SCM における内製・外製の均衡分析 : 需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合

時永, 祥三
九州大学 : 名誉教授

松野, 成悟
宇部工業高等専門学校経営情報学科 : 教授

https://doi.org/10.15017/27430

出版情報：經濟學研究. 80 (2/3), pp.1-16, 2013-09-30. 九州大学経済学会

SCM における内製・外製の均衡分析
── 需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合 ──

時　永　祥　三
松　野　成　悟

1　まえがき

サプライチェーンの管理（Supply Chain Management，以下 SCM と呼ぶ）においては，メーカーとサプライヤーとの間に形成される連係関係が重視されており，調達・供給における情報共有や契約形成の仕組み，およびその意義について議論されている [1]-[5]。SCM において外部の企業との間で部分的な業務提携を行う，いわゆるアウトソーシングも主要なテーマの一つであり，これまで多くの研究がなされている [6]-[9]。アウトソーシングを実施する主要な目的は，(1) コスト削減やコア事業への集中，(2) 未開拓分野への対応，(3) 調達方針の変更，などにまとめることができる。しかしながら，これらの判断は時間とともに変動する可能性があり，その契機となる要因を分析することも重要である。本論文では SCM における内製・外製の均衡分析について示すが，特に需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合を考察する。

SCM において，内製と外製を切り替える企業行動を分析する数理モデルがいくつか提案され，われわれも製造コストの時間変化などを用いて分析する方法を示してきた [6][7][9]。しかしながら，これらの多くは，企業の判断や行動をモデルとして用いたものであり，市場の情報，特に需要時系列の情報を用いたモデル化ではないという問題がある。需要時系列の性質をどのように認識するか，あるいはその結果として得られる利益の変動を，どのように内製・外製の切り替えに用いるかを，分析する方法が必要となっている。

本論文では，最初に SCM における内製・外製分析の基本的なモデルと，その拡張についてまとめている。具体的には，需要が一定である場合について得られる内製・外製の均衡分析について，結果を文献 [8] における方法を引用しながら整理すると同時に，このモデルにおけるコスト関数が一定である仮定を緩和した場合の，拡張モデルについて述べる。これらの拡張モデルについては，すでに研究結果としてまとめているものを含んでいるので，簡潔に結論だけ述べることにする。これらのモデルにおいては，内製側や外製側における行動の選択によって，外製比率が時間的に変動することが示される。次に，変化する対象を企業の行動ではなく，市場における需要にまで拡張する方法論について説明する [10]-[14]。すなわち，需要を示す時系列について，従来の周期変動とブラウン運動だけからなるケースを拡張して，ジャンプ拡散過程を含むように定式化する。さらに，ジャンプの大きさと発生頻度の間の相関関係を導入することにより，内製・外製の配分に与える影響を分析している。このモデルについてのシミュレーション結果から明らかなように，需要の変動

が利益に与える影響が大きい場合と相対的に小さな場合が繰り返される場合には，アウトソーシングにおける外製比率も振動することが確認できる。

2　SCM における内製・外製分析モデルとその拡張

2.1　内製と外製の時間的な変動の事例

最初にアウトソーシング分野でのこれまでの研究を参考にして，アウトソーシングの導入のポイントを概観してみる。まず，企業がアウトソーシングという企業間の連係方法を選択する理由としては，次のような点にまとめられるであろう [6]-[9]。

(1) コスト削減やコア事業への集中

内製によるコストアップを回避する手段として，外部企業へのアウトソーシングが実施される。この場合に分野の選択方法として，コア事業を社内に残す一方で，社外に出しても構わないとする事業を区分することがなされる。しかしながら，単なる合理的な判断だけではなく，経営者のマインドとも関連している（例えば特定の事業を社内に温存させるなど）。また，コア事業を保持する政策が，必ずしも最良の選択にはならないケースもある。

(2) 未開拓分野への対応

企業が事前に取得ないしは経験しない技術に関しては，アウトソーシングに頼らざるを得ないケースがある。例えば，最近のインターネットマーケティングの進展は，サイトの構築技術やいわゆるコミュニティ形成など，これまでに企業が経験・所有していなかった独自分野を含むため，外部企業に頼る側面もあるであろう。

(3) 調達方針の変更

アウトソーシングを企業間の連係の一つの形態であるととらえると，複数の外部企業が分野ごとに，住み分けをする実態も重視すべきであるとの指摘もある。また最近では，いわゆるグリーン調達などとも呼ばれている，環境への配慮を重視した調達政策なども取り入れられている。この場合には，必ずしも調達価格だけが決定要因ではない可能性があり，また生産能力の不足により外部調達が選択される場合もある。

われわれは，これらのテーマの中で，(1) や (2) についてアンケート分析などをもとにして，現状の課題を考察してきた [6][7][9]。この中で，その後の検討課題として残されたものとして，アウトソーシングの形態が時間とともに変化する現象がある。アウトソーシング分析のテーマの多くが，外部に委託する業務の特性分析や，企業間の契約関係，出資比率による関連性の度合いの違いの分析などの，いわば静的な状況分析にとどまっており，企業をとりまく環境の変化に応じた，企業間の連係関係の変動や，その要因分析を行ったものは少ない。アウトソーシングに関係する環境の変化として大きなものは市場の動向があるであろう。しかしそれだけであればアウトソーシングの変化は，最新の経営関連技術に限定されることになるが，現状はやや異なる側面を示している。

アウトソーシングを見直して，社内に復帰させる事例については，すでに文献 [6][9] において考察しているので，以下では概要を簡単にまとめるにとどめておく。

米国では，情報システム部門の人員や資産等を 10 年程度の複数年にわたって顧客企業に提供するサービスが 1990 年代に急速に拡大した。しかし，2000 年頃からは契約の見直しや解消によって，

過去に転籍させた SE などを再雇用し，情報システム関連業務を社内に戻す動き（インソーシングへの回帰）も散見されるようになってきている。

日本では大企業を中心として，社内の情報システム部門を独立・分社化して情報システム子会社を設置することや，ユーザー企業が擁する情報システム子会社に対して外部ベンダが資本参加したり，情報システム子会社を売却するケースなどが増えつつある。しかし，最近では外販事業から撤退させたり，再び社内に情報システム部門を組織化する事例も見受けられている。

このように，内外製判断を中心としたアウトソーシングマネジメントは，固定的あるいは安定的なものではなく，企業が直面する環境の変化や不確実性に応じて時間的な変動が見られる。また，その見直しの動機についても，コストの削減やリードタイムの短縮などの効果は，必ずしもアウトソーシングを進めることによってのみ得られるものではなく，市場の変化や消費者ニーズの多様化，生産方式の変更，業務量増減の調整などがある。

2.2　需要が一定の場合の内製・外製の均衡分析

SCM における内製・外製の切り替えに関する数理モデルはいくつか存在するが，文献 [8] に示された結果は，現実の行動を説明するための分かりやすい方法となっている。この研究においては，特に内製する場合の製造コストについて，製造数量（文献 [8] では決定されるべき変数である外製比率を用いて表現されている）が，ある閾値を超えるときに，急激に増加する関係式を用いている。また，この場合においても，最適な内製・外製の比率が均衡解として与えられることが特徴となっている。すなわち，SCM における最適な内製・外製の比率は，関係するどちらの企業にとっても，望ましい関係をもたらすことになる。文献 [8] では，この分析結果については定理としてまとめられているが，ここでは分かりやすくするために，条件などを同時に整理した文章として示しておく。

いま，メーカーである企業 A と企業 B の 2 社が存在し，共通のサプライヤー S から調達を行うケースを考察する。企業 A は部分的に製品を内製すると仮定し，この比率を m としておく。この場合，A において最大化するべき利益に関する評価関数は $[a-q_1-q_2]q_1-w_1[1-m]q_1-cmq_1$ となり，B においては $[a-q_1-q_2]q_2-w_2q_2$ のようになる。ここで $p=a-q_1-q_2$ は市場での製品価格であり，製品の供給に応じて逆傾斜的に単調に価格が低下すること（downward-sloping demand function）を表現する関数である。また w_1,w_2 はそれぞれ，サプライヤーから企業 A, B への販売価格である。この未知である変数 m を含んだまま，A と B における最適な製造数量が $q_1(m,w_1),q_2(m,w_2)$ として与えられる。このような状況のもとで，サプライヤー S は，自己の評価関数である $[w_1-c_s][1-m]q_1(m,w_1)+[w_2-c_s]q_2(m,w_2)$ を最大化するように販売価格 c_s を決定する行動をとる。なお，このように部分的に外製を行う仮定として，企業 A は自社の中だけでは全部の製品を製造できない，あるいは，製品開発の投資が間に合わないことを前提としている。このため，最終製品の単位コストは $c\to cm^{\gamma}$ のように m に関する指数 γ を用いて表現される。すなわち，外製を行う状況はコスト的に次第に制限的になっている。

いま m^* を企業 A が，企業 B と市場の状況を考慮した場合にとり得る最適な外製比率であるとすると，$m^*=1$ を除いて $(m^*<1)$, 次のように与えられる [8]。

$$m^*=[(c_s+6w_1)/[7(\gamma+1)c]]^{1/\gamma}, w_1\le B_1, B_1=[\gamma+1]c+[(\gamma+1)c-c_s]/6 \tag{1}$$

ただし，この条件は，式に示されているように，サプライヤーが提示する価格が閾値 B_1 以下である場合に限られている。この境界の値は，単位当りの生産コストの定数 c とその指数 γ に比例して，サプライヤーの単位生産コスト c_s に反比例（符号がマイナス）している。すなわち，サプライヤーから提示される価格 w_1 が B_1 より大きく，割高であると判断した場合には内製を選ぶが，逆の場合には部分的に外製を行う。また最適な外製比率 m^* は，サプライヤーの提示価格 w_1 と製造単位コスト c_s に比例して，企業 A の生産コストの定数 c と指数 γ に反比例している。したがって内製がコスト面において指数的に増加しはじめる境界において，内製を減らす政策が選択されていることが分かる。

しかしながら，このような均衡分析においては，製品需要はもとより，外製を行う場合のコスト関数は固定されているという仮定を用いており，現実の事象との対応関係が問題となる。本論文では，文献 [8] に示された結果を拡張する一つの方法として，外製のコスト関数が時間的に変化する場合や，内製における企業の政策が変更される場合について，以降の節で示すように数理モデルの拡張分析を行っている。

2.3　Case I：外製側から見直しを行うケース

これまで述べた内製・外製に関する均衡分析を，コスト関数を変化させることにより，拡張することを考える。すなわち，メーカーとサプライヤーが市場の動向や，自社における技術の現状を，どのように認識するかにより，時間的に外製の比率が変化することをモデル化して説明する。このために次のような仮定をおく。

（仮定 1）サプライヤーの提示価格は外製比率に比例して急増する

具体的には，メーカーからサプライヤーへの外製比率を λ とした場合に，提示価格 w_1 が $\lambda = 1$ に近づくにしたがって，急増するモデルの導入である。サプライヤーが複数のメーカーを相手にして，競合関係を利用するケースに相当する。

このようなモデル化のためには，プライシング（pricing）と呼ばれる現象を用いることが有用である。遊園地やテーマパークなどへの客の到着をモデル化する方法として，ここに述べる到着率と待ち時間の関係を用いるものがある [15]-[21]。この現象は多くのケースで観測され，例えばテーマパークへ行こうとするときに，混雑が予想される時間をずらすなどの行動をとることに反映される。あるいはインターネットでの送信経路を選択するときに，比較的空いている回線を選択する，いわゆるルーティングなどの現象にも現れる。比較的空いている時間を選択する行動が重なると，今度は逆に一度に客が集中する。したがって，テーマパークの収容数が相対的に小さい場合には，客の到着の流れが時系列的に大きく変動する（実際にはカオス時系列になる）。モデルを説明するためにサービス施設への客の到着を用いるのが便利であり，予備知識なしで理解可能と思われるので，以下ではこの事例をもとに説明する。

サービス（施設への客の到着とか商品市場への商品供給）を処理する窓口をノードと考え，ノードでのサービスの処理能力（容量）を μ としておく [15]-[21]。ノードに流入するフローは，ノードでの待ち時間や処理コストの予測値（プライシング）に関連して調整される。すなわち，ノードでの処理コストに比例してノードへの入力を控える（ノードでの処理コストに反比例して入力する）ことを仮定している。フローの入力調整のモデルにおいては，入り口において時刻 t におけるプラ

イシングの予測値（例えば待たされる時間など）$\pi(t)$ を用いて，そのままをノードに送るかどうかを判断する。具体的には，プライシングが大きいときには，Λ （以下では正規化して議論をするので，$\Lambda=1$ としておく）より小さい値（場合によってはゼロとなる）を入力のフロー $\lambda(t)$ とする。一方，プライシングが小さい場合には，ほぼ1の値を入力フローとする。このように，このフローはノードに対してすべてが供給されるものではなく，この部分が供給されるモデルとなる。$\lambda(t)=F(\pi(t))$ とするとき関数 $F(.)$ は，次の式により与えられる。

$$F(\pi(t))=\begin{cases}1 \quad (0\le\pi(t)\le d);\\ (a-\pi(t))/(a-d) \quad (d<\pi(t)<a);\\ 0 \quad (\pi(t)\ge a)\end{cases} \tag{2}$$

プライシングの値は，指数平滑和により与えられる。

$$\pi(t+1)=\omega\pi(t)+(1-\omega)p(t), p(t)=Q_\mu(\lambda(t)) \tag{3}$$

$$Q_\mu=\frac{1}{(1-\lambda/\mu)\mu} \tag{4}$$

関数 $Q_\mu(\lambda)$ は，いわゆる待ちシステムにおける処理時間の分布が指数分布である場合の，平均待ち時間であるとしている。これを M/M/1 モデルと呼ぶ。すなわち，入力フローは率が λ であるポアソン到着で（記号 M に対応），処理時間の分布が指数分布（記号 M）である窓口を1つもつケースである。なお，処理時間が指数分布から一定値までの分布をカバーする分布（一般分布）であるようなモデルも存在するが，M/M/1 モデルと同様に定式化できるので，ここでは省略する。

話を簡単にするために，メーカーはサプライヤーに対して価格 $\pi(t)$ で製品の調達を行う（このときの価格 $\pi(t)$ がこれまでに示した変数 w_1 である）と仮定する。製品製造における外製比率を λ とする。また，シミュレーションの条件を以下のようにしておく。

$d=5, b=2, \mu=0.75$

製品価格が高い（低い）と外製比率を小さく（大きく）する関係にしたがって，メーカーは行動すると仮定する。このような条件のもとでは，外製比率は図1に示すように激しく振動することが分かる。

2.4 Case II：内製側から見直しを行うケース

これまで述べた内製・外製に関する均衡分析を拡張する第2番目の方法として，内製を行うメーカーが，外製への立場を時間的に変化させることにより，時間的に外製の比率が変化することをモデル化して説明する。これを Case II としておく。このために次のような仮定をおく。

（仮定2）メーカーは外製をする資本と労力を借入により実施するが，中断する場合もある

メーカーはすでに中核となる部分を自社で生産しており，今後の新製品開発や，事業拡大の部分だけを，外製により実施すると仮定する。この場合の資本と労力は外部に頼ると仮定し，そのための資金だけをメーカーが借り入れる。メーカーは，外製により利益を拡大することができた場合にだけ投資を拡大すると仮定し，利益の拡大が望めない場合には，投資すなわち外製を中断して，通常の預金などによる利益確保へと政策を変更すると仮定する。

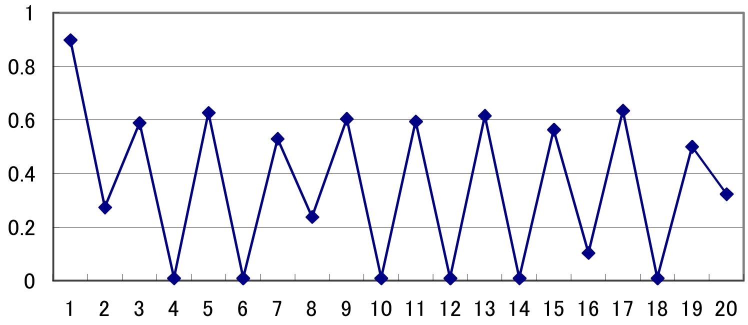

図 1: Case I における外製比率 λ の時間変化の例

Case II では変数の挙動が外部の要因で変化するモデルを考察するが，分かりやすい事例として個人の資産運用をとりあげ説明する。個人は貯蓄により資産形成を行うと同時に，小規模の事業へ投資も行うこともできると仮定する。この投資を行うときに自前の資金だけでは運営できない場合には，外部からの借入を実施することは一般的に行われている。ここで用いるモデルは，このような資産形成の行動において，資産そのものの大きさがカオス的に変動することを説明するものである。投資の対象は，製品製造であると仮定する。このような個人による投資行動と，その中における資産形成のカオス的変動を説明する。

投資には製造機械など（資本という用語が用いられる）と，これを動かす労力（労働という用語が用いられる）が導入される。なお製品製造においては，使用される資本と労働は単純に積をとる関係ではなく，相補的な関係により記述されることが一般的に知られている（詳細は省略する）。以下で用いる記号の意味は次のようになる。

A：機械の生産能率を表す定数
r：借入の利子率（原資を含む）
ρ：製品製造における資本と労働の相互の補完関係を示す定数（代替性と呼ばれる）
η：利益に対する借入金の規模
$z(t), Z$：投入する労働の大きさとこれを定数としたもの
α_W, e_W：投資の利益で消費される割合と投資以外からの収入

アントレプレナーとしての個人は投資額 I により得られる利益をもとに，時刻 $t+1$ における資産を増加（あるいは減少）させる行動を行う。この場合，時刻 t における資産 $W(t)$ を用いると同時に，投資に不足する金額を外部から借り入れると仮定する。したがって，投資によって得られる利益から，借入に相当する返済額を差し引いたものが，実質的な利益となる。しかしながら，投資により得られる利益が，何もしない場合より小さい場合には，投資は意味が無いので，外部への貸付が有利となる。この境界となる $W(t)$ の値を W^m とすると，個人の行動は次のように記述される。

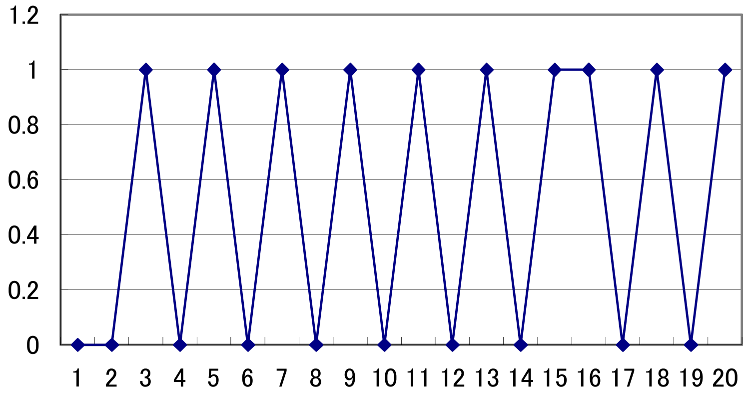

図 2: 外製を行う変数 λ の時間変化の例

$$W(t+1) = \begin{cases} (1-\alpha_W)[e_W + W(t)^\rho(\xi - r\eta W(t)^{1-\rho})] \quad (W(t) \le W^m); \\ (1-\alpha_W)[e_W + rW(t)] \quad (W(t) > W^m); \end{cases} \tag{5}$$

$$\xi = A\rho^\rho(1+\eta)^\rho Z^{1-\rho} \tag{6}$$

式（5）および（6）に示す関係式の導出は，付録に示す。シミュレーションの条件を，以下のようにしておく。

$\rho = 1/3, \alpha = 0.8, r = 1.02, A = 3/2, Z = 100, \eta = 30$

この場合のメーカーが外製を行う変数を λ として，これを図示した例を図 2 に示す。$\lambda = 1(\lambda = 0)$ は外製をする（しない）判断を意味する。この図から明らかなように，外製の実施と中断が繰り返し発生しており，安定的な外製にはなっていないことが分かる。

3 需要時系列の変動に注目した製造モデル

3.1 Case III：需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合への拡張

ここでは SCM における内製・外製の均衡分析について，3 番目のモデルとして，需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合を考察する（Case III）。まず，需要時系列 $D(t)$ の変動モデルを説明する。上昇（下降）ジャンプには 2 つのジャンプ過程であるジャンプの開始（go）と，このあとに元のレベルに復帰する動作（back）とからなると仮定する。時間間隔 dt の間における価格 D の変化 dD は，次のように書ける。式を簡単にするために，上昇ジャンプにおける式だけを示すが，$\lambda_{go}, \lambda_{back}$ のパターンを変えることにより，下降ジャンプも同じ式で記述できる。

$$dD = \alpha(D,t)dt + (J_1 - D)\lambda_{go}dt + (J_2 - D)\lambda_{back}dt + \sigma D dz \tag{7}$$

ここで dz はブラウン運動の微分値であり，また $\lambda_{go}, \lambda_{back}$ は単位時間当たりの開始（go）と復帰（back）ジャンプの発生確率であり，J_1, J_2 はこれらの 2 つの動作の大きさに対応しており，正規分布にしたがうと仮定する。すなわち，$N(a, s)$ を平均が a，標準偏差が s である正規分布として

$J_1 \sim N(a_{11}, s_{11}), J_2 \sim N(a_{12}, s_{12})$

であるとする。下降ジャンプの場合には J_1, J_2 はそれぞれ下降ジャンプの開始（go），元のレベルに復帰する（back）動作に対応し，次のように仮定しておく。

$J_1 \sim N(a_{21}, s_{21}), J_2 \sim N(a_{22}, s_{22})$

ジャンプの開始と復帰（go, back）の発生確率 $\lambda_{go}(D), \lambda_{back}(D)$ を規定する関数の形状については，図 3 に示すような区分線形のやや簡単なものを仮定する [10]-[14]。この関数形状を複雑にすることも可能であるが，ジャンプは頻繁には発生しないことや，関数形状の細かな違いはジャンプ発生に大きな影響を与えないことが背景になっている。図 3 において上昇（下降）ジャンプにおける発生確率を，$D(t)$ の関数として分かりやすく示している。これらの図 3 から分かるように，確率 $\lambda_{go}(D)$,$\lambda_{back}(D)$ はある閾値（DT_{11} など）の上下で変化することを仮定しており，遷移する領域を除いては一定値（θ_{11} などとして定義）である。なお，これらのパラメーターを変更する影響の概要については，以下のようにまとめられる。乱数生成の分布の平均値（a_{11} など）は，上昇ジャンプが発生した場合の需要時系列の行き先の大きさを規定する。ジャンプの発生確率である $\theta_{11}(\theta_{21})$ などは，上昇（下降）ジャンプの発生頻度を与え，これらが大きいと上昇（下降）ジャンプが頻発する。同様に確率 $\theta_{12}(\theta_{22})$ が大きい場合には，価格が上昇（下降）して元のレベルに戻る時間が短いことを意味しており，確率が小さい場合には，上昇（下降）したまま継続する時間が長くなる。なお，以下のシミュレーションにおいては関数の形状は次のようなものを仮定する（ブラウン運動の部分の定数は，$\sigma = 0.2$ としておく）。

$$\alpha(D, t) = 0.4[15\sin[(2\pi t - 15.4\pi)/24] + D_Z - D)] \tag{8}$$

上昇ジャンプおよび下降ジャンプについて，それぞれ $D_Z = 27, 50$ とする。図 4 にはパラメーターをある組み合わせに設定した場合の，上昇ジャンプの例を示している。図左では上昇したあとですばやく時系列は元のレベルに復帰しているが，図右では復帰までの時間が長くなっている（下降ジャンプについても同様の図が作成できるが，省略する）。

3.2　需要にジャンプ過程が含まれる場合の最適生産

製造業者は予測された（観測可能であると仮定した場合の観測データである）需要時系列をもとにして，自身の利益を最大化する生産を行う。この場合の関係式を導出する。

$R(t)$ を時刻 t における最適な在庫数量，$c(t)$ を最適な生産数量とする。この場合次のような関係式が得られる。

$$dR(t) = [c(t) - D(t)]dt \tag{9}$$

上に述べたような前提のもとで，現在の時刻 t から最終の時刻 T までの製品の製造販売による価値を最大化する問題の解を求める手順を示す。与えられた評価関数の最大化問題は，次のもので

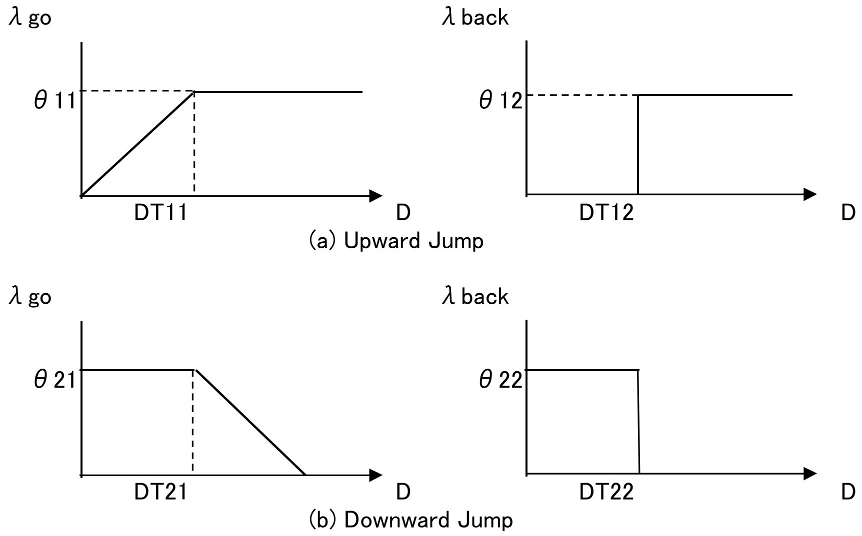

図 3: 上昇（下降）ジャンプにおける確率 $\lambda_{go}, \lambda_{back}$ （上：上昇ジャンプ，下：下降ジャンプ）

ある。

$$V(D,P,f,c,t,R) = max_c E[\int_t^T e^{-\rho(t-\tau)} F(D,P,f,c,t,R) d\tau] \tag{10}$$

$$F(D,P,f,c,t,R) = PD(t) - A(c(t),f) - H(R) - B([D(t) - c(t) - R(t)]) \tag{11}$$

ここで，$c(t)$ は最適な生産を与える製造数量である。また P, f は製品の価格と製造に必要なコストである（P は定数であることを仮定する）。また $A(.), H(.), B(.)$ は製品を生産するコスト関数，在庫コスト関数，外製するコスト関数である。通常，関数 $B(.)$ は生産が十分でない場合に，他社から製品を直接調達する場合のコストを意味するが，ここでは自社での製造技術が十分ではない場合に，自社で開発して製造するよりは，直接製品を調達する方が有利な場合に，製品の製造数量を調整するための関数（いわゆる外製コスト）として用いる。ρ は，このような投資問題で設定する

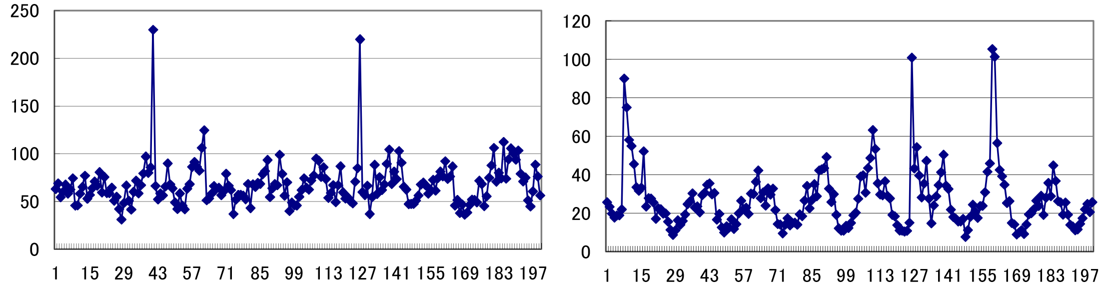

図 4: 大きく稀な（小さく頻繁な）上昇ジャンプの例（左：大きな，右：小さな）

定数で，時間経過とともに価値が減少する割合（割引率）を示す。

この式を２つの時間区間に分けて表現すると，次のようになる。

$$V(D,P,f,c,t,R) = max_c E[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(D,P,f,c,t,R)d\tau$$
$$+\int_{t+dt}^{T} e^{-\rho(\tau-t)} F(D,P,f,c,t,R)d\tau] \tag{12}$$

さらに変形すると，次のようになる。

$$V(D,P,f,c,t,R) = max_c E[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(D,P,f,c,t,R)d\tau$$
$$+e^{-\rho dt}\int_{t+dt}^{T} e^{-\rho(\tau-(t+dt))} F(D,P,f,c,t,R)d\tau] \tag{13}$$

この第２項は，評価関数の定義式において時間をずらした表現であるので，この式を，時間 t の微小変化 dt の間における変分を用いて書き直すと，次のようになる。

$$V = max_c E[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(D,P,f,c,t,R)d\tau$$
$$+e^{-\rho dt} V(D+dD, c(t+dt), t+dt, R+dR)] \tag{14}$$

この式に対して，多次元変数に対する伊藤（Ito）のレンマを用いて確率変数の２次微分までを求めたあと，代入を繰り返し，式を変形すると次のようになる。

$$0 = max_c[[F(D,P,f,c,t,R) + L(V) + (c-D)V_R]dt + \sum_{k=1}^{2} E[V_k^{(+,D)} - V]\lambda_k dt \tag{15}$$

$$L(V) = V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{DD} + \alpha V_D - \rho V \tag{16}$$

ただし，$V_k^{(+,D)}$（$k=1,2$ をジャンプの開始と復帰である go, back に対応させる）は，需要 $D(t)$ において大きさが $J_k(.)$ のジャンプが発生した場合の $V(.)$ の値である。したがって，次のような計算を行う。

$$E[V_k^{(+,D)}]\lambda_k = \lambda_k \int_0^{\infty} V(x_k)g(x_k)dx_k \tag{17}$$

ここで $g(x_k)$ は，正規分布 $N(a_{11}, s_{11})$ などに対応する確率密度関数（確率変数は x_k）であり，導出においては $V_k^{(+,D)} - V = V(D + x_k - D) = V(x_k)$ となる関係を用いている。また，偏微分の記号は $V_D = \partial D/\partial D, V_{DD} = \partial D^2/\partial D^2$ などを意味する。なお $V(.)$ は，最大化をする関係式の両辺に含まれているが，変数 c のような関数ではない。

dt より早く減衰する項目を除去することで，次の偏微分方程式が得られる。

$$max_c[L(V) + F(D,P,f,c,t,R) + (c-D)V_R] + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k E[V_k^{(+,D)} - V] = 0 \tag{18}$$

上に示した偏微分方程式において，決定変数である $c(t)$ は，次に示す最大化問題の解として与えられる。

$$max_c[F(D,P,f,c,t,R) + (c-D)V_R] \tag{19}$$

このように決定された c を代入して，利益 $V(.)$ に関する偏微分方程式を得る。

$$0 = L(V) + F(D, P, f, c, t, R) + (c - D)V_R + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k E[V_k^{(+,D)} - V] \tag{20}$$

以上のような確率微分方程式を，境界条件を定めることによって解けば，価格が決定される。この偏微分方程式の解の終端条件は次のようになる。

$$V(D, P, f, T; c) = 0 \tag{21}$$

なお，$V(0)$ は全部の期間にわたる生産の利益の積分であるので，ある条件のもとでのメーカーの利益を表す。

3.3　内製・外製の判断基準の仮定

以下では，これまで述べてきた数理モデルを用いて，企業行動の定量的な評価を行うことができる可能性があることを示す。このために次のような仮定をおく。

（仮定 3）需要時系列にさまざまな形状のジャンプが含まれる

需要の時系列に，ジャンプを含ませた場合の企業の行動を分析する。ジャンプには，需要が上昇あるいは下降する 2 種類を仮定するほかに，上昇，下降したあと，元のレベルに復帰するまでの時間が，長い場合も設定できるようにする。

これまでのモデル化においては，需要は定数として与えられており，本論文で議論するようなジャンプを含む場合は議論されていない。例えば，上昇ジャンプは需要の増加であるが，しかしながらジャンプの形状によっては，必ずしも外注を増加させる政策へと決定が行われることはない。ジャンプが緩やかに開始され元のレベルに復帰するまでの時間が長いほど，外注化への傾向が強まる。

ここで，シミュレーションにおいてジャンプ発生のパラメーターをすべて変化させて特性を求める方法は，分析結果をあいまいにする。したがって，ジャンプの発生頻度と，元へ復帰する時間において，次のような関係を導入する。ここでは，ジャンプの大きさと発生頻度の間には反比例の関係があると仮定する。すなわち，上昇ジャンプにおいては a_{11} と θ_{11} とは反比例の関係にあり，(下降ジャンプも同様であるが，この場合には a_{21} はジャンプした先の需要の値を示すので，θ_{21} とは比例関係にある)，

上昇ジャンプ：a_{11} が大きくなるにしたがって θ_{11} は小さくなる

下降ジャンプ：a_{21} が小さくなるにしたがって θ_{21} は小さくなる

また，大きな（小さな）ジャンプが発生したあと時系列が元のレベルに復帰する時間は，短く（長く）なるとする仮定をおく。すなわち，パラメーターの間に次のような関係を導入する。

上昇ジャンプ：a_{11} が小さくなるにしたがって θ_{12} は小さくなる

下降ジャンプ：a_{21} が大きくなるにしたがって θ_{22} は小さくなる

ジャンプに関係するパラメーターである s_{11}, s_{12} は a_{11}, a_{12} に比例して変化すると仮定しておくが，これら以外のパラメーターは初期値に固定しておく（紙幅の関係で詳細は省略する）。

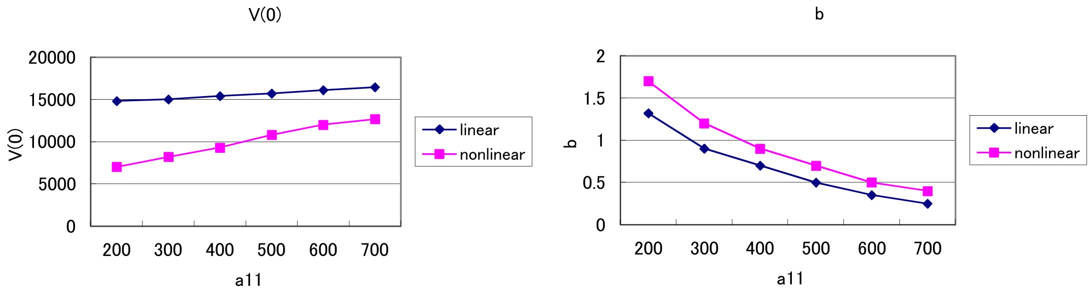

図 5: 需要に上昇ジャンプが含まれる場合の利益と外製比率の特性（左：利益，右：外製比率）

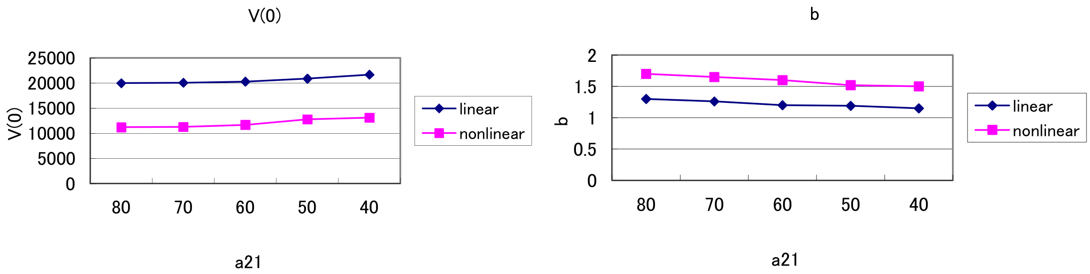

図 6: 需要に下降ジャンプが含まれる場合の利益と外製比率の特性（左：利益，右：外製比率）

需要時系列に上昇ジャンプと下降ジャンプが含まれる場合について，企業の獲得する利益 $V(0)$ と，製造数量に占める外製の比率 b（外製個数を内製個数で割ったものとして定義する）としてまとめたものが図 5 および図 6 である。両図において linear と nonlinear のそれぞれの区別は，内製コストが製造数量に対して線形（非線形）で変化する場合に相当する。非線形の内製コストの仮定として，製造数量 c がある一定の数量までは線形のコストであるが，個数が閾値を超えた場合には超えた数量の 2 乗に比例するコスト発生を用いている。これらの図においては，ジャンプ発生のパラメーターである a_{11}, a_{21} を変化させた場合の外製の割合を示している。

なお，大きなジャンプは瞬間的であるので，ジャンプが存在しない場合と似たような特性になる。図 5 から分かるように，小さなジャンプが頻繁に発生する場合（図 5 の横軸で見ると左隅に近い領域）には内製では対応できないため，外製の比率が高くなり，これにともなって利益も減少する。特に，内製のコストが非線形である場合には，影響が顕著である。したがって企業は，需要の緩やかな増加を見定めながら，より安定的に内製を安価に進める方策をとる必要がある。

一方，需要に下降ジャンプが含まれる場合には，利益や外製比率はパラメーターにより小さな変化しか示していない。これは，需要の減少であるので，増産にともなうような外製の急増やコスト増を招かないことを反映している。

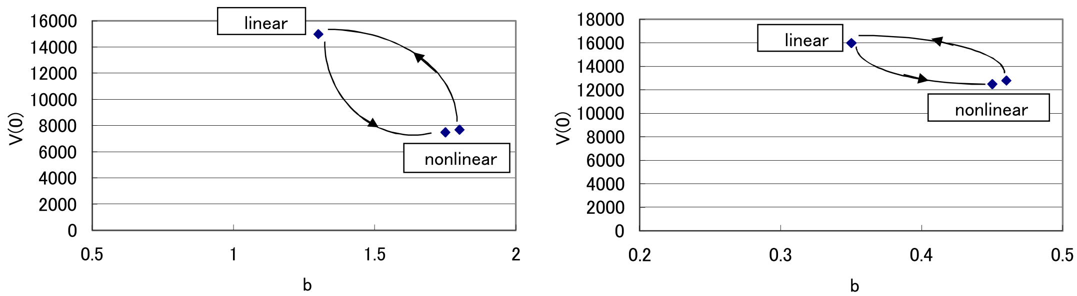

図7: $V(0)-b$ 平面における企業行動の遷移（左：小さな a_{11}，右：大きな a_{11}）

3.4 Case IV：需要の変動への対応を考慮するケース

これまで述べたように，一般的には，需要が変動しながら，しかも内製のコスト関数が線形である場合と，非線形である場合とが存在する。しかしこのような状況で，企業がどのような行動をするかを分析するには，変化する要因が多いので，かえって結果が分かりにくくなる。したがって以下では，次の点に焦点をしぼって分析する。すなわち，内製のコスト関数が線形（非線形）である時期とは，相対的に内製が容易である（困難である）時期に対応すると仮定する。市場の動向が比較的安定している場合には，従来の技術レベルで対応できるが，市場の変化が起こった場合には，外製によって対応する以外には方法がないことを意味する。

図7にはこのような場合の企業の行動を，縦軸を $V(0)$，横軸を b とする平面の上の点の間における遷移として表現している（企業行動の差異が明確である需要時系列に上昇ジャンプが含まれる場合のみ示す）。このような内製のコスト関数が線形である場合と非線形である場合について，さらに需要関数に含まれる上昇ジャンプのパラメーター a_{11} が小さい場合と，大きい場合を区分して示している。図7において記号の linear と nonlinear はそれぞれ，内製コスト関数が線形と非線形の場合の，企業の行動位置を意味している。図7の左（右）は，a_{11} が小さい（大きい）場合に相当している。この図から分かるように，企業行動に大きな遷移が見られるのは，緩やかな需要のジャンプが含まれる場合であり，$V(0)-b$ 平面を大きく移動している。これに対して，需要に大きな，しかし稀なジャンプが発生する場合には，平面上の企業行動の変化の範囲が，相対的に小さくなっている。このようなことから，需要がじわじわと拡大する時期に，相対的に長い時間にわたって外製を考慮しながら，しかも一方では，コスト的に有利である線形の内製コストの関数が適用できる領域を探り，利益の向上を図るという判断の適否が求められることになる。

4 むすび

本論文では，SCMにおける内製・外製の均衡分析について，需要時系列にジャンプ過程が含まれる場合を中心に考察した。需要が一定である場合の内製・外製の均衡分析について，関数が一定である仮定を緩和した場合の拡張モデルについて述べ，外製比率が時間的に変動することを示した。また，需要を示す時系列について，従来の周期変動とブラウン運動だけからなるケースを拡張

して，ジャンプ拡散過程を含むように定式化し，需要の変動が利益に与える影響に応じて外製比率も振動することを確認した。

今後，本論文の手法を，実際に観測されるデータを対象とする数理モデル分析において応用する予定である。

謝辞

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費基盤研究（B）23310104 および（C）24530445 により実施されている。ここに感謝の意を表する。

参考文献

[1] J. Barthelemy and D. Geyer, “An empirical investigation of IT outsourcing versus quasi-outsourcing in France and Germany,” *Information & Management*, vol.42, pp.533–542, 2005.

[2] S. Buehler and J. Haucap, “Strategic outsourcing revisited,” *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol.61, pp.325–338, 2006.

[3] R. Saouma, “Optimal second-stage outsourcing,” *Management Science*, vol.54, no.6, pp.1147–1159, 2008.

[4] H. Lee, K. C. So, and C. S. Tang, “The value of information sharing in a two-level supply chain,” *Management Science*, vol.46, no.5, pp.626–643, 2000.

[5] G. I. Bischi, H. Dawid, and M. Kopel, “Gaining the competitive edge using internal and external spillovers: a dynamic analysis,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.27, pp.2171–2193, 2003.

[6] 松野成悟, 時永祥三, “別会社方式による IS アウトソーシング多様化に関する一考察,” 日本情報経営学会誌, vol.28, no.1, pp.68–77, 2007.

[7] 松野成悟, 朴唯新, 時永祥三, “資本系列の違いに注目した情報サービス企業の特性に関する実証分析,” 日本情報経営学会第 66 回全国大会予稿集, pp.63–66, 2013.

[8] A. Arya, B. Mittendorf, and D. E. M. Sappington, “The make-or-buy decision in the presence of a rival: Strategic outsourcing to a common supplier,” *Management Science*, vol.54, no.10, pp.1747–1758, 2008.

[9] 時永祥三, 松野成悟, “情報システムのソーシング戦略における TCE と RBV の複合型視座：データによる実証とモデル分析,” 経済学研究, vol.78, no.1, pp.27–39, 2011.

[10] R, Merton, “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, pp.125-144, 1976.

[11] M. Thompson, M. Davison, and H. Rasmussen, “Valuation and optimal operation of electric power plants in competitive markets,” *Operations Research*, vol.50, no.4, pp.546–562, 2004.

[12] 池田欽一, 時永祥三, “ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と資産配分変更を用いたValue at Risk制御への応用,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J91-A, no.3, pp.360–372, 2008.

[13] 池田欽一, 時永祥三, “ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造･販売リアルオプション推定への応用,” 情報処理学会論文誌, vol.45, no.SIG4(TOM20), pp.1–13, 2008.

[14] 時永祥三, 岸川善紀, “遺伝的プログラミングと多段ファジイ推論に基づくジャンプ過程を含む時系列生成モデルの推定,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J93-A, no.5, pp.365–374, 2010.

[15] C. M. Rump and S. Stidham, Jr., “Stability and chaos in input pricing for a service facility with adaptive customer response to congestion,” *Management Science*, vol.44, no.2, pp.246–261, 1998.

[16] S. Stidham, Jr., “Pricing and capacity decisions for a service facility: Stability and multiple local optima,” *Management Science*, vol.38, no.2, pp.1121–1139, 1992.

[17] 池田欽一, 時永祥三, “ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおけるプライシングのカオス性変動の解析とその抑制,” 情報処理学会論文誌, TOM0202004, vol.2, no.2, pp.22–37, 2009.

[18] 池田欽一, 時永祥三, “ネットワーク構成されたノードにおけるフロー入力調整と退去を含むプライシング時系列のカオス解析とその抑制,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J93-A, no.1, pp.1–10, 2010.

[19] S. Matsuno and S. Tokinaga, “Analysis of profit/proce changes in formalizing collaboration among agents through double auction and suppression of fluctuation,” Proc. of Nolta2009, pp.113–116, 2009.

[20] 時永祥三, “3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおけるedge snappingによる同期化とその応用,” 情報処理学会論文誌, 採録決定済み, 2013.

[21] 時永祥三編著, 複雑系と非線形経済動学, 九州大学出版会, 2012.

[22] J. Caballe, X. Jarque, and E. Michetti, “Chaotic dynamics in credit constrained emerging economics,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.30, pp.1261–1275, 2006.

[23] P. Aghion, P. Bacchetta, and T. Piketty, “Dualism and macroeconomic volatility,” *Quarterly Journal of Economics*, vol.114, pp.1357–1397, 1999.

[24] C. Azariadis and B. Smith, “Financial intermediation and regime switching in business cycle,” *American Economic Review*, vol.88, pp.516–536, 1999.

付録 A　企業が資本・労働へ投資して外製をする場合の利益

アントレプレナーである個人は資本 $K(t)$ と労働 $z(t)$ を投入して生産をする。製造される製品の生み出す価値 $y(t)$ の表現は，次の関数にまとめられる（コブ・ダグラス型生産と呼ばれるが，詳細は省略する）。すでに述べたように，製品の価値は投入される資本と労働の積ではなく，これらの間の相補的な関係式で結ばれている。

$$y(t) = A[K(t)]^{\rho}[z(t)]^{1-\rho} \tag{A1}$$

投資額 $I(t)$ は，現在の市場の価格 $p(t)$ により決まると仮定する。

$$I(t) = K(t) + p(t)z(t) \tag{A2}$$

$y(t)$ を最大にする条件を求めると，次の関係式が得られる。

$$z(t) = I(t)(1-\rho)/p(t), K(t) = \rho I(t) \tag{A3}$$

同時に最適な労働投入は，式 (A3) の $z(t)$ を，一定の労働投入 Z と等しくおくことで求められる。

$$p(t) = I(t)(1-\rho)/Z \tag{A4}$$

同時に，これらの変数をもとにして，均衡する最適な生産数量を次のような式で表現しておく。

$$y(t) = AI(t)\rho^{\rho}(1-\rho)^{1-^{\rho}}/p(t)^{1-\rho} \tag{A5}$$

時刻 t における個人の利益を $W(t)$ とする。この個人は投資をまかなう金額を，時刻 t における利益と資金借入との合計であると仮定し，資金借入の額を時刻 t における利益 $W(t)$ に比例する (比例定数を η とする) と仮定すると，次のような関係になる。

$$I(t) = (1+\eta)W(t) \tag{A6}$$

このような関係を用いて時刻 $t+1$ において個人が手にする生産による収入から支出を差し引いたものが利益 $W(t+1)$ であるので，次のようになる。

$$W(t+1) = (1-\alpha_W)[(e_W + y(t) - r\eta W(t)] \tag{A7}$$

これを式 (A6) に代入し，さらに生産額 $y(t)$ を式 (A5) に代入すると，次のような関係が得られる。

$$W(t+1) = (1-\alpha_W)[e_W + W(t)^{\rho}(\xi - r\eta W(t)^{1-\rho})] \tag{A8}$$

$$\xi = A\rho^{\rho}(1+\eta)^{\rho}Z^{1-\rho} \tag{A9}$$

ただし，形式的には時刻 t と $t+1$ との間における利益の変化の式は，上の式で記述可能であるが，資金を借り入れる場合に，市中金利 r が生産することによる利益率よりも高い場合には，資金借入の実施ではなく，生産の増強が選択される。すなわち，この条件が成り立つときの生産による利益 W^m は，関係式 $y(t) - r\eta W(t) = rW(t)$ を満足する $W(t)$ により得られる。式 (5) のような関係が $W(t)$ と W^m との関係で決定される。

時永 祥三〔九州大学名誉教授〕
松野 成悟〔宇部工業高等専門学校経営情報学科　教授〕