混合分布およびGAを用いるオプションの価格付け

儲, 梅芬
九州大学大学院経済学研究院 : 講師

https://doi.org/10.15017/27433

出版情報：經濟學研究. 80 (2/3), pp.69-83, 2013-09-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

混合分布およびGAを用いるオプションの価格付け

儲　　梅　芬

1　はじめに

現代金融市場においては、数多くの金融商品が開発されており、いままで、さまざまな高度な金融商品が登場してきた。特に派生証券マーケットは急速に成長し、オプションや先物などの取引は投資者に極めて重視されている。その中、妥当なオプション価格をどうやって決めるのかが一つの重要な問題になっている。ブラック・ショールズ(BS)モデルは今までオプション価格付け理論において最も応用されていたが、BSモデルは分布の平均と分散が一定であるとの仮定が設定されているので、実際金融データに応用しにくいことが多くの研究者によって観察されている。本論文はBSモデルの弱点を補うため、ガオス混合分布を導入し、より現実に近いモデルを構築することを課題とする。まず、オプションの価格付け理論に焦点を当てて、2項モデルおよび近似手法により、オプションの価格式を導く。次に、ガオス混合分布を用いてオプション価格式を定式化し、理論的に考察する。さらに、この2種のオプション価格付け理論モデルの比較分析を行い、ガオス混合分布に基づく理論モデルの合理性を検証する。

BSモデルは μ と σ^2 は一定であるという現実的ではない前提条件をとっているが、混合分布を利用することによって、この前提条件を外すことができる。しかし、混合モデルには、多くのパラメータが含まれている。パラメータの推定は非常に複雑であるため、本論文はＧＡを用いてパラメータの推定を提案する。また、全期間を n 期間に分割し、各期間終了時点でのオプション価格を計算し、動的なオプション価格の導出を提案する。

本論文の構成は、第2節において、2項モデルの仮定の下で、コール・オプションの価格式を導く。第3節においては、コール・オプションの近似的な価格式を導く。その上、近似モデルとブラック・ショールズ（BS）モデルの一致性を確認する。さらに、BSモデルの弱点を述べる。第4節においては、ガオス混合分布を用いて、コール・オプションの価格式を導く。第5節においては、第4節で導いたモデルと第3節で導いたモデルを考察し、2種のオプション価格式の比較分析を行い、ガオス混合分布に基づいたモデルの適合性について論ず。第6節においては、ＧＡを用いて混合モデルのパラメータの推定を検討する。第7節は、結論である。

2　２項モデルによるコール・オプション価格付け

2.1　オプションとは

オプションとは、将来の時刻Ｔにおいて現在の時刻で決まった価格Ｋで１株を買う（売る）権利を有する契約である。買い手（売り手）は時刻ＴにＫで株を買う（売る）権利はあるが、必ず行使する義務はない。時刻Ｔにおいて、市場株価はＫより安（高）ければ、買い手（売り手）は買う（売る）権利を放棄することが出来る。

オプションはコール・オプション（買い手の立場）とプット・オプション (売り手の立場）の２種類がある。本論文はコール・オプションを取り扱う。

2.2　２項モデルによるオプションの価格付け

定義 2.1. δt：時間間隔とする。株価が図１のように、δt 経過したとき、上昇するか下落するかの二つの状態のいずれかをとるモデルを２項モデルという。

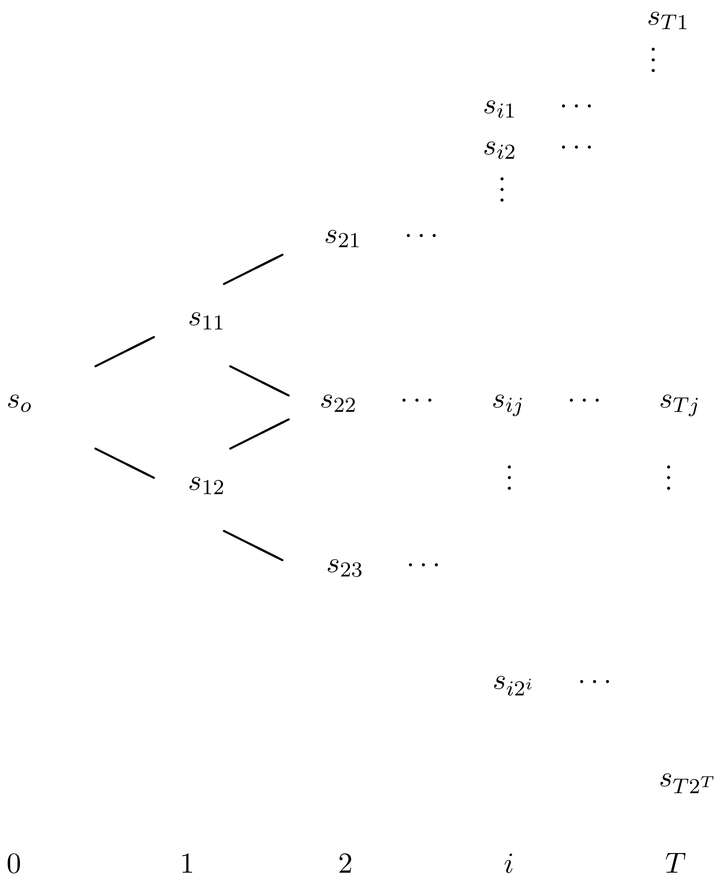

図１　２項モデル

ここでは、記号 $s_{ij}(i = 0, ..., T, j = 1, ..., , 2^i)$ をノードに割り付けられた実数値とする。次に、2項モデルによるオプションの価格付けの定式化を行う。

定理 2.1. r を時刻 *0* から時刻 h の間の利率とする。時刻 *0* の *1* 円は時刻 h の $exp(rh)$ と表される。

(証明略).

定義 2.2. 時刻 *0* のときの *1* 円は時刻 h のときの $\exp{(rh)}$ に収束するとき、r はこの期間の連続複利と定義する。ただし、$r > 0$、定数とする。

定理 2.2. δt：時刻 i から時刻 $i+1$ の時間間隔とする。R_i：時刻 i から時刻 $i+1$ の連続複利とする。B_i：時刻 i のときの債券価格 $(i = 0, ..., T)$。このとき、$B_0 = 1$ とすれば、$i \geq 1$ のとき、B_i は次の式で表される。

$$B_i = \exp{(\sum_{j=0}^{i-1} R_j \delta t)} \qquad (i = 1, .., T) \tag{1}$$

(証明略).

定義 2.3. $portfolio(\phi_{ij}, \psi_{ij})$：時刻 i における ϕ_{ij} 株と ψ_{ij} 債券の組み合わせ。

定義 2.4. s_{ij} : ノードに割りつけられた実数値 $(i = 0, ..., T, j = 1, ..., 2^i)$
S_{ij} : s_{ij} をとる確率変数 $(i = 0, ..., T, j = 1, ..., 2^i)$
x_{Tj}: 時刻 T のときノードに割りつけられた実数値 $(j = 1, ..., 2^i)$
x_{ij} : x_{Tj} をとれるように、時刻 i のとき $portfolio(\phi_{ij}, \psi_{ij})$ の価格 $(i = 0, ..., T, j = 1, ..., 2^i)$
X : 時刻 T のとき x_{ij} をとる確率変数。

ここでは、X の時刻 0 のときの妥当な価格はいかに決まるかという問題が考えられる。以下では2項モデルを用いて、$portfolio(\phi_{ij}, \psi_{ij})$ を組むことによって、オプションの妥当な価格を導く。

定理 2.3. 時刻 $T-1$ のとき、ノードごとに $portfolio(\phi_{ij}, \psi_{ij})(j = 1, ..., 2^{T-1})$ を組むことによって、

$$x_{(T-1)j} = \exp{((-R_{T-1}\delta t)(q_{(T-1)} x_{T(2j-1)} + (q_{(T-1)j}) x_{T(2j)}))} \tag{2}$$

が得られる。ただし、

$$q_{(T-1)j} = \frac{s_{(T-1)j}\exp\left(-R_{T-1}\delta t\right) - s_{T(2j)}}{s_{T(2j-1)} - s_{T(2j)}} \tag{3}$$

とする。

(証明).

$portfolio(\phi_{(T-1)j}, \psi_{(T-1)j})$ の時刻 T のときの価格は $\phi_{(T-1)j}s_{(T-1)j} + \psi_{(T-1)j}B_{(T-1)}$ である。$portfolio(\phi_{(T-1)j}, \psi_{(T-1)j})$ の時刻 T-1 のときの価格は２つ可能性があり、上昇する場合、$\phi_{(T-1)j}s_{T(2j-1)} + \psi_{(T-1)j}B_{(T-1)}\exp(R_{(T-1)}\delta t)$ になる。下落する場合、$\phi_{(T-1)j}s_{T(2j)} + \psi_{(T-1)j}B_{(T-1)}\exp(R_{(T-1)}\delta t)$ になる。

定義 2.4 より、

$$\begin{aligned} \phi_{(T-1)j}s_{T(2j-1)} + \psi_{(T-1)j}B_{(T-1)}\exp(R_{(T-1)}\delta t) &= x_{T(2j-1)} \quad (4) \\ \phi_{(T-1)j}s_{T(2j)} + \psi_{(T-1)j}B_{(T-1)}\exp(R_{(T-1)}\delta t) &= x_{T(2j)} \quad (5) \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\phi_{(T-1)j} = \frac{x_{T(2j-1)} - x_{T(2j)}}{s_{T(2j-1)} - s_{T(2j)}} \tag{6}$$

$$\psi_{(T-1)j} = B_{T-1}^{-1}\exp(-R_{T-1}\delta t)[x_{T(2j-1)} - s_{T(2j-1)}\frac{x_{T(2j-1)} - x_{T(2j)}}{s_{T(2j-1)} - s_{T(2j)}}] \tag{7}$$

よって、定理 2.3 が成立する。

定理 2.4. 時刻 i のとき、ノードごとに $portfolio(\phi_{ij}, \psi_{ij})(j = 1, ..., 2^{T-1})$ を組むことによって、

$$x_{ij} = \exp\left(-R_i\delta t\right)(q_{(T-1)}x_{T(2j-1)} + q_{(T-1)j}x_{T(2j)}) \tag{8}$$

が得られる。ただし、

$$q_{ij} = \frac{s_{ij}\exp\left(-R_{T-1}\delta t\right) - s_{T(2j)}}{s_{T(2j-1)} - s_{T(2j)}} \tag{9}$$

とする。

(証明).　　定義 2.4 より、

$$\begin{aligned} \phi_{ij}s_{(i+1)(2j-1)} + \psi_{ij}B_i\exp(R_i\delta t) &= x_{(i+1)(2j-1)} \quad (10) \\ \phi_{ij}s_{(i+1)(2j-1)} + \psi_{ij}B_i\exp(R_i\delta t) &= x_{(i+1)(2j)} \quad (11) \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\phi_{ij} = \frac{x_{(i+1)(2j-1)} - x_{(i+1)(2j)}}{s_{(i+1)(2j-1)} - s_{(i+1)(2j)}} \tag{12}$$

$$\psi_{ij} = B_i^{-1}\exp(-R_i\delta t)[x_{(i*1)(2j-1)} - s_{(i+1)(2j-1)}\frac{x_{(i+1)(2j-1)} - x_{(i+1)(2j)}}{s_{(i+1)(2j-1)} - s_{(i+1)(2j)}}] \tag{13}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \phi_{ij}s_{ij} + \psi_{ij}B_i \\ &= \exp(-R_i\delta t)(q_{ij}x_{(i+1)(2j-1)} + (1-q_{ij})x_{(i+1)(2j)}) \end{aligned} \tag{14}$$

が得られる。ただし、

$$q_{ij} = \frac{s_{ij}\exp(-R_i\delta t) - s_{T(i+1)(2j)}}{s_{(i+1)(2j-1)} - s_{(i+1)(2j)}} \tag{15}$$

とする。

定理 2.5. $0 < q_{ij} < 1$ を仮定すると、時刻 *0* のときの資産 X の妥当な価格は、$x_{01} = E_Q(B_T^{-1}X)$ である。

(証明).
x_{11} と x_{12} を上の式に代入すると、

$$\begin{aligned} x_{01} &= \exp(-R_o\delta t)[q_{01}\exp(-R_1\delta t)(q_{11}x_{21} + (1-q_{11})x_{22}) \\ &\quad +(1-q_{01})\exp(-R_1\delta t)(q_{12}x_{23} + (1-q_{12})x_{24})] \\ &= \exp(-\sum_{i=0}^{T-1} R_i\delta t)(q_{01}q_{11}x_{21} + q_{01}(1-q_{(11)})x_{22} \\ &\quad +(1-q_{01})q_{12}x_{23} + (1-q_{01})(1-q_{12})x_{24}) \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる。また、$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ 代入し、繰り返すと、

$$\begin{aligned} x_{01} &= \exp(-\sum_{i=0}^{T-1} R_i\delta t)(q_{01}q_{11}q_{21}...q_{(T-1)1}x_{T1} + q_{01}q_{11}q_{21}...(1-q_{(T-1)1})x_{T2} \\ &\quad + ... + (1-q_{01})(1-q_{12})(1-q_{24})...(1-q_{(T-1)2^{T-1}})x_{T2^T}) \end{aligned} \tag{17}$$

が成り立つ。よって、$0 < q_{ij} < 1$ を仮定すると、

$$x_{01} = E_Q(B_T^{-1}X) \tag{18}$$

が得られる。また、x_{01}は x_{Tj} をとれるように、時刻 0 のとき $portfolio(\phi_{01}, \psi_{01})$ の価格である。よって、コール・オプションは時刻 0 において、妥当な価格は $x_{01} = E_Q(B_T^{-1}X)$ である。

3　近似式によるコール・オプション価格の導出

上述したモデルよるコール・オプションの価格式には、計算が煩わしすぎるため、以下では、価格の近似計算式を導く。
いま、$R_i = r$ とする。

定義 3.1. .
$R_i = r$ と仮定する。
$S_i : R$ 上の値をとる確率変数（$i = 0, \delta t, ..., n\delta t$）
$n\delta t = T$ とおく。A_T:時刻 *0* から時刻 T までの n 回ジャンプの中アップジャンプの回数。

命題 3.1. .
$s_i = \begin{cases} s_{i-1}\exp(\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}), & \frac{1}{2}\text{で} \\ s_{i-1}\exp(\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}), & \frac{1}{2}\text{で} \end{cases}$ と仮定する。$\log\frac{s_i}{s_{i-1}} = \mu_i$、$\xi_i = \begin{cases} +1, & ,\frac{1}{2}\text{で} \\ -1, & ,\frac{1}{2}\text{で} \end{cases}$ とおくと、

$u_i = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\xi_i$　が得られる。

(証明). 仮定から、

$$\log s_i = \begin{cases} \log s_{i-1}+(\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}) \\ \log s_{i-1}+(\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}) \end{cases} \tag{19}$$
$$\log s_i - \log s_{i-1} = \begin{cases} \mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t} \\ \mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t} \end{cases} \tag{20}$$
$$\log\frac{s_i}{s_{i-1}} = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\xi_i \tag{21}$$

が得られる。よって、$u_i = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\xi_i$ が得られる。

命題 3.2. $E[u_i] = \mu\delta t, V[u_i] = \sigma^2\delta t$ が成り立つ。

(証明).

$$E[u_i] = E[\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\xi_i] \tag{22}$$
$$= \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} \tag{23}$$
$$V[u_i] = V[\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\xi_i] \tag{24}$$
$$= \sigma^2\delta t V[\xi_i] \tag{25}$$
$$= \sigma^2 \tag{26}$$

命題 3.3. $S_T = s_0\exp\left(\mu T + \sigma\sqrt{T}\frac{2A_T-n}{\sqrt{n}}\right)$ が成り立つ。

(証明).

$$
\begin{aligned}
S_T &= s_0(\exp(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}))^{A_T}(\exp(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}))^{n-A_T} && (27)\\
&= s_0\exp(\mu A_T\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}A_T)\exp((n-A_T)(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})) && (28)\\
&= s_0\exp(\mu T + \sigma\sqrt{t}\frac{2A_T - n}{\sqrt{n}}) && (29)
\end{aligned}
$$

命題 3.4. q_{ij}は$Taylar$ 展開を用いれば、近似的に$\frac{1}{2}[1-\frac{(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-r)}{\sigma}\sqrt{\sigma t}]$ と表される。

(証明).

$$
\begin{aligned}
q &= q_{ij} && (30)\\
&= \frac{s_{ij}\exp(r\delta t) - s_{ij}\exp(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})}{s_{ij}\exp(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}) - s_{ij}\exp(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})} && (31)\\
&= \frac{\exp((r-\mu)\delta t) - \exp(-\sigma\sqrt{\delta t})}{\exp(\sigma\sqrt{\delta t}) - \exp(-\sigma\sqrt{\delta t})} && (32)\\
&\approx \frac{[1+(r-\mu)\delta t + \frac{(r-\mu)^2\delta t^2}{2}] - [1-\sigma\sqrt{\delta t} + \frac{\sigma^2\delta t}{2}]}{[1+\sigma\sqrt{\delta t} + \frac{\sigma^2\delta t}{2}] - [1-\sigma\sqrt{\delta t} + \frac{\sigma^2\delta t}{2}]} && (33)\\
&\approx \frac{1}{2}[1-\frac{(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-r)}{\sigma}\sqrt{\delta t}] && (34)\\
& && (35)
\end{aligned}
$$

よって、命題3.4が成立する。

命題 3.5. S_T は$n\to\infty$のとき、近似的$s_0\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z)$ と表される。

(証明).
$q=\frac{1}{2}[1-\frac{(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-r)}{\sigma}\sqrt{\sigma t}]$ とおく。$A_T\sim B(n,q)$ に従うので、中心極限定理より、

$$
Z = \frac{2Y - n(1-\frac{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}})}{\sqrt{n(1-\frac{(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-r)^2}{\sigma^2}\frac{T}{n})}} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad (36)
$$

が成り立つ。いま、$Z \sim N(0,1)$ とする。

$$\begin{aligned} S_T &= s_0 \exp\Big(\mu T + \sigma\sqrt{T}\frac{2A_T - n}{\sqrt{n}}\Big) && (37) \\ &= s_0 \exp\Big(\mu T + \sigma\sqrt{T}(\frac{2A_T - n}{\sqrt{n}} + \frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\sqrt{T} - \frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\sqrt{T})\Big) && (38) \\ &= s_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z\sqrt{1 - \frac{(\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r)^2}{\sigma^2}\frac{T}{n}}\Big) && (39) \\ &\approx s_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z) && (40) \end{aligned}$$

命題 3.6. $S_T = s_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z)$ と仮定すると、$\sum_{i=1}^{T} u_i$ は正規分布に従う。

(証明). 仮定より、

$$\begin{aligned} \log S_T &= \log s_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z && (41) \\ \log S_T - \log s_0 &= (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z && (42) \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\log S_T - \log s_0 \sim N\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\Big) \quad (43)$$

が得られる。したがって、$\sum_{i=1}^{T} u_i$ は正規分布に従う。

命題 3.7. $\mu_g = \log s_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma_g = \sigma\sqrt{T}, \log S_T \sim N\Big(\mu_g, \sigma_g^2\Big)$ としすると、$x_{01} = B_T^{-1} \exp(\frac{\sigma_g^2}{2} + \mu_g)\Phi(-\frac{\log K - \mu_g - \sigma_g^2}{\sigma_g}) - B_T^{-1}K\phi(-\frac{\log K - \mu_g}{\sigma_g})$

(証明).
K:行使価格とする。上の命題により、

$$\log S_T \sim N\Big(\mu_g, \sigma_g^2\Big) \quad (44)$$

が成り立つ。よって、S_T の分布関数は次のように得られる。

$$\begin{aligned} P[S_T \le v] &= P[\log S_T \le \log v] && (45) \\ &= \int_{-\infty}^{\log v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2}} \exp\Big[-\frac{(s - \mu_g)^2}{2\sigma_g^2}\Big] ds && (46) \end{aligned}$$

よって、S_T の確率分布関数を $f(v)$ とすると、次を得られる。
また、オプションの定義により、

$$X = (S_T - K)^+ \tag{47}$$

である。ただし、

$$(S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases} \tag{48}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} x_{01} &= E_Q[B_T^{-1} X] && (49) \\ &= E_Q[B_T^{-1}(S_T - k)^+] && (50) \\ &\approx B_T^{-1} \int_k^\infty (v-k) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2 T}} \exp\Big[-\frac{(\log v - \mu_g)^2}{2\sigma_g^2 T}\Big] \frac{1}{v} dv && (51) \end{aligned}$$

が得られる。
$\frac{\log v - \mu_g}{\sigma_g} = y$ とすると、次の式を得られる。

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{\sigma_g} \frac{1}{v} dv && (52) \\ dv &= \sigma_g v dy && (53) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} x_{01} &= s_0 \int_{\frac{\log k - \mu_g}{\sigma_g}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(y - \sigma_g \sqrt{T})^2}{2}\Big) dy - B_T^{-1} K \\ &\quad \int_{\frac{\log k - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{T}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy && (54) \end{aligned}$$

になる。$y - \sigma_g = w$ とすると、

$$\begin{aligned} x_{01} &= B_T^{-1} \exp(\frac{\sigma_g^2}{2} + \mu_g) \int_{\frac{\log k - \mu_g}{\sigma_g} - \sigma_g}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{2}) dw \\ &\quad - B_T^{-1} K \int_{\frac{\log k - \mu_g)}{\sigma_g \sqrt{T}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \\ &= B_T^{-1} \exp(\frac{\sigma_g^2}{2} + \mu_g) \Phi\Big(\frac{-\log K + \mu_g + \sigma_g^2}{\sigma_g}\Big) - B_T^{-1} K \Phi\Big(\frac{-\log K + \mu_g}{\sigma_g}\Big) && (55) \end{aligned}$$

が得られる。
$\mu_g = \log s_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T$ によって、

$$x_{01} = s_0 \Phi\Big(\frac{-\log\frac{s_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) - B_T^{-1} K \Phi\Big(\frac{-\log\frac{s_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) \qquad (56)$$

上の式はBS式である。

この結果を導くために、平均 μ_g と分散 σ_g は一定という前提条件とした。実際の金融市場は、日々著しく変化しているので、株価の平均と分散は一定という仮定条件は現実ではない。この前提条件を緩めるため、次章では株価が混合分布に従うと仮定し、コール・オプションの価格付けの導出を行う。

4　ガオス混合分布を用いたコール・オプションの価格付け

定義 4.1. *(ガオス混合分布)*
$f_j(y)$ はガオス密度関数、$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$ 仮定すると、$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(y)$ はガオス混合分布という。

命題 4.1. $f_j(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j}} \exp - \frac{(y-\mu_j)^2}{{\sigma_j}^2}$ と仮定、$y \sim f(y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(y)$、$B_T^{-1} = 1$ とすると、ガオス混合分布に従う y のオプション価格 $x_{01}(y)$ は次の式であらわされる。

$$x_{01}(y) = \sum_{j=1}^{m} [\alpha_j \exp(\frac{{\sigma_j}^2}{2} + \mu_j)\Phi(u_j) - \alpha_j K \Phi(v_j)]$$

ただし、$u_j = \frac{-\log K + \mu_j + {\sigma_j}^2}{\sigma_j}$、$v_j = \frac{-\log K + \mu_j}{\sigma_j}$

(証明).

オプション価格の定義により、

$$x_{01}(y) = B_T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \max(Y - k, 0) f(y) dy \qquad (57)$$

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j(y)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x_{01}(y) &= B_T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \max(Y-k,0)\alpha_1 f_1(y) dy + B_T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \max(Y-k,0)\alpha_2 f_2(y) dy \\ &\quad + ... + B_T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \max(Y-k,0)\alpha_m f_m(y) dy \qquad (58) \end{aligned}$$

命題 3.7 より、

$$x_{01}(y) = \sum_{j=1}^{m} [\alpha_j \exp(\frac{{\sigma_j}^2}{2} + \mu_j)\Phi(u_j) - \alpha_j K\Phi(v_j)]$$

ただし、$u_j = \frac{-\log K + \mu_j + {\sigma_j}^2}{\sigma_j}$、$v_j = \frac{-\log K + \mu_j}{\sigma_j}$

$\exp(\frac{{\sigma_j}^2}{2} + \mu_j)\Phi(u_j) - K\Phi(v_j)$ を C_j とすると、

$$x_{01}(y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j C_j$$

と表される。

命題 4.2. オプションの満期時刻 T まで、i 期間を含むとし、$i = 1, 2, ..., n$ とする。期間 i において、株価は混合分布 $g_i(y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j(y)$ に従うと仮定し、$f_j(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j}} \exp -\frac{(y-\mu_j)^2}{{\sigma_j}^2}$ とする。さらに、全期間において、株価は分布 $g(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i g_i(y)$ に従うとしたとき、y のオプション価格 $x'_{01}(y)$ は次の式で表される。

$$x'_{01}(y) = \sum [\beta_j \exp(\frac{{\sigma_j}^2}{2} + \mu_j)\Phi(u_j) - \beta_j K\Phi(v_j)]$$

ただし、$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ij}$、$u_j = \frac{-\log K + \mu_j + {\sigma_j}^2}{\sigma_j}$、$v_j = \frac{-\log K + \mu_j}{\sigma_j}$

(証明).
仮定より、$g_i(y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j(y)$
よって、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i g_i(y) &= (b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + ... + b_n a_{n1}) f_1(y) + \\ &\quad (b_1 a_{12} + b_2 a_{22} + ... + b_n a_{n2}) f_2(y) + ... + \\ &\quad (b_1 a_{1m} + b_2 a_{2m} + ... + b_n a_{nm}) f_m(y)\end{aligned} \tag{59}$$

$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ij}$ とおくと、

$$\sum_{i=1}^{n} b_i g_i(y) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j(y) \tag{60}$$

となる。
命題 4.2 より、y のオプション価格 $x'_{01}(y)$ は次の式であらわされる。

$$x'_{01}(y) = \sum[\beta_j \exp(\frac{{\sigma_j}^2}{2} + \mu_j)\Phi(u_j) - \beta_j K\Phi(v_j)] \tag{61}$$

ただし、$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ij}$、$u_j = \frac{-\log K + \mu_j + {\sigma_j}^2}{\sigma_j}$、$v_j = \frac{-\log K + \mu_j}{\sigma_j}$
よって、命題 4.2 が成立する。

上記の命題により、株価は期間 i で m 個正規分布による混合した混合正規分布 g_i に従い、さらに全期間の株価は各期間の株価の混合分布再度混合した場合、全期間終了後、株価のオプション価格は m 個正規分布による計算したオプションの価格の線形加重和になる。ただし、ウェートは新たに構成したものになる。パラメータ μ_j とσ_j および α_j と β_j を推定した上、全期間のオプション価格が定まる。

5　BS モデルと混合モデルの比較

第２節と第３節により、２項モデルおよび数理統計近似法によるブラック・ショールズ (BS) モデルの導出を行った。BS モデルは非常に利用しやすく、今まで数多くの研究や応用に適用されている。しかし、このモデルの弱点としては、μ と σ^2 が一定であるとの強い仮定がある。前節で提案した混合分布を用いるオプションの価格式はこの条件を外した。導出された式より、μ と σ^2 は一定ではなく、分割された各期間では、複数の混合分布で決まり、全期間においては、各期間の μ と σ^2 はそれぞれの混合分布によって推定され、変動であることがわかる。したがって、混合モデルは μ と σ^2 が一定であるとの条件を外すことができる。混合分布の仮定はより現実的であり、妥当であることが分かった。また、混合モデルは BS モデルの加重線形和となることも分かった。混合モデルもＢＳモデルと同様に分かりやすく、単純に計算できる形になっていることが分かった。しかし、混合モデルには、各期間と全期間において、加重係数、平均と分散など多くのパラメータを設定することが必要であり、パラメータの推定は、非常に複雑になる。混合分布のパラメータの推定は最尤法や EM アルゴリズムが提案されている。本論文は遺伝的アルゴリズム（GA）を用いて、混合分布のパラメータの推定を提案する。

6　GA 手法によるパラメータ推定

ガオス混合分布のパラメータの推定は、対数尤度関数を最大化することより求めることができるが、計算は非常に難しい。EM アルゴリズムなどを利用して、解を求めることができるが、本論文は GA を用いて、混合分布のパラメータを推定する。

6.1　GA 手法

GA（Genetic Algorithm) とは 1975 年ミシガン大学教授 John Henry Holland により提案された生物の進化を模倣したアルゴリズムである。複数の遺伝子で表現された個体を用意し、適応度の高い個体を優先的に選択して交叉・突然異変などの操作を繰り返しながら解を探索する方法である。この手法の利点は、評価関数の可微分性や単峰性などの知識がない場合であっても適用可能なことである。また、N P 困難な問題にも適用可能である。GA 手法の流れは図 2 のようになる。

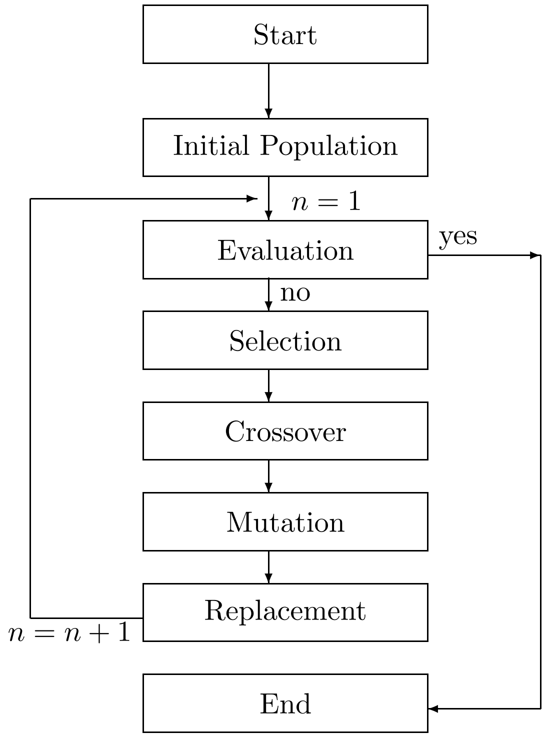

図２．　ＧＡアルゴリズム

6.2　GA を用いる混合分布のパラメータ推定

本論文で扱う個体は混合分布のパラメータを表している。まず、各期間の混合分布パラメータを推定する。そのアルゴリズムは以下のようになる。

ステップ１．初期集団の生成
乱数発生し、初期パラメータ母集団を生成する。
ステップ２．適応度の評価
上で作成されたパラメータを用いて、分布の尤度をそれぞれ計算する

ステップ３．終了条件を満たせれば、終わる
　　　　　　終了条件は世代数が２００とする。
ステップ４．選択
　　　　　　上で計算された尤度が高いほど確率的に選択される可能性を増やし、
　　　　　　尤度が低いほど選択される可能性を減らし自然淘汰を行う。
ステップ５．交叉
　　　　　　選択された親個体を交叉し、親個体と似ている子個体を作成する。
ステップ６．突然変異
　　　　　　小さい確率で突然変異を起こさせ、選択された親個体と似ていない
　　　　　　子個体を作成する
ステップ７．ステップ２に戻る

ここでは、対数尤度関数を用いて適応度を評価する。

まず、各期間において、以上のアルゴリズムを繰り返すことによって、尤度が一番高い個体（パラメータ）が最適解となり、パラメータの推定ができる。各期間の混合分布のパラメータをオプション価格式に代入し、それぞれの妥当なコール・オプション価格式を導くことができる。

次に、全期間の混合分布のパラメータを推定する。以上のアルゴリズムと同様にパラメータを推定することができる。ただし、尤度関数も同様に対数尤度関数を用いるが、確率密度分布は各期間で推定された分布となる。ここで推定されたパラメータをコール・オプションの価格式に代入し、全期間の妥当なオプション価格を計算する。

7　むすび

ブラック・ショールズ (BS) モデルは、分布の μ と σ は一定との前提条件がある。しかし、時間が経過しても、μ と σ が変化しなく一定であるとの仮定はかなりきつい制約となり、現実的ではない。また、混合分布は単一の正規分布より、実際の金融データにフィットし、うまく当てはまることができると多くの研究者が検証している。混合分布に従う場合、より現実的であるので、この仮定の下で、オプション価格をつけるのが妥当である。

本論文は、まず、2項モデルおよび近似式を用いて、理想なオプション価格式（ＢＳモデル）を導いた。この価格式を導出する過程で、ＢＳモデルの弱点を考察できた。次に、μ と σ は一定であるとの前提を外して、より現実な仮定のもとで価格式の導出を行った。ガオス混合分布を導入し、オプション価格式はBSモデルの価格式の加重線形和になることが分かった。このように簡単な形で求められ、計算しやすいＢＳモデルを利用できるとの有利点があることが分かった。また、BSモデルはガオス混合分布を用いたモデル（混合モデル）の特例であることも分かった。混合モデルはオプショ

ン価格付けには、非常に柔軟性があることも当然に思われる。本論文は、株価変動期間をn期間があると仮定し、各期間の株価はそれぞれガオス混合分布に従うとし、各段階でのオプション価格式を計算した。さらに、全期間の分布は各期間の分布の加重和とし、全期間のオプションの価格式も導いた。

ただし、混合モデルには、パラメータが複数存在し、推定は複雑である。本論文は、遺伝的アルゴリズム (GA) を用いたパラメータの推定法を適用することを提案した。GAは生物進化を模倣し、遺伝操作を繰り返しながら、パラメータを探索する方法である。一般的には、可微分などの条件を入れずに、N P困難などの複雑問題に適応ができ、非常に優れた推定方法である。このように、パラメータを推定し、混合分布による妥当なオプションの価格を計算でき、μ と σ が一定であると制限条件がついたBSモデルの弱点を克服することができた。

本論文はガオス混合分布を用いて多期間においてのオプションの価格式の導出を行い、また、GAを用いて混合分布の重み係数の推定を提案したが、今後シミュレーションおよび実際の金融データへの応用を行う予定である。

参考文献

[1] Baxter, Martin and Andrew, Rennie(1996), *Financial Calculus*, Cambridge, United Kingdom, Cambridge University Press.

[2] Brody, Dorje C. (2000), 『現代ファイナンス数理』日本評論社。

[3] Hogg, Robert V. , Joseph W. MeKean and Allen T. Craig(2005), *Introduction to Mathematical Statistics*, N.J., United States, Pearson Education.

[4] Holland, John H. (1992), *Adoptation in Natural and Artificial Systems*, Cambridge, MA, United States, MIT Press.

[5] Hull, John C. (1996), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentive-Hall International, Inc.

[6] 伊庭斉志 (1994), 『遺伝的アルゴリズムの基礎』オーム社。

[7] 森村英典、木島正明 (1991), 『ファイナンスのための確率過程』日本評論社。

〔九州大学大学院経済学研究院　講師〕