基づいて行なう。

［仮定5］債務不履行リスクは，企業および個人投資家の両者に存在しない。

全貸付（個人に対する貸付あるいは社債保有という形での企業に対する貸付）は，無危険投資であると考えられる。従って，社債は全て完全な代替物であり，企業ごとに社債を区別する必要はない。

［仮定6］資本市場は完全競争である。

この仮定は，任意の2証券が完全代替物であり，投資家にとって，同額の費用がかかることを意味する。また，無危険債券の利子率は，すべて同一である。これは，すべての投資家および企業が，同一の無危険利子率で自由に貸借出来ることを意味する。

［仮定7］税制は存在せず，モデルは一期間モデルである。

以上の仮定に基づいて，均衡モデルを構築する。

需要と供給の均等を保証する市場清算条件（the market clearing conditions）は，

$$\sum_i Z_{ij}=1 \tag{3·1}$$

$$\sum_i m_i=\sum_j d_j$$

$$(i=1,\cdots,m,=1,\cdots,n)$$

である。第1の方程式のセットは，企業の株式が，全て投資家によって保有されていることを意味している。従って，j企業について，投資家全部の持分比率を合計すると1になる。第2の方程式のセットは，集計すると，投資家の純貸付と企業債券の総供給が等しくなければならないことを意味している。これは，投資家間の貸借関係が，集計によって相殺されるために成立する。

各投資家iの予算制約式は，

$$W_i=m_i+\sum_j Z_{ij}P_j \qquad (i=1,\cdots,m) \tag{3·2}$$

である。投資家iの期末の富は，

$$Y_i=rm_i+\sum_j Z_{ij}(X_j-rd_j)$$

である。(X_j-rd_j) は，企業 j が債務の元利を支払った後に，株主が受け取る金額である。上式の m_i に (3･2) 式を代入すると，

$$Y_i=rW_i+\sum_j Z_{ij}(X_j-rd_j-rP_j)=rW_i+\sum_j Z_{ij}(X_j-rv_j) \quad (3\cdot3)$$

である。これより，期末の富の確率分布は，投資家がどのようなポートフォリオを購入しても，企業の市場価値のみに依存し，この市場価値が，株式と社債でどのように構成されているかということとは無関係である。

投資家によって選好されるポートフォリオは，[仮定２] によって，次式

$$U=E[U_i(Y)]$$

を最大化するものである。従って，(3･3) 式より，各投資家の株式に対する需要関数は，

$$\frac{\partial U}{\partial Z_{ij}}=E[U_i'(Y_i)(X_j-rv_j)]=0 \quad (3\cdot4)$$

$$(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$$

である。ただし，効用関数 U は，von Neuman-Morgenstern の公理を満たし，$U'(\cdot)>0$，$U''(\cdot)<0$ である。他方，投資家の純貸付は (3･2) より決る。

均衡モデルでは，市場清算条件の１つが余分となる。なぜならば，期首の富が，時価表示による，投資家の期首保有額の価値から成るためである。期首保有値を $\overline{m}_i$，$\bar{Z}_{ij}$ で表わすと

$$W_i=\overline{m}_i+\sum_j \bar{Z}_{ij}P_j$$

である。期首の配分は，

$$\sum_i \bar{Z}_{ij}=1,\quad \sum_i \overline{m}_i=\sum_j d_j$$

をみたす。従って

$$\begin{aligned}\sum_i W_i&=\sum_i \overline{m}_i+\sum_i\sum_j \bar{Z}_{ij}P_j\\&=\sum_j d_j+\sum_j P_j\\&=\sum_j v_j\end{aligned}$$

である。すなわち，投資家の富の合計は，企業価値の合計に等しい。(3･1) 式と (3･2) 式が，すべて満される配分を考えることにする。i について，(3･2) 式を合計すると，

$$\sum_i m_i + \sum_i \sum_j Z_{ij} P_j = \sum_j v_j$$

であり，(3･1) 式を使うと，$\sum_i m_i = \sum_j d_j$ である。よって，n 個の独立な市場清算条件を持つことになる。

このように，完全モデルは，(3･1) 式，(3･2) 式と (3･4) 式の $m(n+1)+n$ 個の独立な方程式から成る。決定変数は，Z_{ij} の mn 個，m_i の m 個，P_j の n 個，パラメーターは，W_i，Y_i，X_j，r，v_j である。原則的には，モデル内には，$n+1$ 個の価格がある。すなわち，n 個の株価 P_j と無危険資産価格 $\frac{1}{r}$ である。しかし，方程式は，n 個の変数を決定出来るだけの数しかない。このことは，価格の１つが，任意に決定出来ることを意味している。我々は，利子率が外生的に与えられるものとする。すなわち，ニューメレールと考える。従って，モデルは，異なる資産の収益率間の比を決定できる。

ここで，次の仮定を追加する。

［仮定８］投資家の効用関数は，

$$U_i(Y_i) = Y_i - c_i Y_i^2 \qquad (i=1, \cdots, m)$$

である。ただし，投資家はリスク回避者なので $c_i > 0$ である[2)]。

これより，各投資家が最大にすべき期待効用は，

$$E[U_i(Y_i)] = E(Y_i) - c_i\{V(Y_i) + [E(Y_i)]^2\}, \tag{3･5}$$

ただし，$E(Y_i)$ は，投資家 i の期末の富の期待値であり，

$$E(Y_i) = rW_i + \sum_j Z_{ij}(\mu_j - rv_j)$$

である。$V(Y_i)$ は，投資家 i の期末の富の分散であり，

$$V(Y_i) = E[Y_i - E(Y_i)]^2 = \sum_j \sum_k Z_{ij} Z_{ik} \sigma_{jk}$$

である。

(3･4) 式で与えられているように，最適化の１階条件は，$\partial E[U(Y_i)]/\partial Z_{ij} = 0$ であることが必要である。従って，

$$\frac{\partial E[U(Y_i)]}{\partial Z_{ij}} = \frac{\partial E[U(Y_i)]}{\partial E(Y_i)} \cdot \frac{\partial E(Y_i)}{\partial Z_{ij}} + \frac{\partial E[U(Y_i)]}{\partial V(Y_i)} \cdot \frac{\partial V(Y_i)}{\partial Z_{ij}} = 0 \tag{3･6}$$

である。これより，各投資家の株式 j に対する需要式は，

$$\left[\frac{1}{2c_i}-E(Y_i)\right](\mu_j-rv_j)=\sum_k Z_{ik}\sigma_{jk} \qquad (\forall_{i,j}) \qquad (3\cdot7)$$

である。これを，すべての i について合計すると，市場清算条件（3·1）より

$$\left[\sum_i\frac{1}{2c_i}-\sum_i E(Y_i)\right](\mu_j-rv_j)=\sum_k\sigma_{jk} \qquad (\forall_j)$$

である。ここで v_j について解くと

$$v_j=\frac{1}{r}\left(\mu_j-\frac{\sum_k\sigma_{jk}}{\sum_i\frac{1}{2c_i}-\sum_k\mu_k}\right) \qquad (\forall_j) \qquad (3\cdot8)$$

である[3]。

$$b_j=\sum_k\sigma_{jk}$$

$$R=\frac{1}{\sum_i\frac{1}{2c_i}-\sum_k\mu_k}$$

とすると，企業の均衡価値は

$$v_j=\frac{1}{r}(\mu_j-Rb_j) \qquad (3\cdot9)$$

である。これは，均衡下における j 企業の市場価値が，期待収益からリスクについて控除し，その差額を無危険利子率で割引くことによって得られることを意味する。

リスクの修正項 Rb_j は，２つの要素から成る。第１の要素 b_j は，j 企業の他の企業全部との収益に関する共分散の合計である。これは，j 企業による市場の総分散への寄与と考えることが出来る。なぜなら

$$\sum_j b_j=\sum_j\sum_k\sigma_{jk}=V(\sum_j X_j)^{4)}$$

だからである。言いかえると，b_j は X_j と総市場収益間の共分散

$$b_j=\mathrm{Cov}(X_j,\ \sum_k X_k)^{5)}$$

である。これは，j 企業の「組織的リスク」と呼ばれる。

第２の要素 R は，企業のリスク尺度 b_j のウエイト因子と考えられる。この R は，全企業について同一であり，「市場リスク回避」とみなせる。なぜなら，R は全投資家の期待リスク回避を調和平均したものだからである。すなわち

$$R = \frac{1}{\sum_i E\left(\frac{1}{R_i}\right)}$$ 6)

である。ただし

$$R_i = -\frac{U_i''(Y_i)}{U_i'(Y_i)}$$

である。

又，企業価値が同一であるような，μ_j と b_j のすべての組合せを考えると

$$R = \frac{d\mu_j}{db_j} \quad (\forall j)$$

である。これは，R が，企業のリスク尺度における1単位の増加を相殺するために必要とされる，期待収益の増加を表わしている。この意味で，R は「リスクの市場価格」と呼ばれる。

R は，c_i に依存しているので，新たに投資家が増加した場合にも，企業の市場価値は影響を受ける。

[注]

1) 企業の発行する債券は社債であるから，企業については社債という用語を使用する。

2) U_i の期待値をとると，期待効用は

$$E[U_i] = E(Y_i) - c_i\{[E(Y_i)]^2 + [\sqrt{V(Y_i)}]^2\}$$
$$= \mu_Y^i - c_i(\mu_Y^{i2} + \sigma_Y^{i2})$$

である。ただし，$\mu_Y^i = E(Y_i)$，$\sigma_Y^{i2} = [\sqrt{V(Y_i)}]^2$ は分散である。

これを $\sigma_Y^i = \sqrt{V(Y_i)}$（標準偏差）に関して偏微分すると $\frac{\partial E[U_i]}{\partial \sigma_Y^i} = -2c_i\sigma_Y^i$ である。ここで，投資家は，危険増加に関する選好特性に応じて，リスク回避者，リスク中立者，リスク愛好者の三つの類型に分けられる。本論文では，[仮定1] より，投資家はリスク回避者なので，$\frac{\partial E[U_i]}{\partial \sigma_Y^i} < 0$ である。従って，このことと，$\sigma_Y^i > 0$ より，$c_i > 0$ である。

また，この効用関数は放物線なので，正の限界効用 $\frac{dU_i}{dY_i} = 1 - 2c_iY_i > 0$ より，定義域は，$Y_i < \frac{1}{2c_i}$ である。

3) $\sum_i E(Y_i) = E(\sum_i Y_i) = E(r\sum_i W_i + \sum_j X_j - r\sum_j v_j) = E(\sum_j X_j)$

$$(\because \sum_i W_i = \sum_j v_j)$$

$$= \sum_k \mu_k.$$

4) $V(\sum_j X_j)=V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

$$(\because Y=\sum_j X_j)\quad \left(\begin{array}{l}\because V(Y)=\mathrm{Cov}(Y,Y)\\ \mathrm{Cov}(XY)=E(XY)-E(X)E(Y)\end{array}\right)$$

$$=E(\sum_j X_j^2+2\sum_{j<k}X_jX_k)-\{\sum_j[E(X_j)]^2+2\sum_{j<k}E(X_j)E(X_k)\}$$

$$=\sum_j\{E(X_j^2)-[E(X_j)]^2\}+2\sum_{j<k}[E(X_jX_k)-E(X_j)E(X_k)]$$

$$=\sum_j E(X_j-\mu_j)^2+2\sum_{j<k}E(X_j-\mu_j)(X_k-\mu_k)$$

$$=\sum_j\sigma_{jj}+2\sum_{j<k}\sigma_{jk}=\sum_j\sum_k\sigma_{jk}.$$

5) $\mathrm{Cov}(X_j,\sum_k X_k)=\sum_k\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=\sum_k\sigma_{jk}=b_j.$

6) $R_i=\dfrac{2c_i}{1-2c_iY_i}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2c_i}-Y_i}.$

ここで

$$\sum_i E(Y_i)=\sum_i E[rW_i+\sum_k Z_{ik}(X_k-rv_k)]$$

$$=\sum_i rW_i+\sum_i\sum_k Z_{ik}E(X_k-rv_k)=\sum_k E(X_k)=\sum_k\mu_k.$$

$$(\because \sum_i W_i=\sum_k v_k)$$

従って

$$R=\frac{1}{\sum_i\frac{1}{2c_i}-\sum_k\mu_k}=\frac{1}{\sum_i\frac{1}{2c_i}-\sum_i E(Y_i)}=\frac{1}{\sum_i E\left(\frac{1}{2c_i}-Y_i\right)}=\frac{1}{\sum_i E\left(\frac{1}{R_i}\right)}.$$

Ⅳ　市場評価公式の拡張

本節では，いくつかの仮定をゆるめた場合に，前節の市場評価公式がどのようになるかを検討する。

［仮定5′］[1] 社債の債務不履行リスクが，企業に存在する。

このことから，各企業の社債は完全な代替物ではなくなり，投資家が保有する各社債を，企業ごとに区別しなければならない。

［仮定4′］投資家の期待は異質（heterogeneous）である。

各投資家によって，総収益 X_j の期待値 μ_j および共分散 σ_{jk} が異なることを意味している。従って，各投資家の期待値および共分散に対して添字 i が加えられて，μ_j^i，σ_{jk}^i となる。

［仮定6′］貸付け利子率は，不確実である。ただし，貸付け利子率は，すべ

ての投資家にとって同一である。

投資家の投資計画期間が，予期しない形で変化するために，貸付け利子率が不確実となる。

［仮定2′］投資家は，ポートフォリオを選択する場合に，分散（V）を最小にし，期待値（E）を最大にするものを選好する。

［仮定8］をはずす。他の仮定は，第3節と同じである。以上のことを考慮して，市場評価公式を導出してみよう。

各投資家 i の予算制約式は，

$$W_i=m_i+\sum_j(y_{ij}d_j+Z_{ij}P_j) \tag{4·1}$$

である。ただし，y_{ij} は，投資家 i による j 企業発行済社債の 持分比率である。投資家 i の期末の富は，

$$Y_i=Qm_i+\sum_j(y_{ij}B_j+Z_{ij}R_j) \tag{4·2}$$

である。ただし，Q は不確実な貸付け利子率である。B_j は，社債保有者が受け取る金額であり，［仮定5′］より

$$B_j=\begin{cases} Q_jd_j & \text{if}\quad X_j>Q_jd_j \\ X_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。R_j は，株主が受け取る金額であり，同様に，［仮定5′］より

$$R_j=\begin{cases} X_j-Q_jd_j & \text{if}\quad X_j>Q_jd_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。(4·1) 式より

$$m_i=W_i-\sum_j(y_{ij}d_j+Z_{ij}P_j)$$

を (4·2) 式に代入すると

$$Y_i=QW_i+\sum_j[y_{ij}(B_j-Qd_j)+Z_{ij}(R_j-QP_j)]$$

である。期待される期末の富は，

$$E_i=\bar{Q}W_i+\sum_j[y_{ij}(\bar{B}^i_j-\bar{Q}d_j)+Z_{ij}(\bar{R}^i_j-\bar{Q}P_j)]$$

である。ただし，$E_i=E(Y_i)$，$\bar{Q}=E(Q)$，$\bar{B}^i_j=E(B^i_j)$，$\bar{R}^i_j=E(R^i_j)$ である。

これより，

$$Y_i-E_i=(Q-\bar{Q})W_i+\sum_j\{y_{ij}[(B^i_j-\bar{B}^i_j)-d_j(Q-\bar{Q})]$$

$$+Z_{ij}[(R^i_j-\bar{R}^i_j)-P_j(Q-\bar{Q})]\}$$

である。ゆえに，

$$(Y_i-E_i)^2=(Q-\bar{Q})^2W_i^2+2W_i\{\sum_j y_{ij}[(Q-\bar{Q})(B^i_j-\bar{B}^i_j)$$

$$-d_j(Q-\bar{Q})^2]+\sum_j Z_{ij}[(Q-\bar{Q})(R^i_j-\bar{R}^i_j)$$

$$-P_j(Q-\bar{Q})^2]\}+\sum_j\sum_k y_{ij}y_{ik}[(B^i_j-\bar{B}^i_j)(B^i_k-\bar{B}^i_k)$$

$$-d_k(Q-\bar{Q})(B^i_j-\bar{B}^i_j)-d_j(Q-\bar{Q})(B^i_k-\bar{B}^i_k)$$

$$+d_jd_k(Q-\bar{Q})^2]+2\sum_j\sum_k y_{ij}Z_{ik}[(B^i_j-\bar{B}^i_j)$$

$$\cdot(R^i_k-\bar{R}^i_k)-P_k(Q-\bar{Q})(B^i_j-\bar{B}^i_j)-d_j(Q-\bar{Q})$$

$$\cdot(R^i_k-\bar{R}^i_k)+d_jP_k(Q-\bar{Q})^2]+\sum_j\sum_k Z_{ij}Z_{ik}\cdot$$

$$[(R^i_j-\bar{R}^i_j)(R^i_k-\bar{R}^i_k)-P_k(Q-\bar{Q})(R^i_j-\bar{R}^i_j)-P_j\cdot$$

$$(Q-\bar{Q})(R^i_k-\bar{R}^i_k)+P_jP_k(Q-\bar{Q})^2]$$

であり，従って

$$V_i=W_i^2\sigma_{qq}+2W_i[\sum_j y_{ij}(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})+\sum_j Z_{ij}(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})]$$

$$+\sum_j\sum_k y_{ij}y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}-d_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qb_k}+d_jd_k\sigma_{qq})$$

$$+2\sum_j\sum_k y_{ij}Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}-P_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qR_k}+d_jP_k\sigma_{qq})$$

$$+\sum_j\sum_k Z_{ij}Z_{ik}(\sigma^i_{R_jR_k}-P_k\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma^i_{qR_k}+P_jP_k\sigma_{qq}).$$

ただし，

$$V_i=E(Y_i-E_i)^2,\quad \sigma_{qq}=E(Q-\bar{Q})^2$$

$$\sigma^i_{qb_j}=E[(Q-\bar{Q})(B^i_j-\bar{B}^i_j)],\quad \sigma^i_{qR_j}=E[(Q-\bar{Q})(R^i_j-\bar{R}^i_j)]$$

$$\sigma^i_{b_jb_k}=E[(B^i_j-\bar{B}^i_j)(B^i_k-\bar{B}^i_k)],\quad \sigma^i_{qb_k}=E[(Q-\bar{Q})(B^i_k-\bar{B}^i_k)]$$

$$\sigma^i_{b_jR_k}=E[(B^i_j-\bar{B}^i_j)(R^i_k-\bar{R}^i_k)],\quad \sigma^i_{qR_k}=E[(Q-\bar{Q})(R^i_k-\bar{R}^i_k)]$$

$$\sigma^i_{R_jR_k}=E[(R^i_j-\bar{R}^i_j)(R^i_k-\bar{R}^i_k)]$$

である。

任意の E_i に対して，V_i を最小にするポートフォリオを導出するために，

ラグランジュ関数 L_i を作ると

$$L_i=V_i+\lambda_i\{E_i-\bar{Q}W_i-\sum_j[y_{ij}(\bar{B}^i_j-\bar{Q}d_j)+Z_{ij}(\bar{R}^i_j-\bar{Q}P_j)]\}$$

となる。ただし，λ_i はラグランジュ乗数である。関数 L_i を y_{ij} と Z_{ij} に関して偏微分し，得られた偏導関数をゼロに等しいとすると，

$$\frac{\partial L_i}{\partial y_{ij}}=2W_i(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})+2\sum_k y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}-d_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qb_k}$$
$$+d_jd_k\sigma_{qq})+2\sum_k Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}-P_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qR_k}+d_jP_k\sigma_{qq})$$
$$-\lambda_i(\bar{B}^i_j-\bar{Q}d_j)=0 \qquad (4\cdot3)$$
$$(j=1,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial Z_{ij}}=2W_i(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})+2\sum_k y_{ik}(\sigma^i_{b_kR_j}-P_j\sigma^i_{qb_k}-d_k\sigma^i_{qR_j}$$
$$+d_kP_j\sigma_{qq})+2\sum_k Z_{ik}(\sigma^i_{R_jR_k}-P_k\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma^i_{qR_k}+P_iP_k\sigma_{qq})$$
$$-\lambda_i(\bar{R}^i_j-\bar{Q}P_j)=0 \qquad (4\cdot4)$$
$$(j=1,\cdots,n)$$

である。i について，(4･3) 式と (4･4) 式を合計し，2式を加えると

$$2\sum_i\sum_k\{y_{ik}[(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})-v_j\sigma^i_{qb_k}]+Z_{ik}[(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})$$
$$-v_j\sigma^i_{qR_k}]\}=\sum_i\lambda_i[(\bar{B}^i_j+\bar{R}^i_j)-\bar{Q}v_j]^{2)}$$

である。これを v_j について解くと

$$v_j=\frac{1}{\bar{Q}-2\cdot\frac{1}{\sum_i\lambda_i}\sum_i\sum_k(y_{ik}\sigma^i_{qb_k}+Z_{ik}\sigma^i_{qR_k})}\left\{\frac{1}{\sum_i\lambda_i}\sum_i\lambda_i\mu^i_j\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sum_i\lambda_i}\sum_i\sum_k[y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})+Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})]\right\} \qquad (4\cdot5)$$

である。ただし，$\mu^i_j=\bar{B}^i_j+\bar{R}^i_j$ である。

$$\rho=\bar{Q}-R\sum_i\sum_k(y_{ik}\sigma^i_{qb_k}+Z_{ik}\sigma^i_{qR_k})$$

$$\hat{\mu}_j=\frac{1}{\sum_i\lambda_i}\cdot\sum_i\lambda_i\mu^i_j$$

$$R=\frac{2}{\sum_i\lambda_i}$$

$$\hat{b}_j=\sum_i\sum_k[y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})+Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})]$$

とすると，

$$v_j=\frac{1}{\rho}(\hat{\mu}_j-R\hat{b}_j) \tag{4·6}$$

である。3節の（3·9）式と違って，v_j はもはや市場パラメーターのみから得られない。以下，（4·6）式の成分を検討していくことにしよう。

まず，ρについて見ると，リスクが調整された期待値（$\hat{\mu}_j-R\hat{b}_j$），を割引く利子率ρ自身が，リスクについて調整されている。その調整は，期待貸付け利子率$\bar{Q}$から，市場リスク回避因子Rでウエイトづけられた共分散の合計$\sum_i\sum_k$（$y_{ik}\sigma^i_{qb_k}+Z_{ik}\sigma^i_{qR_k}$）を控除することによって行なわれる。これらの共分散には，ウエイトとして，投資家iの社債および株式の持分比率がかかっている。

ここで，Rは，ラグランジュ乗数の理論から，ポートフォリオ収益の期待値と分散間の限界代替率，すなわち，$\lambda_i=\frac{dV_i}{dE_i}$を表わしている。従って，$\lambda_i$ が小さくなれば，投資家iのリスク回避は強くなる。このことより，$\frac{2}{\sum\lambda_i}$ を市場リスク回避因子と考えることができる。

ρの定義における，共分散項の合計には，分散σ_{qq}は含まれていない。従って，もし，貸出し利子率がX_jと無相関ならば，適切な割引利子率は，期待貸出し利子率と一致する。

次に，$\hat{\mu}_i$ については，個人の期待収益の推定値に関してウエイトづけられた平均を表わしている。このウエイトは，λ_i に等しい。さきに述べたように，λ_i は，投資家のリスク回避の強さに関する一つの尺度を与える。従って，λ_i は，投資家のリスク許容度の尺度と解釈することができる。より明示的に述べるために，$T_i=\lambda_i$，$T=\sum_i\lambda_i$ とする。ここで，$\hat{\mu}_j$ は

$$\hat{\mu}_j=\frac{1}{T}\sum_i T_i\mu^i_j$$

と表わすことが出来る。投資家のリスク回避度が，富と共に減少すると仮定するならば，λ_i が増加して，投資家iの期待収益$\mu_i{}^j$にかかるウエイトは，大きくなるだろう。

最後に，$\hat{b}_j$ をみてみよう。$\hat{b}_j$ の合計の順序をかえると

$$\hat{b}_j=\sum_k\sum_i[y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})+Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})]$$

である。これより，リスク尺度の代用物 $\hat{b}_j$ が，各投資家の共分散項の推定値 $(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j},\ \sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})$ についての荷重平均であることがわかる。ウエイトは，各投資家の社債および株式に関する持分比率である。さらに形式的に述べると，荷重平均は，

$$\hat{\sigma}_{jk}=\sum_i[y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})+Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})]$$

であると定義され，

$$\hat{b}_j=\sum_k\hat{\sigma}_{jk}$$

となる。これは，投資家が富めば富むほど，彼のリスク回避度が小さくなり，従って，共分散項にかかるウエイトは大きくなることを意味する。

我々は，(4·6) 式の導出に際して，市場清算条件を使わなかった。この条件を明示的に導入して，v_j を導くためには，ラグランジュ関数 L_i に，制約式としてこれらの条件を含めればよい。そうすれば，(4·6) 式の右辺に定数項が付加されることになるであろう。

［注］

1) ダッシュは，3節の仮定と対応させるためにつけられている。［仮定6′］だけは，［仮定6］の一部のみに対応している。

2) i について (4·3) 式を合計すると，

$$2\sum_i W_i(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})+2\sum_i\sum_k y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}-d_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qb_k}+d_jd_k\sigma_{qq})$$

$$+2\sum_i\sum_k Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}-P_k\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma^i_{qR_k}+d_jP_k\sigma_{qq})-\sum_i\lambda_i(\bar{B}^i_j-\bar{Q}d_j)=0$$

である。ここで，

$$-2\sum_i\sum_k[y_{ik}d_k(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})]-2\sum_i\sum_k[Z_{ik}P_k(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})]$$

$$=-2\sum_i\sum_k[(y_{ik}d_k+Z_{ik}P_k)(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})]=-2\sum_i W_i(\sigma^i_{qb_j}-d_j\sigma_{qq})$$

より，

$$2\sum_i\sum_k[y_{ik}(\sigma^i_{b_jb_k}-d_j\sigma^i_{qb_k})+Z_{ik}(\sigma^i_{b_jR_k}-d_j\sigma^i_{qR_k})]=\sum_i\lambda_i(\bar{B}^i_j-\bar{Q}d_j)\qquad\text{(A)}$$

である。i について (4·4) 式を合計すると，

$$2\sum_i W_i(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})+2\sum_i\sum_k y_{ik}(\sigma^i_{b_kR_j}-P_j\sigma^i_{qb_k}-d_k\sigma^i_{qR_j}+d_kP_j\sigma_{qq})$$

$$+2\sum_i\sum_k Z_{ik}(\sigma^i_{R_jR_k}-P_k\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma^i_{qR_k}+P_jP_k\sigma_{qq})-\sum_i\lambda_i(\bar{R}^i_j-\bar{Q}P_j)=0$$

である。ここで，

$$-2\sum_i\sum_k[y_{jk}d_k(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})]-2\sum_i\sum_k[Z_{ik}P_k(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})]$$

$$=-2\sum_i\sum_k[(y_{ik}d_k+Z_{ik}P_k)(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})]=-2\sum_i W_i(\sigma^i_{qR_j}-P_j\sigma_{qq})$$

より，

$$2\sum_i\sum_k[y_{ik}(\sigma^i_{b_kR_j}-P_j\sigma^i_{qb_k})+Z_{ik}(\sigma^i_{R_jR_k}-P_j\sigma^i_{qR_k})]=\sum_i\lambda_i(\bar{R}^i_j-\bar{Q}P_j) \qquad \text{(B)}$$

である。(A)と(B)を加えると

$$2\sum_i\sum_k\{y_{ik}[(\sigma^i_{b_jb_k}+\sigma^i_{b_kR_j})-v_j\sigma^i_{qb_k}]+Z_{ik}[(\sigma^i_{b_jR_k}+\sigma^i_{R_jR_k})-v_j\sigma^i_{qR_k}]\}$$

$$=\sum_i\lambda_i[(\bar{B}^i_j+\bar{R}^i_i)-\bar{Q}v_j].$$

V むすび

われわれは，モッシンの所論［4］［5］によって，企業評価公式の導出を行なった。第4節で強い仮定をおき，第5節でそれをゆるめて，制約の弱い企業評価公式を導出するという手順をとった。特に，［仮定4］の投資家の期待の同質性をゆるめると，市場評価公式が市場パラメーターのみでは表わせないことが明らかになった。しかし，いくつかの重要な要素，すなわち税金・インフレについては企業評価公式導出にあたって全く考慮していない。この点を含めた企業評価公式を検討する必要がある。

又，企業評価公式の具体的な適用に関しても，本論文では取り扱わなかった。たとえば，投資プロジェクト採択基準としてこれを利用することが出来るのである。この点もさらに検討の必要がある。

参考文献

［1］ 桐谷　維『資産選択の現代理論』東洋経済新報社，1986.

［2］ Lintner, J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolio and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, 1965, pp. 13-37.

［3］ Mossin, J., "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, Vol. 34, 1966, pp. 768-783.

［4］ Mossin, J., "Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets," *American Economic Review*, Vol. 59, 1969, pp. 747-756.

［5］ Mossin, J., *Theory of Financial Markets*, Prentice-Hall, 1973.

［6］ Sharpe, W.F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, 1964, pp.425-442.