不確実性下の経済均衡に関する一考察

有定，愛展

https://doi.org/10.15017/2920648

出版情報：経済論究．61，pp.15-30，1985-03-25．九州大学大学院経済学会
バージョン：

不確実性下の経済均衡に関する一考察

有　定　愛　展

目　次

1　序
2　モデル
2.1　広義商品空間
2.2　不確実性下の Arrow-Debreu 経済
2.3　均衡の定義
3　分析
3.1　定理
3.2　若干の補助定理
3.3　定理の証明
4　結語

1　序

本稿の目的は，不確実性下の Arrow-Debreu 経済における一般均衡解の存在を示すことである．

不確実性経済の均衡分析は，Debreu[1], ch. 7, Radner[8] および Guesnerie and Montbrial[3] 等において行われてきた．Debreu は，商品を定義する際に，事象，すなわち，環境という概念を導入し，そして，不確実性経済の均衡分析は，形式的には，伝統的な確実性経済の均衡分析と同様であることを主張した．Radner は，Debreu 研究の拡張を試み，経済主体がさまざまな情報をもつ場合にも，均衡が存在することを証明した．そして，Guesnerie and Montbrial の研究は，Debreu, Radner 等の研究に対する一つの総括であるということができる．また，他方，これらの研究とは独立に，確率論的手法による不確実性経済の均衡分析も行われている．たとえば，Hildenbrand

[4] 等がそうである．さらに，近年においては，合理的期待形成理論にもとづく手法によって，不確実性経済の均衡分析もさかんに行われている．たとえば，Jordan[6] 等がそうである．

われわれは本稿において，基本的には，Debreu 流の手法を採用し，不確実性経済の一般均衡体系の再構築を試みる．ただし，われわれの不確実性経済モデルにおいては，一つの経済期間が固定され，そして，期間の始点における広義商品空間と，期間の終点における真の商品空間という二つの商品空間が考案されている．すなわち，われわれは，これら二つの商品空間を基礎にして，不確実性経済の一般均衡体系を構築しているのである．

本稿の構成は次のとおりである．2.1 において，まず，広義商品空間について説明する．2.2 では，考察すべき不確実性下の Arrow-Debreu 経済を，広義商品空間の上に設定する．2.3 では，真の商品空間について説明し，そして，ここで，われわれの不確実性経済モデルにおける均衡を定義する．3.1 においては，均衡存在を主張する定理が提示される．3.2 においては，若干の補助定理が準備される．そして，3.3 において，この定理は証明される．

2　モデル

2.1　広義商品空間

時点 t_0 から時点 t_1 までの一つの経済期間を固定する．t_0 は現在時点であり，t_1 は将来の一時点である．経済主体の行動は，t_0 において計画され，t_1 において実現されるとする．このような設定において，当該期間中の環境が，経済主体にとって定かでないとき，経済は不確実性下にあるといわれる．予想される環境の集合を S とする．経済が不確実性下にある場合，S は複数個の元からなる．われわれは，とくに，S は $|S|(>1)$ 個の元からなると仮定する．すなわち，環境集合 S を，

$$S=\{s\,|\,s=1,2,\cdots,|S|\}$$

と定義する．

さて，日付，場所および物的属性という観点から，（狭義）商品 $h=1,\ 2,\cdots,$

lが定められているとする．日付，場所および物的属性によって，(狭義) 商品を定義することは，伝統的な確実性経済モデルにおいて，しばしば行われてきた．これに対し，不確実性経済モデルにおいては，日付，場所，物的属性に加え，さらに，予想される環境によって，広義商品が定義される[1)]．予想される環境が $|S|$ 個，(狭義) 商品が l 個であったから，われわれの不確実性経済モデルでは，現在時点 t_0 において，$L=|S|l$ 個の広義商品が定められることになる．環境sのもとでの第h (狭義) 商品の空間を，

$$R_{sh}=R \qquad (s=1,2,\cdots,|S|,\ h=1,2,\cdots,l)$$

とする．ただし，R は実数全体の集合である．すると，

$$R^L=\Pi_{s=1}^{|S|}\Pi_{h=1}^{l}R_{sh}. \qquad (2\text{—}1)$$

(2—1) であらわされる L 次元ユークリッド空間 R^L を，広義商品空間とよぶことにする．

広義商品空間 R^L は，不確実性経済の研究において，基本的である．経済主体の行動計画，たとえば，後述の第i消費者の消費計画 x_i，第j生産者の生産計画 y_j は，R^L の点としてあらわされる．また，価格体系pも R^L の点である．

2.2 不確実性下の Arrow-Debreu 経済

われわれの扱う経済は Arrow-Debreu 経済である．消費者を $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，生産者を $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とする．以下では，広義商品空間 R^L を舞台に，これら二種類の経済主体，すなわち，消費者と生産者の現在時点 t_0 における特徴を叙述する．このことによって，考察すべき不確実性下の Arrow-Debreu 経済の具体的な構造が明らかにされる．

第i消費者 ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$) は，現在時点 t_0 において，次の(1)，(2)，(3)および(4)によって特徴づけられる．

(1) 消費可能集合 X_i^0．ただし，X_i^0 は R^L の非空部分集合とする．これは，第i消費者にとって実行可能な消費計画の集合である．換言すれば，$x_i\in$

1) 広義商品は，条件つき商品とよばれることもある．

X_i^0 が第 i 消費者の消費計画である．なお，消費計画において，一般に，インプットは非負の実数，アウトプットは非正の実数によって，それぞれあらわされる．

(2) X_i^0 上の選好関係 $\lesssim_i$．ただし，記号 $\lesssim_i$ は X_i^0 上の完全擬順序であり，X_i^0 の任意の二元 x_i, x_i' に対し，$x_i \lesssim_i x_i'$ と書いて，“x_i' は x_i より選好される，または，無差別である” と読む．また，X_i^0 上の強い選好関係をあらわすために，記号 $<_i$ が用いられることがある．X_i^0 の任意の二元 x_i x_i' に対し，$x_i \lesssim_i x_i'$ であり，かつ $x_i' \lesssim_i x_i$ でないとき，$x_i <_i x_i'$ であると定義される．そして，$x_i <_i x_i'$ と書いて，“x_i' は x_i より選好される” と読む．

(3) 資源 ω_i．ただし，$\omega_i \in R^L$ である．これは，第 i 消費者の初期保有量をあらわしている．

(4) 第 j 生産者からの利潤配当率 $\theta_{ij}(j=1, 2, \cdots, n)$．ただし，$\theta_{ij}$ は非負の実数であり，また，

$$\sum_{i=1}^{m}\theta_{ij}=1 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

とする．これは，第 j 生産者の株式のうち，第 i 消費者の保有する割合と考えられる．

他方，第 j 生産者 $(j=1, 2, \cdots, n)$ は，現在時点 t_0 において，次の(1)′ によって特徴づけられる．

(1)′ 生産可能集合 Y_j^0．ただし，Y_j^0 は R^L の非空部分集合とする．これは，第 j 生産者にとって実行可能な生産計画の集合である．すなわち，$y_j \in Y_j^0$ が第 j 生産者の生産計画である．なお，生産計画においては，インプットは非正の実数，アウトプットは非負の実数によって，それぞれあらわされる．

以上を綜合すれば，われわれの考察すべき不確実性下の Arrow-Debreu 経済は，形式的には，

$$\mathcal{E}=((X_i^0, \lesssim_i, \omega_i, (\theta_{ij})), (Y_j^0))$$

とあらわすことができる．われわれは以後，不確実性下の Arrow-Debreu 経済を，単に，不確実性経済 $\mathcal{E}$ とよぶことにする．

2.3 均衡の定義

時点 t_1 においては，各経済主体は，t_0 から t_1 までの期間中に，いかなる環境が成立したか，既に明確に認識している．すなわち，この時点 t_1 では，ある一つの $s^*\in S$ が，当該期間中の真の環境として確定している．したがってまた，この時点 t_1 においては，広義商品という概念は消滅し，かわって，日付，場所，物的属性，および，真の環境 s^* によって，l 個の真の商品が確定している．環境 s^* のもとでの第 h（狭義）商品の空間は，

$$R_{s^*h}=R \qquad (h=1,2,\cdots,l)$$

である．したがって，

(2-2) $\quad R^l=\Pi_{h=1}^{l}R_{s^*h}.$

(2-2) であらわされる l 次元ユークリッド空間 R^l は，真の商品空間である[2]．真の商品空間 R^l は，明らかに，広義商品空間 R^L の部分集合である．ところで，いま，

(2-3) $\quad X_i^1=X_i^0\cap R^l \qquad (i=1,2,\cdots,m),$

(2-4) $\quad Y_j^1=Y_j^0\cap R^l \qquad (j=1,2,\cdots,n)$

とする．X_i^1 は，第 i 消費者の真の消費可能集合である．Y_j^1 は，第 j 生産者の真の生産可能集合である．

さて，これらのことを考慮に入れて，不確実性経済 $\mathcal{E}$ の均衡を定義する．不確実性経済 $\mathcal{E}$ の均衡とは，次の条件 (α), (β), (γ) および (δ) をみたす R^L の $(m+n+1)$ 個の点の組 $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ のことである[3]．

(α) 各 i に対し，x_i^* は $\precsim_i$ に関し，集合 $\{x_i\in X_i^1\,|\,p^*\cdot x_i\leqq p^*\cdot\omega_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}p^*\cdot y_j^*\}$ の最大元である．

(β) 各 j に対し，y_j^* は Y_j^1 上で $p^*\cdot y_j$ を最大にする．

(γ) $p^*\geq 0.$

(δ) $z^*=\sum_{i=1}^{m}x_i^*-\sum_{j=1}^{n}y_j^*-\sum_{i=1}^{m}\omega_i\leqq 0,\ p^*\cdot z^*=0.$

この定義によれば，均衡 $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ においては，経済は次のような状

---

2) 以後，R^l は，専ら (2-2) の意味で用いられる．

3) 条件中の記号・は，R^L の点の内積をあらわしている．また，R^L の点の順序に関する表記については，本稿では，$\leqq$, $\leq$, $<$ を採用している．

態にある．まず，(γ) が意味するように，半正の価格体系 p^* が存在する．そして，p^* がひとたび与えられると，各生産者 j は，(β) が意味するように，真の生産可能集合 Y^1_j 上で，この価格体系に関し彼の利潤 $p^*\cdot y_j$ を最大にする．y^*_j がこれを可能にしている．また，p^* に加え，さらにこうして y^*_j が与えられると，各消費者 i に対し，予算制約 $p^*\cdot x_i \leqq p^*\cdot\omega_i+\sum^n_{j=1}\theta_{ij}p^*\cdot y^*_j$ が定まり，彼すなわち各消費者 i は，(α) が意味するように，真の消費可能集合 X^1_i 上で，この予算制約のもとに彼の選好を最大にする．x^*_i がこれを可能にしているのである．そして，さらに，市場においては，(δ) の意味するとおり，無料処分的な市場均衡が成立している．われわれの目的は，このような均衡が不確実性経済 $\mathcal{E}$ に存在することを示すことである．

3　分析

3.1　定理

不確実性経済 $\mathcal{E}$ に対して次の定理が成立する．

定理　不確実性経済 $\mathcal{E}=((X^0_i, \lesssim_i, \omega_i, (\theta_{ij})), (Y^0_j))$ は次の仮定を満足するとき均衡を有する．

各 i に対し，

(a-1)　X^0_i はコンパクトかつ凸である．

(a-2)　$X^1_i=X^0_i\cap R^l$ のある元 $\bar{x}_i$ が存在し，$\bar{x}_i<\omega_i$．

(a-3)　$X^1_i=X^0_i\cap R^l$ は非飽和である[4]．

(a-4)　X^0_i の任意の元 x'_i に対し，集合 $\{x_i\in X^0_i \mid x_i\lesssim_i x'_i\}$ および $\{x_i\in X^0_i \mid x'_i\lesssim_i x_i\}$ は X^0_i で閉である．

(a-5)　X^0_i の任意の二元 x_i, x'_i に対し，$x_i<_i x'_i$ ならば $x_i<_i(1-r)x_i+rx'_i$ $(r\in(0, 1])$[5]．

各 j に対し，

(b-1)　Y^0_j はコンパクトかつ凸である．

---

4)　すなわち，任意の $x_i\in X^1_i$ に対し，ある $x'_i\in X^1_i$ が存在し，$x_i<_i x'_i$．

5)　$(0, 1]=\{r\in R \mid 0<r\leqq 1\}$．

(b-2)　$Y_j^0 \ni 0$.

この定理は，不確実性経済$\mathcal{E}$における一般均衡解の存在問題に対する一つの肯定的な解答である．証明は，3.2 で若干の補助定理を準備した後に，3.3 において与えられる．ただし，ここで，とくに次の点を指摘しておかなければならない．すなわち，各iに対し，(a-4) から，

$$x_i \lesssim_i x_i' \Longleftrightarrow u_i(x_i) \leqq u_i(x_i') \qquad (x_i, x_i' \in X_i^0)$$

となる連続関数 u_i: $X_i^0 \to R$ が存在する． この点については， Debreu[1], pp. 55-59 を参照．

3.2　若干の補助定理

対応の連続性および閉性に関する説明からはじめる[6]．X, Y を，（同一または異なる）ユークリッド空間の非空部分集合とし，対応 φ: $X \to Y$を考える．対応φが $x^0 \in X$で upper hemi-continuous (u.h.c.) であるとは，$\varphi(x^0) \neq \phi$で，かつ，$\varphi(x^0)$ をふくむ任意の開集合Uに対し，x^0 の近傍Vが存在し，$x \in V$ ならば $\varphi(x) \subset U$ となることをいう．対応φが $x^0 \in X$で lower hemi-continuous (l.h.c.) であるとは，$\varphi(x^0) \neq \phi$ で，かつ，$\varphi(x^0) \cap U \neq \phi$ をみたす任意の開集合Uに対し，x^0 の近傍Vが存在し，$x \in V$ならば $\varphi(x) \cap U \neq \phi$ となることをいう．そして，φが $x^0 \in X$で u.h.c. かつ l.h.c. のとき，φはx^0で連続であるという．φのXにおける upper hemi-continuity, lower hemi-continuity および連続性は，それぞれ，Xの各点における upper hemi-continuity, lower hemi-continuity および連続性によって定義される．また，対応φが $x^0 \in X$ で閉であるとは，

$$[x^\nu \to x^0,\ y^\nu \to y^0,\ y^\nu \in \varphi(x^\nu)] \Longrightarrow [y^0 \in \varphi(x^0)]$$

が成立することをいう．φのXにおける閉性は，Xの各点における閉性によって定義される．

ところで，これらの概念について，次の命題1および2が成り立つことが知られている．

6)　ここで述べられる対応に関する諸概念および諸命題についての詳細は，たとえば，Hildenbrand and Kirman [5], pp. 187-200 を参照．

命題1 Yをコンパクト，φを非空値かつコンパクト値とする[7]．このとき，φが $x^0 \in X$ で u.h.c. であることは，φが x^0 で閉であることと同値である．

命題2 φが $x^0 \in X$ で l.h.c. であることは，

〔$x^\nu \to x^0$, $y^0 \in \varphi(x^0)$〕$\Longrightarrow$〔点列 $\{y^\nu\}$ が存在し，$y^\nu \to y^0$, $y^\nu \in \varphi(x^\nu)$〕

が成立することと同値である．

さて，以上を予備知識とし，定理の証明に不可欠な若干の補助定理を，以下において準備する[8]．

補助定理1 X, Yを，(同一または異なる) ユークリッド空間の非空部分集合とし，とくにYはコンパクトと仮定する．いま，φをXからYへの対応，fを $X \times Y$ 上の実数値関数とし，

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x) \mid f(x,y) = \max_{z \in \varphi(x)} f(x,z)\}$$

によって，対応 μ: $X \to Y$ を定義する[9]．このとき，対応φが非空値，コンパクト値かつ連続であり，しかも，関数fが連続であるならば，対応μは非空値かつ閉である．

証明 μが非空値であることは明らかである．そこで，次にμが閉であることをいうために，任意の $x^0 \in X$ について，$x^\nu \to x^0$, $y^\nu \to y^0$, $y^\nu \in \mu(x^\nu)$ のとき $y^0 \in \mu(x^0)$ となることを示す．さて，φは，u.h.c. であるから，命題1により，閉である．したがって，

$$y^0 \in \varphi(x^0).$$

また，φは l.h.c. であるから，任意の $z \in \varphi(x^0)$ に対し，命題2により，$z^\nu \to z$, $z^\nu \in \varphi(x^\nu)$ となる点列 $\{z^\nu\}$ が存在する．このとき，μの定義から，すべてのνに対し，$f(x^\nu, y^\nu) \geqq f(x^\nu, z^\nu)$ である．これを $\nu \to \infty$ ならしめると，fは連続であるから，$f(x^0, y^0) \geqq f(x^0, z)$ となる．したがって，

$$f(x^0, y^0) = \max_{z \in \varphi(x^0)} f(x^0, z).$$

---

7) われわれは，便宜上とくに，任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) \neq \phi$ のとき，φは非空値であるとよぶことにする．

8) Debreu[2] を参照することが有益である．

9) φおよびμは，$X \times Y$ 上の対応と考えることもできる．

ゆえに，$y^0 \in \mu(x^0)$ である（証了）．

補助定理 2　Xをユークリッド空間 R^L の非空，コンパクトかつ凸なる部分集合とし，また，$p \in R^L$, $w \in R$ とする．$D=\{(p, w) \in R^{L+1} | \min p \cdot X \leqq w\}$ を始集合とし，Xを終集合とする対応ξを，

$$\xi(p,w)=\{x \in X | p \cdot x \leqq w\}$$

によって定義する[10)]．このとき，$\min p^0 \cdot X < w^0$ ならば，ξは (p^0, w^0) で連続である．

証明　ξが (p^0, w^0) で u.h.c. かつ l.h.c. であることを示す．

(u.h.c. であること)　前提により，Xはコンパクトであり，また，明らかに，ξは非空値かつコンパクト値である．したがって，ξが (p^0, w^0) で閉であることを示せば，命題 1 により，ξは (p^0, w^0) で u.h.c. であることがわかる．そこで，$(p^\nu, w^\nu) \to (p^0, w^0)$, $x^\nu \to x^0$, $x^\nu \in \xi(p^\nu, w^\nu)$ とする．すると，明らかに，$x^0 \in X$ かつ $p^0 \cdot x^0 \leqq w^0$ である．ゆえに，$x^0 \in \xi(p^0, w^0)$．すなわち，ξは (p^0, w^0) で閉である．

(l.h.c. であること)　$(p^\nu, w^\nu) \to (p^0, w^0)$, $x^0 \in \xi(p^0, w^0)$ とする．このとき，

$$p^0 \cdot x^0 \leqq w^0.$$

$p^0 \cdot x^0 < w^0$ の場合は，十分大きい番号 ν^* をとれば，$\nu > \nu^*$ となるすべての ν に対し，

$$p^\nu \cdot x^0 < w^\nu$$

とすることができる．そこで，点列 $\{x^\nu\}$ を次のように定義する．$\nu \leqq \nu^*$ のときは，$\xi(p^\nu, w^\nu)$ の任意の点を x^ν とする．$\nu > \nu^*$ のときは，$x^\nu = x^0$ とする．すると，明らかに，$x^\nu \to x^0$ かつ $x^\nu \in \xi(p^\nu, w^\nu)$．

次に，$p^0 \cdot x^0 = w^0$ の場合を考える．いま，仮定から，$p^0 \cdot x' < w^0$ となる $x' \in X$ が存在する．したがって，十分大きい番号 ν^* をとれば，$\nu > \nu^*$ となるすべての ν に対し，

$$p^\nu \cdot x' < w^\nu, \; p^\nu \cdot x' < p^\nu \cdot w^0$$

とすることができる．このことから，$\nu > \nu^*$ のとき，直線 $\{x \in R^L | x=(1-r) x' + r x^0, \; r \in R\}$ と超平面 $\{x \in R^L | p^\nu \cdot x = w^\nu\}$ との交点 a^ν が一意に存在する

10)　始集合Dは，ξを非空値とするために，とくに，このように定義されている．

ことがわかる．さてそこで，点列 $\{x^\nu\}$ を次のように定義する．$\nu \leqq \nu^*$ のときは，$\xi(p^\nu, w^\nu)$ の任意の点を x^ν とする．$\nu > \nu^*$ で，a^ν が x' と x^0 の間にあるときは，$x^\nu = a^\nu$ とする．$\nu > \nu^*$ で，a^ν が x' と x^0 の間にないときは，$x^\nu = x^0$ とする．すると，明らかに，$x^\nu \to x^0$ かつ $x^\nu \in \xi(p^\nu, w^\nu)$．

したがって，命題2により，ξ は (p^0, w^0) で l.h.c. である（証了）．

最後に角谷の不動点定理をあげておく．証明は角谷[7]を参照．

補助定理3　（角谷の不動点定理）　X をユークリッド空間の非空，コンパクトかつ凸なる部分集合とする．対応 $\varphi: X \to X$ は，非空値，閉，および，凸値のとき，不動点をもつ．ただし，対応 φ の不動点とは，$x^0 \in \varphi(x^0)$ となる点のことである．

3.3　定理の証明

定理の証明は，基本的には，伝統的な確実性経済モデルにおける均衡存在の証明と同様である[11]．

定理の証明　全体を大きく六段に分けて証明する．

(i)　集合 A

X_i^1 $(i=1, 2, \cdots, m)$ および Y_j^1 $(j=1, 2, \cdots, n)$ が，非空，コンパクトかつ凸であることは容易に知られる．実際，X_i^1 は，(a-2) から，非空であり，(a-1) と (2-3) から，コンパクトかつ凸である．Y_j^1 についても，(b-1)，(b-2) および (2-4) から，これらの性質が導かれる[12]．また，

$$P^0 = \{p \in R_+^L \mid \textstyle\sum_{H=1}^L p_H = 1\}$$

とし，

$$P^1 = P^0 \cap R^l$$

とすれば，P^1 も明らかに非空，コンパクトかつ凸である．したがって，集合 A を，

11)　確実性経済モデルにおける均衡存在の証明については，たとえば，Debreu[2] が有益である．われわれの定理の証明も，とくに，その sec. 2 における議論から，多くを教示されている．Nash 均衡の理論が，したがってまた，角谷の不動点定理が，証明の核である．

12)　$0 \in Y_j^1$ に注意すべきである．

$$A=\Pi_{i=1}^{m}X_i^1\times\Pi_{j=1}^{n}Y_j^1\times P^1$$

によって定義すれば，A は非空，コンパクトかつ凸である．

(ii)　実数値関数 u_i', v_j および t

いま，A 上の実数値関数 u_i' $(i=1, 2, \cdots, m)$, $v_j(j=1, 2, \cdots, n)$ および t を，それぞれ，次のように定義する．

$$u_i'((x_i), (y_j), p)=u_i(x_i),$$
$$v_j((x_i), (y_j), p)=p\cdot y_j,$$
$$t((x_i), (y_j), p)=p\cdot[\Sigma_{i=1}^{m}x_i-\Sigma_{j=1}^{n}y_j-\Sigma_{i=1}^{m}\omega_i].$$

u_i は連続であった．したがって，u_i' も連続である．また，(a-5) から，明らかに u_i は擬凹である．したがって，u_i' も擬凹である．v_j および t も，内積の性質により，連続擬凹である．

(iii)　対応 ξ_i, η_j および ζ

他方，A 上の対応 $\xi_i(i=1, 2, \cdots, m)$, $\eta_j(j=1, 2, \cdots, n)$ および ζ を定義する．

対応 $\xi_i: A\rightarrow X_i^1$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ は，

$$\xi_i((x_i), (y_j), p)=\tilde{\xi}_i(p)=\{x_i\in X_i^1 \mid p\cdot x_i\leqq p\cdot\omega_i+\Sigma_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\}$$

によって定義される．ただし，

$$\pi_j(p)=\max p\cdot Y_j^1 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

このとき，ξ_i について，次の四つの性質に注意すべきである．

第一に，ξ_i は非空値である．任意の $p\in P^1$ をとる．(a-2) から，$p\cdot\bar{x}_i<p\cdot\omega_i$ であり，また，$0\in Y_j^1$ だから，$\pi_j(p)\geqq 0$ である．したがって，

$$\text{(3-1)}\qquad p\cdot\bar{x}_i<p\cdot\omega_i+\Sigma_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)$$

となり，$\tilde{\xi}_i(p)\neq\phi$．ゆえに，ξ_i は非空値である．

第二に，ξ_i はコンパクト値である．任意の $p\in P^1$ をとる．$\tilde{\xi}_i(p)$ は明らかに X_i^1 で閉である．したがって，X_i^1 がコンパクトであることを考慮すれば，$\tilde{\xi}_i(p)$ はコンパクトである．ゆえに，ξ_i はコンパクト値である．

第三に，ξ_i は連続である．

$$w_i(p)=p\cdot\omega_i+\Sigma_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

とする．(3-1) から，任意の $p\in P^1$ に対し，

(3-2) $\min p\cdot X_i^1 < w_i(p)$.

ところで π_j は連続である．これは明らかである．そこで w_i も連続になる．したがって，(3-2) と補助定理2から，$\tilde{\xi}_i$ の連続性を得る．ゆえに，ξ_i は連続である．

第四に，ξ_i は凸値である．任意の $p\in P^1$ をとる．$x_i, x_i'\in\tilde{\xi}_i(p)$ とすれば，

$$p\cdot x_i,\ p\cdot x_i' \leqq w_i(p).$$

したがって，$\alpha+\beta=1$ となる任意の実数 α, $\beta\geqq 0$ に対し，

$$p\cdot[\alpha x_i+\beta x_i'] = \alpha p\cdot x_i+\beta p\cdot x_i' \leqq \alpha w_i(p)+\beta w_i(p) = w_i(p)$$

となり，$\alpha x_i+\beta x_i' \in\tilde{\xi}_i(p)$．すなわち，$\tilde{\xi}_i(p)$ は凸である．ゆえに，ξ_i は凸値である．

また，対応 $\eta_j: A\rightarrow Y_j^1 (j=1, 2, \cdots, n)$ および $\zeta: A\rightarrow P^1$ は，それぞれ，

$$\eta_j((x_i), (y_j), p) = Y_j^1,$$

$$\zeta((x_i), (y_j), p) = P^1$$

によって定義される．η_j および ζ が，非空値，コンパクト値，連続，および，凸値であることは明らかである[13)]．

(iv) 対応 φ_i, ψ_j および ρ

さて，ここで，関数 u_i', v_j, t と対応 ξ_i, η_j, ζ をもとに，新たに，対応 $\varphi_i: A\rightarrow X_i^1$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，$\psi_j: A\rightarrow Y_j^1$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ および $\rho: A\rightarrow P^1$ を定義する．すなわち，

$$\varphi_i((x_i), (y_j), p) = \{\hat{x}_i\in\xi_i((x_i), (y_j), p) \mid u_i'(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n, p) = \max_{\tilde{x}_i\in\xi_i((x_i), (y_j), p)} u_i'(x_1, \cdots, \tilde{x}_i, \cdots, x_m, y_1, \cdots y_n, p)\},$$

$$\psi_j((x_i), (y_j), p) = \{\hat{y}_j\in\eta_j((x_i), (y_j), p) \mid v_j(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, \hat{y}_j, \cdots, y_n, p) = \max_{\tilde{y}_j\in\eta_j((x_i), (y_j), p)} v_j(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, \tilde{y}_j, \cdots, y_n, p)\},$$

$$\rho((x_i), (y_j), p) = \{\hat{p}\in\zeta((x_i), (y_j), p) \mid t(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots y_n, \hat{p}) = \max_{\tilde{p}\in\zeta((x_i), (y_j), p)} t(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n, \tilde{p})\}.$$

(i)から，X_i^1 はコンパクトである．また，(iii)から，ξ_i は非空値，コンパク

---

13) 連続性については，η_j, ζ がコンスタントであることから導かれる．

ト値かつ連続であり，(ii)から，u'_i は連続である．したがって，補助定理1により，φ_i は非空値かつ閉である．

さらに，φ_i は凸値である．実際，任意の $((x_i),(y_j),p)\in A$ に対し，

$$\varphi_i((x_i),(y_j),p)=\xi_i((x_i),(y_j),p)\cap\{\hat{x}_i\in X_i^1\mid u'_i(x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n,p)\geqq\max_{\tilde{x}_i\in\xi_i((x_i),(y_j),p)}u'_i(x_1,\cdots,\tilde{x}_i,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n,p)\}$$

であるが，右辺の二つの集合はともに凸である．これは，ξ_i が凸値であること，および，u'_i が擬凹であることによる．

つまり，φ_i は，非空値，閉，および，凸値である．そして，まったく同様にして，ψ_j および ρ についても，これらの性質が導かれる．

(v)　対応 μ

そこで，いま，対応 μ: $A\to A$ を，

$$\mu=\Pi_{i=1}^m\varphi_i\times\Pi_{j=1}^n\psi_j\times\rho$$

によって定義する．すると，(iv)から，μ は，非空値，閉，および，凸値である．

(vi)　均衡 $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$

以上で，角谷の不動点定理を適用する準備がととのった．すなわち，(i)で述べた A の性質と，(v)で述べた μ の性質により，対応 μ: $A\to A$ は，

$$((x_i^*),(y_j^*),p^*)\in\mu((x_i^*),(y_j^*),p^*)$$

となる点，すなわち，不動点 $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ をもつ．

まず，明らかに $p^*\in P^1$ であるから，条件 (γ) が成立する．

次に，各 j に対し，$y_j^*\in\psi_j((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ であるから，

$$v_j((x_i^*),(y_j^*),p^*)=\max_{y_j\in\eta_j((x_i^*),(y_j^*),p^*)}v_j(x_1^*,\cdots,x_m^*,y_1^*,\cdots,y_j,\cdots,y_n^*,p^*).$$

したがって，v_j および η_j の定義から，すべての j について，

$$p^*\cdot y_j^*=\max p^*\cdot Y_j^1$$

である．これは条件 (β) が成立することを意味している．

同様に，各 i に対し，$x_i^*\in\varphi_i((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ であるから，

$$u'_i((x_i^*),(y_j^*),p^*)=\max_{x_i\in\xi_i((x_i^*),(y_j^*),p^*)}u'_i(x_1^*,\cdots,x_i,\cdots,x_m^*,y_1^*,\cdots,y_n^*,p^*).$$

したがって，u'_i および ξ_i の定義と (β) が成り立つことから，すべての i に

ついて，x_i^* は，集合 $\{x_i \in X_i^1 | p^* \cdot x_i \leqq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$ 上で，u_i を最大にしていることがわかる．このことは条件（α）が成立することを意味している．

最後に，条件（δ）が成立することを示す．(a-3) から，x_i^* に対し，ある $x_i' \in X_i^1$ が存在し，$x_i^* <_i x_i'$[14]．さて，(α) が成り立つから，任意の i について，

(3-3)　　$p^* \cdot x_i^* \leqq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$

であるが，(3-3) は実は等号で成立する．いま，ある i について，

$$p^* \cdot x_i^* < p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$$

と仮定する．すると，適当な実数 $r \in (0, 1]$ が存在し，$(1-r)\, x_i^* + r x_i' \in \{x_i \in X_i^1 | p^* \cdot x_i \leqq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$．ところが，$x_i^* <_i x_i'$ であったから，(a-5) から，$x_i^* <_i (1-r) x_i^* + r x_i'$．これは矛盾である．したがって，実は，各 i に対し，

(3-4)　　$p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$.

そこで，(3-4) について，i に関する総和をとり，$\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1 (j=1, 2, \cdots, n)$ を考慮すれば，

$$\sum_{i=1}^m p^* \cdot x_i^* = \sum_{i=1}^m p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n p^* \cdot y_j^*$$

を得る．ゆえに，

$$p^* \cdot z^* = 0.$$

また，p^* は P^1 上で $p \cdot z^*$ を最大にしている[15]．そこで，任意の $p \in P^1$ に対し，

$$p \cdot z^* \leqq p^* \cdot z^* = 0$$

である．ゆえに，

$$z^* \leqq 0.$$

これで（δ）が成立することがわかった．

$((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ は，すなわち，均衡にほかならない（証了）．

---

14)　前註 4) を参照．

15)　(β) についての証明とほぼ同様．

4　結語

本稿で議論したモデルおよび分析には，いくつかの点において，検討すべき余地がある．

第一の点は，均衡の定義についてである．条件 (δ) は，既に述べたように，無料処分的な市場均衡の成立を意味している．しかしながら，本来ならば，これは，厳密な市場均衡の成立を意味する次の条件 (δ)′ に，とってかえられるべきである．

(δ)′　$\sum_{i=1}^{m} x_i^* - \sum_{j=1}^{n} y_j^* - \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 0.$

第二の点は，定理における仮定についてである．仮定のうちのいくつかには，幾分きびしいものがある．消費可能集合 X_i^0 および生産可能集合 Y_j^0 についてのコンパクト性の仮定等がそうである．また，仮定 (a-2) あるいは (a-3) についても，修正の余地がある．

本稿は，不確実性経済の一般均衡理論に対する一つの試論である．われわれは，それゆえ，議論をできるかぎり簡単にするように努めた．上述のような問題点が生じたのは，このためである．しかしながら，これらの問題点を検討することは，われわれに残された今後の研究課題である．

参考文献

[1] Debreu, G., *Theory of Valve,* Wiley, 1959（丸山徹訳『価値の理論』，東洋経済新報社，1977).

[2] Debreu, G., "Existence of Competitive Equilibrium", in: K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. II, North-Holland, 1982.

[3] Guesnerie, R. and T. D. Montbrial, "Allocation under Uncertainty: A Survey", in: J. H. Drèze, ed., *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality,* Macmillan, 1974.

[4] Hildenbrand, W. "Random Preferences and Equilibrium Analysis", *Journal of Economic Theory,* vol. 3, 1971.

[5] Hildenbrand, W. and A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis,* North-Holland, 1976.

[6] Jordan, J. S., "The Generic Existence of Rational Expectations Equilibrium in the Higher Dimensional Case", *Journal of Economic Theory*, vol. 26, 1982.
[7] Kakutani, S., "A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, 1941.
[8] Radner, R., "Competitive Equilibrium under Uncertainty", *Econometrica*, vol. 36, 1968.