

現金管理のための貨幣需要に対する在庫管理的アプローチの展開：オアの所論を中心として

立石，義明

<https://doi.org/10.15017/2920612>

出版情報：経済論究. 51, pp.43-74, 1981-06-27. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



現金管理のための貨幣需要に対する 在庫管理的アプローチの展開

——オアの所論を中心として——

立 石 義 明

- I 序
- II 貨幣需要決定に関する在庫モデルの展開
 - 1 ボーモル・モデル
 - 2 パティンキン・モデル
 - 3 オアの基本モデルの構成
 - 4 基本モデルの最適値とその特質
 - 5 モデルの意義
- III 3資産型の基本モデル
 - 1 二つの3資産モデルの構成
 - 2 現金・短期・長期証券モデル
 - (i) 固定転換費用と資産管理の分離可能性
 - (ii) 比例転換費用と資産管理の相互依存性
 - 3 現金・証券・物的資産モデル
- IV 結び

I 序

現金管理の問題は、企業にとっても財務担当者にとってもきわめて重要な問題である。この問題に対して、これまで各種の数量的方法を用いて分析されている。その分析的手法のモデルを分類すれば次のようになるであろう。すなわち、(1)在庫管理モデル¹⁾、(2)線形計画法（リニア・プログラミング）モデル²⁾、(3)動的計画法（ダイナミック・プログラミング）モデル³⁾、(4)その他のモデル。

在庫管理の考え方を現金管理に適用したモデルは、最初ボーモル（William Baumol）⁴⁾によってとりあげられ、その後、トービン（James Tobin）⁵⁾、

パティンキン (Don Patinkin) ⁶⁾, ミラー=オア (Merton H. Miller and Daniel Orr) ⁷⁾, オア (Daniel Orr) ⁸⁾ などによって研究されてきた。

現金管理にかかわる在庫モデルの類型は、キャッシュ・フローが確定的（決定論的）であるか確率的であるかによって二つに分けられる。ポーモルとトービンのモデルは前者であり、パティンキン、ミラー=オアおよびオアのモデルは後者である。

本稿においては、これら現金管理に対する在庫理論的アプローチをとりあげ、特に、最も進んだ研究水準を示すオアのモデルを詳細に紹介・検討する。

本稿は以下のように叙述される。Ⅱにおいて、企業の貨幣需要に対するポーモル、パティンキンおよびオアの三つのモデルが示される。つまり、伝統的な短期的最適化から導き出された二つの重要で有力なモデルに続いて、オアの基本モデルが展開される。中心的焦点は、企業の資産管理に主要な重点をおく資産保有者の意志決定過程の短期モデルである。Ⅲにおいて、3資産型の基本モデルを取り扱う。それはⅡで展開された基本モデルの有効性についての証拠となり、しかも潜在的に多くの適用可能な一般化を含んでいる。

[注] 1) たとえば、次の文献などがある。

- ① W. J. Baumol, "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 66, No. 4 (November 1952), pp. 545—556.
- ② J. Tobin, "The Interest Elasticity of Transactions Demand for Cash," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 38, No.3 (August 1956), pp. 241—247.
- ③ D. Patinkin, *Money, Interest, and Prices* (Evanston, Ill.: Row, Peterson, and Company, 1956).
- ④ M. H. Miller and D. Orr, "A Model of the Demand for Money by Firms," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 3 (August 1966), pp. 413—435.
- ⑤ M. H. Miller and D. Orr, "The Demand for Money by Firms: Extensions of Analytic Results," *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 5 (December 1968), pp. 735—759.
- ⑥ D. Orr, *Cash Management and the Demand for Money* (New York: Praeger Publishers, Inc., 1970).

これらのうち、①、③および⑥は本稿でとりあげ、④は市村昭三教授の「現金在高に対する在庫管理的接近方法の展開——ミラー＝オアの所論を中心として——」（市村昭三著『運転資本管理』第7章、同文館、昭和50年、185～201ページ）において論究されている。

2) たとえば、次の文献などがある。

① A. A. Robichek, D. Teichroew, and J. M. Jones, "Optimal Short Term Financing Decision," *Management Science*, Vol. 12, No. 1 (September 1965), pp. 1—36.

② R. F. Calman, *Linear Programming and Cash Management: CASH ALPHA* (Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1968).

③ G. A. Pogue and R. N. Bussard, "A Linear Programming Model for Short Term Financial Planning under Uncertainty," in S. C. Myers (ed.), *Modern Developments in Financial Management* (New York: Praeger Publishers, Inc., 1976), pp. 528—557.

これらのうち、①は御手洗丈夫教授の「リニヤー・プログラミングによる短期資金調達計画」（Ⅰ）（Ⅱ）（大分大学経済論集第19巻、第4、5号）および市村昭三教授の「LPによる最適現金収支計画——ロビチェクらの所論を中心として——」（市村昭三著『運転資本管理』第9章、同文館、昭和50年、235～264ページ）において論究されており、③は拙稿「不確実性下におけるLPモデルによる短期資金調達計画——ボーグ＝バサドの所論を中心として——」『経済論究』（九州大学大学院）第50号、1981年で検討している。

3) たとえば、E. J. Elton and M. J. Gruber, *Finance as a Dynamic Process* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1975). があげられる。

4) W. J. Baumol, "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 66, No. 4 (November 1952), pp. 545—556.

5) J. Tobin, "The Interest Elasticity of Transactions Demand for Cash," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 38, No. 3 (August 1956), pp. 241—247.

6) D. Patinkin, *Money, Interest, and Prices* (Evanston, Ill.: Row, Peterson, and Company, 1956).

7) M. H. Miller and D. Orr, "A Model of the Demand for Money by Firms," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 3 (August 1966), pp. 413—435.

M. H. Miller and D. Orr, "The Demand for Money by Firms: Extensions of Analytic Results," *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 5

(December 1968), pp. 735—759.

8) D. Orr, *Cash Management and the Demand for Money* (New York : Praeger Publishers, Inc., 1970).

II 貨幣需要決定に関する在庫モデルの展開

1 ボーモル・モデル

ボーモルの分析目標は、一定期間中たえず支出される現金残高を補充するための資産転換の最適パターンを見つけることである。そのモデルは次のことを仮定している。(i) 1日当り m ドルという既知で一定なキャッシュ・フロー。(ii) 支払いに対するあらゆる要求は現金残高からすぐに満たされる。(iii) 資産から現金への転換固定費は r である。(iv) 現金保有の機会費用は ν であり、それは社債の利子率に等しい。(v) M/m 日ごとに社債の価値 M ドルが売却され、その売上金はすぐに得られる。

したがって、目標は M に関して毎日のオペレーティングコストを最小化することである。コストは下記ようになる。

$$C = \gamma m/M + \nu M/2 \quad (1)$$

ここに、 γ と ν はコスト係数、 m/M は現金への転換の確率（1日当りの転換回数）、 $M/2$ は一定期間中の現金残高の平均価値である。かくて（1）式の右辺第1項は転換費用を、第2項は保有費用を表わす。（1）式を M に関して微分すると、次のような最適転換規模 M^* が得られる。

$$M^* = (2\gamma m/\nu)^{1/2} \quad (2)$$

一定期間中の現金残高とその支出との関係は、図1ののこぎり歯状のパター

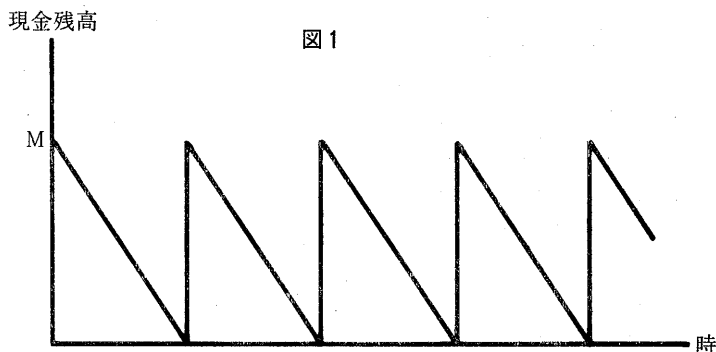


図1

をとる。そのパターンの規則性は、平均現金残高が最適転換規模の半分、すなわち $\bar{M} = M^*/2$ であることを意味している。ボーモル・モデルが予測する貨幣需要の弾力性は、 m 、すなわち取引変数に関して $1/2$ であり、 v 、すなわち利子率に関して $-1/2$ である。

2 パティンキン・モデル

パティンキンの貨幣需要モデルは、支払・受取双方のフローに無秩序性 (randomness) を組み入れた、しかも最適化プロセスとして明快に定式化されている最初のモデルであろう。そのモデルは、ドボレッツキー (A. Dvoretzky) の組合せ論 (combinatorial analysis) に依拠している。

意志決定者が直面する統制問題は、下記のような仮定の下で、時間 t における期首現金在高 mM を選択することである。(i) 予算期間 $[t, t+1)$ で、収入取引日数 (回数) N と支出取引日数 (回数) N はランダムな順序でそれぞれ発生し、1日 (回) の取引額は m ドルである。(ii) 現金保有費用は、期首現金在高 mM の大きさに比例する。(iii) 予算期間中、支出取引額 (支払高) が収入取引額 (受取高) と mM の和より大きくなると現金不足費用が発生するが、その期間に1回しか発生しない費用である。

モデルを分析するためには、現金が不足する確率を計算する必要がある。 $M \geq N$ なら、明らかに不足確率は0である。したがって M の最適値は0と N の間にあることになる。現金不足確率の分布 $F(2N, M)$ は次の式で表わされる。

$$F(2N, M) = N!^2 / ((N-M)!(N+M)!) \quad (3)$$

ドボレッツキーは

$$F(2N, M) \approx e^{-M^2/N}$$

であることを証明した。ここに、近似値の印 $\approx$ は、 N が増加するにつれて式の両辺が同じ極限に近づくことを意味している。

ドボレッツキーの近似式を使って、われわれは意志決定問題をきわめて簡単に設定することができる。意志決定者は、次式で表わされる現金管理の期待費用を最小化する M の値を求める。

$$E(c) = \nu m(M-1) + \rho e^{-M^2/N} \quad (5)$$

ここに、 ν は期間当りの現金保有費率であり、 ρ は期間当りの現金不足費である。かくて(5)式の右辺第1項は現金保有費用を表わし、第2項は現金不足費用を意味する。

$E(c)$ の最小値を求めるための方程式は次の通りである。

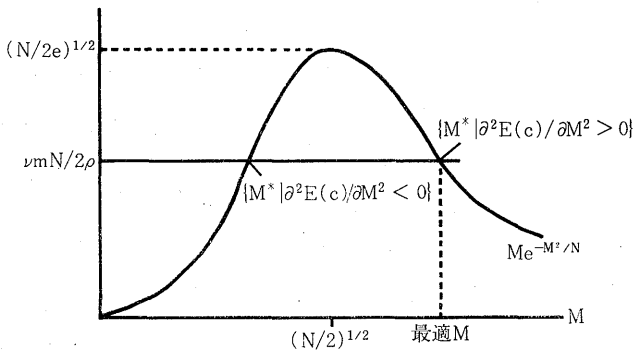
$$0 = \nu m - \frac{2\rho M}{N} e^{-M^2/N} \quad (6)$$

または

$$Me^{-M^2/N} = \nu mN/2\rho \quad (7)$$

(7)式の左辺のグラフは、図2のようになる。すなわち、 $M=0$ のとき値0となり、 $M = (N/2)^{1/2}$ のとき値 $(N/2e)^{1/2}$ をとる。図からも明らかなよう

図2



に、次式は(7)式を満たさない。

$$\nu mN/2\rho > (N/2e)^{1/2} \quad (8)$$

したがって次のようになる。

$$\nu mN/2\rho \leq (N/2e)^{1/2} \quad (9)$$

$\nu mN/2\rho = (N/2e)^{1/2}$ のとき $M = (N/2)^{1/2}$ となり、 $\nu mN/2\rho < (N/2e)^{1/2}$ のとき M は2つの値をとる。その場合、大きい根のとき $E(c)$ は極小値(最小値)をとり、小さい根のとき $E(c)$ は極大値(最大値)をとる(その理由は、図2に示されている第2次導関数の符号から明らかである)。かくて目標関数(5)は $M \geq (N/2)^{1/2}$ で極小(最小)となる。すなわち、

$$\text{最適値 } M^* \geq (N/2)^{1/2} \quad (10)$$

(5) 式と (10) 式とから、われわれは次のことを推論することができる。

(a) ν または m が増加するにつれて、 M^* は減少する。

(b) ρ が増加するにつれて、 M^* は増加する。

(c) $\frac{M^{*3}}{N^2} e^{-M^{*2}/N} > \frac{\nu m}{2\rho}$ のとき、

N が増加するにつれて M^* は増加し、

その他のとき、

N が増加するにつれて M^* は減少する。

$$(1/8eN)^{1/2} > \frac{\nu m}{2\rho} \quad \text{のとき、}$$

N が増加するにつれて M^* は増加する。

(a) と (b) は、 $N > M > (N/2)^{1/2}$ の範囲で (7) 式の左辺の勾配から明らかである。(c) は説明を必要とするであろう。

(7) 式を次のように書き直す。

$$V(M^*, N) = KN \quad (7)'$$

(7) 式を微分すれば下記のようになる。

$$\frac{\partial V}{\partial N} dN + \frac{\partial V}{\partial M^*} dM^* = K dN \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{M^{*3}}{N^2} e^{-M^{*2}/N} \quad \frac{\partial V}{\partial M^*} = \left(1 - \frac{2M^{*2}}{N}\right) e^{-M^{*2}/N} \quad (12)$$

(10) 式から $\partial V / \partial M^* \leq 0$ となる。(11) 式と (12) 式を整理すると次のようになる。

$$\left(1 - \frac{2M^{*2}}{N}\right) e^{-M^{*2}/N} dM^* = \left(\frac{\nu m}{2\rho} - \frac{M^{*3}}{N^2} e^{-M^{*2}/N}\right) dN \quad (13)$$

$\frac{M^{*3}}{N^2} e^{-M^{*2}/N}$ の値は区間 $(N/2)^{1/2} < M^* < N$ で単調に増加する。したがって、 dN の係数は $M^* = (N/2)^{1/2}$ のとき最大の値をとり、その値は $\frac{\nu m}{2\rho} - (1/8eN)^{1/2}$ である。

(a) ~ (c) より次のようなことが明らかになる。第 1 に、取引尺度 m (1 日の取引額) と N (収入取引日数と支出取引日数) は、最適現金残高に正反対の影響を及ぼす。すなわち M^* は、 m と反比例的に N と比例的に変化する。第

2に、 ν （利子率）は m と同じように最適現金残高に影響を及ぼす。モデルの需要弾力性の予測は後（Ⅱの5）で考察する。

3 オアの基本モデルの構成

大企業においては、現金残高は一定期間中不規則に、しかもある程度予測できない程変動する。営業収入が支出額を越える時は現金残高が累積し、その逆の場合は減少する。その蓄積が長く続くと、財務担当者が現金保有額が過剰であると決定する点について到達する。その時点で、彼は大量の資金を一時投資のためにポートフォリオ担当者にゆだねる、あるいはローンの返済（債務の償還）にあてる。持続的に現金不足が続く場合には、ポートフォリオ管理者が証券の換金を指令される水準まで、あるいは企業が適切な運用水準と考える現金残高を回復するために借入れする水準まで到達する。

オアは、企業経営の現金残高の変動特性と、ボーモル・モデルで重要な役割を果たす一括的な転換費用（転換固定費）の特徴の双方を織り込むモデルを示している。一方パティンキン・モデルの制約仮定のいくつかが緩和される。特に、受取高と支払高が等しい予算期間の仮定が除去される。そして企業はどの時点においても現金残高管理行動に従事することができるとする。かくてオアはこれらの点を考慮した基本モデルを展開し、それを3資産型に一般化し、その種々の修正モデルをも検討する。そこでわれわれは、ここではオアの基本モデルを考察し、Ⅲで3資産モデルおよび修正モデルを考察する。

オアの基本モデルは、次のような条件を仮定している。すなわち、

（a）現金管理者は、ボーモルおよびパティンキン分析におけるように二つの資産状況でおこなう。すなわち、一つの資産は企業の現金残高であり、他の資産は独立に（現金とは区別されて）管理されている当座資産（たとえば、財務省証券、預金証書、コマーシャル・ペーパー）であり、その限界および平均利回りは1日1ドル当り r である。

（b）二つの資産勘定の相互間の転換には、転換の金額の大きさ、転換の方向、転換間隔にかかわらず、転換ごとに r の一定の限界費用がいつでも必要である。

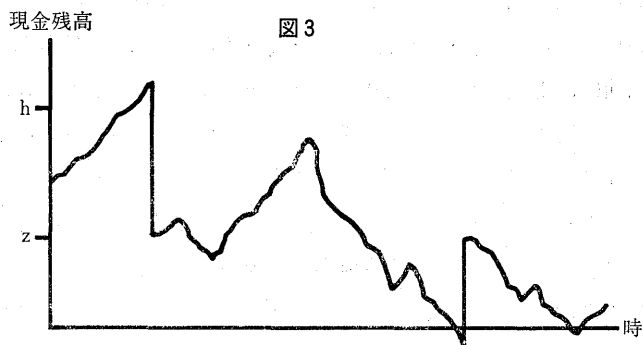
(c) かかる転換は即時的におこるとみなされる。二つの資産間の転換に要する所要期間 (lead-time) は無視してもさしつかえない程十分短い。この条件は明示的な安全余裕在高 (buffer stock) の必要性を排除する。確率的在庫問題における安全余裕在高の機能は、調達期間中の品切に対する予防である。転換所要期間がゼロという仮定はかなり強引のように思えるが、実際的にはそれ程非現実的ではない。少なくとも、現金残高およびポートフォリオを厳密に管理する専門スタッフを持つ大企業の場合非現実的でない。

(d) 一般におこなわれている銀行慣習によれば、補償残高が要求される。この要求額は、企業の現金残高がゼロ以下にはならないことを暗に意味しているものと仮定する。もちろん、ゼロは補償残高がないときでさえ重大な点である。なぜなら、現金残高を越えて手形を振り出すことは企業にとって決して許されないからである。当座借越を持つ企業でさえ、小切手が当座借越勘定で清算される以前に、現金残高への振り込みという手はずの儀式をおこなわなければならない。実務においては、補償残高要求は、現金が実質上ゼロ以上のある水準以下に通常決して落ちないことを暗に意味している。企業とその銀行との間で取り決められる正確な契約は、基本的には企業が実際使用する銀行サービスのコストに依存するだろう。補償残高は、サービス費用の代わりに銀行によって課される代償であるので、それは現金残高管理の問題にとって完全に外因的なものとみなされる。

(e) ボーモル・モデル および パティンキン・モデルと対照をなす重要な点は、キャッシュ・フローの処理である。キャッシュ・フローは完全に確率的であり、まるで定常ガウス型ランダム・ウォークによっておこるように変動すると仮定されている。このわく組みを仮定すれば、個々の現金収支の系列がベルヌイの独立試行の系列に似ていると仮定することが可能になる。それは、当面の目的にとって便利であり、しかも十分一般的であるとオアは考える。特に、 $1/t$ を1日の営業日の一部分、すなわち「1時間」とであるとする。それから、いつでもこの1時間中に現金残高は確率 $p = 1/2$ で m ドルだけ増加するか、または確率 $q = 1 - p = 1/2$ で m ドルだけ減少するかのいずれかであると仮定する。したがって、たとえば n 日数のような区間においては、現金残高の変化の

分布は、平均 $\mu_n = ntm(p - q) = 0$ ，分散 $\sigma_n^2 = 4ntpqm^2 = ntm^2$ の二項分布である¹⁾。ところでこの二項分布は n と t が増加するにつれて正規分布に近づく。

(f) 最後に、構造的条件が企業の目的関数に課される。企業は、ある簡単な式の政策のもとで現金残高を管理する定常状態の費用を最小化しようと努めることが仮定される。現金残高がその下限 (0) または上限 (h) のいずれかに達するまで、現金残高は自由に変動するがままにしておく。その時 (上限・下限いずれにおいても) ポートフォリオ転換は z の水準まで現金残高を回復させるためになされる。したがって、その政策は次のことを意味している。上限に達したときには、 $(h - z)$ ドルの現金から有価証券投資へ転換がなされ、下限に達したときには、 z ドルの証券の換金がなされる (図3参照)。



かくて以上の諸仮定のもとで、企業の現金残高管理の1日当りの定常的期待費用は次の式で表わされる。

$$E(c) = \gamma P(T) + \nu E(M) \quad (14)$$

ここに、 $P(T)$ は証券と現金との間のポートフォリオ転換の確率、 γ は1回の転換に要する費用、 $E(M)$ は1日当りの平均現金残高、 ν は証券を保有する場合の1ドル当りの収益率である。かくて (14) 式の右辺第1項は転換費用を、第2項は保有費用を表わす。企業の目的は、現金保有の上限 (h) と回復点 (z) に関して $E(c)$ を最小化することである。

4 基本モデルの最適値とその特質

h と z に対する最適値を見つける最も重大な仕事は、現金残高の定常的確率

分布を特徴づけることである。条件 (e) から、現金残高は 1 日当たり t 回、1 回当たり m ドル変動する。現金残高の領域は $0, m, 2m, \dots, hm$ とする。点 0 または hm に達したとき、収益性資産（当座資産）から現金への転換または現金から収益性資産への転換は、現金残高を zm の水準まで戻すとしよう。変化が対称型のベルヌイ過程によっておこるとき、下記のような方程式になる。

$$\begin{aligned} P_{t+1}(xm) &= 1/2 \{P_t[(x-1)m] + P_t[(x+1)m]\} \quad 0 < x < z, \quad z < x < h \\ P_{t+1}(zm) &= 1/2 \{P_t[(z-1)m] + P_t[(z+1)m] + P_t(m) + P_t[(h-1)m]\} \\ P_{t+1}(m) &= 1/2 P_t(2m) \\ P_{t+1}[(h-1)m] &= 1/2 P_t[(h-2)m] \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $P_k(j)$ は、時間 k のとき現金残高が j ドルである確率を示している。

計算の煩わしさを少なくするために、方程式系 (15) を簡単な表記法に変える。現金領域を m で標準化する。すなわち、1 ドルの代わりに m ドルを標準現金単位とする。この表記法の変化で、次の差分方程式を得るために定常的条件を用いる。

$$\begin{aligned} P_x &= 1/2 (P_{x-1} + P_{x+1}) \quad 0 \leq x \leq h, \quad x \neq z \\ P_z &= 1/2 (P_{z-1} + P_{z+1} + P_1 + P_{h-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

2 つの境界条件は

$$P_0 = P_h = 0$$

分布密度条件は

$$\sum_{x=0}^h P_x = 1$$

である。

(16) 式の特性方程式は下記のようになる。

$$0 = \xi^2 - 2\xi + 1$$

$$\therefore \text{重根} \quad \xi^* = 1$$

したがって (16) 式の解答式は

$$P_x = A\xi^* + Bx\xi^* = A + Bx$$

となる。ここに、 A と B は任意定数である。この解答式は 0 と h では成立しない。なぜなら

$$A + B \cdot 0 = 0 \quad \therefore A = 0$$

$$Bh = 0 \quad \therefore B = 0$$

この問題をめぐる解は次の通りである。

$$\begin{cases} A + Bx & 0 \leq x \leq z \\ C + Dx & z \leq x \leq h \end{cases} \quad (17)$$

すなわち、2つの違った確率式が費用領域の2つの区間に広がっている。 z での分岐点は、 x に関する解の線形性、末端の値0と h での確率の大きさがゼロ、および P_z が $(1/2)P_{z-1} + (1/2)P_{z+1}$ より大きいという事実によって暗示されている。解答式(17)については、4つの任意定数 A, B, C, D がある。それに4つの独立した境界条件がある。すなわち、 $P_0 = 0$ 。これは $A = 0$ を意味する。 $P_h = 0$ 。これは $C = -Dh$ を意味している。点 z における結合条件。これは $D = Bz/(z - h)$ を意味する。および密度条件 $\sum_{x=0}^h P_x = 1$ 。これは次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} 1 &= B \sum_{x=0}^z x + D \sum_{x=z+1}^h (x - h) \\ &= B \frac{z(z+1)}{2} + \frac{Bz}{(z-h)} \left[\frac{h(h+1)}{2} - \frac{z(z+1)}{2} \right] + Bzh \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式より

$$B = 2/zh$$

となる。かくて定常的占有分布密度は下記のようになる。

$$P_x = 2x/zh \quad 0 \leq x \leq z \quad (19a)$$

$$P_x = 2(h-x)/h(h-z) \quad z \leq x \leq h \quad (19b)$$

したがって定常占有確率関数は、形が三角形であり、0と h によって境界づけられる範囲をもち、 z でモードである。平均値 $\sum_{x=0}^h xP_x$ は下記のようになる。

$$E(M) = (h+z)/3 \quad (20)$$

有価証券への投資、または有価証券の換金の定常的確率は $P(T)$ で表わされ、次式

$$P(T) = (t/2)P_1 + (t/2)P_{h-1}$$

と値(19)とから

$$P(T) = t/z(h-z) \quad (21)$$

を得る。理論的根拠は、1日当たり t 回の取引がおこなわれるということである。さらに現金残高が状態 1（または状態 $h-1$ ）にあるときに取引が発生するならば、有価証券の換金（または有価証券への投資）がおこなわれる確率は $1/2$ であるということである。

(20) と (21) において $Z = h - z$ とおきかえると、最適化過程はもっと明白になる。したがって (20) と (21) を (14) に代入することによって、企業の目的は次のように表現できる。

$$\min_{Z, z} E(c) = \frac{r t}{z Z} + \frac{\nu m (Z + 2z)}{3} \quad (22)$$

ここに、 ν は 1 ドル当りの有価証券の利子率であるから、 νm は標準取引単位当りの収益率である。最小値のために必要な条件を示せば、次の通りである。

$$\frac{\partial E(c)}{\partial z} = -\frac{r t}{z^2 Z} + \frac{2 \nu m}{3} = 0 \quad (23 a)$$

$$\frac{\partial E(c)}{\partial Z} = -\frac{r t}{Z^2 z} + \frac{\nu m}{3} = 0 \quad (23 b)$$

これらの条件により、下記のような最適値が得られる。

$$z^* = \left(\frac{3 r t}{4 \nu m} \right)^{1/3} \quad (24)$$

$$Z^* = 2 z^*$$

$Z^* = 2z^*$ をもとの政策変数で表わせば

$$h^* = 3 z^* \quad (25)$$

となる。

現金残高を測定するさいに、定常的確率分布誘導の基礎となった取引単位名称 m ドルの代わりに、1 ドルの単位名に戻るならば最適解の構造はいっそう明らかになる。(24) において、最適値は m ドルの単位で与えられている。1 ドル単位での最適値を得るために、(24) に m をかけると

$$z^* = \left(\frac{3 r m^2 t}{4 \nu} \right)^{1/3} \quad (26)$$

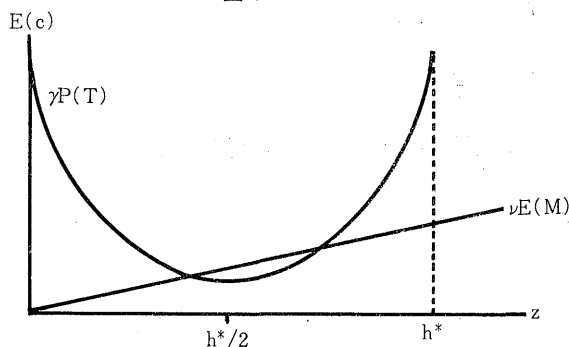
と、同様にドル単位での h^* が得られる。 $m^2 t$ は現金残高の毎日の変化の分散である。したがって (26) を次のように書くことができる。

$$z^* = \left(\frac{3\gamma\sigma^2}{4\nu} \right)^{1/3} \quad (27)$$

(27) は、管理（または予測）モデルと、管理または予測されるべき観察可能な毎日の変化の変動性との間の関係を説明する式である。

オアの基本モデルの最適解において注目すべき第 1 の特色は、ベルヌイ過程およびシステムを z までもどす費用（転換費用）の対称性にもかかわらず、その解は非対称になるということである。最適の回復点 (z^*) は、現金残高が動く範囲の中間点よりかなり下に横たわっている。これは有価証券の売却が購入よりも大きい平均度数で発生すること、および売却の一口当りの金額が購入のそれよりも小額であることを示している。このような最適解の経済的根拠は、図 4 から推察されうる。図 4 では、転換費用と保有費用とが z の関数として別

図 4



々に図示されている。転換費用は中間点、すなわち $z = (1/2)h^*$ で最小となる U 型関数である。これに対し、遊休現金残高費用は一貫して z のリニアな増加関数である。したがって両費用は $(h^*/2, h^*)$ の範囲で増加しているので、 $h^*/2$ よりも大きい z を設定することは明らかに経済的ではない。ある程度の費用節約は、 z を $h^*/2$ 以下に下げることによって得られる。というのは転換費用関数は、最低領域では相対的に水平に近いからである。

注目すべき第 2 の特色は、コスト係数 γ と ν との相対的大きさのいかんにかかわらず、 z^* が常に $(1/3)h^*$ のところにあるということである。比率 γ/ν の変化は、システム全体を縮小したり拡大したりするが、 z と h の間の現金残高に

はなんらの変化をも与えない。このような結果になる理由は費用関数 (22) の構造の特質に求められる。すなわち z と Z は転換費用の要素 (右辺第 1 項) には対称的に含まれているが、保有費用の要素 (右辺第 2 項) には z は Z の 2 倍のウェイトではいつていることに求められる。したがって、 $Z < 2z$ のとき、 z を小額 (Δ) だけ減少させ Z を 2Δ 増加させると、保有費用は変化しないが、転換費用は少なくなる。逆に、 $Z > 2z$ のとき、 z を Δ 増加させ Z を 2Δ 減少させると、ある正味費用節約が実現される。

5 モデルの意義

われわれにとって、解における主要な関心は企業の貨幣需要に対するその意義にある。その需要は、 (h, z) 政策に関連している平均現金残高でもって検討される。その残高は $(h^* + z^*)/3$ である。これに (25) と (27) から h^* と z^* の最適値を代入すれば、重要な決定変数——キャッシュ・フロー・データと貨幣操作費用——で表わされた企業の平均現金残高 (貨幣需要) 式として、次の式が得られる。

$$\bar{M} = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{r \sigma^2}{\nu} \right)^{1/3} \quad (28)$$

オアの基本モデルはボーモル・モデルと同じく、企業の貨幣需要は、有価証券売買費用 (r) の増加関数であり、現金残高として保有される現金の利子率または機会原価 (ν) の減少関数であることを表わしている。(28) の斬新さは貨幣需要方程式においてキャッシュ・フロー分散が明示的に含まれていることである。その分散は、現金収支の「同時化の欠如」の尺度である。パティンキン・モデルは同じ現象を明確に取り扱っているが、収支が彼の予算期間において金額的に等しい点で、パティンキンは「全体的」同時化を前提していることになる。彼のモデルに残されている同時化の「部分的」欠如は、有価証券の売買に頼らないで、現金残高内で処理されている。したがってパティンキンの強調点は、転換費用の代わりに現金不足費用にある。

貨幣需要関数において「同時化変数」としてのキャッシュ・フロー分散が存在することは、取引弾力性が問題になる場合、(28) はどのように解釈される

べきかという問題を引き起こすことになる。ボーモル・モデルにおいては、取引は明白であり、予測される取引需要弾力性は正の符号である。パティンキン・モデルにおいては、取引の尺度はあいまいである。それに最も自然であるように思える尺度が選択されるなら、取引弾力性の符号は正ではなく負である。

貨幣需要の実証的研究において、総売上高が取引変数の尺度として普通考えられている。総売上高と、オアの基本モデルが重要であることを明らかにした取引変数、すなわち取引分散との間にある関係があることは確かである。一定時間間隔を通して集計すれば、総売上高は現金残高の変化とほぼ正比例する。しかしその関係はゆるい関係であり、オアの基本モデルによって意味されている現金需要の売上高弾力性に対して、大まかな値しか確立されていない。というのは売上高はさまざまな方法によって変化し、そのおのおのが企業の現金需要に異なる影響を及ぼすからである。一つの方法として、個々の収入、支出双方を2倍にすることによって、すなわち m から $2m$ へ取引規模を増加させることによって、売上高を2倍にすることにオアの基本モデルは対応できる。したがって(28)を基準として、最適現金残高を $2^{2/3}$ の因数だけ増加させることを、オアの基本モデルは予測する。別の方法として、取引回数を2倍にすることによって売上高を2倍にすることができる。この場合には、平均の取引規模は不変であるが m の値が2倍になる。変化を相殺する機会が付け加えられるので、「大数の法則」はこの事象において強く働く。そして所要現金残高は $2^{1/3}$ の因数だけ増加する。かくてオアの基本モデルは、 $1/3$ から $2/3$ までの範囲に及ぶ可能な売上高弾力性を提供し、取引回数の減少に伴う取引規模の増加、またはその逆の場合の可能性を考慮するとき、その範囲はより大きくなる。オアの基本モデルとボーモルおよびパティンキンによって提示された2つのモデルとの間の貨幣需要弾力性予測に関する対照はきわめて明らかである。多くの実証的研究のための基礎として役立ったボーモル・モデルは、等しい大きさであるが逆の符号である、すなわちそれぞれ $-1/2$ と $+1/2$ である利子弾力性と取引弾力性を明白に予測している。この取引弾力性予測の硬直性と値の小ささは、現金保有において「規模の経済」が存在するかどうかの問題に関する実証的研究において、困難性の源泉となっている。

パティンキン・モデルもまた、それがもたらす弾力性予測の根拠に関して疑わしい。(7)式から

$$m = 2\rho M e^{-M^2/N} / \nu N \quad (29)$$

が得られるが、(29)は取引変数を決定変数の関数として表わしている。取引弾力性は下記のようなになる²⁾。

$$\eta_m = \left[\frac{d m}{d M} \cdot \frac{M}{m} \right]^{-1} = N / (N - 2M^2) \quad (30)$$

ν と m は(29)において交換することができる。つまり $\eta_\nu = \eta_m$ である。

これらの弾力性の符号と大きさを考える場合、(10)の $M^* \geq (N/2)^{1/2}$ であることに注意する必要がある。したがって(30)の分母はあらゆる場合において負である。

$$(N/2)^{1/2} \leq M^* < N^{1/2} \quad \text{のとき} \quad \eta < -1 (|\eta| > 1)$$

$$N^{1/2} \leq M^* < N \quad \text{のとき} \quad -1 < \eta < 0$$

かくて貨幣需要が弾力的であるか弾力的でないかの問題は、 $N^{1/2}$ に関して M^* の位置次第で決まる。さらに取引弾力性と利子弾力性が、同じ符号であるという厄介な問題が残されている。

したがって、オアの基本モデルは弾力性予測に関して、ボーモル・モデルおよびパティンキン・モデルよりもすぐれている。

〔注〕 1) 平均と分散の数学的証明は、市村昭三著『運転資本管理』同文館、昭和50年、191ページを参照されたい。

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{d m}{d M} &= \frac{2 \rho}{\nu N} \left\{ e^{-M^2/N} + M \left(-\frac{2 M}{N} e^{-M^2/N} \right) \right\} \\ &= \frac{2 \rho}{\nu N} \left(1 - \frac{2 M^2}{N} \right) e^{-M^2/N} \\ \text{ゆえに, } \frac{d m}{d M} \cdot \frac{M}{m} &= \frac{2 \rho}{m \nu N} \left(\frac{N - 2 M^2}{N} \right) M e^{-M^2/N} \\ &= \frac{2 \rho}{m \nu N} \left(\frac{N - 2 M^2}{N} \right) \frac{\nu m N}{2 \rho} \quad (\because (7) \text{ より } M e^{-M^2/N} = \nu m N / 2 \rho) \\ &= \frac{N - 2 M^2}{N} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \eta_m = \left[\frac{d m}{d M} \cdot \frac{M}{m} \right]^{-1} = \frac{N}{N - 2 M^2} \quad (30)$$

Ⅲ 3 資産型の基本モデル

1 二つの3資産モデルの構成

オアの基本モデルは、二つの異なる「3資産」の場合に拡張される。これらの場合は、多様な収益性有価証券の保有からのリスクと期待収益との間の最も有利な調和を求めるポートフォリオ問題の見地からみれば、一般化の程度は不十分であるが、その問題を処理する試みはここではなされない。

第1の3資産の場合において、われわれの関心は、資産の代替的組合せが現金需要に及ぼす影響にある。この場合は、現金と二つの収益性資産を含んでいる。収益性資産は次の通りである。(a)財務省証券のような低いリスクで、低い収益性の証券（「短期証券」と呼ぶ）。この資産は購入費用が安く、現金残高が過不足の場合に、第1次資金源泉または資金運用対象として役立つ。(b)手に入れられる他のすべての有価証券（「長期証券」と呼ぶ）。いずれも短期証券より高いリスク、収益性および転換費用をもっている。企業は、短期証券への投資または短期証券の換金によって現金勘定の水準を統制するように仮定されており、それによって転換費用が最小になるようにする。短期証券の保有が極端に多いか少ない場合には、長期証券の購入または長期証券の売却によって修正がなされる。長期証券の転換を伴う場合は、転換費用は大いに拡大される。

第2の3資産の場合は、企業の財政状態を分析する。まず社債の発行または償還を含む状況を考えよう。企業の未償還負債を少なくしたり、増加させたりするのに必要な転換費用は極端に高くなる。第2の場合の、より複雑な過程は、物的資産へ投資するための現金を蓄積する企業の決定過程を取り扱うものである。したがって三つの資産は現金、一時所有有価証券（収益性当座資産）および物的資産（棚卸資産・固定資産）である。現金流出が枯渇を引き起こす場合、企業の反応は物的資産を現金化するのではなく、その代わりに企業は必要な流動性を維持するために有価証券を発行する。その場合の発行費用は、手持の証券を処分したり証券へ過剰現金を投入したりする転換費用とは異なる。

この3資産問題に対するアプローチは、Ⅱのオアの基本モデルで具体化されたものと同じ考え方に基づいている。ここで認識されている二種類の収益性資

産を除けば、条件はⅡで述べられたものと同じである。現金残高と短期・長期証券の在高を管理する費用は、（１）最有利資産を保有しないで、より低い収益性資産を保有する結果として失われた収益（機会損失）と（２）さまざまな資産の間での転換費用である。固定転換費用の仮定のもとで得られる結果と比例転換費用で得られる結果との比較からわかるように、調整転換費用構造はきわめて重要である。

2 現金・短期・長期証券モデル

（イ）固定転換費用と資産管理の分離可能性

オアは、まず異なる条件をもつ資産を含む簡単な「異種の資産組合せ」問題を取り扱っている。3資産の場合において、現金残高と資産組合せ管理の決定ルールの構造は、Ⅱ・3での2資産分析を特徴づける緩和反応型と同じであることと、転換費用は全く固定的であることが仮定される。第1の3資産の場合（非物的資産）、現金過不足を修正することが必要であるときはいつでも、証券への運用（投資）または証券の換金がおこなわれる。極端に高い水準の短期証券保有のような現金過剰状態が起こるならば、長期証券の購入によって資産組合せは調整される。逆に、短期証券保有が極端に低くなり現金不足状態が起こるならば、長期証券の売却によって資産組合せは調整される。短期証券の保有が極端に高くもなく低くもなければ、現金残高の修正は資産組合せの不均衡を引き起こさないし、現金調整は短期証券の売買のみによっておこなわれる。0という仮定された最小の現金残高水準に達するときに現金残高不足が示され、上限 h に達するときに現金残高過剰が示される。同様に、短期証券保有は、換金化がその保有を0以下にするときに過度に低いとみなされ、現金の証券への転換がその保有を H 以上にするとときに過度に高いとみなされる。現金と短期証券は、調整行動がおこなわれる場合にそれぞれ z と Z に戻る。目的は二つの資産範ちゅうに対する最適政策パラメーター—— h 、 z 、 H 、 Z ——を見つけることである。

現金残高が任意に選ばれた時点で x であり、同じ瞬間に短期証券在高が X なら、その瞬間の統制行動式は下記のように表わされる。

- (A) {
- (i) $x = 0, 0 \leq X < z$ のとき, $z + Z - X$ の長期証券を売却し,
 $Z - X$ の短期証券を購入する。
 (現金, 短期証券ともに増加する)
 - (ii) $x = 0, z \leq X$ のとき, z の短期証券を売却する。
 (現金のみ増加する)
 - (iii) $0 < x < h$ のとき, 売買なし。
 - (IV) $x = h, X \leq H - h + z$ のとき, $h - z$ の短期証券を購入する。
 (現金のみ減少する)
 - (V) $x = h, H - h + z < X \leq H$ のとき, $h - z + X - Z$ の長期証券を購入し
 $X - Z$ の短期証券を売却する。
 (現金, 短期証券ともに減少する)

これらの規則に従うならば, 現金残高と短期証券の保有額はそれぞれ間隔 $(0, h)$ と $(0, H)$ でランダム・ウォークする。ランダム・ウォーク理論は, 2 資産の基本モデルの場合とほとんど同じ方法で, 政策パラメーター h, z, H および Z の最適値をみつける過程を単純化するために援用される。

オアは, これらの規則の運用を分析し, 現金取引の流れが対称型ベルヌイ過程によって生じる場合の政策パラメーター z, h, Z および H の「最適」値を求めている。「長期証券」と「短期証券」の収益率をそれぞれ ν_l と ν_s とする。長期証券の売買の固定費用を r_l , 短期証券の売買の固定費用を r_s とする。明らかに $\nu_l > \nu_s, r_l > r_s$ と仮定される。したがって現金保有費用は ν_l で, 短期証券の保有費用は $(\nu_l - \nu_s)$ である。II の基本モデルと同じように現金不足はたやすく避けられることが仮定され, そのために現金残高がゼロ以下に落ちることは決して許されない。

2 資産の基本分析と同じ方法で, キャッシュ・フローは構成され, 現金勘定は管理される。したがって現金残高の行動は, その分析と同じ方法で政策パラメーター h と z に依存する。II で展開された基本モデル分析の結果はここでも有効である。それは, h と z の値に関連しており, 長期平均現金残高は

$$(h + z)/3 \quad (31)$$

であり, 有価証券への投資 (運用) または有価証券の換金の確率は

$$\sigma^2 [z(h - z)]^{-1} \quad (32)$$

である。ここに, σ^2 は 1 期間当りのキャッシュ・フローの分散である。

実際基本モデルとここで検討される3資産型モデルの間には主要な相違がある。h, zに特定値をわりあてるコスト効果は3資産の場合にはるかに大きい。なぜなら現金残高を統制するためにとられる連続行動は、短期証券在高の変動と変化を起こす過程であるからである。かくて短期証券勘定の変化の度数と方向はhとzに与えられる値に依存する。実際短期証券在高(したがって短期証券在高を管理する費用)がhとzにわりあてられる値に敏感なら、短期証券勘定で実現されるこれらのコスト効果は、hとzの値を設定する際に考察されなければならない。

現金勘定を統制するための短期証券の売買によって生じる短期証券の流れは明らかにベルヌイ型ではない。なぜなら現金と短期証券の間の転換は定期的に発生しないからである。それにもかかわらず、証券売買の時系列は、どんな値がhとzにわりあてられようとも、キャッシュ・フローと同じ周期分散すなわち σ^2 をもつ。このことは以下のように証明される。

現金の取引分散を σ^2 とし、現金勘定は、統制規則(A)に規定されているように、0とhの間を変動し、0またはhに到達するときzに戻るものとしよう。証券の換金取引規模はzで、現金での証券購入取引規模はh-zである。転換の発生を条件としての売却の確率は(h-z)/h、すなわちその最初の経過がhではなく0で発生する確率である。転換が発生する場合の購入の条件確率はz/hである。転換の確率は(32)に与えられている。かくて短期証券と現金との間の周期運動の分散は下記のようになる。

$$\sigma^2 [zh(h-z)]^{-1} [z^2(h-z) + z(h-z)^2] = \sigma^2$$

短期証券勘定の運動分散が σ^2 なので、Zから0またはHへの短期証券在高の最初の期待経過時間は $Z(H-Z)/\sigma^2$ であり、長期証券の売買を示す最初の経過の定常確率は $[Z(H-Z)]^{-1}\sigma^2$ である。この経過確率は、有価証券への投資または有価証券の換金が長期証券の売買を含む可能性を測定する。その結果として、長期証券の取引度数は、短期証券の統制水準であるH, Zにわりあてられる値によって全く決定され、現金勘定の統制水準であるh, zから独立している。

同様に、短期証券勘定の平均在高はh, zにわりあてられる値によってあま

り影響を及ぼされない。

短期証券勘定の平均在高に及ぼす h と z の選択の影響は、正確には容易に確立されない。しかしながら影響の大きさは、分析と数値例の組合せによって、一般にとるに足らないことが示される。以下このことを示そう。

短期証券勘定の動きを管理する取引の規則は次のような定常関係式をもたらす。

$$P_X = (2/3)P_{X+1} + (1/3)P_{X-2} \quad (33a)$$

$$P_Z = 2/3(P_{Z+1} + P_1) + 1/3(P_{Z-2} + P_{H-2} + P_{H-1}) \quad (33b)$$

なじみ深い差分方程式は解構造が次の式になることを明らかにする。

$$P_X = A_1 + A_2 X + A_3 (-1/2)^X \quad 0 \leq X \leq Z \quad (34a)$$

$$P_X = A_4 + A_5 X + A_6 (-1/2)^X \quad Z \leq X \leq H \quad (34b)$$

ここに、 $A_1, \dots, A_6$ は任意定数であり、境界条件は下記のようになる。

$$P_X = 0 \quad X \leq 0$$

$$P_X = 0 \quad X \geq H$$

$$A_1 + A_2 Z + A_3 (-1/2)^Z = A_4 + A_5 Z + A_6 (-1/2)^Z$$

$$\sum_X P_X = 1$$

H と Z に関する $E(X)$ の明示解は大変困難であるが、これらの条件からみつけられる。

A_1 と A_5 以外の任意定数を消去すると、

$$P_X = A_1 \{1 + 3X - (-1/2)^X\} \quad 0 \leq X \leq Z \quad (35a)$$

$$P_X = A_5 \{(X - H) - 2/3 \{1 - (-1/2)^{X-H}\}\} \quad Z \leq X \leq H \quad (35b)$$

したがって (34) 式の構造から $E(X)$ が $(H + Z)/3$ に近似することがわかる。(35) 式は、それぞれ X と $X - H$ の「ほぼ」1 次式 (リニア) であり、 $E(X)$ の推定としての $(H + Z)/3$ の誤差はその線形性からの逸脱による。

表 1 に示されている数値例は、 H が法外に小さくなく、しかも Z が $H/3$ かそれより大きい限り、たいいていの場合、 $(H + Z)/3$ が $E(X)$ の非常によい推定であることを確認している。

現金統制過程における h と z の数値は、短期証券勘定の経過時間や平均在高に重要なほど影響を及ぼさないもので、現金は 2 資産モデルで支配したような同

表 1

H	Z	真の E(X)	$\frac{H+Z}{3}$	H	Z	真の E(X)	$\frac{H+Z}{3}$
6	2	2.4536	2.6667	12	6	5.7920	6.0000
6	3	2.8462	3.0000	36	3	12.7821	13.0000
9	3	3.7914	4.0000	36	6	13.7823	14.0000
9	4	4.1417	4.3333	36	9	14.7825	15.0000
9	5	4.5555	4.6667	36	12	15.7829	16.0000
12	3	4.7929	5.0000	36	15	16.7833	17.0000
12	4	5.1269	5.3333	36	18	17.7839	18.0000
12	5	5.4631	5.6667				

じ条件に基づいて統制される。現金残高は 0 と $h=3z$ の間を変動し、0 または h を経過（通過）した場合に z に戻る。それに資産組合せ効果は、 h と z に値をわりあててに考慮されない。さらに $h-z$ の大きさの短期証券購入と z という大きさの短期証券売却から生じる短期証券勘定内での非対称運動効果が、平均短期証券在高および長期証券を含む転換度数のベルヌイ予測に及ぼす影響を無視してもさしつかえない。

規則 (A) が履行されるとき、 (h, z) 政策の結果生じる 1 期間当りの定常期待費用は、

$$E(c) = \frac{\nu_l(h+z)}{3} + \frac{r_s \sigma^2}{z(h-z)} + \frac{(\nu_l - \nu_s)(H+Z)}{3} + \frac{r_l \sigma^2}{Z(H-Z)} \quad (36)$$

で、政策変数の最適値は

$$\begin{cases} h=3z & H=3Z \\ z = \left(\frac{3r_s \sigma^2}{4 \nu_l} \right)^{1/3} & Z = \left(\frac{3r_l \sigma^2}{4 (\nu_l - \nu_s)} \right)^{1/3} \end{cases} \quad (37)$$

である¹⁾。Z の分子は z の分子より大きく、Z の分母は z の分母より小さいので、長期証券勘定を含む転換の度数は、現金と短期証券のみを含む転換の度数より小さい。

現金統制規則は、証券の短期・長期相互間の転換度数または短期証券の平均水準にあまり影響を及ぼさないで、それは短期証券を管理する費用に無視できるほどの影響しか及ぼさないと結論を下せよう。したがって二つの勘定すな

わち、現金と短期証券は、最適性から意義ある逸脱がなくて、事実上お互い別個に管理される。資産組合せ問題はかくて「分離」されているので、Ⅱの基本モデルの貨幣需要予測は、2資産仮定が緩和される場合でもあまり影響を受けない。適切な取引尺度は今まで通りキャッシュ・フローの分散であり、適切な利子尺度は「長期証券利率」すなわち「資本費用率」であり、適切な貨幣需要弾力性は $\pm 1/3$ である。転換調整費用（「取引費用」）が総合的に議論される場合、貨幣保有の適切な費用は最大の利益をもたらす機会を失したコストであることは確かなようである。財務省証券のような高い流動性をもつ短期証券の現金に対する厳密な代替可能性は、有価証券の低い収益率を貨幣残高に対する機会原価利率と考えるのではなく、そのような有価証券売買取引の低い転換費用をわりあてることによって適切につくられる。

（ロ）比例転換費用と資産管理の相互依存性

転換費用がⅢ・2・（イ）で仮定したように全く固定的ではなく、転換される額に比例するなら、分析も貨幣需要予測も大いに変化する。資産管理問題が現金、財務省証券および第3番目の資産を含むものとして考察され、しかも転換費用の比例式が選択されるなら、短期証券統制の性質を保つ分散は破壊され、別々に資産を管理する可能性はⅢ・2・（イ）のように維持されない。現金残高は区間 $(0, h)$ でランダム・ウォークをするとしよう。0を通過した場合には現金残高は0に戻り、 h を通過した場合には現金残高は h に戻る。かくて上のように用いられる現金統制規則は、全く比例転換費用をもつ2資産モデルに対する最適規則である。さらに、長期証券を含む転換費用は固定的であるという仮定のもとに、短期証券残高は区間 $(0, H)$ でランダム・ウォークをし、0または H を通過する場合は Z ($0 < Z < H$)に戻るとしよう。ここでの目的は、Ⅲ・2・（イ）の分析から明らかになった資産管理の分離問題は、潜在的に非常に重要な問題ではあるが、特殊な問題であることを示すことである。

上記のような規則のもとで、しかもキャッシュ・フローが対称型の場合、平均現金残高は $h/2$ である。保有費用は1ドル当り r_h である。現金から短期証券

への転換の定常確率は $\sigma/(h+1)$ である。同じ確率が短期証券から現金への転換に対しても適用される。 σ^2 はキャッシュ・フロー（取引）の1期間当たりの分散である。平均短期証券在高は $(H+Z)/3$ であり、その保有費用は $(\nu_l - \nu_s)$ である。長期証券から短期証券へまたは短期証券から長期証券への転換の確率は $[Z(H-Z)]^{-1}\sigma_s^2$ であり、ここに σ_s^2 は短期証券勘定における変化の分散である。長期証券を含む転換の費用は ν である。

目標関数を式で表わせれば下記のようになる。

$$\begin{aligned} \min_{h, H, Z} E(c) = & h\nu_l/2 + \tau\sigma/(h+1) + [Z(H-Z)]^{-1}\sigma_s^2\tau \\ & + (H+Z)(\nu_l - \nu_s)/3 \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、短期証券勘定の運動分散である σ_s^2 はほぼ $2\sigma^3/(h+1)$ である。

偏導関数によって次のことが明らかになる²⁾。

$$\begin{aligned} H - Z &= 2Z \\ Z^3 &= 3\tau\sigma_s^2/4(\nu_l - \nu_s) = 3\tau\sigma^3/2(\nu_l - \nu_s)(h+1) \\ (h+1)^2 &= \frac{2\tau\sigma Z(H-Z) + 4\tau\sigma^3}{\nu_l Z(H-Z)} \end{aligned} \quad (39)$$

この最適化条件から明らかになる重要な事実は、短期証券勘定と現金勘定に対する決定規則パラメーターは相互依存関係があるということである。キャッシュ・フローの根本的変動性が現金統制規則によって変形されるときはいつでも、この相互依存関係は存在するので、資産（現金と証券）組合せの運動分散はキャッシュ・フロー分散とは異なる。

偏導関数はまた、長期証券利率 (ν_l) と短期証券利率 (ν_s) が双方とも最適現金残高の決定に加わることを明らかにする（なぜなら、 Z は h に影響を及ぼし、逆に h が Z に影響を及ぼすからである）。最適統制目標がここで取り扱われた例を特徴づけるような資産間での相互依存関係に出会うときはいつでも、現金は両方の利子率に敏感である。

Ⅲ・2・(イ) (ロ)の分析は、調整転換費用が貨幣需要および他の資産管理問題を理解するのにきわめて重要であることをいっそう強調する。資産管理は、長期・短期証券の絶対額並びにそれらの費用関係の構造によって大いに影響を受けることは明らかである。

3 現金・証券・物的資産モデル

資産は現金、有価証券および第3番目の資産（物的資産）であるとみなす第2の重要な3資産モデルの特性を、オアは検討している。最初の二つの資産（当座資産）が過剰に保有されている場合は、いくらかは物的資産の購入のために運用される。最初の二つの資産が不足している場合は、企業は社債を発行する。

借入金利率は内部利益率より低いとしよう。モデルは、率の相違が存在する限り企業は投資目的のために借入金をし、現金管理は煩わしいものとする。たいていの企業は、投下資本回収期間よりもずっと短い短期証券発行による資本調達を回避することがたぶん賢明とする。一時的流動性要求を満たすのにきわめて適している短期証券発行は、資本拡張のための基礎としてたぶん不適当である。企業の短期証券の発行は拡張資金調達のためになされなくて、むしろそれは物的資産の換金にとって代わるものとして、一時的流動性要求を満たすためにのみなされる。借入金決定を第3番目の資産（物的資産）からの換金に代わるものとみなすことは都合がよい。

簡単化のためにすべての転換費用は固定しているとして取り扱う。資産組合せ調整の費用は r_s である。二つの費用 r_I と r_B は投資または借入金に必要な調整に伴って発生する。資産組合せの収益率は v_s であり、資本設備の収益率は v_t である。短期借入金は投資目的のために長期資金を借りる企業の能力を削減するという理由で、平均投資利益率は流動性要求のための借入金の機会費用とみなす。

上記のような条件のもとで、長期証券勘定を含む転換費用が下記のようになることを除いて、企業の目標は第1の3資産の場合(36)と同じである。

(長期証券を含む転換確率) × (借入金の費用 × 借入金の確率 + 投資の費用 × 投資の確率) すなわち、

$$\sigma^2 [Z(H-Z)]^{-1} [r_I Z/H + r_B (H-Z)/H]$$

したがって、目標は次の式で表わされる。

$$h, z, \frac{\min}{H, Z} E(c) = \frac{(h+z)v_t}{3} + \frac{(H+Z)(v_t-v_s)}{3} + \frac{r_s \sigma^2}{z(h-z)}$$

$$+\frac{\sigma^2[\gamma_I Z + \gamma_B(H-Z)]}{HZ(H-Z)} \quad (40)$$

$h=3z$, $z=(3\gamma_s\sigma^2/4\nu_l)^{1/3}$ となり³⁾, 第1の3資産の場合(37)のように, 現金残高の行動についての予測は一定期間中変化しない。他方, 短期証券在高は異なった動きをする。最適条件($r=H-Z$ とおく)は次の通りである⁴⁾。

$$\begin{aligned} \partial E(c)/\partial Z &= 2(\nu_l - \nu_s)/3 - \gamma_B\sigma^2/Z^3(r+Z) - \gamma_B\sigma^2/Z(r+Z)^2 \\ &\quad - \gamma_I\sigma^2/r(r+Z)^2 = 0 \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} \partial E(c)/\partial r &= (\nu_l - \nu_s)/3 - \gamma_I\sigma^2/r^2(r+Z) - \gamma_I\sigma^2/r(r+Z)^2 \\ &\quad - \gamma_B\sigma^2/Z(r+Z)^2 = 0 \end{aligned} \quad (41b)$$

$r=kZ$ とおき(41)式に代入すると k と Z の連立方程式が導かれる⁵⁾。

$$k^3 = (3\gamma_I k + 2\gamma_I)/\gamma_B \quad (42a)$$

$$Z^3 = \frac{3[\sigma^2\gamma_I(2k+1) + \sigma^2\gamma_B k^2]}{(\nu_l - \nu_s)k^2(k+1)^2} \quad (42b)$$

物的投資費用(γ_I)と借入金費用(γ_B)との費用比率を $\gamma_I=5\gamma_B$ とすると, k は4よりも少し大きい。 $\gamma_I=10\gamma_B$ なら, k は6よりも少し大きい。もちろんこれらの k の値は, H と Z の比率が3:1よりも大きいことを意味している。 $k=2$ のとき $Z=H/3$ となる。

大きな k の値に対して Z の値はどうなるだろうか。 $k=6$ となる $\gamma_I/\gamma_B=10.8$ の場合を考察してみよう。その場合下記のようになる。

$$Z^3 = 3\gamma_B\sigma^2/10(\nu_l - \nu_s) = \gamma_I\sigma^2/36(\nu_l - \nu_s)$$

Z はそれが $\gamma_B=\gamma_I$ である場合より小さく, $H=(k+1)Z=7Z$ は, $\gamma_B=\gamma_I$ である場合より大きくなる。

第2の3資産の場合の分析は, 流動性要求を満たすために企業が発行する証券の適切な条件は何であるか, というような重要な問題に関して明解な答えを示さない。

[注] 1) (36) を, h で偏微分し, それをゼロとおくと,

$$\frac{\partial E(c)}{\partial h} = \frac{\nu_l}{3} + \frac{\gamma_s\sigma^2}{z} \cdot \frac{(-1)}{(h-z)^2} = \frac{\nu_l}{3} - \frac{\gamma_s\sigma^2}{z(h-z)^2} = 0$$

ここで $h-z=2z$ ($\therefore h=3z$) とおけば,

$$\frac{\nu_l}{3} - \frac{\gamma_s\sigma^2}{4z^3} = 0 \quad \therefore z = \left(\frac{3\gamma_s\sigma^2}{4\nu_l}\right)^{1/3}$$

$$\text{ゆえに, } \begin{cases} h = 3z \\ z = \left(\frac{3\gamma_s \sigma^2}{4\nu_l} \right)^{1/3} \end{cases} \quad (37)$$

(36) を z で偏微分しても同じ解が求まる。

(36) を H (または Z) で偏微分すると、同じように次のような最適値が求まる。

$$\begin{cases} H = 3Z \\ Z = \left(\frac{3\gamma_l \sigma^2}{4(\nu_l - \nu_s)} \right)^{1/3} \end{cases} \quad (37)$$

2) $\sigma_s^2 = \frac{2\sigma^3}{h+1}$ を (38) に代入すれば

$$h, H, Z \quad E(c) = \frac{h\nu_l}{2} + \frac{\tau\sigma}{h+1} + \frac{2\gamma\sigma^3}{h+1} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{H-Z} + \frac{(H+Z)(\nu_l - \nu_s)}{3} \quad (38)'$$

(38)' を H で偏微分し、それをゼロとおくと、

$$\frac{\partial E(c)}{\partial H} = \frac{2\gamma\sigma^3}{h+1} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{(-1)}{(H-Z)^2} + \frac{\nu_l - \nu_s}{3} = 0$$

ここで $H - Z = 2Z$ とおけば、

$$-\frac{\gamma\sigma^3}{2Z^3(h+1)} + \frac{\nu_l - \nu_s}{3} = 0 \quad \therefore Z^3 = \frac{3\gamma\sigma^3}{2(\nu_l - \nu_s)(h+1)}$$

$$\text{さらに, } \frac{2\sigma^3}{h+1} = \sigma_s^2 \text{ より, } Z^3 = \frac{3\gamma\sigma_s^2}{4(\nu_l - \nu_s)}$$

同様に、(38)' を Z で偏微分しても同じ解が求まる。

また、(38)' を h で偏微分し、それをゼロとおくと、

$$\frac{\partial E(c)}{\partial h} = \frac{\nu_l}{2} + \tau\sigma \cdot \frac{(-1)}{(h+1)^2} + \frac{2\gamma\sigma^3}{Z(H-Z)} \cdot \frac{(-1)}{(h+1)^2} = 0$$

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{(h+1)^2} \left\{ \tau\sigma + \frac{2\gamma\sigma^3}{Z(H-Z)} \right\} = \frac{\nu_l}{2}$$

$$\text{したがって, } (h+1)^2 = \frac{2}{\nu_l} \left\{ \tau\sigma + \frac{2\gamma\sigma^3}{Z(H-Z)} \right\} = \frac{2\tau\sigma Z(H-Z) + 4\gamma\sigma^3}{\nu_l Z(H-Z)}$$

以上のことより、

$$\begin{cases} H - Z = 2Z \\ Z^3 = 3\gamma\sigma_s^2 / 4(\nu_l - \nu_s) = 3\gamma\sigma^3 / 2(\nu_l - \nu_s)(h+1) \\ (h+1)^2 = \frac{2\tau\sigma Z(H-Z) + 4\gamma\sigma^3}{\nu_l Z(H-Z)} \end{cases} \quad (39)$$

3) 注1) と同じようにして求まる。

4) $X = H - Z$ とおくと、(40) は次のようになる。

$$h, z, H, Z \quad E(c) = \frac{(h+z)\nu_l}{3} + \frac{(X+2Z)(\nu_l - \nu_s)}{3} + \frac{\gamma_s \sigma^2}{z(h-z)} + \frac{\sigma^2(\gamma_l Z + \gamma_B X)}{(X+Z) \cdot Z \cdot X} \quad (40)'$$

(40)' を Z で偏微分し、それをゼロとおくと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(c)}{\partial Z} &= \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} + \frac{\sigma^2}{I} \left\{ \frac{\gamma_I Z (I + Z) - (Z + I + Z) (\gamma_I Z + \gamma_B I)}{Z^2 (I + Z)^2} \right\} \\ &= \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} + \frac{\sigma^2}{I} \left\{ \frac{\gamma_I}{Z(I + Z)} - \frac{\gamma_I Z + \gamma_B I}{Z(I + Z)^2} - \frac{\gamma_I Z + \gamma_B I}{Z^2 (I + Z)} \right\} \\ &= \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} + \frac{\sigma^2}{I} \left\{ \frac{\gamma_I}{Z(I + Z)} - \frac{\gamma_I}{(I + Z)^2} - \frac{\gamma_B I}{Z(I + Z)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_I}{Z(I + Z)} - \frac{\gamma_B I}{Z^2 (I + Z)} \right\} \\ &= \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{I(I + Z)^2} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z(I + Z)^2} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z^2 (I + Z)} = 0\end{aligned}\quad (41a)$$

同様に (40)' を I で偏微分し、それをゼロとおくと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(c)}{\partial I} &= \frac{\nu_l - \nu_s}{3} + \frac{\sigma^2}{Z} \left\{ \frac{\gamma_B I (I + Z) - (I + Z + I) (\gamma_I Z + \gamma_B I)}{I^2 (I + Z)^2} \right\} \\ &= \frac{\nu_l - \nu_s}{3} + \frac{\sigma^2}{Z} \left\{ \frac{\gamma_B}{I(I + Z)} - \frac{\gamma_I Z + \gamma_B I}{I^2 (I + Z)} - \frac{\gamma_I Z + \gamma_B I}{I(I + Z)^2} \right\} \\ &= \frac{\nu_l - \nu_s}{3} + \frac{\sigma^2}{Z} \left\{ \frac{\gamma_B}{I(I + Z)} - \frac{\gamma_I Z}{I^2 (I + Z)} - \frac{\gamma_B}{I(I + Z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_I Z}{I(I + Z)^2} - \frac{\gamma_B}{(I + Z)^2} \right\} \\ &= \frac{\nu_l - \nu_s}{3} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{I^2 (I + Z)} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{I(I + Z)^2} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z(I + Z)^2} = 0\end{aligned}\quad (41b)$$

5) $I = kZ$ を (41a) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z^2 (kZ + Z)} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z(kZ + Z)^2} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{kZ(kZ + Z)^2} &= 0 \\ \text{ゆえに, } \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{(k+1)Z^3} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{(k+1)^2 Z^3} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{k(k+1)^2 Z^3} &= 0 \\ \text{したがって, } \frac{\sigma^2}{Z^3} \left\{ \frac{\gamma_I + \gamma_B k + \gamma_B k(k+1)}{k(k+1)^2} \right\} &= \frac{2(\nu_l - \nu_s)}{3} \\ \text{つまり, } \frac{Z^3(\nu_l - \nu_s)}{3\sigma^2} &= \frac{\gamma_I + \gamma_B k + \gamma_B k(k+1)}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{\gamma_I + \gamma_B k(k+2)}{2k(k+1)^2} \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

$I = kZ$ を (41b) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\nu_l - \nu_s}{3} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{k^2 Z^2 (k+1)Z} - \frac{\gamma_I \sigma^2}{kZ(k+1)^2 Z^2} - \frac{\gamma_B \sigma^2}{Z(k+1)^2 Z^2} &= 0 \\ \text{ゆえに, } \frac{\sigma^2}{Z^3} \left\{ \frac{\gamma_I (k+1) + \gamma_I k + \gamma_B k^2}{k^2 (k+1)^2} \right\} &= \frac{\nu_l - \nu_s}{3} \\ \text{したがって, } \frac{Z^3(\nu_l - \nu_s)}{3\sigma^2} &= \frac{\gamma_I (2k+1) + \gamma_B k^2}{k^2 (k+1)^2} \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

$$\text{つまり, } Z^3 = \frac{3[\sigma^2 \gamma_I (2k+1) + \sigma^2 \gamma_B k^2]}{(\nu_l - \nu_s) k^2 (k+1)^2} \quad (42b)$$

$$\begin{aligned} \text{①と②より, } \frac{\gamma_I + \gamma_B k(k+2)}{2k(k+1)^2} &= \frac{\gamma_I(2k+1) + \gamma_B k^2}{k^2(k+1)^2} \\ \frac{\gamma_I + \gamma_B k(k+2)}{2} &= \frac{\gamma_I(2k+1) + \gamma_B k^2}{k} \end{aligned}$$

これを整理すると、

$$k^3 = \frac{3\gamma_I k + 2\gamma_I}{\gamma_B} \quad (42a)$$

IV 結 び

以上の検討によって、われわれは、オアのモデルは、ボーモル・モデルおよびバティンキン・モデルよりもすぐれたモデルであることを明らかにした。すなわち、第1に、貨幣需要の弾力性予測に関してオアのモデルから導き出された結果において、さらに、第2に、オアのモデルが他の二つのモデルよりもより企業の現実在即した仮定を設定している点においてすぐれている。

また、オアは、第3に、2資産モデルから3資産モデルへ拡張することにより、調整転換費用が資産管理問題にとってきわめて重要であることを明らかにした。この第3の点は、現金管理のための在庫モデル的アプローチが、現金収支の適合に関する費用管理的特質をもつことを一層強調するものである。

しかしながら、オアのモデルは次のような限界ないし問題点をもつことを見落としてはならない。

第1に、現金管理問題に対して、狭い範囲の部分的最適化にとどまっている。というのは、現金・有価証券以外の決定変数の大部分を外生的なものと考へ、現金管理における多様な決定変数の相互関係が、ほとんど取り上げられていないからである。

第2に、キャッシュ・フローが完全に確率的であるという仮定は現実的ではない。実際、すべてのキャッシュ・フローが予測できないのではなく、ある種のキャッシュ・フローは相当程度正確に予測できるのが普通である。

したがって、現金管理のためのオアの在庫モデルは、上述したすぐれた特色をもっているが、それにもかかわらず、企業に適用可能な最適分析手法であるとは必ずしもいえないであろう。現金管理に対する在庫モデルの有効性および限界性については、そのモデルの実証的適用の研究結果をまたなければな

らない¹⁾。

- [注] 1) 現金管理に対する在庫モデルの実証的適用を研究している文献としては、たとえば、次のものがあげられる。

R. Homonoff and D. W. Mullins, *Cash Management* (Lexington, Mass. : D. C. Heath and Company, 1975).

D. W. Mullins and R. B. Homonoff, "Applications of Inventory Cash Management Models," in S. C. Myers (ed.), *Modern Developments in Financial Management* (New York : Praeger Publishers, Inc., 1976), pp. 494—527.

C. R. Coates, *The Demand for Money by Firms* (New York : Marcel Dekker, Inc., 1976).

参 考 文 献

- [1] Baumol, W. J., "The Transactions Demand for Cash : An Inventory Theoretic Approach," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 66, No. 4 (November 1952), pp. 545—556.
- [2] Calman, R. F., *Linear Programming and Cash Management : CASH ALPHA*. Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1968.
- [3] Coates, C. R., *The Demand for Money by Firms*. New York : Marcel Dekker, Inc., 1976.
- [4] Elton, E. J., and M. J. Gruber, *Finance as a Dynamic Process*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [5] Homonoff, R., and D. W. Mullins., *Cash Management*. Lexington, Mass. : D. C. Heath and Company, 1975.
- [6] 市村昭三著『運転資本管理』同文館，昭和50年。
- [7] Miller, M. H., and D. Orr, "A Model of the Demand for Money by Firms," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 3 (August 1966), pp. 413—435.
- [8] Miller, M. H., and D. Orr, "The Demand for Money by Firms : Extensions of Analytic Results," *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 5 (December 1968), pp. 735—759.
- [9] 望月昭一著『貨幣的経済学の基本問題』成文堂，昭和52年。
- [10] Mullins, D. W., and R. B. Homonoff, "Applications of Inventory Cash Management Models," in S. C. Myers (ed.), *Modern Developments in Financial Management*. New York : praeger Publishers, Inc., 1976, pp. 494—527.

- [11] Orgler, Y. E, *Cash Management*. Belmont, Calif. : Wadsworth Publishing Company, Inc., 1970. 斎藤静樹訳『キャッシュ・マネジメント』日本生産性本部, 昭和48年。
- [12] Orr, D., *Cash Management and the Demand for Money*. New York : Praeger Publishers, Inc., 1970.
- [13] Patinkin, D., *Money, Interest, and Prices*. Evanston, Ill. : Row, Peterson, and Company, 1956 (2ed. New York : Harper & Row, Publishers, Inc., 1965). 貞木展生訳『貨幣・利子および価格』勁草書房, 昭和46年。
- [14] Peterson, D. E., *A Quantitative Framework for Financial Management*. Homewood, Ill. : Richard D. Irwin, Inc., 1969.
- [15] Pogue, G. A., and R. N. Bussard, "A Linear Programming Model for Short Term Financial Planning under Uncertainty," in S. C. Myers (ed.), *Modern Developments in Financial Management*. New York : Praeger Publishers, Inc., 1976, pp. 528—557.
- [16] Robichek, A. A., and S. C. Myers., *Optimal Financing Decisions*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc., 1965. 古川栄一監訳, 別府祐弘・古川浩一訳『最適資本調達』東洋経済新報社, 昭和46年。
- [17] Robichek, A. A., D. Teichroew, and J. M. Jones, "Optimal Short Term Financing Decision," *Management Science*, Vol. 12, No. 1 (September 1965), pp. 1—36.
- [18] Tobin, J., "The Interest Elasticity of Transactions Demand for Cash," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 38, No. 3 (August 1956), pp. 241—247.