多期間資産選択理論における一特殊問題

江副, 憲昭

https://doi.org/10.15017/2920548

出版情報：経済論究. 31, pp.1-23, 1974-03-10. 九州大学大学院経済学会

多期間資産選択理論における一特殊問題

江　副　憲　昭

目　次

序

「九大論究」29号の前稿[1]では，資産選択理論の基礎的な問題である不確実性下の行動基準の問題，および静学的な最適ポートフォリオ決定の問題を検討した。

だが，そこでは初期富を所与とした一期間分析という本質的に静学的な枠内での分析であった。しかしながら最近の資産選択理論の発展方向は動学化の流れにあるようである。そこで本稿では，前稿の静学モデルを拡充して，動学モデルへの準備とし，さらに一般的な動学的資産選択論を考えるための試みとして，1つの興味ある特殊問題を取り上げることにした。

以下に各章のテーマについて簡単に触れておこう。第一章では，次章の準備

として幾つかの問題を取り上げた。それはまた，前稿を拡充するものでもある。まず前稿が Tobin 流の構成比率を決定変数とする分析であったので，それを富の絶対額を変数とする問題に変更する。そしてn危険資産に1つの安全資産を導入して，分離定理の証明を与える。第2節では， Arrow の危険回避の概念を導入して，初期富および危険資産の収益率がそれぞれ変化した場合の資産需要への影響を検討しよう。この危険回避の概念は，第2章で重要な役割を演ずるものである。

第2章では，多期間資産選択のモデルを取り扱っている。一期間決定を多期間決定の問題へと動学化するには，一般に極めて複雑な要因を考慮しなければならないであろう。だが，ここでは多期間モデルを一般的に考えるのではなく基本的な考え方のみを取り上げている。そこで用いられるアプローチは，多段階決定過程の解法として広く利用されている動的計画法である。

そして，最後に「多期間決定問題が，もしも一期間決定の単なる積み上げによって最適化されるなら，その条件は何か」という問題を考察する。この課題は Mossin や Hamada らによって展開されている。この条件を検討することによって，一般的な多期間モデルの重要な足掛かりを得ることができるであろう。

<注>

1）拙稿，「資産選択の理論構造」，『九大論究』29号，1973

第1章　静学的資産選択理論の拡充

1—1　新しい定式化と分離定理

前稿では，所与の初期値の下で，n種危険資産をどのように配分すれば，期待効用を最大にする最適ポートフォリオが得られるかという問題を取り上げ

た。だが Tobin 流に変数を総資産の構成割合として分析する方法は，資産の絶対量の変化を反映できないので，初期富が変動する動学モデルには使えない[1)]，そこで変数を富の絶対額とするモデルに変更しなければならない。さらに前稿では，安全資産（例えば貨幣）は明自的に選択対象に含まれていなかった。だが現実の世界では，選択対象として危険資産，安全資産の双方を考えなければならない。その場合，分離定理が成立する。そこで，モデルは次のようになる。

いま，記号を次のように定める。

W_0 ； 初期富の総額

x_i ； i 資産の需要額

r_i ； i 資産の収益（確率変数とする）

μ_i ； i 資産変数の期待値

σ_{ij} ； i 資産と j 資産との相関係数

U(W)：効用関数

n 個の資産があるとする。そのとき

（1—1） $$W_0=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

である。将来の富は

（1—2） $$W=\sum_{i=1}^{n}(1+r_i)x_i$$

となる。そのとき，富の期待値 $E(W)$ および分散 $V(W)$ は，それぞれ

（1—3） $$E(W)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$$

（1—4） $$V(W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

である。期待効用関数は，

（1—5） $$E[U(W)]=\bar{U}(E,V)$$

で表わされるものとする。それは，次の性質をもつ，

$$(1-6)\qquad \frac{\partial \bar{U}}{\partial E}>0\ ,\qquad \frac{\partial \bar{U}}{\partial V}<0$$

このとき，最適ポートフォリオを求めるには次の最大問題を解けばよい。

$$\begin{cases} \text{Maximize} \quad E[U(W)]=\bar{U}(E,V) \\ \text{Subject to} \quad W_o=\sum_{i=1}^{n}x_i\ , \qquad x_i>0 \end{cases}$$

ラグランジュ関数Lをつくる。

$$(1-7)\qquad L=\bar{U}(E,V)-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-W_o\right)$$

最大化の必要条件は

$$(1-8)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial U}{\partial E}\mu_i+\frac{\partial \bar{U}}{\partial V}2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j-\lambda=0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j-W_o\right)=0 \end{aligned}\qquad (i=1\cdots\cdot n)$$

である。十分条件が満されているならば，(1—8)を x_i について解けば最適ポートフォリオを得ることができる。(λ はラグランジアン)

いま，n資産のうち，第1資産が安全資産とする。そのとき，将来収益は確実であるから

$$(1-9)\qquad \sigma_{1j}=\sigma_{j1}=0 \qquad (j=1\cdots\cdot n)$$

となる。そのとき(1—8)より，次式を得る。

$$(1-10)\qquad \frac{\partial \bar{U}}{\partial E}\mu_1=\lambda$$

したがって，

$$(1-11)\qquad \begin{pmatrix} \sigma_{22}\cdots\cdot\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \\ \sigma_{n2}\cdots\cdot\sigma_{nn} & 1 \\ 1\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S(\mu_2-\mu_1) \\ \vdots \\ S(\mu_n-\mu_1) \\ W_o-x_1 \end{pmatrix}$$

が成立する。ただし，$S=-\dfrac{\partial\bar{U}/\partial E}{2\cdot\partial\bar{U}/\partial V}$ である。これを解くと，最適資産構成 $(x_2^*\cdots\cdots x_n^*)$ が得られる。

(1—12)
$$\begin{pmatrix} x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{22}\cdots\cdots\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \\ \sigma_{n2}\cdots\cdots\sigma_{un} & 1 \\ 1\cdots\cdots\cdots 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S(\mu_2-\mu_1) \\ \vdots \\ S(\mu_n-\mu_1) \\ W_o-x_1 \end{pmatrix}$$

ここで，係数行列の行列式を D，(i,j) 余因子を D_{ij} とおくと，

(1—13)
$$\overset{*}{x_i}=S\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{D_{j-1,i}}{D}(\mu_j-\mu_1)\right)+\frac{D_{ni}}{D}(W_o-x_1)$$

$(i=2\cdots\cdots n)$

(1—14)
$$W_o-x_1=-S\sum_{j=2}^{n}\frac{D_{j-1,n}}{D_{nn}}(\mu_j-\mu_1)$$

となる。(1—14) を (1—13) に代入すると

$$x_i^*=S\sum_{j=2}^{n}(\mu_j-\mu_1)\left(D_{j-1,i}-\frac{D_{ni}D_{j-1,n}}{D_{nn}}\right)$$

を得る。したがって

(1—15)
$$\frac{x_r^*}{x_s^*}=\frac{\sum_{j=2}^{n}(\mu_j-\mu_1)\left(D_{j-1.r}-\dfrac{D_{nr}D_{j-1,n}}{D_{nn}}\right)}{\sum_{j=2}^{n}(\mu_j-\mu_1)\left(D_{j-1.s}-\dfrac{D_{ns}D_{j-1,n}}{D_{nn}}\right)}$$

$(r,s=2\cdots\cdots n)$

となる。右辺は初期富 W_o の大きさから独立である[2)]，したがって，安全資産を除く危険資産については，その任意の２つの危険資産の内部構成比は，初期富 W_o がどう変化しても不変となる。これが，分離定理といわれるものである[3)]。

<注>

1）具体的な例をあげる。簡単化のため２資産しかなく，効用関数は２次式とする。（記号については，第２節を参照）。すなわち

(1)*　$W=W_0+rx$

(2)*　$U(W)=W-aW^2$

である。そのとき，極大値 x は

(3)*　$x=\dfrac{(1-2aW_0)\mu}{2a(\mu^2+\sigma^2)}$

となる。他方， Tobin の定式化では， $\dfrac{W}{W_0}=R$ とおくと (1)*，(2)*のかわりに，(4)*，(5)* が与えられる。

(4)*　$R=1+kr$

(5)*　$S(R)=R-bR^2$

極大値 k は，(3)*のかわりに

(6)*　$k=\dfrac{(1-2b)\mu}{2b(\mu^2+\sigma^2)}$

である。(3)* は初期富 W_0 の大きさに依存して変化するが，(6)* は W_0 とは独立である。他方， (5)* は $S(R)=\dfrac{W}{W_0}-b\left(\dfrac{W}{W_0}\right)^2$ であるから，効用関数としては，$W-\left(\dfrac{b}{W_0}\right)W^2$ となる。したがって，W_0 が変化する場合は効用関数は違ったものとなり，不都合な結果となる。そこで，(2)* との関係でみると，$\dfrac{b}{W_0}=a$ なる関係，すなわち，b が W_0 に比例する関係を保って分析する場合だけ，効用関数 (3)* と(6)* は一致することになる。

2）この分離定理の証明は，藤野〔文献６〕によった。

3）分離定理ははじめ Tobin によって紹介されたものであるが，彼の説明は次のように要約される。「安全資産が存在する場合，ポートフォリオ選択の過程は２つの段階に分けることができる。第１に危険資産の一意的な最適結合，第２にそのような結合と１つの安全資産との間の資金の最適配分，この２つの過程が独立に決定されることを分離定理という」

1－2　危険回避と資産需要

富総額の大きさが変化するとき，最適ポートフォリオの各資産に対する需要はどのように変化するかを考えよう。その場合， Arrow の危険回避の概念[1)]が必要である。これまで投資家の危険回避を示す条件は， $U''(W)<0$ であった。だが，期待効用定理を満す効用関数は正の一次変換を除いて一意に決定されているにすぎない。したがって $U(W)$ を正の定数倍するとき， $U''(W)$ に

も正の定数倍せねばならないから，効用尺度として $U''(W)$ は避けねばならなくなるのである，そこで Arrow は次の危険回避を提示した。

絶対的危険回避

(1—16)　$$R_A(W)=-\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

相対的危険回避

(1—17)　$$R_R(W)=-\frac{U''(W)}{U'(W)}\cdot W$$

これについて，2つの仮説を示している。

i) 絶対的危険回避は富の減少関数である。

ii) 相対的危険回避は富の増加関数である。

これについては後で述べる。

さて，(1—16)，(1—17) は次の性質をもつことがわかる。それは $U'(W)$ にもとずいているが，効用関数 $U(W)$ の正の一次変換に関して不変である。危険回避者に対しては正の値をとる。さらに相対的危険回避は富の限界効用の弾力性である。そして効用の単位の変化および富の単位の変化に関して不変である。

この危険回避を用いて，富の変化と資産需要の変化の関係を検討しよう。いま簡単化のため，安全・危険の2資産しかないとする。収益 r_1 を生む危険資産への投資額を x_1，収益ゼロの安全資産へは x_2 だけ投資するとしよう。

そのとき

(1—18)　$$W_o=x_1+x_2$$

(1—19)　$$W=(1+r)x_1+x_2$$

(1—18) を代入して

(1—20)　$$W=W_o+rx_1$$

となる。投資家は期待効用 $E[U(W)]$ を極大化する x_1 を決定する。極大の必要条件は

(1—21)　$$E[U'(W)r]=0$$

であり，十分条件は

(1—22)　$E[U''(W)r^2]<0$

であるが，$U''(W)<0$ だから常に成立する。

いま，(1—21) を微分すると

(1—23)　$$\frac{dx_1}{dW_0}=-\frac{E[U''(W)r]}{E[U''(W)r^2]}$$

を得る。絶対的危険回避 (1—16) を使って，書き直すと，

(1—24)　$$\frac{dx_1}{dW_0}=\frac{E[R_A(W)U'(W)r]}{E[U''(W)r^2]}$$

となる。分母は (1—22) より負だから，$\frac{dx_1}{dW_0}$ の符号は，$R_A(W)$ の性質によって決まる。まず $R_A(W)$ が w に関して一定のとき，(1—21) を使って，(1—24) はゼロとなる。すなわち，このとき危険資産の需要量は初期富 W_0 から独立となる。

次に，$R_A(W)$ が W の減少関数とする。このとき $r>0$ に対し，$R_A(W_0+rx_2)<R_A(W_0)$ であるから

(1—25)　$U''(W_0+rx_1)>-R_A(W)U'(W_0+rx_1)$

となる。ここで両辺に r をかけて，期待値をとる。($r<0$ の場合も同様の結果となる)

(1—26)　$E[U''(W_0+rx_1)r]>-R_A(W)E[U'(W_0+rx_1)r]$

左辺は (1—21) よりゼロになる。よって，(1—23) $\frac{dx_1}{dW_0}$ は正になる。即ち，$R_A(W)$ が逓減するとき危険資産需要は W_0 の増加関数となるのである。逆に，$R_A(W)$ が富の増加関数である場合には，危険資産需要は W_0 の減少関数となる。だが，これは現実の経験に反している[2]，したがって，Arrow は，$R_A(W)$ は富の減少関数であるという命題（i）を立てたのである。

次に，相対的危険回避 R_R を用いて資産需要の富弾力性の大きさを考察する。いま，危険資産および安全資産の W_0 に対する弾力性をそれぞれ ε_1，ε_2 とおけば，

(1—27) $$\varepsilon_1=1-\frac{E[U''(W)Wr]}{x_1E[U''(W)r^2]}$$

(1—28) $$\varepsilon_2=1+\frac{E[U''(W)Wr]}{x_2E[U''(W)r^2]}$$

を得る[3)]，(1—27)，(1—28) に相対的危険回避 $R_R(w)$ を代入すると

(1—29) $$\varepsilon_1=1+\frac{E[R_R(W)U'(W)r]}{x_1E[U''(W)r^2]}$$

(1—30) $$\varepsilon_2=1-\frac{E[Rr(W)U'(W)r]}{x_2E[U''(W)r_2]}$$

となる。ここで，$R_R(W)$の性質によって弾力性の大きさが定まる。まず$R_R(W)$が一定のときは，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ であることが容易にわかる。すなわち，安全・危険資産ともに，弾力性は1になる。

次に，$R_R(W)$がWの減少関数ならば，$r>0$に対して，$R_R(W_o+rx_2)<R_R(W_o)$であるから，

(1—31) $$U''(W)W_r>-R_R(W_o)U'(w)r$$

となる（$r<0$ でも同様），期待値をとると

(1—32) $$E[U''(w)W_r]>-R_R(W_o)E[U'(w)_r]=0$$

となる。したがって (1—29)，(1—30) によって，$\varepsilon_1>1$，$\varepsilon_2<1$ を得る。また，$R_R(W)$ がWの増加関数ならば，同様にして $\varepsilon_1<1$，$\varepsilon_2>1$ の結論を得る。ここで，Arrow は，アメリカにおける貨幣需要関数の時系列分析の結果を根拠にして，$R_R(W)$ が W の増加関数であるという命題 (ii) を立てたのである[4)]。したがって，危険資産の富弾力性は1より小であり，安全資産の富弾力性は1より大という結論となる。

次に，危険資産の収益が変化した場合，危険資産の需要にどんな影響を与えるかを検討しよう[5)]。ここ危険資産，安全資産がともに収益 r_1，r_2 をもち，その期待値と分散をそれぞれ，μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2 とする。ただし，r_1 と r_2 は独立に分布する。このとき，将来の富Wは，

(1—33) $$W=(1+r_2)W_o+x_1(r_1-r_2)$$

で与えられる。極大の条件は

(1—34)　$$E[U'(W)(r_1-r_2)]=0$$

である。(1—34) を全微分して整理すると

(1—35)　$$\frac{dx_1}{dW_o}=-\frac{E[U''(W)(r_1-r_2)(1+r_2)]}{E[U''(W)(r_1-r_2)^2]}$$

を得る。ここで，次の2次効用関数を仮定する。

(1—36)　$$U(W)=W-aW^2$$

このとき

(1—37)　$$U'(W)>0, \qquad U''(W)<0$$

とする。いま，期待効用関数 $E[U(W)]$ は特定化されるので，x_1 に関して微分して整理すると，危険資産の最適投資額

(1—38)　$$x_1=\frac{(\mu_1-\mu_2)-2aW_o[(1+\mu_2)(\mu_1-\mu_2)-\sigma_2{}^2]}{2a[\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+(\mu_1-\mu_2)^2]}$$

を得る。一方，最適な安全資産投資額は W_o-x_1 である。

そこで，(1—38) を μ_1 で微分すると

(1—39)　$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu_1}=\frac{[1-2aW_o(1+\mu_2)][\sigma_1{}^2-(\mu_1-\mu_2)^2]}{2a[\sigma_1{}^2+(\mu_1-\mu_2)^2]^2}$$

を得る。ただし，式が複雑になるので $\sigma_2{}^2=0$ とおいた。この (1—39) が正となれば，危険資産の期待収益が上昇するとき，危険資産の需要が増加するという，いわゆる流動性選好説の結論と一致するわけである。そこで (1—39) の符号を調べよう。まず，右辺の分母は正である。また，(1—37) より

$\frac{1}{2a}>W\geq(1+\mu_2)W_o$ がいえるから，(39) の右辺第1項も正である。したがって $[\sigma_1{}^2-(\mu_1-\mu_2)^2]$ が正であること，即ち，

(1—40)　$$\frac{\sqrt{\sigma_1{}^2}}{\mu_1}<\frac{(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1}$$

がいえればよい。この式は危険資産収益の変動係数 $\frac{\sqrt{\sigma_1{}^2}}{\mu_1}$ が，$\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}$ よりも大きいことを意味している。もし収益 r_1 が正規分布するなら，

$P_r[|r_1-\mu_1|<\sqrt{\sigma_1{}^2}]\fallingdotseq 68.26$ から，収益率が $|\mu_1-\sigma_1|$ の範囲にある確率が

わかる，一般に，この変動幅にくらべて収益率の方が小さいであろう，そうすれば（1—39）は正となり，流動性選好説が成立することになる。

後の展開のため，最適値（1—38）が成立する場合の最適期待効用の値を計算しておこう，（1—38)を $E[U(W)]$ に代入して整理すればよい，

$$(1-41)\quad E[U(W)]=\frac{\sigma_1{}^2(1+\mu_2)+\sigma_2{}^2(1+\mu_1)}{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+(\mu_1-\mu_2)^2}\left(W_o-\frac{\sigma_1{}^2(1+\mu_2)^2+\sigma_2{}^2(1+\mu_1)^2+\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2(1+\mu_2)+\sigma_2{}^2(1+\mu_1)}aW_o{}^2\right)+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{4a[\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+(\mu_1-\mu_2)^2]}$$

<注>

1）Arrow〔文献1〕

2）通常，投資家は，所得が増えて富の総額が増大してくるとともに，危険資産に投資する割合が高くなってくると考えられている。実際の調査結果もこれを裏づけている。藤野正三郎編『富の構造』に収められている江見氏，溝口氏らの文献を参照。

だが，効用関数を（1—36）のように2次式であるとすると，$\dfrac{dR_A(W)}{dW}=\dfrac{4a^2}{(1-2aW)^2}>0$ となり，不都合な結果となる。2次効用関数は Arrow の命題 (i) に反していることになる。

3）ε_1 の導出について，

$$\varepsilon_1=\frac{W_o}{x_1}\ \frac{dx_1}{dW_o}=-\frac{W_oE[U''(W)r]+x_1E[U''(W)r^2]-x_1E[U''(W)r^2]}{x_1E[U''(W)r^2]}$$
$$=-\frac{E[U''(W)(W_o+x_1r)r]-x_1E[U''(W)r^2]}{x_1E[U''(W)r^2]}$$
$$=1-\frac{E[U''(W)Wr]}{x_1E[U''(W)r^2]}$$

4）Arrow〔文献1〕p 103.

5）本節で述べたように，ひとたび最適なポートフォリオが得られると，最適資産保有額の比較静字的な性質を検討することが必要である。即ち，最適ポートフォリオが依存する外生的パラメータである初期富総額，各資産の収益率および危険の程度などが変化した場合，最適保有額はどのような影響を受けるかという問題である。本節は2資産の場合しか取り上げていないが，n 資産について一般的な分析を行ったのは，Royama & Hamada〔文献4〕である。彼らは，2次効用関数を前提として，最適ポートフォリオを導出し，それを微分

して整理する。さらに，租税を導入することによって，資産選択理論におけるスルツキー方程式を導いた。それによって，資産相互間の諸性質が，通常の消費者行動理論と同様に展開されている。不確実性下の最適問題として定式化された金融資産が，一般の消費者行動分析の場合と同様に解釈されるということは興味深い事実であろう。

第2章　多期間資産選択理論

2－1　多期間モデルの構造

これまでの分析では，期首に，ある初期富をもった投資家が，期末の富の期待効用極大化を目的として，初期富の配分を最適に決定する問題を考えてきた。そこでは決定は一度切りであり，いわゆる一期間分析であった。そして富の総額を所与としていたので，富の追加分（貯蓄）と資産選択決定との相互関係を扱うことはできないのである。

だが，現実には，各投資家は未来の時間的視野を考えて最適行動をとるので，将来時点までの目的や雑々な外的・内的要因を考慮しつつ，彼のポートフォリオに適時変更を加えていくであろう。すなわち，最終的に極大期待効用を実現するよう多段階の決定を計画するのである。そこで，資産選択理論は，一期間分析から多数期間にわたる継続的な選択の分析へと展開しなければならないことになる[1]。だが，そのように，動学化する場合，貯蓄や消費と選択決定との相互関係をはじめ諸々の問題を考慮に入れなければならなくなるであろう。だが，一般的な動学分析を展開するのは，本稿の目的ではない。ここでは一期間分析を多期間分析へ進める場合の一つのアプローチを紹介し，その後で，多期間分析の1つの特殊問題，即ち，Myopia の条件を検討することにしよう。

いま，次のような多期間モデルを考える[2]。

「投資家はある未来の時点を決定し，その時点まで **t** 期間に分かれているとする。富の期待効用極大化を同時として，各期のはじめに投資決定をし，期末

で収益を実現した後で再び投資決定をする。これを続けていき，t 期後には，富をすべて消費する」この場合，中間消費の可能性は無視されている。さらに取引費用はないとする。そして，各期の収益には系列相関はないとする。ある期におけるポートフォリオの決定は，その前期の結果に依存し，同様に未来収益の確率分布の情報を考慮に入れるであろう。そこで最後の期からはじめる。最終期（t 期）のはじめ，投資家は彼の富 W_{t-1} を，期待効用 $E_t[U(W_t)]$ が極大となるように各資産に配分し，最適ポートフォリオを決定する。（各添字は時期をあらわす）一たん，最適決定がなされると，最終富の期待効用最大値は W_{t-1} によってのみ決定される。

（2—1）　$$\max\ E_t[U(W_t)]=\phi_{t-1}(W_{t-1})$$

関数 ϕ_{t-1} は，W_{t-1} に対する確率分布の選好の適当な表現であり，導出効用関数とよぶ，そこで，t—1 期のはじめの最適決定は

（2—2）　$$E_{t-1}[\phi_{t-1}(W_{t-1})]=E_{t-1}\{\max\ E_t[U(W_t)]\}$$

を極大化するものである。

このようにして，目的関数が導出効用関数で適当に定義されるならば，最終期の 1 期前（t—1 期）決定を，単純な一期決定問題として考えることができる。しかし，その前提として，投資家は t—1 期の収益のあらゆる可能な結果に対して，最適となる t 期決定を特定化しなければならない。かくしてこのようなやり方を逐次後ろ向きに続けていけば，最適な第 1 期ポートフォリオを決定することが可能になるであろう。この考え方は，Bellman によって開発された動的計画法に基いている[3]。ここで重要な役割を演ずるのが最適性原理であり，次のように要約される，「最適政策は初期の状態と最初の決定が何であっても，残りの決定は最適決定から生じた状態に関して最適政策を構成しなければならない」。

ここで，Mossin による例を示そう[4]。投資対象は 2 資産であり，2 期間で考える。第 1 期および第 2 期での第 1 資産への投資額を x_1，x_2 であらわすことにする。さらに初期富 W_0 は200，効用関数は次のような 2 次式とする。そ

の他のデータは表1に示されている。

$$U(W)=W_2-\frac{1}{1000}W_2{}^2$$

表　1

資産 1		資産 2	
収益(r_1)	確率	収益(r_2)	確率
0.0	0.5	−1.0	0.5
0.2	0.5	2.0	0.5
期待値 $E(r_1)$	分散 $V(r_1)$	期待値 $E(r_2)$	分散 $V(r_2)$
0.1	0.01	0.5	2.25

第2期の最適決定から考えよう。前章の公式（1—38）より

$$(2—3)\qquad x_2=\frac{5.7W_1-400}{4.84}$$

となる。これが第2期のはじめにおける富の値に対する最適決定を示している。このとき最終期の富の期待値は，前章（1—41）より

$$\phi_1(W_1)=\max E_2[U(W_2)]$$

$$=\frac{2.94}{2.42}\left(W_1-\frac{2.7675}{2490}W_1{}^2\right)+\text{定数}$$

を得る。第1期の最適決定は，（2—1），（2—2）の関係から明らかなように，次の関数の期待効用を極大化することによって得られる。

$$\max\ E_1\left(W_1-\frac{2.7675}{2490}W_1{}^2\right)$$

公式（1—38）を再び使って，最適値x_1

$$(2—4)\qquad x_1=\frac{5.7W_0-360}{4.84}=161.2$$

を得る。かくして，この例においては，第1期の最適決定は，初期富200のうちの161.2（80.6%）を第1資産に，残りの38.8（19.4%）を第2資産に投資

することである。第2期の最適決定は，（2—3）に，$A^1=161.2$ を代入して，得ることができる。すなわち，第1資産に107.2 (66.5%) を，残りの54.0 (33.5%) を第2資産へ投資すればよい。

<注>

1）多期間モデルを最初に取り上げたのは Tobin〔文献5〕である。彼は本節と同様，蓄積の途中で，消費も貯蓄もない単純なケースを考えた。そこでは，富の再投資を継続することによって，目標期末の期待値を最大にするような資産選択を求めることが問題である。彼は，次の2つの仮定
（i）時間における収益の確率分布の独立性
（ii）時間における収益率の定常性
を立てると，すべての有効ポートフォリオは，定常的なポートフォリオとなること，すなわち，時間を通じて，常に同一の資産保有比率が維持されるものとなることを証明した。
2）以下の分析は，主に，Mossin〔文献3〕によっている。
3）Bellman, *Dynamic Programming*, 1957.
4）Mossin〔文献3〕, p222～223.

2—2　多期間分析の特殊問題

——Myopia を許す効用関数——

多期間分析において，将来を考慮せずに第1期ポートフォリオを決定しても，それは全体として最適なものにならないであろう，だがそのような手続きが最適となるような場合があるかもしれない。そのとき，1期間分析はそのまま多期間分析に応用されるため，実用的に極めて好都合となるだろう。そして，理論的にも，その成立条件を探ることは興味深いことである。そこで次のような課題を立てる。

「投資家は，最終期の期待効用の極大化を目的とし，その期の期首の富と収益の確率分布にのみ基礎を置き，未来を全く無視して各期の決定を行っていく。このようなやり方で決定したポートフォリオの系列が，全体として最適と

なるためには，効用関数に対してどのような条件が必要であるか」

そして，このような手続の系列が最適となるような決定を Mossin にならって “Myopia”[1] と名ずけよう，ここで，注意すべきことは，Myopia を考える際には，前節の論理から明らかなように，t 期の効用関数と t—1 期の効用関数との関係をみればよいことである。

さて，2つの Myopia の概念を定義する。いま収益 ρ をもつ1つの安全資産があるとき，投資家の最適行動はある期首の決定をつづく期と同様に，全資産をその安全資産に投資するだけでよい。この行動を Partial Myopia と定義しよう。他方第2期の決定を最終期のように決定しても全体として最適な結果となる場合，Complete Myopia と定義する。

いま，t 期と t—1 期の2期間で考える，ここで

(2—5)　　$$W_t=(1+\rho)W_{t-1}+x(r-\rho)$$

とする。t 期の最適決定 x は，一般に

(2－6)　　$$E[U'(W_t)(r-\rho)]=0$$

の条件で決まる。よって，t—1 期を評価する適当な効用関数は

(2—7)　　$$\phi(W_{t-1})=E[U(W_t)]$$

となる。いま W_{t-1} がすべて安全資産に投資されるなら，t 期の富 W_t は，$W^{t-1*}=(1+\rho)W_{t-1}$ となる，そのとき，(2—7) の効用関数は $U(W^{\overset{*}{t-1}})$ である。その場合，Partial Myopia が成立するなら，$E[U(W_t)]$ と $U(W^{\overset{*}{t-1}})$ とは効用関数として同値関係にならねばならない，即ち

(2—8)　　$$E[U(W_t)]=\alpha U(W^{\overset{*}{t-1}})+\beta$$

となる定数 α と β $(\alpha>0)$ が存在しなければならない，上式を W_{t-1} で微分して β を消去すると，結局

(2—9)　　$$E[U'(W_t)]=\alpha U'(W^{\overset{*}{t-1}})$$

を得る。同様に，Complete Myopia が成立する場合には，対応する条件は

(2—10)　　$$E[U'(W_t)]=\alpha U'(W_{t-1})$$

となる。$\rho=0$ のとき両式は一致する。

次に，（2—9）の成立する必要・十分条件は

（2—11）
$$-\frac{U'(W_t)}{U''(W_t)}=\mu+\lambda W_t$$

であることを証明する。ただし，μ と λ は W_t と独立である，この条件を満す効用関数には，

（2—12）

指数関数　：　$-e^{-\frac{W}{\mu}}$　$(\lambda=0)$

対数関数　：　$\log(W+\mu)$　$(\lambda=1)$

べき関数　：　$\frac{1}{\lambda-1}(\mu+\lambda Y)^{1-\frac{1}{\lambda}}$（その他）

がある。$\lambda=-1$ とおけば2次効用関数も含まれることに注意，

十分条件の証明，

（2—11）が成立するとせよ，そのとき

（2—13）
$$-U'(W_t)=[\mu+\lambda W^{t-1}{}_{*}+\lambda x(r-\rho)]U''(W_t)$$

である。$(r-\rho)$ を乗じて期待値をとると，左辺はゼロとなる。よって

$$-\frac{(1+\rho)E[U''(W_t)(r-\rho)]}{E[U''(W_t)(r-\rho)^2]}=\frac{(1+\rho)\lambda x}{\mu+\lambda(1+\rho)W_{t-1}}$$

となるが，前章（1—35）より

$$\frac{dx}{dW_{t-1}}=\frac{(1+\rho)\lambda x}{\mu+\lambda(1+\rho)W_{t-1}}$$

となる，これは

（2—14）
$$x=C[\mu+(1+\rho)\lambda W_{t-1}]$$

の一般解をもつ微分方程式である，したがって

$$\frac{dx}{dW_{t-1}}=C(1+\rho)\lambda$$

となる。さらに

$$\mu+\lambda W_t=\mu+\lambda W^{t-1*}+\lambda x(r-\rho)$$

$$=\frac{1}{1+\rho}(\mu+\lambda W^{t-1*})\frac{dW_t}{dW_{t-1}}$$

故に，(2—13) より

$$U'(W_t)=\frac{1}{1+\rho}\ \frac{U'(W^{\overset{*}{t-1}})}{U''(W_{t-1}{}^*)}\ U''(W_t)\frac{dW_t}{dW_{t-1}}$$

を得る，両辺に期待値をとると

$$E[U'(W_t)]=\frac{1}{1+\rho}\ \frac{U'(W_{t-1}{}^*)}{U''(W_{t-1}{}^*)}\ \frac{dE[U'(W_t)]}{dW_{t-1}}$$

となるが，これは

$$\frac{d}{dW_{t-1}}\ \log\ E[U'(W_t)]=\frac{d}{dW_{t-1}}\log\cdot E[U'(W_{\overset{*}{t-1}})]$$

と同値になる，よって

(2—9)　$$E[U'(W_t)]=\alpha U'(W_{\overset{*}{t-1}})$$

を得る (α は積分定数)。

必要条件の証明

条件；$E[U'(W_t)]=\alpha U'(W^{t-1*})$ は収益 r の各値に対して

(2—15)　$$U'(W_t)=h(r)U'(W_{\overset{*}{t-1}})$$

となるような因数 $h(r)$ が存在するときにのみ満足される。このとき，α は $E[h(r)]$ である，収益 r の各結果に対して，$U'(W_t)$ での値は，W_{t-1} に独立な因数だけ $U'(W_{\overset{*}{t-1}})$ に比例するのである，

いま，(2—15) を r に関して微分すると

(2—16)　$$xU''(W_t)=h'(r)U'(W_{\overset{*}{t-1}})$$

を得る。特定の値 $r=\rho$ に対しては

$$xU''(W^{\overset{*}{t-1}})=h'(r)U'(W^{\overset{*}{t-1}})$$

よって

(2—17)　$$x=h'(\rho)\frac{U'(W_{t-1}{}^*)}{U''(W_{t-1}{}^*)}$$

となる。(2—16) に代入すると

$$U''(W_t)=\frac{h'(r)}{h'(\rho)}\ U''(W_{t-1}{}^*)$$

となる，これに $(r-\rho)$ および $(r-\rho)^2$ を乗じ期待値をとると，それぞれ

$$E[U''(W_t)(r-\rho)]=k_1U''(W_{t-1}^*)$$

$$E[U''(W_t)(r-\rho)^2]=k_2U(W_{t-1}^*)$$

となる。ただし k_1 および k_2 は定数である。だが，これは $\frac{dx}{dW_{t-1}}$ が定数であること，すなわち x が W_{t-1} の線型関数であることを意味している，

よって，(2—17) より

$$-\frac{U'(W_t)}{U''(W_t)}=\mu+\lambda W_t$$

を得る。(証明了)

次に， Complete Myopia (2—10) が最適となる必要・十分条件は

$$-\frac{U'(W_t)}{U''(W_t)}=\lambda W_t \tag{2—18}$$

であることを証明しよう。すなわち，これは相対的危険回避が定数であることを意味する。まず十分条件は前と同様にして ($\mu=0$ とおく) 容易に証明される。

必要条件の証明

前の場合と同様にして，(2—10) は

$$x=h'(\rho)\frac{U'(W_{t-1}^*)}{U''(W_{t-1}^*)} \tag{2—19}$$

となる ((2—17) に対応)，そこで， $-\frac{U'(W_{t-1})}{U''(W^{t-1*})}$ が W_{t-1} の線形関数であることを証明する。これは

$$-\frac{U'(W_{t-1})}{U''(W_{t-1})}=\mu+\lambda W_{t-1} \tag{2—20}$$

のときにのみ成立する。だが，(2—14) より (2—20) ならば，x は $-\frac{U'(W_{t-1}^*)}{U''(W_{t-1}^*)}$ に比例することが示されている。これは，(2—10) が成立する条件は， $U'(W^{t-1*})$ と $U'(W_{t-1})$ が比例すること，すなわち

$$U'(W_{t-1}^*)=v(\rho)U'(W_{t-1})$$

であることを意味している。いま，W_{t-1} と ρ について微分すると，それぞれ

$$(1+\rho)U''(W_{t-1}{}^*)=v(\rho)U''(W_{t-1})$$

$$W_{t-1}U''(W_{t-1}{}^*)=v'(\rho)U'(W_{t-1})$$

となる。この両式より

$$\frac{U''(W_{t-1})W_{t-1}}{U'(W_{t-1})}=\frac{(1+\rho)v'(r)}{v(r)}$$

を得る。これは W_{t-1} および ρ における独立変数に対して成立しなければならないので，両辺は定数でなければならない，よって

$$-\frac{U'(W_{t-1})}{U''(W_{t-1})}=\lambda W_{t-1}$$

を得る。これで命題は証明された[2)]。

以上で明らかにしたことをまとめる。

「多期間の最適資産選択が，通常の1期間ごとの最適選択の連続に帰せしむる条件（Myopia 成立条件）は，効用関数が

$$-\frac{U''(W)}{U'(W)}=\mu+\lambda W$$

の性質をもつことである。これを Partial Myopia と Complete Myopia とに分けて証明した」[3)]

＜注＞

1）Myopia には，近視眼という意味がある。 また Hamada〔文献2〕 は，"Intertemporal Separation" と呼んでいる。

2）Mossin〔文献3〕 p 224～226. ここで取扱ったのは，最後期 t 期の効用関数と $t-1$ 期の効用関数の関係であったが，この関係は任意の連続的期においても成立する。いま Complete Myopia が成立するとき，任意の $t-j$ 期の導出効用関数は $t-j+1$ 期の関数と次のように

$$\phi_{t-j}(W_{t-j})\sim\phi_{t-j+1}(W_{t-j})$$

関係している。(～は同値関係)

$j=1$ のとき，

$$\phi_{t-1}(W_{t-1})\sim U(W_{t-1})$$

これから，一般に

$$\phi_{t-j}(W_{t-j})\sim U(W_{t-j})$$

を得るのである。

Partial Myopia の成立する場合も，同様に，任意の $t-j$ 期のとき

$$\phi_{t-j}(W_{t-j-1}) \sim \phi_{t-j+1}[(1+\rho_{t-j+1})W_{t-j-1}]$$

したがって

$$\phi_{t-j}(W_{t-j-1}) \sim U[\prod_{i=1}^{j}(1+\rho_{t-j+1})W_{t-j-1}]$$

となる。

3) Hamada〔文献2〕は，Mossin と同じ命題を提起している。そこで，これを紹介することにする。

いま，各期に n 個の投資資産があり，各期の決定変数はベクトル x_i とする。r_1，$r_2\cdots$ は各期の収益であり，結合分効関数を $F(r_1\cdots r_t)$ とする。

ここで2期のケースを考える。まず，初期富 W_o とおくと一期末の総富 W_1 は

$$W_1 = W_o + r_1^T x_1$$

第次期末では

$$W_2 = W_1 + r_1^T x_1 + r_2^T x_2$$

となる。ただし ^{T} は転置ベクトル，また期待値を次のように定める。

——$E_{12}[U] = \int U dF(r_1, r_2)$，$E_1[U] = \int U dF(r_1)$，$E^2\!/_1[U] = \int U dF(r_2/r_1)$

ここで，$F(r_1)$ は，r_1 の周辺確率分布，$F(r_2/r_1)$ は条件付確率分布とする。最適性の原理を考えて，最終期（第2期）から決定する。まず，次式

$$E^2\!/_1[U(W_1 + r_2^T x_2)]$$

を極大にする x_2 を求めると，それが，第2期最適ベクトル x_2 である。第1期は，最適値 x_2 を前提として，次式

$$E_{12}[U(W_o + r_1^T x_1 + r_2^T x_2)]$$

を極大にする x_1 を求めれば，それが第1期の最適ベクトル x_1 である。このような最適なポートフォリオを得る条件は

(1)* $E_{12}[U'(W_o + r_1^T x_1 + r_2^T h_2(x_1, r_1) r_1] - \lambda_1 l = 0$

で与えられる。ただし l は単位ベクトル。他方，一期間のみと考えて決定した最適ベクトル x_1 の成立条件は

(2)* $E_1[U'(W_o + r_1^T x_1) r_1] - \lambda l = 0$

で求められる。

ここで，彼は，多期間分析が通常の一期間分析の積み上げに帰する条件(Intertemporal Separation) は何かを考える。それは (1)* と (2)* とが同値になる条件を求めることである。そこで，彼は次の命題を証明した。

「t 期間の収益 $r_1\cdots r_t$ が，時間に関して独立に分布する，すなわち

$$F(r_1 \cdots\cdots r_t) = F^1(r_1) \cdots\cdots F^n(r_t)$$

の仮定の下で

(3)* { (i) 効用関数が富の2次式の場合
(ii) 絶対的回避が定数の場合
(iii) 相対的回避が定数の場合

この条件のどれか1つが成立するならばそのとき, Intertemporal Separation が成立する」。 Hamada の証明は, Mossin の証明に比べて
1) 各期の収益が独立でないとして定式化したこと。2) 多資産の場合を取り扱ったこと等で, より一般的な分析といえる。だが, 上の(3)*の条件は, Mossin では簡単な一つの式

$$-\frac{U'(W)}{U''(W)}=\mu+\lambda W$$

で統一的に表わされることが指摘される。

2—3 結　　語

最後に，本章で，Myopia の条件を検討したことの意味について考えてみよう。

まず，Myopia の成立する効用関数は，一般的な効用関数のなかの特殊なものに限られているという点で，上のテーマは，かなり限定的なものであるといえよう。だが，資産選択理論の動学化を試みた実際の研究においては[1]，これら特殊タイプの効用関数がしばしば用いられている。したがって，この特殊な効用関数の考察も無意味とはいえないであろう。また，1期間分析には，これまでに詳細かつ広範な分析が蓄積されていることを考えると，1期間モデルの動学化を試みる場合に，こうした特殊問題を検討することは，本格的な動学分析への重要な第1歩となりうるであろう。

<注>

1) 例えば, Freund. J, "The Introduction of Risk into a Programming Model," *Econometrica*, 1956. Farrar. E, *The Investment Decision Under Uncertainty*. 1962.

文　献

〔1〕K. Arrow, *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, 1971.

〔2〕K. Hamada, "A Multiperiod Portfolio Choice and the Existence of Money," 『季刊理論経済学』, 1969.

〔3〕J. Mossin, "Optimal Multiperiod Portfolio Policies," *Journal of Business*, 1968.

〔4〕S. Royama and K. Hamada, "Substitution and Complementarity in the Choice of Risky Assets," in *Risk Aversion and Portfolio Choice*, 1967. 「資産選択の一般理論」『国際管理と金融政策』1968.

〔5〕J. Tobin, "The Theory of Portfolio Selection" *The Theory of Interest Rates*, 1965.

〔6〕藤野正三郎『所得と物価の基礎理論』1972.