拡張されたTzitzeica方程式と中心等積アフィン曲面

三谷, 浩将
立教大学大学院

筧, 三郎
立教大学理学部

ラルフ, ウィロックス
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/27180

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24AO-S3 (20), pp.128-133, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」(研究代表者　太田　泰広)
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 20 (pp. 128 - 133)

拡張された Tzitzeica 方程式と中心等積アフィン曲面

三谷　浩将（MITANI Hiromasa），筧　三郎（KAKEI Saburo），ラルフ　ウィロックス（Ralph Willox）

（Received 15 January 2013; accepted 27 February 2013）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

拡張されたTzitzeica方程式と中心等積アフィン曲面

立教大学大学院　三谷 浩将 (Mitani, Hiromasa)
立教大学理学部　筧 三郎 (Kakei, Saburo)
東京大学大学院数理科学研究科　ラルフ・ウィロックス (Willox, Ralph)

概 要

負の重みの時間発展を取り入れた結合型 KP 階層の簡約から，Tzitzeica 方程式の一つの拡張が得られる (Willox, 2005)．本稿では，その方程式の持つ 6×6 行列係数の Lax 表示と，中心アフィン等積曲面に対する Gauss-Weingarten の公式との関係を考察する．

1　はじめに

近年，曲線と曲面の古典微分幾何学と可積分系理論との関係が盛んに議論されている [2, 3, 6, 7, 11]．例えば，ソリトン方程式の代表例の一つである sine-Gordon 方程式は，3 次元 Euclid 空間内における Gauss 曲率が恒等的に -1 である曲面の Gauss-Codazzi 方程式から得られることがよく知られている [6, 7, 11]．その他にも曲面の具体的な構成，曲面の変換理論において，可積分理論で培われた考え方が多く利用されている．

本稿の題目の Tzitzeica 方程式

$$(\log h)_{xy} = h - \frac{1}{h^2} \tag{1}$$

も，曲面論と可積分系を結びつける重要な例である．Tzitzeica 方程式 (1) は，もともとは Tzitzeica が等積アフィン幾何学における曲面論を創始した際に発見された方程式であり，アフィン球面の Gauss-Codazzi 方程式の両立条件より導出される [1, 11, 12]．一方，ソリトン理論の立場からみると，方程式 (1) は，$A_2^{(2)}$ 型ルート系に付随した 2 次元戸田格子方程式とみなせる [9, 11]．このように古典微分幾何学とソリトン理論との間には密接な関係があることが知られており，今日では「可積分幾何」とよばれる研究分野が形成されている [2, 3, 6, 11]．

本稿では，Tzitzeica 方程式の一般化に焦点を当てたい．文献 [14] において，結合型 KP 階層の負の重みをもつ時間発展を考察することで，以下に挙げる $1+1$ 次元の可積分方程式が導出された:

$$(\log h)_{xy} = h - \frac{1+\nu^2}{h^2} + \omega\tilde{\omega}, \quad \nu_x = \tilde{\omega}_y h - \tilde{\omega} h_y, \quad \nu_y = \omega_x h - \omega h_x, \quad \omega_y = \tilde{\omega}_x. \tag{2}$$

これらの方程式は次の Lax 表示の両立条件を計算することで得られる．

$$\begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \chi_0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \omega/\lambda \\ \lambda & -h_x/h & 0 & \tilde{\omega}/(h\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & h_x/h & 0 & \nu/\lambda & 0 \\ 0 & \lambda\nu & 0 & h_x/h & -1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\tilde{\omega}/h & 0 & -h_x/h & -1/\lambda \\ \lambda\omega & 0 & 0 & -1/\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \chi_0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$
\begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \chi_0\\ \chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 & h/\lambda & 0 & 0 & 0 & \tilde{\omega}/\lambda \\ 0 & 0 & 1/(h^2\lambda) & \nu/(h^2\lambda) & 0 & 0 \\ h/\lambda & 0 & 0 & 0 & h\omega/\lambda & 0 \\ 0 & h\lambda\omega & 0 & 0 & 0 & -h\lambda \\ 0 & 0 & \lambda\nu/h^2 & -\lambda/h^2 & 0 & 0 \\ \lambda\tilde{\omega} & 0 & 0 & 0 & -h\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \chi_0\\ \chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}. \tag{4}
$$

(3), (4) の Lax 形式に関連して，井ノ口は文献 [8] において以下の問題を提唱した:

1. スペクトル径数 λ の幾何学的な意味 (どのような変形族なのか？)
2. なぜ 6×6 なのか？　中心アフィン曲面なので，$SL(3;\mathbf{R})$ で，より簡潔な Lax 形式が得られないか？
3. Lax 形式 (3)，(4) は射影幾何に移行し，プリュッカー埋め込みを介したものか？

本稿では，問題 2，すなわち 6×6 Lax 表示と 3×3 Lax 表示との関係を考察していきたい．次節より，まずは幾何的な設定を解説することから始めて，我々の結果については 3 節で述べる．

2　中心等積アフィン曲面の構造方程式

まず，3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面論の基本事項をまとめ，中心等積アフィン曲面について解説する．(アフィン微分幾何学についての一般論は，[10] を参照していただきたい．)

$\mathbf{R}^3$ 内の曲面が，次のようにパラメータ表示されているものとする:

$$
\begin{array}{cccc} \boldsymbol{p}: & D & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & \cup & & \cup \\ & (u,v) & \longmapsto & (X(u,v),\ Y(u,v),\ Z(u,v)) \end{array} \tag{5}
$$

ここで D は $\mathbf{R}^2$ 内の適当な単連結領域とする．このとき，単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v)/\,\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|$ により定めると，Gauss の公式

$$
\boldsymbol{p}_{uu} = \Gamma^1_{11}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p}_{uv} = \Gamma^1_{12}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{p}_{vv} = \Gamma^1_{22}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^2_{22}\boldsymbol{p}_v + N\boldsymbol{n}, \tag{6}
$$

および Weingarten の公式

$$
\boldsymbol{n}_u = -\frac{FM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u - \frac{EM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_v, \quad \boldsymbol{n}_v = -\frac{GM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u - \frac{EM}{FG-F^2}\boldsymbol{p}_v \tag{7}
$$

が成り立つことが知られている．ただし，Γ^k_{ij} は Christoffel 記号であり，E, F, G, L, M, N は第一基本形式，第二基本形式

$$
\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad \mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{8}
$$

の係数である．また，曲面の Gauss 曲率 K は，第一基本量 E, F, G と第二基本量 L, M, N を用いて，次のように表される．

$$
K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{9}
$$

ここで通常の微分幾何学と中心等積アフィン微分幾何学の違いをまとめておく [10].

通常の微分幾何学: Euclid 変換（合同変換 = 直交変換 + 平行移動）で不変な性質を研究する．

アフィン幾何学: アフィン変換（線形変換＋平行移動）で不変な性質を研究する．

中心等積アフィン幾何: 平行移動なしの，体積要素を保存する線形変換で不変な性質を研究する．

つまり中心等積アフィン幾何学とは，二つの図形が存在しているとき，$SL(3;\mathbf{R})$ の作用でそれらが移り合うならば「合同」とみなす幾何学である．

3次元Euclid空間におけるGaussの公式(6)は，直交変換$SO(3;\mathbf{R})$の下で不変であるが，$SL(3;\mathbf{R})$で不変ではない．中心等積アフィン微分幾何学とは，$SL(3;\mathbf{R})$ で不変な幾何学的性質を研究する分野であり，方程式 (6) を，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の代わりに位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ を用いて記述することになる．

2.1 Gauss 曲率が負の場合

Schief [13] は，Gauss 曲率が負の場合を漸近座標系を用いて考察した．(u,v) を漸近座標系とすると $L=N=0$ であり，ガウス曲率 (9) は $K=-M^2/(EG-F^2)$ (<0) となる．さらにこの場合，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ との間には次の関係があることが示される:

$$\boldsymbol{p}=-\frac{d_v}{M}\boldsymbol{p}_u-\frac{d_u}{M}\boldsymbol{p}_v+d\boldsymbol{n},\quad d=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle. \tag{10}$$

これを (6) に用いて $\boldsymbol{n}$ を消去すると，中心等積アフィン幾何における Gauss 方程式が得られる [13]:

$$\boldsymbol{p}_{uu}=\left(\frac{h_u}{h}+\rho_u\right)\boldsymbol{p}_u+\frac{a}{h}\boldsymbol{p}_v,\quad \boldsymbol{p}_{uv}=h\boldsymbol{p}+\rho_v\boldsymbol{p}_u+\rho_u\boldsymbol{p}_v,\quad \boldsymbol{p}_{vv}=\left(\frac{h_v}{h}+\rho_v\right)\boldsymbol{p}_v+\frac{b}{h}\boldsymbol{p}_u. \tag{11}$$

ここで，h, ρ, a, b は，

$$h=\frac{M}{d}=\frac{M}{\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle},\quad \rho=\frac{1}{4}\log\left(-\frac{d^4}{K}\right),\quad a=h\Gamma_{11}^2,\quad b=h\Gamma_{22}^1 \tag{12}$$

で定義される．方程式系 (11) の両立条件より，次の非線形方程式系が得られる:

$$(\log h)_{uv}=h-\frac{ab}{h^2}+\rho_u\rho_v,\quad a_v+\rho_u h_u=\rho_{uu}h,\quad b_u+\rho_v h_v=\rho_{vv}h. \tag{13}$$

方程式系 (13) において $\rho=$ 定数, $a=b=1$ とおけば，Tzitzeica 方程式 (1) が得られる．

2.2 Gauss 曲率が正の場合

本節では Gauss 曲率が正の場合について議論する [4, 5]．この場合には，第二基本量 L, M, N が

$$L=N,\quad M=0 \tag{14}$$

となるような局所座標系 (u,v) をとって考える (第二基本量に関する等温座標系)．このときの Gauss 曲率 (9) は，$K=L^2/(EG-F^2)$ (>0) で与えられる．さらに，複素座標 z, $\bar{z}$ を $z=u+\sqrt{-1}v$, $\bar{z}=u-\sqrt{-1}v$ によって定める．

前節で紹介した $K<0$ の場合 [13] と同様の計算を行えば，今の場合においては次の結果が得られる:

$$\boldsymbol{p}_{zz}=\left(\frac{h_z}{h}+\rho_z\right)\boldsymbol{p}_z+\frac{a}{h}\boldsymbol{p}_{\bar{z}},\quad \boldsymbol{p}_{z\bar{z}}=h\boldsymbol{p}+\rho_{\bar{z}}\boldsymbol{p}_z+\rho_z\boldsymbol{p}_{\bar{z}},\quad \boldsymbol{p}_{\bar{z}\bar{z}}=\frac{b}{h}\boldsymbol{p}_z+\left(\frac{h_{\bar{z}}}{h}+\rho_{\bar{z}}\right)\boldsymbol{p}_{\bar{z}}. \tag{15}$$

ただし，

$$d=\langle\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{n}\rangle,\quad h=\frac{2L}{d},\quad \rho=\log K^{-\frac{1}{4}}d,\quad a=h\hat{\Gamma}_{11}^2,\quad b=h\hat{\Gamma}_{22}^1. \tag{16}$$

である．(15) を行列の形で書き直せば

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}_z \\ \boldsymbol{p}_{\bar{z}} \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{h_z}{h} + \rho_z & \dfrac{a}{h} \\ h & \rho_{\bar{z}} & \rho_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}_z \\ \boldsymbol{p}_{\bar{z}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}_z \\ \boldsymbol{p}_{\bar{z}} \end{bmatrix}_{\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ h & \rho_{\bar{z}} & \rho_z \\ 0 & \dfrac{b}{h} & \dfrac{h_{\bar{z}}}{h} + \rho_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}_z \\ \boldsymbol{p}_{\bar{z}} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

となり，両立条件を計算すれば，Gauss-Codazzi 方程式が

$$(\log h)_{z\bar{z}} = h - \frac{ab}{h^2} + \rho_z \rho_{\bar{z}}, \quad a_{\bar{z}} + \rho_z h_z = \rho_{zz} h, \quad b_z + \rho_{\bar{z}} h_{\bar{z}} = \rho_{\bar{z}\bar{z}} h \tag{18}$$

で与えられることがわかる．

2.3 拡張された Tzitzeica 方程式との関係

ここで

$$\begin{array}{cccccccc} (18) & : & z & \bar{z} & \rho_z & \rho_{\bar{z}} & a & b \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (2) & : & x & y & \omega & \tilde{\omega} & \nu - \sqrt{-1} & \nu + \sqrt{-1} \end{array} \tag{19}$$

と対応付ければ，Gauss-Codazzi 方程式 (18) は拡張された Tzitzeica 方程式 (2) と一致することがわかる．すなわち，構造方程式 (18) において $\operatorname{Im} a = -1$ という条件を要請して得られる凸な中心アフィン等積曲面は，拡張された Tzitzeica 方程式 (2) によって記述されることになる．

後の便宜ために (17) に対して，次のゲージ変換

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p}_z \\ \boldsymbol{p}_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_z \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{20}$$

を行えば，

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_z \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\bar{z}} \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} -\rho_z & 1 & 0 \\ 0 & h_z/h & a/h \\ h & \rho_{\bar{z}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_z \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\bar{z}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_z \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\bar{z}} \end{bmatrix}_{\bar{z}} = \begin{bmatrix} -\rho_{\bar{z}} & 0 & 1 \\ h & 0 & \rho_z \\ 0 & b/h & h_{\bar{z}}/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_z \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{21}$$

が得られることを注意しておく．この連立偏微分方程式の両立条件も (18) であるので，ここでは (21) を (18) の 3×3-行列係数 Lax 表示とみなすことにする．ただし，(21) には，いわゆる “spectral parameter” は含まれていない．

3 6×6 Lax 表示から 3×3 Lax 表示へ

拡張された Tzitzeica 方程式の 6×6-行列係数 Lax 表示 (3)，(4) に対して，次のゲージ変換を行えば，3×3-行列係数 Lax 表示が得られる．

$$\begin{bmatrix} \psi_0(\lambda) \\ \psi_1(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) \\ \chi_0(\lambda) \\ \chi_1(\lambda) \\ \chi_2(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/h & 0 & 0 & \lambda/h \\ 0 & 1/\lambda & 0 & 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2/h & 0 & 0 & \lambda^2/h \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_0(\lambda) \\ \tilde{\psi}_1(\lambda) \\ \tilde{\psi}_2(\lambda) \\ \tilde{\chi}_0(\lambda) \\ \tilde{\chi}_1(\lambda) \\ \tilde{\chi}_2(\lambda) \end{bmatrix} \tag{22}$$

(3), (4) に (22) を代入し，$\lambda=\sqrt{-1}$ とすれば，

$$\begin{bmatrix}\tilde\psi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_2(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_2(\sqrt{-1})\end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix}-\omega & 1 & 0 & & & \\ 0 & h_x/h & (\nu-\sqrt{-1})/h & & O & \\ h & \bar\omega & 0 & & & \\ & & & h_x/h & 0 & (-\nu-\sqrt{-1})/h \\ & O & & 1 & \omega & 0 \\ & & & -\bar\omega & h & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde\psi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_2(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_2(\sqrt{-1})\end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix}\tilde\psi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_2(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_2(\sqrt{-1})\end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix}-\bar\omega & 0 & 1 & & & \\ h & 0 & \omega & & O & \\ 0 & (\nu+\sqrt{-1})/h & h_y/h & & & \\ & & & 0 & h & -\omega \\ & O & & 0 & \bar\omega & 1 \\ & & & (-\nu+\sqrt{-1})/h & 0 & h_y/h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde\psi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\psi_2(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_0(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_1(\sqrt{-1})\\ \tilde\chi_2(\sqrt{-1})\end{bmatrix} \quad (24)$$

というブロック対角化された形が得られる．すなわち，

$$\tilde\Psi(\lambda) := \begin{bmatrix}\tilde\psi_0(\lambda)\\ \tilde\psi_1(\lambda)\\ \tilde\psi_2(\lambda)\end{bmatrix} \quad (25)$$

とおけば，$\tilde\Psi(\sqrt{-1})$ の満たす方程式は

$$\tilde\Psi(\sqrt{-1})_x = \begin{bmatrix}-\omega & 1 & 0\\ 0 & h_x/h & (\nu-\sqrt{-1})/h\\ h & \bar\omega & 0\end{bmatrix}\tilde\Psi(\sqrt{-1}), \quad (26)$$

$$\tilde\Psi(\sqrt{-1})_y = \begin{bmatrix}-\bar\omega & 0 & 1\\ h & 0 & \omega\\ 0 & (\nu+\sqrt{-1})/h & h_y/h\end{bmatrix}\tilde\Psi(\sqrt{-1}) \quad (27)$$

となる．(26), (27) の係数行列は，対応付け (19) の下で，(ゲージ変換された) Gauss-Weingarten 方程式 (21) の係数行列と一致する．

4 まとめと今後の課題

適当なゲージ変換を行うことで，拡張された Tzitzeica 方程式の Lax 表示 (6×6-行列係数) を凸な中心アフィン等積曲面に対する Lax 表示 (3×3-行列係数) と対応付けることができた．しかし現時点ではまだいくつもの課題が残っている．以下にいくつかの課題を挙げておこう．

- “スペクトル・パラメータ” の入った 3×3-Lax 形式
  ここでは (18), (21) のようにスペクトル・パラメータを含まない線形方程式系も，(両立条件が非線形方程式を与えるという意味で) “Lax 形式” と呼んだ．しかし，例えば “DPW の方法” [3] を適用することを考えると，スペクトル・パラメータを含んだ形でないと利用できない．紙面の都合でここでは紹介しないが，(18) をスペクトル・パラメータを含んだ形に書き換えることは可能である．しかし，これまでのところ，それを 6×6 Lax 形式 (3), (4) と直接対応付けることには成功していない．

- 曲面のフレームの構成
  前節で述べた (26), (27) と (21) の対応関係において，(26), (27) はベクトル値関数 (25) に対する方程式であるが，曲面のフレームと直接対応付けるには 3×3-行列値関数が必要である．ベクトル値関数 3 つの組をどのようにとれば良いかは，今のところ十分な形では理解できていない．

- "1-ソリトン解" に対応する具体例
  方程式 (2) は，D'_∞ 階層の退化として構成されたものなので，適当な意味で "1-ソリトン解" を持つことが期待できる．それに対応した中心等積アフィン曲面を具体的に定めて図示することも，重要な課題である．

参考文献

[1] A. Bobenko and W. K. Schief, Affine spheres: Discretization via duality relations, *Experimental Math.* **8** (1999), 261–280.

[2] A.I. Bobenko, Y.B. Suris, *Discrete Differential Geometry: Integrable Structure*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 98, AMS, 2008

[3] S. Fujimori, S. Kobayashi and W. Rossman, Loop group methods for constant mean curvature surfaces, *Rokko Lectures in Mathematics* **17**, 2005 (`arXiv:math/0602570 [math.DG]`).

[4] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with non-semisimple centroaffine Tchebychev operator, *Results in Mathematics* (2009), 177–195.

[5] A. Fujioka, Centroaffine minimal surfaces whose centroaffine curvature and Pick function are constants, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2010), 694–700.

[6] 井ノ口順一, 小林真平, 松浦望, 曲線の微分幾何学とソリトン方程式—可積分幾何入門—, 立教大学 SFR 自由プロジェクト研究「弦理論と重力理論の数学的構造解明に関する学際的研究」講究録 No.8, 2005.

[7] 井ノ口順一, 負定曲率曲面とサイン・ゴルドン方程式, 埼玉大学数学レクチャーノート, 2012.

[8] 井ノ口順一, なぞのウィロックス方程式に関する一注意, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 **17ME-S2** (2005), 134–153.

[9] J.J.C. Nimmo and R. Willox, Darboux transformations for the 2D Toda system, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **453** (1997), 2497–2525.

[10] 野水克己, 佐々木武, アフィン微分幾何学, 裳華房, 1994.

[11] C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press (2002).

[12] G. Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris* **150** (1910), 955–956.

[13] W. K. Schief, Hyperbolic surfaces in centro-affine geometry, *Chaos Solitons and Fractrals* **11** (2000), 97–106.

[14] R. Willox, On a generalized Tzitzeica equation, *Glasgow Math. J.* **47A** (2005), 221–231.