離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/27181

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (21), pp.134-139, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」（研究代表者　太田　泰広）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 21 (pp. 134 - 139)

離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化

上岡　修平（KAMIOKA Shuhei）

（Received 15 January 2013; accepted 24 January 2013）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化

京都大学大学院情報学研究科　　上岡修平 (KAMIOKA Shuhei)

概要

非自励離散戸田格子の初期値問題を組合せ論的に厳密に解く. 重み付き径路を用いて連分数と行列式を組合せ論的に解釈することにより, 非自励離散戸田格子のタウ関数に対して非交叉的な径路による組合せ論的な表示を与える.

1　非自励離散戸田格子

Maeda–Tsujimoto [5] の運搬車付き箱玉系に関する研究において導出された (**修正**) **非自励離散戸田格子** ((modified) nonautonomous discrete Toda lattice, nd-Toda lattice)

$$\tilde{q}_n^{(t+1)} + \tilde{e}_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)} + \xi_{t+1}, \tag{1a}$$

$$\tilde{q}_n^{(t+1)} \tilde{e}_{n+1}^{(t+1)} = q_{n+1}^{(t)} e_{n+1}^{(t)}, \tag{1b}$$

$$q_n^{(t+1)} + e_{n+1}^{(t+1)} = \tilde{q}_n^{(t+1)} + \tilde{e}_{n+1}^{(t+1)} - \xi_{t+1}, \tag{1c}$$

$$q_n^{(t+1)} e_n^{(t+1)} = \tilde{q}_n^{(t+1)} \tilde{e}_n^{(t+1)} \tag{1d}$$

を考える. 主たる従属変数は $q_n^{(t)}$ と $e_n^{(t)}$ であり, 補助変数として $\tilde{q}_n^{(t)}$ と $\tilde{e}_n^{(t)}$ を, 時刻 t に依存する非自励パラメータとして ξ_t を含む. 本稿では (1) を半無限格子 $n = 0, 1, 2, \ldots$ の上で扱い, 端点 $n = 0$ において次の境界条件を課す:

$$e_0^{(t)} = 0, \qquad q_0^{(t)} = \frac{\tilde{q}_0^{(t-1)} q_0^{(t-1)}}{q_0^{(t-1)} + \xi_t}. \tag{2}$$

本稿では非自励離散戸田格子 (1) の初期値問題を考え, その厳密解を組合せ論的に書き下す.

タウ関数 $\tau_{n,k}^{(t)}$ $(k = 0, 1)$ を従属変数変換

$$q_n^{(t)} = \frac{\tau_{n,0}^{(t)} \tau_{n+1,1}^{(t)}}{\tau_{n+1,0}^{(t)} \tau_{n,1}^{(t)}}, \qquad e_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1,0}^{(t)} \tau_{n-1,1}^{(t)}}{\tau_{n,0}^{(t)} \tau_{n,1}^{(t)}}, \tag{3a}$$

$$\tilde{q}_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1,1}^{(t)} \tau_{n,1}^{(t-1)}}{\tau_{n,1}^{(t)} \tau_{n+1,1}^{(t-1)}}, \qquad \tilde{e}_n^{(t)} = \frac{\tau_{n-1,1}^{(t)} \tau_{n+1,1}^{(t-1)}}{\tau_{n,1}^{(t)} \tau_{n,1}^{(t-1)}} \tag{3b}$$

により導入する. このとき非自励離散戸田格子 (1) は次の双線形方程式の連立系に帰着する:

$$\tau_{n,1}^{(t-1)} \tau_{n+1,0}^{(t)} = \tau_{n+1,1}^{(t-1)} \tau_{n,0}^{(t)} + \xi_t \tau_{n,1}^{(t)} \tau_{n+1,0}^{(t-1)}, \tag{4a}$$

$$\tau_{n+1,1}^{(t)} \tau_{n+1,0}^{(t-1)} = \tau_{n,1}^{(t)} \tau_{n+2,0}^{(t-1)} + \tau_{n+1,1}^{(t-1)} \tau_{n+1,0}^{(t)}. \tag{4b}$$

ただし $n=0,1,2,\ldots$ で境界条件は $\tau_{0,k}^{(t)}=1$. 双線形方程式系 (4) から非自励離散戸田格子の行列式解が見つかる. 任意関数 $f_n^{(t)}$ で分散関係式

$$f_n^{(t+1)}=f_{n+1}^{(t)}+\xi_{t+1}f_n^{(t)} \tag{5}$$

を満たすものをとる. このとき (Hankel) 行列式

$$\tau_{n,k}^{(t)}=\det(f_{i+j+k}^{(t)})_{i,j=0}^{n-1} \tag{6}$$

は双線形方程式系 (4) の解である. 証明は行列式の Plücker 関係式に依る.

2 初期値問題

次の初期値問題を考える.

問題. 非自励離散戸田格子 (1) の $t=0$ における初期値を

$$q_n^{(0)}=a_{2n},\qquad e_n^{(0)}=a_{2n+1},\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

により定める. このとき任意時刻 $t=0,1,2,\ldots$ におけるタウ関数 $\tau_{n,k}^{(t)}$ の値を, 初期値 a_n および非自励パラメータ ξ_t の関数として書き下せ.

本稿の主目的は, この初期値問題の厳密解を組合せ論的に書き下すことである.

初期値問題の解の土台になるのは行列式解 (6) である. 注目すべきは行列式解 (6) において, 非自励離散戸田格子が線形化されていることである. つまり (4) と (6) を $q_n^{(t)}$ と $e_n^{(t)}$ から $f_n^{(t)}$ への ($\tau_{n,k}^{(t)}$ 経由の) 従属変数変換とみなすとき, 元々の非線形方程式系 (1) は線形方程式 (5) に書き換わる. 線形方程式 (5) の初期値問題を解くのは容易であり, その解は

$$f_n^{(t)}=\sum_{k=0}^{t}f_{t+n-k}^{(0)}e_k(\xi_1,\ldots,\xi_t),\qquad t,n=0,1,2,\ldots. \tag{8}$$

ただし $e_k(\xi_1,\ldots,\xi_t)$ は t 変数 k 次の初等対称多項式であり,

$$e_k(\xi_1,\ldots,\xi_t)=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le t}\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}. \tag{9}$$

この事実から非自励離散戸田格子の初期値問題は次の二つの小問題に帰着する:

1. 変数 $f_n^{(t)}$ の $t=0$ における値 $f_n^{(0)}$ を初期値 a_n の関数として書き下せ.
2. 変数 $f_n^{(t)}$ を成分とする行列式 $\tau_{n,k}^{(t)}$ の値を (6) と (8) から求めよ.

以下ではこれらの小問題を解いて初期値問題の解を導く.

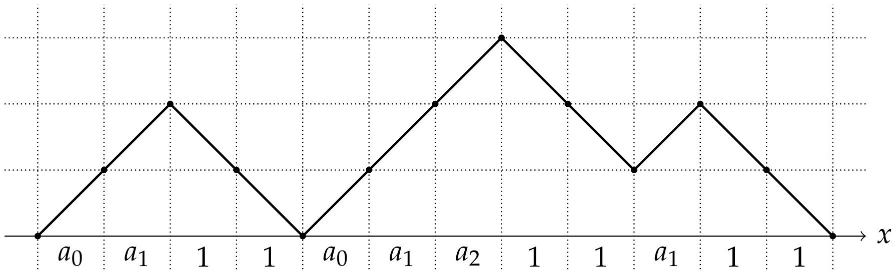

図 1　接地した正径路 P (a_n および 1 は直上の枝の重み).

2.1　変数 $f_n^{(t)}$ の初期値 $f_n^{(0)}$ を求める

$f_n^{(0)}$ の値は (3), (6), (7) から導かれる方程式系

$$a_{2n} = \frac{\tau_{n,0}^{(0)}\tau_{n+1,1}^{(0)}}{\tau_{n+1,0}^{(0)}\tau_{n,1}^{(0)}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{\tau_{n+2,0}^{(0)}\tau_{n,1}^{(0)}}{\tau_{n+1,0}^{(0)}\tau_{n+1,1}^{(0)}}, \qquad \tau_{n,k}^{(0)} = \det(f_{i+j+k}^{(0)})_{i,j=0}^{n-1},$$
$$n = 0,1,2,\ldots, \qquad k = 0,1, \quad (10)$$

を $f_n^{(0)}$ に関して解くことにより求まる. これは Padé 近似の qd アルゴリズム (例えば Baker–Graves-Morris [2, Chapter 4]) に現れる方程式系であり, 形式的冪級数の連分数展開に関する次の方程式と等価である:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(0)} z^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_0 z}{1 - \cfrac{a_1 z}{1 - \cfrac{a_2 z}{1 - \cdots}}}}. \tag{11}$$

ただし $f_0^{(0)} = 1$ と正規化した.

組合せ論における Flajolet [3] の結果は, 方程式 (11) の右辺にある (Stieltjes) 連分数を冪級数展開するための手法を与える. 二次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上の (向き付けられた) **径路** (path) P で二種類の (有向) 枝 $(1,1)$, $(1,-1)$ により構成されるものを考える. 径路 P は二つの端点 (始点と終点) がともに x 軸 ($y = 0$) 上にあるとき**接地**しているという. また x 軸より下に節点を一つも持たないとき**正**であるという. 図 1 に接地した正径路の例を示す.

任意の径路 P に対して**重み** $w(P)$ を次のように定める. まず P の各枝 e に対して次の規則で重み $w(e)$ を付ける: e が直線 $y = n$ から $y = n+1$ への $(1,1)$ 枝であるとき $w(e) = a_n$, $(1,-1)$ 枝であるとき (高さに依らず) $w(e) = 1$. このとき

$$w(P) = \prod_{e \in P} w(e). \tag{12}$$

ただし右辺の積は P に含まれる枝 e 全てにわたってとる. 例えば図 1 の径路 P の重みは $w(P) = a_0^2 a_1^3 a_2$ である. 径路 P に含まれる $(1,-1)$ 枝の数を $d(P)$ で表す.

補題 1 (Flajolet [3])**.** Stieltjes 連分数に関して次が成り立つ:

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_0 z}{1-\cfrac{a_1 z}{1-\cfrac{a_2 z}{1-\cdots}}}} = \sum_P w(P) z^{d(P)}. \tag{13}$$

ただし右辺の (形式) 和は始点を原点 $(0,0)$ に持つ (有限長の) 接地した正径路 P 全てにわたってとる.

補題 1 の帰結として $f_n^{(0)}$ の値は次のように径路の言葉で組合せ論的に求まる.

系 2. $f_n^{(0)}$ の値は a_n の斉 n 次多項式の形で与えられ,

$$f_n^{(0)} = \sum_P w(P). \tag{14}$$

ただし右辺の和は始点と終点をそれぞれ $(0,0)$ と $(2n,0)$ に持つ正径路全てにわたってとる.

例えば

$$f_0^{(0)} = 1, \qquad f_1^{(0)} = a_0, \qquad f_2^{(0)} = a_0^2 + a_0 a_1, \qquad f_3^{(0)} = a_0^3 + 2a_0^2 a_1 + a_0 a_1^2 + a_0 a_1 a_2. \tag{15}$$

2.2 行列式 $\tau_{n,k}^{(t)}$ の値を求める

今タウ関数 $\tau_{n,k}^{(t)}$ は行列式 (6) により与えられている. 行列式の成分 $f_n^{(t)}$ は初等対称多項式による表示 (8) を持つ. 従って行列式の Binet–Cauchy の公式および対称関数の Jacobi–Trudi の公式 (例えば Stanley [7, Chapter 7]) より, 行列式 $\tau_{n,k}^{(t)}$ は Schur 多項式を用いて

$$\tau_{n,k}^{(t)} = \sum_{\lambda \subseteq (n)^t} s_\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_t) \det\left(f_{t+i-\lambda'_j+j+k}^{(0)}\right)_{i,j=0}^{n-1} \tag{16}$$

と展開できる. 右辺の和は n 行 t 列の長方形 $(n)^t$ に含まれる Young 図形 λ 全てにわたってとり, 行列式の中に現れる $\lambda' = (\lambda'_0 \geq \cdots \geq \lambda'_{n-1})$ は λ に共役な Young 図形 (整数分割) である. また $s_\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_t)$ は t 変数の Schur 多項式であり, Young 盤による次の表示を持つ:

$$s_\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_t) = \sum_T \prod_{(i,j)\in\lambda} \xi_{T_{i,j}}. \tag{17}$$

右辺の和は Young 図形 λ の半標準盤 $T = (T_{i,j})_{(i,j)\in\lambda}$ $(1 \leq T_{i,j} \leq t;\, T_{i,j} \leq T_{i,j+1};\, T_{i,j} < T_{i+1,j})$ についてとっている.

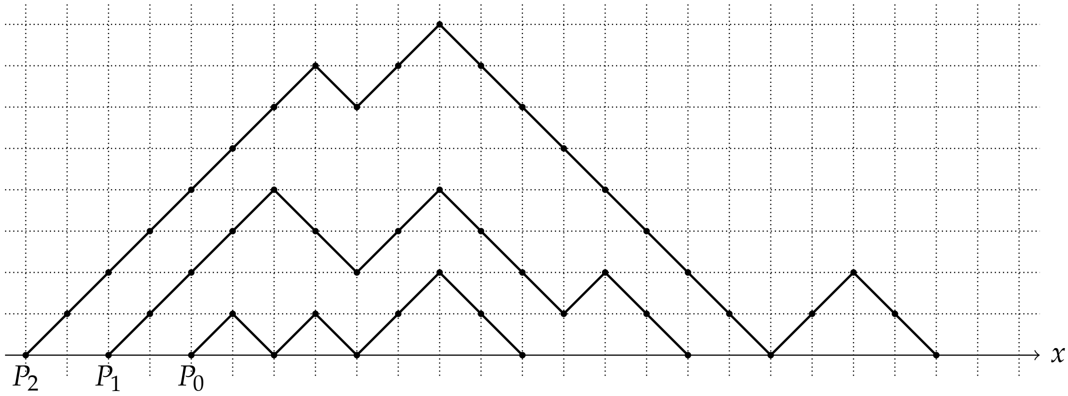

図 2　非交叉的な径路集合 $\boldsymbol{P} = \{P_0, P_1, P_2\}$ ($t = 8, n = 3, k = 0, \lambda = (3,2,2,1)$).

タウ関数 (16) において, 和の中の行列式 $\det(f^{(0)}_{t+i-\lambda'_j+j+k})_{i,j=0}^{n-1}$ は Young 図形 $\lambda \subseteq (n)^t$ の取り方に依存する. Young 図形 $\lambda \subseteq (n)^t$ を一つ固定するとき, この行列式の値は組合せ論的に厳密に評価することができる. 系 2 より, 行列式の (i, j) 成分は径路による表示

$$f^{(0)}_{t+i-\lambda'_j+j+k} = \sum_{P_{i,j}} w(P_{i,j}) \tag{18}$$

を持つ. ただし $P_{i,j}$ は始点と終点をそれぞれ $(-2(i+k), 0)$ と $(2(t-\lambda'_j+j), 0)$ に持つ正径路である. このような行列式に対しては非交叉径路に関する Gessel–Viennot の補題 [4, 1] が適用可能である. その帰結として

$$\det(f^{(0)}_{t+i-\lambda'_j+j+k})_{i,j=0}^{n-1} = \sum_{\boldsymbol{P}} w(P_0)\cdots w(P_{n-1}). \tag{19}$$

ただし $\boldsymbol{P} = \{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ は接地した正径路 n 本からなる集合であり, 次の条件を満たすもの全てを動く:

(i) P_j は始点と終点をそれぞれ $(-2(j+k), 0)$ と $(2(t-\lambda'_j+j), 0)$ に持つ正径路である.
(ii) $P_0, \dots, P_{n-1}$ は非交叉的である. つまりどの二本 P_j と P_k ($j \neq k$) も節点を共有しない.

図 2 に $t = 8$, $n = 3$, $k = 0$, $\lambda = (3,2,2,1)$ ($\lambda' = (4,3,1)$) の場合の非交叉的な径路集合 $\boldsymbol{P} = \{P_0, P_1, P_2\}$ の例を示す.

最終的に (16) と (19) を併せて非自励離散戸田格子の初期値問題の解を得る.

定理 3. 非自励離散戸田格子 (1) の初期値問題の解はタウ関数

$$\tau^{(t)}_{n,k} = \sum_{\lambda \subseteq (n)^t} s_\lambda(\xi_1, \dots, \xi_t) \sum_{\boldsymbol{P}} w(P_0)\cdots w(P_{n-1}), \qquad t, n = 0, 1, 2, \dots, \qquad k = 0, 1, \tag{20}$$

により与えられる. ただし右辺の二つ目の和において $\boldsymbol{P} = \{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ は (Young 図形 λ に依存する) 接地した正径路 n 本からなる集合であり, 上記の二条件 (i) と (ii) を満たすもの全体を動く.

タウ関数 $\tau_{n,k}^{(t)}$ の正値性は初期値 a_n と非自励パラメータ ζ_t の正値性から保証される. 特に (20) はタウ関数 $\tau_{n,k}^{(t)}$ の**減算を含まない**表示を与えている. これより非自励離散戸田格子の超離散類似 (運搬車付き箱玉系) [5] に対しても, (20) の超離散化により (自励系における Nakata [6] の解のような) 組合せ論的な解が構成可能であると考えられる.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 24740059 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] M. Aigner, *Lattice paths and determinants*, Computational Discrete Mathematics, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2122, Springer, 2001, pp. 1–12.

[2] G. A. Baker Jr. and P. Graves-Morris, *Padé approximants*, 2nd ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 59, Cambridge, 1996.

[3] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980), 125–161.

[4] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

[5] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Letters **2** (2010), 95–98.

[6] Y. Nakata, *Solutions to the ultradiscrete Toda molecule equation expressed as minimum weight flows of planar graphs*, J. Phys. A **44** (2011), 295204.

[7] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge, 1999.