

## 減弱データによるX線スペクトルの算出(その4)

小段, 謙一

<https://doi.org/10.15017/275>

---

出版情報 : 九州大学医療技術短期大学部紀要. 26, pp.79-83, 1999-03. Kyushu University School of Health Sciences Fukuoka, Japan

バージョン :

権利関係 :

# 減弱データによるX線スペクトルの算出 (その4)

小 段 謙 一

## Computer Analysis of X-ray Spectra Using Attenuation Measurements (IV)

Ken-ichi KODAN

### Abstract

X-ray spectrum is one of the most important characteristics in X-ray's permeability into materials.

The computer analysis of attenuation data is available method for determination of X-ray spectra.

A computer program was written by using the Gauss-Seidel method. And the program was able to give applicable spectral data.

In this paper, it is shown that the spreadsheet software carries out determination based on the data from attenuation measurements and it gives reasonable results.

### まえがき

X線診断やX線治療に用いられるX線のエネルギースペクトルは連続分布を有しており、この分布は電子の加速電圧すなわち管電圧によっても変化する。X線の最も重要な特性である物質透過性は、そのエネルギーにより決定されるため、ある管電圧におけるX線スペクトル測定が重要となる。

X線スペクトルの測定法としては、結晶法、シンチレーション法、半導体検出法などの直接法の他に、吸収板による減弱データを数学的に解析してスペクトルを算出する間接法がある。減弱データによる間接法は短時間照射の場合にも利用可能であり、直接法に比べてコスト的に有利であるが解析手法に問題があった。

川上らは先にHPA<sup>1)</sup>所載のデータから減弱データを計算し、これをもとに解析手法としてガウス・ザイデル法を適用し、大型計算機によりシミュレーションを行った。<sup>2)</sup> その結果、ガウス・ザイデル法を用いる減弱法がX線スペクトル算出に利用

可能である事が示された。又、そのためのいくつかの条件も示されている。

著者は同様の手法を用いて減弱データの実測値から、ミニコンやパソコンによりX線スペクトルの算出法を行ってきたが<sup>3)</sup>、本稿では表計算ソフトのワークシート上にデータや数式を展開してX線スペクトルの算出を行う事にした。現在表計算ソフトの普及度は高く、グラフ作成や行列計算がプログラミングや特定の言語の知識なく容易に行なえる上に改良や追加も容易であると考えたからである。

### 1. 計算の理論

#### 1.1 減弱データの数学的理論

厚さX(cm)の吸収板にE(keV)のエネルギーを持つ $\phi_0(\text{cm}^{-2})$ の光子が垂直に入射する時、吸収板を透過する光子フルエンスを $\phi(\text{cm}^{-2})$ と置くと $\phi$ は次式の様に表わせる。

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 \cdot \exp(-\mu X) \\ &= \phi_0 \cdot \exp\{-(\mu/\rho) \cdot \rho X\}\end{aligned}\quad (1)$$

但し、 $\mu/\rho$ はエネルギーEの光子に対する吸収

板(密度 $\rho$ (g/cm<sup>3</sup>))の質量減弱係数(cm<sup>2</sup>/g)である。

次に、吸収板透過後の照射線量 $I(R)$ はエネルギー $E$ の光子エネルギーフルエンスを $\psi_0$ (keV/cm<sup>2</sup>)、光子エネルギーフルエンスを照射線量に換算する係数を $a$ と置くと次式で与えられる。

$$I = a\psi_0 (\mu_{en}/\rho) \exp\{-(\mu/\rho) \cdot \rho X\} \\ = aE\phi_0 (\mu_{en}/\rho) \exp\{-(\mu/\rho) \cdot \rho X\} \quad (2)$$

ここで、 $\mu_{en}/\rho$ は空気の質量エネルギー吸収係数(cm<sup>2</sup>/g)である。

X線は単一エネルギーではなく、ある範囲の連続したエネルギーを有するが、実際には有限個( $m$ 個)の減弱データ( $X, I$ )から有限個( $n$ 個)の離散的エネルギー $E_i$ に対するスペクトルを求めるのであるから、吸収板の厚さ $X_j$ ( $j=1\sim m$ )に対する照射線量 $I_j$ は次の様に求められる。すなわち、 $I_j$ は微小なエネルギー幅( $\Delta E$ ) $_i$ を考え $E_i$ と $E_i+(\Delta E)_i$ の間の照射線量( $\Delta I$ ) $_i$ を $i$ について加え合わせたものになる。 $E_i$ のエネルギーに対する吸収板の質量減弱係数、空気の質量エネルギー吸収係数を夫々、 $(\mu/\rho)_i$ 、 $(\mu_{en}/\rho)_i$ 、光子フルエンスを $(\phi_0)_i$ と置くと吸収板の厚さ $X_j$ に対する照射線量 $I_j$ は次の様に表わせる。

$$I_j = a \sum_{i=1}^n (\Delta E)_i (\phi_0)_i (\mu_{en}/\rho)_i \\ \exp\{-(\mu/\rho)_i \cdot \rho X_j\} \quad (3)$$

従って、電離箱で計測される照射線量 $I_j$ は光子エネルギー $E_i$ に対する電離箱のレスポンス(感度係数)を $K_i$ とすると次式で与えられる。

$$I_j = a \sum_{i=1}^n K_i (\Delta E)_i (\phi_0)_i (\mu_{en}/\rho)_i \\ \exp\{-(\mu/\rho)_i \cdot \rho X_j\} \quad (4)$$

ここで、単位エネルギー当たりの光子フルエンスを $\phi_i$ (cm<sup>-2</sup> keV<sup>-1</sup>)と置くと、 $\phi_i = (\phi_0)_i / E_i$ より(4)式は次の様に書き換えられる。

$$I_j = a \sum_{i=1}^n K_i E_i \phi_i (\mu_{en}/\rho)_i \\ \exp\{-(\mu/\rho)_i \cdot \rho X_j\} \cdot (\Delta E)_i \\ = \sum_{i=1}^n b_{ij} \phi_i \quad (j=1\sim m) \quad (5)$$

$$b_{ij} = a K_i E_i (\mu_{en}/\rho)_i \\ \exp\{-(\mu/\rho)_i \cdot \rho X_j\} \cdot (\Delta E)_i \quad (6)$$

(5)式の $m$ 個の $n$ 元連立一次方程式を解けば、 $n$ 個の $E_i$ に対する $\phi_i$ すなわちX線フルエンススペクトル(以後、これをX線スペクトルという)が得られる事になる。但し、解を持つためには $m \geq n$ でな

ければならない。

### 1.2 ガウス・ザイデル法

$B = (b_{ij})_m^n$ 、 $\phi = (\phi_i)_n^1$ 、 $I = (I_j)_m^1$ の様に行列で表わすと、(5)式は次の様に書ける。

$$I = B\phi \quad (7)$$

この行列 $I, B$ を中心変換を行なった後、 $B$ を $n \times n$ 行列に、 $I$ を $n \times 1$ 行列に正方化する。この後、 $n \times n$ 行列の対角要素で正規化したものを $A = (a_{ij}) \dots a_{kk} = 1$ ( $k=1\sim n$ )、 $C = (C_j)_n^1$ と書くと次式が成り立つ。

$$C = A\phi \\ C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n a_{ij} \phi_i + \phi_j \quad (j=1\sim n) \quad (8)$$

これから $\phi_j$ が求められるが、これまでの表記と合わせるため $i$ と $j$ を入れ替えて次の様に表わす。

$$\phi_i = C_i - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n a_{ji} \phi_j \quad (i=1\sim n) \quad (9)$$

ガウス・ザイデル法などの反復計算法は $\phi_i$ ( $j \neq i$ )から $\phi_i$ を求める事を繰り返し反復させ $\phi_i$ の最大変化が或る収束判定値より小さくなるまで計算させるものである。

第 $k+1$ 番目の解を $\phi_i^{(k+1)}$ と書くと $\phi_i^{(k+1)}$ は次式の様に表示される。

$$\phi_i^{(k+1)} = C_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} \phi_j^{(k)} + \phi_i^{(k)} \quad (11)$$

ガウス・ザイデル法は収束を速めるため $\phi_i^{(k+1)}$ を計算する時は既に計算済みの $\phi_j^{(k+1)}$ ( $j=1\sim i-1$ )を用いる手法である。<sup>9)</sup>

### 1.3 計算のための内部データ

(6)式の $b_{ij}$ を算出するには、任意の光子エネルギー $E_i$ に対する吸収板の質量減弱係数 $(\mu/\rho)_i$ 及び空気の質量エネルギー吸収係数 $(\mu_{en}/\rho)_i$ の値が必要である。

川上らはRHH<sup>4)</sup>所載の係数を用い、エネルギー値及び各係数の対数を取り、6~10次の高次多項式で近似している。<sup>2)</sup> 本稿では、簡単化のためRHHデータの複数の光子エネルギー区間毎に三次のスプライン関数で近似した。この近似は上記の高次多項式近似と良く一致した。光子エネルギー150 keV迄の近似曲線を図1に示す。 $\mu/\rho$ はAlの場合を示した。

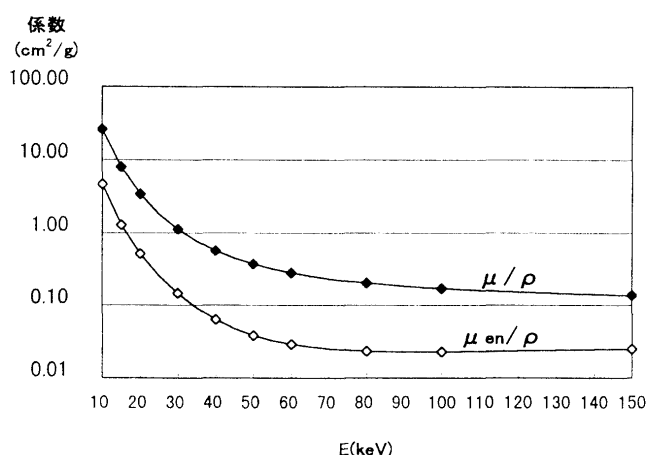


図1 Alの $\mu/\rho$ 及び空気の $\mu_{en}/\rho$   
(データ点はRHH所載の値、曲線はスプライン関数近似)

#### 1.4 減弱データの測定法

吸収板透過後の線量を電離箱で測定し、同時に入射線量を透過型電離箱で測定する。測定の変動の影響を避けるため、両者の比(0~1)を取り、減弱曲線を描き入力データとする。

この様に比を用いる時は $\phi_i$ の代わりに $\phi_i/I_0$ を用いる必要がある。 $I_0$ は入射線量で(5)式で $X_j=0$ とした値である。得られた $\phi_i$ は実際には $\phi_i/I_0$ なので $I_0$ 倍しておく必要がある。但し、 $\phi_i$ を相対値として求める時はそのままが良い。

### 2. スペクトルの算出の準備

#### 2.1 減弱データ

X線管電圧 95kV撮影の条件で照射し、吸収板は 2mm Al…密度 2.69 (g/cm<sup>3</sup>)を用い厚さ 0~1.5cm迄測定した 133個のデータを用いる。吸収板の最大厚さ 1.5cm に対応する最小減弱百分率は 5.45%で

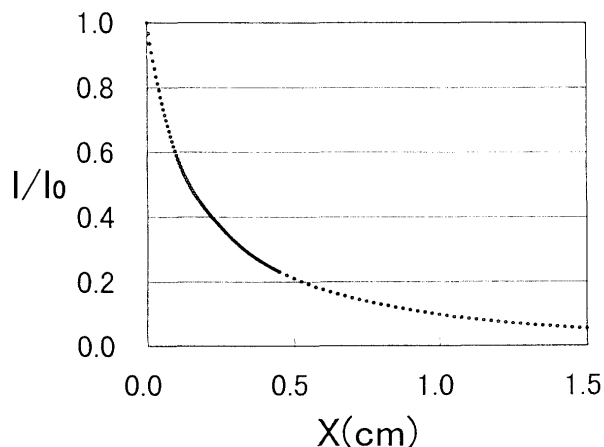


図2 減弱データ

あり、スペクトル算出に要求される値(6%程度以下)<sup>2)</sup>を満足している。

図2に減弱データを示した。

#### 2.2 スペクトル算出のための諸数値の決定

先ず、ここでは特性X線を持たないX線スペクトルの算出に限定した。スペクトルの形状変化を明確にするためである。

求める光子エネルギーの範囲はエネルギー分布の最小値、最大値を含むようにした。(最大値は管電圧の値から求められる。)ここでは、 $(\Delta E)_i=1$  (keV)とし 10keVから 100keVまで 91個の $\phi_i$ を計算させた。

減弱データの測定には Free-air chamberを用いているので感度係数 $K_i=1$ である。

又、スペクトルは相対値で求めるので(6)式の $a$ は任意の値で良く、ここでは $a=1$ としておく。

以上をまとめて次に示しておく。

$$\left. \begin{aligned} m &= 133, n = 91 \\ a &= 1 \\ K_i &= 1 \\ (\Delta E)_i &= 1(\text{keV}) \\ \rho &= 2.69(\text{g/cm}^3) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ガウス・ザイデル法に必要な $\phi_i$ の初期値は川上らの定めた値<sup>3)</sup>を用い、表計算ソフトのグラフの多項式近似を利用し、95keV以上でゼロになる様に修正した。これを図3に示した。

#### 3. スペクトルの算出結果とその評価

前章迄の数式や数値を表計算ソフトのワークシート上に展開し反復計算させた結果、図4の様

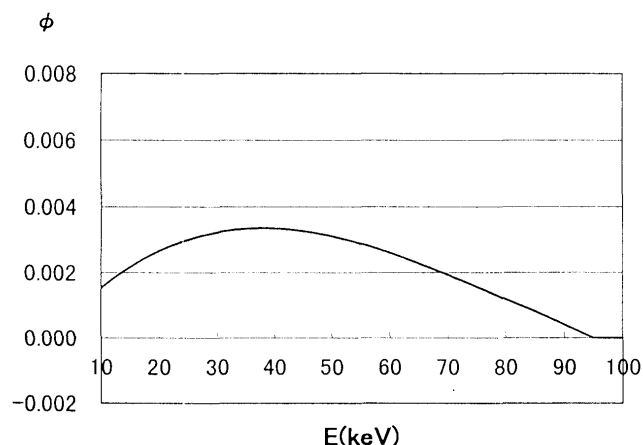


図3 X線フルエンススペクトルの初期値

なスペクトルが得られた。収束判定値は  $2 \times 10^{-4}$  である。

この結果が妥当なものであるかどうかを考えるため、得られた  $\phi_i$  から(5)式を用いて  $I_j$  を逆算してみる。この値を  $I_j^*$  とすると、 $I_j^*$  は図2とほとんど重なり差は明確ではない。そこで、 $I_j^*$  の百分率誤差  $\xi_j$  を求め  $X_j$  との関係を図5に示した。 $\xi_j$  は次式で与えられる。

$$\xi_j(\%) = (I_j^* - I_j) I_j \times 100 \quad (13)$$

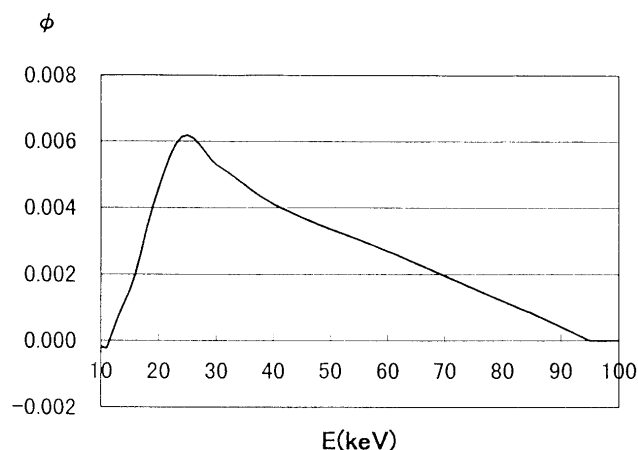


図4 X線フルエンススペクトル(結果)

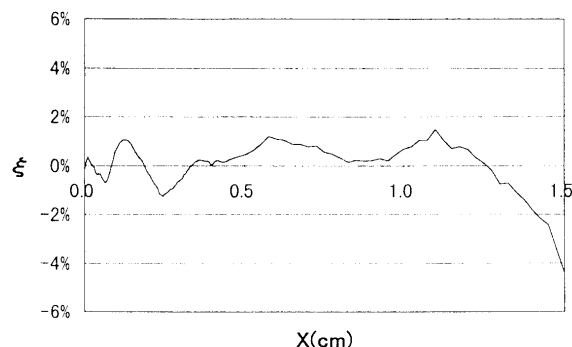


図5 結果から逆算した照射線量の実測値に対する誤差率

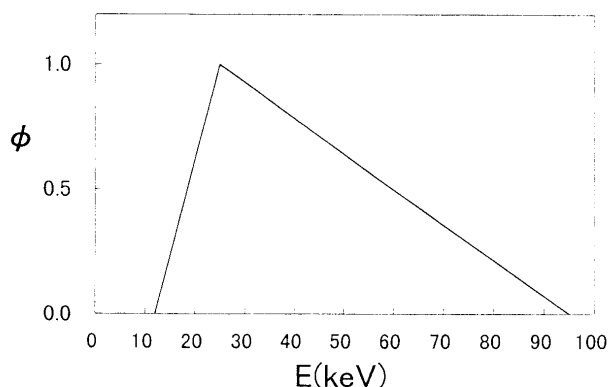


図7 簡単化した X線フルエンススペクトル

$|\xi_j|$  の最大値は吸収板の厚さが大のところでは数%にも及んでいるが、この場合は元々減弱データの値そのものが小さいので考えに入れない。

又、スペクトル個数が有限個である事に起因する誤差は  $(\Delta E)_i = 1(\text{keV})$  とした場合、ほとんど無視できる。

ここで問題になるのは図5の吸収板の厚さ 0.375 cm~1.250cm の範囲で  $\xi_j$  が正の値に偏っている事である。(最大で +1.31%) これを検討するため、以下の様な考察を行なう。

(5)式からわかる様に  $\phi_i$  の誤差は  $b_{ij}$  の重みを持って  $I_j$  に影響を与える。そこで、光子エネルギー  $E_i$  に対する  $b_{ij}$  の変化の様子を図6に示す。ここでは吸収板の厚さ5種類についての  $b_{ij}$  を示している。

次に、図4から X線スペクトルの形状を図7の様に簡単化して考えた。(最小光子エネルギー 12 keV,  $\phi$  の最大を与える光子エネルギー 25keV, 最大光子エネルギー 95keV)

これらから  $b_{ij}$  と  $\phi_i$  の積を計算し図8に示した。

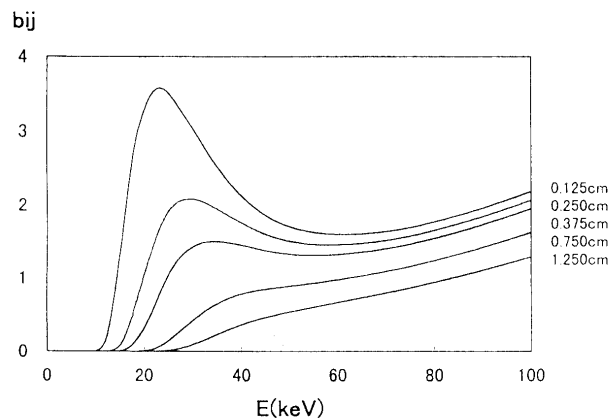


図6 E-b<sub>ij</sub>特性

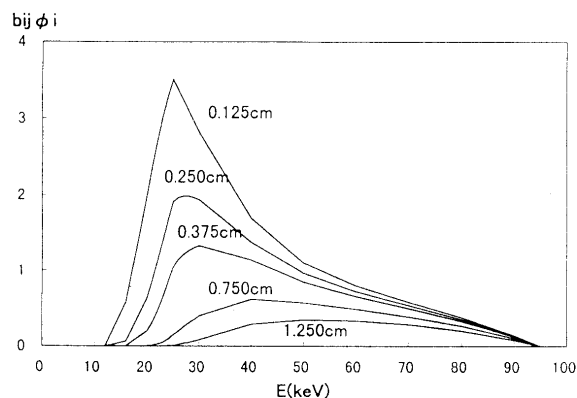


図8 E-b<sub>ij</sub>  $\phi_i$ 特性

(5)式より吸収線量 $I_i$ は図8の曲線と $E$ 軸に挟まれた部分の面積に相当する。これにより光子エネルギーのどの部分の誤差が照射線量により大きい影響を与えるかを考えることができる。

上記の吸収板の厚さ $0.375\text{cm}\sim 1.250\text{cm}$ の部分に注目すると、光子エネルギー $25\text{keV}$ 以下のエネルギーは照射線量に影響を与えない事がわかる。このことは逆に、低エネルギー部分に誤差が有るかどうかは照射線量の誤差からは不明であるが、 $25\text{keV}$ 以上のエネルギー部分に誤差があるかは判明するという事を意味している。従ってスペクトルの $25\text{keV}$ 以上の部分には図4より凹凸が認められない事から、正の誤差が生じていることがわかる。但し、1個のスペクトルについて考えると最大でも $1.31\% / (95 - 25 + 1) \approx 0.02\%$ の誤差にしかならず、光子エネルギー $25\text{keV}$ 以上に対するスペクトル値は妥当であると考えて良い。低エネルギー部分の誤差については負の値が生じている事も含めて今後の課題とする。

#### あとがき

減弱データの実測値をもとにガウス・ザイデル法を適用し表計算ソフトによりX線スペクトルを求めた結果、ほぼ良好な結果が得られた。又、そ

の評価法についても不十分ながら考察できた。なお、本結果を直接法によるスペクトルと比較すべきであるが時間の関係でできなかった。今後検討する予定である。又、収束判定値についてはスペクトルの形状を見て決定したが、この値の厳密な決定法についても合わせて今後の課題とする。

用いた表計算ソフトは‘Excel95’、計算機のCPUはpentium 200MHz、メモリは160Mバイトである。上記の計算回数は83回所要時間は12秒であった。

#### 参考文献

- (1) Birch, Marshall: Catalogue of Spectral data for Diagnostic X-rays. The Hospital Physicists' Association, 1979
- (2) 川上弘泰, 竹井力: 減弱データによるX線スペクトルの算出, 日本医学放射線学会物理部会誌第5巻第2号: 71-82, 1985
- (3) 小段謙一, 竹井力, 川上弘泰: 減弱データによるX線スペクトルの算出(その3)。日本医学放射線学会第56回物理部会大会, 1988
- (4) Radiological Health Handbook. 137-140, 1970
- (5) 南茂夫編: 科学計測のための波形データ処理, CQ出版社, 1986