単純な双線形時系列モデルのモーメント法によるパラメータ推定

中村, 博和

https://doi.org/10.15017/2920695

出版情報：経済論究. 67, pp.119-132, 1987-04-10. 九州大学大学院経済学会

単純な双線形時系列モデルの モーメント法によるパラメータ推定

中　村　博　和

目　次

1. 序

双線形時系列モデルは Granger and Andersen [3] によって現実の時系列データのもつ非線形性を表現しうるような時系列モデルとして提案された。しかし双線形時系列モデルの諸性質をその一般形式 BL (P, Q, R, S),

$$X_t=\sum_{i=1}^{P} a_i X_{t-i}+\sum_{j=1}^{Q} b_j e_{t-j}+\sum_{k=1}^{S}\sum_{l=1}^{R} c_{kl} X_{t-k} e_{t-l}+e_t \qquad (1.1)$$

($\{e_t\ ; t\in\mathbf{Z}\}$ は $E(e_t)=0$, $E(e_t^2)=\sigma^2$, $E(e_t^4)<\infty$, となる同一分布にしたがう独立確率系列)

にもとづいて調べることはかなり困難である。そのため，これまでの研究は (1.1) の特殊ケースである単純な双線形モデルを中心におこなわれている。本稿の目的も，単純な双線形モデルに対象を限定して，モーメント法によるパラメータ推定の手続きを示すことにある。

双線形時系列モデルのパラメータ推定に関するこれまでの研究の主だったものとしては，Pham and Tran [6], Rao and Gabr [10] がある。前者で

は BL(1，0，1，1) の場合に条件付最小2乗推定量が，モデルが反転可能 (Granger and Andersen [3]，[4]) なとき，強一致推定量になることが示された。後者では非線形最小2乗推定の Newton-Raphson 法による手続きを与えており，その際に必要となる初期推定値をえるための方法も提示されている。

一方，線形時系列モデルの場合にも，自己回帰移動平均モデルでは，最小2乗推定をおこなうときに初期推定値が必要となる。そして，そのためのひとつの方法として，自己相関列とパラメータの間に成立する関係がもちいられることがある。これは換言するとモーメント法によるパラメータ推定である。(注) 本稿で双線形時系列モデルのモーメント法による推定を考えるのも，最終的な推定法というより，初期推定値をえるためのひとつの方法という意味がつよい。

(注) たんに弱定常系列を考えているときには，ここでの換言は不正確である。しかし，通常，撹乱項はi.i.dと仮定される。その場合にはこのような言いかえが許される。

2. モーメント法とエルゴード性

モーメント法によるパラメータ推定は，独立標本にもとづく場合には，大数の法則によって，一般に一致推定量をもたらす。双線形時系列モデルの場合には対象となるのが相関をもつ標本であるから，自己共分散列に適当な条件があるときに成立する大数の法則を考えればよいが，それより双線形定常系列をエルゴード性によって特徴づける方が簡単である。

次の定理は双線形モデルにしたがう強定常系列の存在を保証するものであり，M. B. Rao, et al [8] によって証明された。

定理1.1 双線形時系列モデル

$$X_t=\sum_{i=1}^{P} a_i X_{t-i}+\sum_{j=1}^{P} b_j X_{t-j} e_{t-1}+e_t \qquad (2.1)$$

は，

$$\underset{P\times P}{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_P \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{P\times P}{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_P \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times P}{C^T}=(1,0,\cdots\cdots,0),$$

とするとき，$\rho(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}+\sigma^2\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B})<1$ ならば，2次強定常解

$$X_t=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}e_t+\boldsymbol{C}^T\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}e_{t-k})\boldsymbol{C}e_t\right\}, \qquad (2.2)$$

をもつ。ここで $\rho(\cdot)$ は行列のスペクトル半径であり，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$ は行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}$ のクロネッカー積をあらわす。

次の定理は定理1.1の同じようにして証明できる。証明は省略する。

定理1.2　双線形モデル

$$X_t=aX_{t-k}e_{t-l}+e_t \quad (k,l>0) \qquad (2.3)$$

は，$a^2\sigma^2<1$ のとき，2次強定常解

$$X_t=e_t+\sum_{r=1}^{\infty}a^r\left(\prod_{j=0}^{r-1}e_{t-k-jl}\right)e_{t-rl} \qquad (2.4)$$

をもつ。

本稿で，(2.1) や (2.3) にしたがう定常系列というとき，それぞれ (2.2)，(2.4) を意味しているものとする。

確率系列のエルゴード性に関しては，次の2つの定理がある。証明は Breiman [1] を参照。

定理1.3　独立に同一分布にしたがう確率系列はエルゴード的である。

定理1.4　$\mathscr{B}^\infty$ を $\mathbf{R}^\infty$ のボレル集合体とし，$f(\cdot):\mathbf{R}^\infty\to\mathbf{R}$ を $\mathscr{B}^\infty$ 可測な関数とする。エルゴード性をもつ確率系列 $\{e_t\,;t\in\mathbf{Z}\}$ をもちいて，$X_t=f(e_t, e_{t-1},\cdots)$ で $\{X_t\,;t\in\mathbf{Z}\}$ を定義すれば，これはエルゴード性をもつ。

この2つの定理と (2.2)，(2.4) の形式から，次の命題が成立していることがわかる。

命題1.　双線形時系列モデル (2.1)，(2.3) にしたがう定常系列はエルゴード的である。つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t=E(X_t) \qquad a.s.$$

が成立する。

さらに，いまの場合，$\{X_t\}$ は2次強定常系列だから，

$$Y_t = X_t X_{t-h} \quad (h \in \boldsymbol{N}_0)$$

とするとき，$\{Y_t\}$ もエルゴード的である。

例えば，$\{X_t\}$ を (2.3) にしたがう定常系列として，パラメータ a について次の式が成り立っているとする。

$$E(X_t) = aCOV(X_t, X_{t-1}).$$

このとき，$\bar{X}_n = \sum_{t=1}^{n} X_t / n$ として，

$$\hat{a}_n = (n-1) \frac{\bar{X}_n}{\sum_{t=2}^{n} (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}$$

とすれば，命題1より，$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = a_{(a.s.)}$ となり，a の一致推定量がえられる。

本稿では，$E(X_t^k), E(X_t X_{t-l})$ などの自然な推定量というとき，$\sum_{t=1}^{n} X_t^k / n$, $\sum_{t=l+1}^{n} X_t X_{t-l} / (n-l)$ などをさすことにする。

モーメント法による推定量は，しかし，一般には漸近的な有効性をもっていない。これは，例えば，移動平均モデルの場合にも良く知られている事実である (Fuller［2］等を参照)。

3. モーメント法の手続き

本節で単純な双線形時系列モデルのパラメータとそれぞれのモデルにしたがう定常系列 $\{X_t\}$ のモーメント（適当な自己共分散や平均）の間に成り立つ関係式から，パラメータをモーメントで表現する式を導出する。そうしたとき，モーメントを自然な推定量でおきかえれば，前節の議論から，パラメータの一致推定量がえられる。

以下でとられる方法についてはいくつかの問題点が生じるが，それらは次節で考えることにする。必要な場合には $\{e_t\}$ の分布に仮定をおくが，それはそのつど明示する。また，各モデルについて，定常解をもつ条件と反転可能性の2つの条件を記述するが，それはパラメータ推定がその範囲内でおこなわれな

ければならないからである。

(1)　対角モデル

$$X_t = aX_{t-k}e_{t-k} + e_t \quad (k > 1). \tag{3.1}$$

モデル (3.1) は $a^2\sigma^2 < 1$ のとき定常解をもち，$log|a| + E(log|X_t|) \geqq 0$ のとき反転可能。$\{e_t\}$ の分布が対称であるという 仮定をおく。したがって $E(e_t^3) = 0$ である。

(3.1) の両辺の平均をとり，

$$\begin{aligned} E(X_t) &= aE(X_{t-k}e_{t-k}) + E(e_t) \\ &= aE(X_t e_t) \\ &= a^2E(X_{t-k}e_{t-k}e_t) + aE(e_t^2) \\ &= a\sigma^2 \end{aligned}$$

(3.1) の両辺を 2 乗して，

$$X_t^2 = a^2X_{t-k}^2e_{t-k}^2 + 2aX_{t-k}e_{t-k}e_t + e_t^2. \tag{3.2}$$

(3.2) の平均をとって，

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= a^2E(X_{t-k}^2e_{t-k}^2) + \sigma^2 \\ &= a^2E(X_t^2e_t^2) + \sigma^2. \end{aligned}$$

(3.2) の両辺に e_t^2 をかけて平均をとると，

$$\begin{aligned} E(X_t^2e_t^2) &= a^2\sigma^2E(X_{t-k}^2e_{t-k}^2) + E(e_t^4) \\ &= a^2\sigma^2E(X_t^2e_t^2) + E(e_t^4) \\ &= \frac{E(e_t^4)}{1 - a^2\sigma^2} \end{aligned}$$

よって

$$E(X_t^2) = \frac{a^2E(e_t^4)}{1 - a^2\sigma^2} + \sigma^2.$$

ここで $\{e_t\}$ を正規系列とすれば，$E(e_t^4) = 3\sigma^4$ より，

$$E(X_t^2) = \frac{3a^2\sigma^4}{1 - a^2\sigma^2} + \sigma^2,$$

したがって平均と 2 次モーメントから，モーメント法による a と σ^2 の推定が

可能となるが，例えば a についての方程式をつくると，それは４次方程式になってしまい，余り簡便な方法とはいえない。

しかし対角モデルに対しては，以下に述べるような簡単な関係式が成り立っており，しかもそのためには分布を特定する必要がない。

次の結果は Granger and Andersen [３] が $k=1$ の場合に示した結果にもとづく。

命題2. $\{X_t\}$ が４次のモーメントをもつための十分条件 $|a^4E(e_t^4)|<1$ がみたされているとき，$R(l)=COV(X_t^2, X_{t-l}^2)$ とおくと，

$$R(l)=a^2\sigma^2R(l-k) \quad (l\geqq 2k)$$

が成立する。

証明　$l\geqq 2k$ とするとき，(3.2) の両辺に X_{t-l}^2 をかけて平均をとると，

$$E(X_{t-l}^2\, X_t^2)=a^2E(X_{t-k}^2e_{t-k}^2\, X_{t-l}^2)+\sigma^2E(X_{t-l}^2). \tag{3.4}$$

さらに上式の右辺第一項に X_{t-k}^2 の表現を代入して，

$$\begin{aligned} E(X_{t-l}^2\, X_t^2) &= a^4E(X_{t-2k}^2e_{t-2k}^2e_{t-k}^2\, X_{t-l}^2) \\ &\quad +a^2E(e_t^4)E(X_t^2)+\sigma^2E(X_t^2) \\ &= a^4\sigma^2E(X_{t-2k}^2\, X_{t-l}^2e_{t-2k}^2) \\ &\quad +a^2E(e_t^4)E(X_t^2)+\sigma^2E(X_t^2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.4) で，l を $k-l$ でおきかえると，

$$\begin{aligned} E(X_{t+k-l}^2\, X_t^2) &= a^2E(X_{t+k-l}^2\, X_{t-k}^2e_{t-k}^2) \\ &\quad +\sigma^2E(X_t^2) \\ &= a^2E(X_{t-l}^2\, X_{t-2k}^2e_{t-2k}^2) \\ &\quad +\sigma^2E(X_t^2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5)，(3.6) より，

$$\begin{aligned} a^2\sigma^2R(l-k) &= R(l)+(1-a^2\sigma^2)\{E(X_t^2)\}^2 \\ &\quad +\sigma^2(a^2\sigma^2-1)E(X_t^2)-a^2E(e_t^4)E(X_t^2). \end{aligned}$$

ここで，$E(X_t^2)=\dfrac{a^2E(e_t^4)}{1-a^2\sigma^2}+\sigma^2$ より，上式の右辺の第2項から先の和は0になる。したがって，

$$a^2\sigma^2R(l-k)=R(l). \qquad \blacksquare$$

以上のことから，μ_1, $\hat{R}(l-\mathrm{k})$, $\hat{R}(l)$ をそれぞれ $E(X_t), R(l-k), R(l)$ の自然な推定量とするとき，a と σ^2 の推定量がそれぞれ次のような形でえられる。

$$\hat{a}=\frac{\hat{R}(l)}{\mu_1\hat{R}(l-k)},\ \hat{\sigma}^2=\frac{\mu_1}{\hat{a}} \quad (l\geq 2k).$$

(2)　優対角モデル

$$X_t=aX_{t-k}e_{t-l}+e_t \quad (1\leq l<k). \tag{3.7}$$

定常性の条件と反転可能性の条件は対角モデルのときと同じである。

(3.7) の両辺の平均をとり，$l<k$ より

$$E(X_t)=0.$$

(3.7) の両辺を2乗して

$$X_t^2=a^2X_{t-k}^2e_{t-l}^2+2aX_{t-k}e_{t-l}e_t+e_t^2. \tag{3.8}$$

この両辺の平均をとって式を整理すると，

$$E(X_t^2)=\frac{\sigma^2}{1-a^2\sigma^2}.$$

(3.7) の両辺に $X_{t-h}(h>0)$ をかけて平均をとれば，

$$E(X_tX_{t-h})=0 \quad (h>0).$$

$E(X_t)=0$ だったから，これは (3.7) にしたがう定常系列が無相関列であることを示している。

したがってモーメント法をおこなうためには，2次以上の高次モーメントが必要になる。優対角モデルに対しても，対角モデルのときと同様に，2乗した系列の自己共分散列の間に簡単な関係が成り立っているから，ここでも，それをもちいる。

次の結果は Granger and Andersen [3] によるが，証明をつけておく

命題3.　$\{X_t\}$ をモデル (3.7) にしたがう定常系列とし，4次モーメントが存在するための十分条件 $|a^4E(e_t^4)|<1$ がみたされているとする。このとき，

$R(h)=COV(X_t^2,\ X_{t+h}^2)$ とおくと,

$$R(h)=a^2\sigma^2 R(h-l) \quad (h>l). \tag{3.9}$$

が成り立つ。

証明 (3.8) の両辺に $X_{t-h}^2(h>l)$ をかけて平均をとると, $h>l$ より,

$$E(X_t^2\, X_{t-h}^2)=a^2\sigma^2 E(X_{t-k}^2\, X_{t-h}^2)+\sigma^2 E(X_{t-h}^2).$$

したがって

$$R(h)=a^2\sigma^2 R(h-k)+(a^2\sigma^2-1)\{E(X_t^2)\}^2+\sigma^2 E(X_t^2).$$

ここで,

$$(a^2\sigma^2-1)\{E(X_t^2)\}^2+\sigma^2 E(X_t^2)$$
$$=(a^2\sigma^2-1)\frac{\sigma^2}{1-a^2\sigma^2}E(X_t^2)+\sigma^2 E(X_t^2)=0 \quad . \qquad \blacksquare$$

命題2の関係式を2次モーメントから, a と σ^2 の推定量が, μ_2 を $E(X_t^2)$ の自然な推定量とすると, 次のような形でえられる。

$$\hat{\sigma}^2=\left[1-\frac{\hat{R}(h)}{\hat{R}(h-l)}\right]\mu_2,\ \hat{a}=\pm\left[\frac{\hat{R}(h)}{\hat{\sigma}^2\hat{R}(h-l)}\right]^{\frac{1}{2}}\ (h>l).$$

ここで $\hat{R}(h)$ は(1)の場合と同じ意味である。

a に関して正と負の2つの推定量がえられることになり一意性がないが, これは3次のモーメントをもちいたとしても回避できない。

なお, 以上の議論と直接関係ないが, 以下に述べるようなことがわかる。

(優) 対角モデルは線形移動平均モデルと同じ共分散構造をもっていた。したがって次の定理により, (優) 対角モデルにしたがう定常系列は, 実際, 移動平均系列である。定理の証明は中塚［5］にある。

定理3.1 定常系列 $\{X_t\}$ が P次移動平均系列であるための必要十分条件は,

$$r(s)=COV(X_{t+s},X_t)=0 \quad (|s|\geq p+1)$$

となることである。

(3) マルコフ型モデル

$$X_t=aX_{t-1}+bX_{t-1}e_t+e_t. \tag{3.10}$$

定常性の条件は $a^2+b^2\sigma^2<1$ である。このモデルはつねに反転可能となっている。

(3.10) の両辺の平均をとって，$E(X_t)=0$.

(3.10) の両辺を2乗して

$$X_t^2=(a+be_t)^2X_{t-1}^2+2(a+be_t)X_{t-1}e_t+e_t^2 \tag{3.11}$$

(3.11) の平均をとり式を整理すると，

$$E(X_t^2)=\frac{\sigma^2}{1-a^2-b^2\sigma^2}\,. \tag{3.12}$$

(3.10) の両辺に $X_{t-k}(k\geqq1)$ をかけて平均をとれば，

$$E(X_tX_{t-k})=aE(X_tX_{t-k+1}). \tag{3.13}$$

$E(X_t)=0$ だったから (3.13) はモデル (3.10) が一次の自己回帰モデルと同一の共分散構造をもっていることを示している。

a については (3.13) の関係式から，$\hat{r}(k)$ を $E(X_tX_{t-k})$ の自然な推定量として，

$$\hat{a}=\frac{\hat{r}(k)}{\hat{r}(k-1)}\quad(k\geqq1)\,. \tag{3.14}$$

を推定量にできる。

b と σ^2 の推定量をえるためには高次のモーメントによらなければならない。マルコフ型モデルに対しては，(優) 対角モデルの場合のように2乗した系列の自己共分散列の間に単純な関係は成り立たないので，3次のモーメントをもちいることにする。

$E(X_t^3)$ を計算するために，次の (i)，(ii) の仮定をおく。

(i)　e_t の分布は対称，したがって $E(e_t^3)=0$.

(ii)　(i) のもとで $|a^3+3ab^2\sigma^2|<1$,

(i) は計算の便宜上の仮定であり，(ii) は (i) のもとで，(3.10) にしたがう系列が3次のモーメントをもつための十分条件である。

(3.11) の両辺に X_t をかけて平均をとれば，

$$E(X_t^3)=E(a^2X_{t-1}^2X_t)+E(b^2e_t^2\,X_{t-1}^2X_t)$$

$$+E\,(e_t^2X_t)+E(2aX_{t-1}e_tX_t)$$

$$+E\,(2be_t^2X_{t-1}X_t)+E(2abe_tX_{t-1}^2X_t).$$

ここで右辺の各項は適当な計算によりそれぞれ,

$$E(a^2X_{t-1}^2X_t)=a^3\,E(X_{t-1}^3)=a^3E(X_t^3),$$

$$E(b^2e_t^2\,X_{t-1}^2X_t)=ab^2\sigma^2E(X_{t-1}^3)=ab^2\sigma^2E(X_t^3),$$

$$E(X_te_t^2)=0,\ E(2abX_{t-1}e_tX_t)=2ab\sigma^2,$$

$$E(2abe_tX_{t-1}^2X_t)=2ab^2\sigma^2\,E\,(X_t^3)+2ab\sigma^2E(X_t^2)$$

となる。したがって

$$(1-a^3-3ab^2\sigma^2)E(X_t^3)=6ab\sigma^2E(X_t^2) \tag{3.15}$$

という関係式をえる。

いま μ_2, μ_3 を $E\,(X_t^2)$ と $E(X_t^3)$ の自然な推定量とし, a は (3.14) で与えられるとする。このとき, (3.12) と (3.15) から b に関する方程式をつくると

$$(2\hat{a}^2-3\hat{a}+1)\mu_2\mu_3b^2-6\hat{a}\,(1-\hat{a})\,\mu_2^2b+(1-\hat{a}^3)\,\mu_3=0 \tag{3.16}$$

となる。この方程式は複雑にみえるが, 2次方程式だから, 根を求めることは困難ではない。問題は方程式 (3.16) が複素根をもったときどうするかということと, 実根がえられたとしても σ^2 及び b は一意に定まらないことである。複素根をもった場合には $b=0$ とすることにすればよいであろう。一意性の問題に関しては, それを解決する方法はないようにおもわれる。

また, 3次モーメントを計算したところからもわかるように,

$$E(X_{t-1}^2X_t)=aE(X_t^3)$$

$$E(X_tX_{t-1}X_{t-2})=aE(X_t^2X_{t-1})$$

などとなっており, 3次相関列をみることにしても, a に関する情報以外はえられそうにない。これはモデル (3.10) の形式からみて自然であろう。

以上の議論には直接関連しないことであるが次のようなことがわかる。

先に述べたように，モデル（3.10）は一次の自己回帰モデルと同一の共分散構造をもっていた。

一方，自己回帰系列と偏自己相関係数に関して次の定理がある。証明は中塚[5]。

定理3.2 定常系列 $\{X_t\}$ がP次自己回帰系列であるための必要十分条件は，その偏自己相関係数 ϕ_s が $\phi_s=0(s\geqq p+1)$ となることである。

モデル（3.10）にしたがう定常系列については，$s\geqq2$ のとき，X_{t-s+1}, $X_{t-s+2},\cdots\cdots,X_{t-1}$ の張る線形空間へおろした X_t の射影 $\hat{X}_t$ は，$X_t=aX_{t-1}$ である。$X_t-\hat{X}_t=be_tX_{t-1}+e_t$ は $\{X_{t-k}\,;\,\mathrm{k}\geqq1\}$ から張られる線形空間と直交している。したがって偏自己相関係数 ϕ_s は $\phi_s=0(s\geqq2)$ となり，定理3.2より，次の命題がわかる。

命題4. モデル（3.10）にしたがう定常系列は一次の自己回帰モデルで表現できる。

(4) 一次の双線形モデル

$$X_t=aX_{t-1}+be_{t-1}X_{t-1}+e_t. \tag{3.17}$$

定常性の条件は $a^2+b^2\sigma^2<1$ であり，反転可能性の条件は $b^2E(X_t^2)<1$ である。以下の結果はすべて $\{e_t\}$ を正規系列と仮定するときにいえることである。

次の（3.18）から（3.21）の計算結果は Rao［9］による。

$$E(X_t)=\frac{b\sigma^2}{1-a}, \tag{3.18}$$

$$E(X_t^2)=\frac{\sigma^2}{1-a^2-b^2\sigma^2}\left(1+2b^2+\frac{4ab^2\sigma^2}{1-a}\right), \tag{3.19}$$

$$R(1)=aR(0)+\frac{b^2\sigma^4}{1-a}, \tag{3.20}$$

$$R(s)=aR(s-1) \quad (s\geqq2). \tag{3.21}$$

ここで $R(s)=COV(X_t,X_{t+s})$ である。

（3.21）から

$$\hat{a}=\frac{\hat{R}(s)}{\hat{R}(s-1)} \quad (s\geqq2). \tag{3.22}$$

いま，μ_2, μ_1 をそれぞれ $E(X_t^2)$ と $E(X_t)$ の自然な推定量とするとき，（3.18）から（3.20）によって，b の推定量をえるための方程式

$$\mu_1\mu_2 b^2-\{(1+\hat{a})\mu_2-(1+\hat{a})(\hat{R}(1)-\hat{R}(0))\}b+\mu_1=0 \qquad (3.32)$$

をえる。(3.23) の根を b の推定量とすれば，σ^2 は (3.18) あるいは (3.20) できまる。もちろん，ここでマルコフ型モデルの場合と同一の問題が生じている。

4. 問題点とその考察

まず前節でとられた方法で問題とおもわれる事項を列挙し，それから，それぞれについて考えることにする。

問題とおもわれる事項は以下のⓐ—ⓓである。

ⓐ 2次方程式の根を推定量としなければならない場合があり一意性が保証されない。さらに方程式が必ずしも実根をもつとは限らない。

ⓑ分布に何らかの仮定をおかなければならなかった。とくに(4)については具体的に分布を特定しなければならない。

ⓒ 2次以上のモーメントをもちいるために係数条件をふやさなければならない。そのことによって推定値のとりうる範囲がかなり狭くなることが予想される。

ⓓ 2次以上のモーメントが存在するための条件はいずれも漸近的な意味で求められたものである。

次にⓐ—ⓓのそれぞれについて考えてみることにする。

ⓐの問題は，例えば一次の移動平均モデルのモーメント法による推定のときにも生じている問題である。移動平均モデルの場合には一意性はモデルに反転可能の条件を課すことによって保証されている。しかし前節の場合にはそのような解決はできず，問題を回避する手段はないようにおもわれる。複素根が生じたときには，一次移動平均モデルの場合には当該のパラメータを0としている。ここでもそのようにすればよいと考えられるが，そのことの根拠は移動平均モデルの場合のようには明確にできない。

ⓑについては，モーメント法が最終的な推定法ではないということを考えれば重大な問題ではないだろう。

ⓒはモーメント法の手続きの変更をせまるものではない。しかし高次モーメントが存在することを保証しようとすると，パラメータのとりうる範囲がかなり狭くなるということは，最小２乗推定量などの他の推定量を考えるときにも重要な問題となるはずである。

ⓓについては，その結果は系列自身が高次モーメントをもつ条件として正しいと考えられるが，別に考察を要する。

5. あとがき

本稿では，双線形系列のエルゴード性を指摘し，単純なモデルに限定してモーメント法による推定の手続きを示した。その結果，双線形モデルでモーメント法をおこなうことは，単純なモデルに限ったとしても，やや複雑であり，問題もいくつか生じることがわかった。

しかし，そのようにしてえられる推定量がどの程度良いものかの評価は全くおこなうことができなかった。３節の中でも述べたように，双線形系列は線形モデルで表現できるから，比較的ゆるい条件のもとで極限定理を適用できることが予想される。そうすれば，それにもとづく評価が可能かもしれない。もちろん，これらのことは最小２乗推定量などの他の推定量の評価を考えるときにも重要となる。しかし，そういった問題は今後の課題である。

参考文献

[1] L. Breiman (1968), "*Probability*", Addison-Wesley.

[2] W. A. Fuller (1976), "*Introduction to Statistical Time Series*", Wiley.

[3] C. W. J. Granger and A. P. Andersen (1978), "*An Introduction to Bilinear Time Series Models*", Vandenhoeck and Ruprecht.

[4] C. W. J. Granger and A. P. Andersen (1978), "On the invertibility of time series models", *Stochastic Process and Their Applications*. 8. 87-92.

[5] 中塚利直 (1976), 〝時系列解析の数学的基礎〞, 教育出版.

[6] T. D. P. Pham and L. T. Tran (1981), "On the first-order bilinear time series model", *J. Appl. Prob.* 18, 617-627.

[7] B. G. Quinn (1982), "Stationarity and Invertibility of Simple Bilinear Mo-

dels", *Stochastic process and their Applications.* 12, 225–230.

[8] M. B. Rao, T. S. Rao and A. M. Walker (1983), "On the exsistence of some bilinear time series models", *Journal of Time Series Analysis.* 4, 95–110.

[9] T. S. Rao (1981), "On the Theory of Bilinear Time Series Models", *J. R. Statist. Soc.* B. 43, 224–225.

[10] T. S. Rao and M. M. Gabr (1984), "*An Introduction to Bispectral and Bilinear Time Series Models*", Springer-Verlag.