論証・証明と「知ること」について : アリストテレスの「論証知」とゲーデルの証明に即して

田畑, 博敏
九州大学文学部 : 助手 : 哲学

https://doi.org/10.15017/27559

出版情報：哲学論文集. 15, pp.109-113, 1979-09-20. 九州大学哲学会
バージョン：
権利関係：

発表要旨

論証・証明と「知ること」について

――アリストテレスの「論証知」とゲーデルの証明に即して――

田畑博敏

「知る」という人間の最も人間らしい営みは、常に自己超越的である。つまり、われわれが何事かを知っているとき、常に同時に、われわれはその「知っていること」をある意味で知っている。

この自己超越的な知の働きは、「汝自身を知れ」という箴言やいわゆる「知の知」の問題[1]として、古来よりすでに哲学の重要問題の一つとして登場してきている。しかし他方、われわれの知の働きは、「何かを知っている」という構造をとる。即ち、「知る」という働きは、知の対象を前提とし、それに関わり、そして知られた事柄が知識としてまとめられるという性格をも持っている。この、「知ること」の両方向の働き、――即ち自己超越性と対象連関という働きは、知識論的に、また言語の側面から、どのような形を持つものなのであろうか。――私は以下で、アリストテレスの「論証知」論の展開の中に、知の対象連関の働きの基本的視座を見定め、ゲーデルの不完全性定理とそれに関連する問題の中に、知の自己超越性の契機を見出すことによって、この問題に接近してみたい。

アリストテレスにとって、知の対象は、論証された知識という形態[2]のもとにまとめ上げられねばならなかった。知識とは、何故その事態が成立しているかという、その必然な事態成立の原因・根拠を、彼の論証の道具[3]である三段論法の中項として示したもの――即ちその論証全体そのものであった。彼は知識体系として、ある有機的連関をもった組織体を考えていた[4]。ある事柄の成立の保証は、その事柄を表わす命題がより基本的な真なる命題から論証されうるという、まさしくその論証可能性によって獲得さ

れるものと彼はみなしていた。彼は、原理（ἀρχαί）を詳しく分類し、論証体系という組織体内でのそれら原理の論理的役割を考察し、論証体系をある種の公理体系と考えていた。[5]

さて、さまざまな知識は、アリストテレスにおいては論証体系として体系化される。このとき、一つの論証体系は、一つの学の領域（ゲノス γένος）を前提とし、その領域に固有な言語を用い、固有な原理に基づいて、固有な問いが発せられ、その答えとしての固有な命題が論証される。[6] ここでわれわれは、知の対象連関の働きに、言語的側面から光をあてることができる。知がある一定の領域を対象として、いわばそこに没頭し、そこで語りうる言語でもって、そこに固有な問題のみに探究の鋒先を向けるということ[7]は、換言すれば、知識はある一定のレベルを持った言語、つまり知識の対象を叙述する言語を用いて自らを示せという、暗黙の要請が在るということであろう。このある種の知的禁欲の要請は[8]、確かに、内容空疎なおしゃべりの術[9]の防止には適しいであろう。――しかし、知の働きは、対象連関の働きにのみとどまる訳ではない。

例えば、われわれは知識の対象――数学における数、物理学における原子等――について、それらの間に普遍的に成立する法則を、真理として記述すると同時に、その記述そのものについての考察をも行う。つまり、知識体系内の個々の命題間の相互関係（例えば、ある命題が、他のいくつかの命題に対してそれらから論理的に導かれるという関係にあることなど）や、またある知識体系と別の知識体系との関連（例えばユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学との間の相互独立の関係など）が問題にされることがある。われわれは、これらの考察（超知識）を確かに持っている。そしてこの超知識は、内容空疎なおしゃべりなどではない。われわれの知の対象連関の働きの具象化が知識体系であるとすると、知識体系そのものの考察は、知の働きそのものの考察だと言える。すると、この超知識が、知の自己超越的な働きの具象化であることになろう。――

ともかく、われわれは、超知識を現に持っている。例えば、われわれは日常の言語活動の中で、あるいは科学上の人工言語使用の中で、ある種の推論や論理を用いるが、推論や論理そのものが考察されるとき、そこに論理の学（logic）が成立する。また、数の本性についてや数学の基礎についての考察がなされるとき、そこに数理哲学や数学基礎論といった超数学が成立する。クワインは、数学の基礎についての論争を、伝統的存在問題の明確化された現代版とみなしている[10]が、同時にまた、数理哲学は知の超越性の問題にも光を投げかけるものと思われる。現代のいわゆる三大数理哲学――論理主義、形式主義、直観主義の中で、とくに形式主義とその関連問題は、われわれの問題意識と重なる部分を多く持つ。

「論理学は数学の青年時代であり、数学は論理学の壮年時代で

ある」というラッセルのテーゼ(11)に代表される論理主義は、ある仕方で数学のプラトニズムを保存していた(e.g. Frege)。が、集合論の矛盾の発見以来、数学者はヒルベルトの形式主義(12)によって「数学の危機」を救おうとした。ヒルベルトの方法は、数学を公理体系化してその体系から一旦「意味」を追放し、数学の証明をあたかも無意味な図柄の変形操作とみなし、しかも有限的手段によってなされる操作のみ認め、このことによって矛盾の入りこむ余地をなくそうと努めるものであった(証明論)。彼の課題は、一口に言えば、数学の公理体系自体の無矛盾性を有限的な手段で確保することで、全数学を救うことであった。

とはいえ、一旦追放された「意味」が、体系の解釈(モデル)として回復されるとき、その意味(解釈)が豊かな内容をもつものでない限り、数学を危機から救うことにはならない。この体系の包括性の要求と、超数学による数学のチェック(証明の形式化と無矛盾性の確保)に於いて前提された、有限主義(確実さの要求=方法的禁欲の要求)とは、どう調和するのだろうか?——ここでゲーデルが登場する。包括的体系の代表たる、ホワイトヘッドとラッセルの『数学原理』はもとより、算術を展開しうるほど豊かな無矛盾な体系でさえあれば、いかなる体系にも、肯定も否定も証明できない決定不能命題が存在し、しかもその体系内でその体系自身の無矛盾性が証明できないことを、ゲーデルは示した。

ゲーデルは、いったい何を示したことになるのか?ゲーデルの定理の哲学的意義(13)は何か?——これを総括的に論ずることは、筆者には未だできないが、ひとまず、特にゲーデルの使った方法を考察することによって、いく分かでも考えてみたい。「式Aが体系Σで証明できない」という主張は、どのように確かめられ、またどう定式化されるのか?この主張は明らかに、算術体系外の言語(超算術言語)に属する。なぜなら、この主張は「aはbで割り切れる」などの算術内主張と異なり、「ある算術体系内言語(つまり式A)が他の算術体系内言語(式の列$A_1A_2\cdots A_n$)とある(非算術的)関係にある」ことを主張しているのであるから。そして このような考察は、体系自身を考察の対象として成立する。われわれは確かに、このような考察を行いうる(知の自己超越性)。しかしこのとき、この主張を表現する言語とその意味との関わりはどうあるのか?ゲーデルの写像の方法は、そのままでは未だ知の対象とはならない体系の超考察そのものを、もう一度もとの算術体系の中に写し出して、知の対象とする方法であった。体系のあらゆる言語表現が自然数の中へと一対一に写像されることにより、体系内の言語表現間の関係やそれに施される操作(これらの関係・操作を表現する言語はそのままでは超体系言語に属した)が、自然数の間の関係や自然数に対する関数として翻訳される。かくして、「式Aが、体系Σで証明できない」という主張は「数「A(式Aに付された自然数)が、いかなる数ともある算術的関係(「証明できない」という述語に対応する算術上の関係)にある」という

主張に翻訳される。ゲーデルは、このことを利用して「αは証明できない」ということを主張する式α —— 即ち自分自身は証明できないということを主張する式 —— を実際につくり、この式が決定不能命題となることを示した。この決定不能命題が真なることは直観的にわかる。（この命題の主張通り、この命題は体系が無矛盾ならば証明できないことが示されたから）。すると、真でありながら、体系内に定理として取り込めない知識が存在することになる。換言すれば、厳密な公理体系をつくることにより確実な知識を確保しようとする試みには本質的な欠陥がある。さらに、体系としての最小必要条件（体系の無矛盾性）も、これが体系内で証明できないことにより、われわれはこれを確かめることはできない。

ゲーデルの出したこの結果は、ヒルベルトのプログラムの破綻という数学基礎論上の事件以上の、知識論的意義を持つであろう。クレタ人の嘘つきのパラドックス以来、われわれは矛盾を避けてきた。ロゴスの中に矛盾が含まれていれば、われわれはいかなる確実な知識も持つことはできないし、そもそも有意味なことを語ることさえできない。しかし、無矛盾の要請は、ゲーデルによれば、それ自身強力ではあるが矛盾を含まないとはいえない手段の援用によって、実現されるにすぎない。

知の対象連関の働きは、知の確実な「対象」を構成しようとする働きであった。それに対し、知の自己超越の働きは、ある形（体系）に具象化された知の対象連関の働きを、外から改めて眺めるところに成立した。だが、体系の無矛盾性が常に体系外の手段の援用によってしか示せないということは、知の自己超越性は、「対象認識」という仕方では知りえないことを意味するのだろうか。だとすると、確実な知識を求めて行き着いた公理体系の構築が、その支えを不確実な手段に負うという意味で、知のある仕方での対象化は常に、対象化できない知の働きによって支えられていることになる。—— これは大いなるパラドックスなのであろうか。それとも、われわれの無知ゆえにのみ奇妙に見える当たり前の事柄なのか。今は、これ以上は語りえない。——

註

(1) Plato : *Carmides* 166 C ff. 169 B ff.

(2) Aristotle : *Analytica Posteriora*. 論証によらない知として、帰納（ἐπαγωγή）による直知（νοῦς）が考えられている。An. Po. B 19 参照。

(3) J. Barnes : *Aristotle's Posterior Analytics*. Clarendon-Oxford 1975 の序のⅡ pp. xiii–xvii 参照。

(4) 「分析論後書」A巻全体が、知識の体系化・組織化のプログラムである。中項の探究のプロセスはB巻で論ぜられるが、科学的発見の方法を与えている訳ではない。従って、伝統的アポリア —— つまりAn. Po. の方法と他の作品での探究方法の不一致の問題はポイントレスだというバーンズの論点は大筋において当っている。cf. J. Barnes : "*Aristotle's Theory of Demonstration*," Phronesis 14, 1969,

pp. 123−52.

(5) J. Barnes も、前掲書及び前掲論文においてこの見解をとる。加藤信朗氏は最近の論文〝『分析論後書』における「普遍（καθόλου）」の把握について〟において、「アリストテレスの論証論はもともと公理論的演繹体系を目ざすものでなかった」とされる（『ギリシア哲学の研究』有斐閣 1978. p. 52）。たしかに、Á. Szabó も言うように（『ギリシア数学の始原』中村・村田他訳、玉川大学、1978. p. 270 ff.）アリストテレスの公理論の用語と当時の数学者の語彙にはズレがあるが、アリストテレスが、その意図としては数学をモデルとした何らかの公理体系として（歴史上の数学体系と異なるにしろ）論証体系を考えていたことは、否定できないように思われる。

(6) 論証の三要素として、アリストテレスは学の領域と、公理と、領域に固有な性質・関係をあげている。

(7) 例えばアリストテレスは、An. Po. A 7、12章などで、幾何学者は幾何学的な問いをのみ問うべしと語っている。

(8) Wittgenstein : *Tractatus Logico−Philosophicus* の最後の言葉、「語りえないものについては沈黙しなければならない」が想起される。

(9) 例えば Plato : *Gorgias* には、説得によってすべてのことを説明し切る術が登場する。

(10) W. V. Quine : "*On what there is.*"『論理学的観点から』中山・持丸訳、岩波書店 p. 28 ff.

(11) Bertrand Russell :『数理哲学序説』岩波文庫 p. 254

(12) ヒルベルトが、「数学とは、意味のない記号の列である」という断言の信奉者とするのは、行き過ぎであろう。彼はただ、「数学は、あたかも意味のない記号列であるかの如くみなしうる」と考えただけであったろう。cf. G. Kreisel : "*Hilbert's Programme*" in P. Benacerrat & H. Putnam (ed) *Philosophy of Mathematics.* Basil Blackwell. 1964. pp. 157−180.

(13) cf. M. Dummett : "*The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*". Ratio V. 1963. pp. 140−155. この論文では主に、表現と意味という観点からゲーデルの定理の哲学的意義が考察されている。

(14) つまり、「$A=A_n$ かつ、各 A_i（$i=1, 2, \cdots n$）は公理または先行する $A_{k_1}\cdots A_{k_m}$（$k_1, \cdots k_m \wedge i$）から推論規則 $R_m(A_{k_1}, \cdots A_{k_m}, A_i)$ によって導出されたもの」という関係。

〈追記〉この小論は、発表原稿をもとに、十分言い尽くせなかったことを補うなどして新たに書き改めたものである。

（本学文学部助手・哲学）