

粒子CA のEuler-Lagrange変換について

山本, 匠
早稲田大学基幹理工学研究科

高橋, 大輔
早稲田大学基幹理工学研究科

<https://doi.org/10.15017/27179>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．24A0-S3（19），pp.123-127，2013-03．九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 19 (pp. 123 - 127)

粒子 CA の Euler-Lagrange 変換について

山本 匠 (YAMAMOTO Takumi), 高橋 大輔
(TAKAHASHI Daisuke)

(Received 22 January 2013; accepted 24 February 2013)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

粒子 CA の Euler-Lagrange 変換について

早稲田大学 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻 山本匠 (YAMAMOTO Takumi)
早稲田大学 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻 高橋大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

概 要 ECA184 の max-plus 表現の Euler-Lagrange 変換に関する文献 [1] ではステップ関数を用いた変数変換により, この CA の Euler 表現と Lagrange 表現を結びつける方法が示されている. この方法はステップ関数の性質と粒子の位置の単純増加性を用いたもので, ECA184 以外の粒子 CA にも直接この方法が適用できるはずである.

本研究ではどのような粒子 CA に対しこの方法が使えるのか, その CA の一般形を求めた.

1 はじめに

$\{0, 1\}$ の 2 つの状態を持つ時間 1 次元空間 1 次元セルオートマトン (CA) のうち, 1 の総数 (0 の総数) が時間によって変わらないものを考える. このような CA を, 1 を粒子とみなしてを粒子 CA と呼ぶ.

粒子 CA の解を表す際, 時刻 n における空間座標 j での粒子の個数 u_j^n を表す方法, および左から k 番目の粒子の時刻 n での空間座標 x_k^n を表す方法がある. 連続系の用語を流用して前者を Euler 表現, 後者を Lagrange 表現と呼ぶ.

同じ CA の時間発展方程式を Euler 表現, Lagrange 表現それぞれで表した時, 両者の間に変換が存在する. これを粒子 CA の Euler-Lagrange 変換と呼ぶ.

変換の中に登場するステップ関数は以下の様に定義している.

$$H(j) = \begin{cases} 1, & j \geq 0 \\ 0, & j < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

2 性質の証明

式変形で用いるステップ関数と max, min についての性質について証明する.

性質 1 (ステップ関数と max, min の交換) 広義単調減少数列 x_k, y_k とステップ関数 $H(j)$ に対して以下が任意の自然数 N に対して成り立つ.

$$\sum_{k=1}^N H(\max(x_k, y_k)) = \max \left(\sum_{k=1}^N H(x_k), \sum_{k=1}^N H(y_k) \right) \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^N H(\min(x_k, y_k)) = \min \left(\sum_{k=1}^N H(x_k), \sum_{k=1}^N H(y_k) \right) \quad (2.2)$$

証明

(2.1) を示す.

N に対する数学的帰納法を用いる. まず $N = 1$ の時成立する事を示す.

$\max(x_1, y_1) \geq 0$ の場合は $H(\max(x_1, y_1)) = 1$ であり,

$$\begin{aligned}\max(x_1, y_1) \geq 0 &\Rightarrow (x_1 \geq 0) \vee (y_1 \geq 0) \\ &\Rightarrow (H(x_1) = 1) \vee (H(y_1) = 1) \\ &\Rightarrow \max(H(x_1), H(y_1)) = 1\end{aligned}$$

なので両辺一致する.

また $\max(x_1, y_1) < 0$ の場合は $H(\max(x_1, y_1)) = 0$ であり,

$$\begin{aligned}\max(x_1, y_1) < 0 &\Rightarrow (x_1 < 0) \wedge (y_1 < 0) \\ &\Rightarrow (H(x_1) = 0) \wedge (H(y_1) = 0) \\ &\Rightarrow \max(H(x_1), H(y_1)) = 0\end{aligned}$$

となるのでどちらの場合も両辺が一致する.

次に $N = n$ の時に成立する事を帰納法の仮定とし, $N = n + 1$ の時にも成立する事を示す.

$\max(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq 0$ の場合を考える.

この時単調減少性より $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \geq 0)$ または $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \geq 0)$ のどちらかが成り立っている事がわかる. よって次が言える.

$$\sum_{k=1}^{n+1} H(\max(x_k, y_k)) = \max\left(\sum_{k=1}^{n+1} H(x_k), \sum_{k=1}^{n+1} H(y_k)\right) = n + 1$$

また $\max(x_{n+1}, y_{n+1}) < 0$ の場合は $H(\max(x_{n+1}, y_{n+1})) = 0$ であり,
 $(H(x_{n+1}) = 0) \wedge (H(y_{n+1}) = 0)$ なので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} H(\max(x_k, y_k)) &= \max\left(\sum_{k=1}^n H(x_k), \sum_{k=1}^n H(y_k)\right) + 0 \\ &= \max\left(\sum_{k=1}^n H(x_k) + H(x_{n+1}), \sum_{k=1}^n H(y_k) + H(y_{n+1})\right) \\ &= \max\left(\sum_{k=1}^{n+1} H(x_k), \sum_{k=1}^{n+1} H(y_k)\right)\end{aligned}$$

となりやはりどちらの場合も両辺が一致する. よって (2.1) 成り立つ事がわかった.
(2.2) についても同様に証明できる.

性質 2 (番号の先送り) 整数 m と広義単調増加数列 a_k に対して以下の式が成立する

$$\max\left(\sum_{k=1}^N H(j - a_k) - m, 0\right) = \sum_{k=1}^{N-m} H(j - a_{k+m}) \quad (2.3)$$

また数列として無限数列を仮定している場合は以下の式になる.

$$\max\left(\sum_k H(j - a_k) - m, 0\right) = \sum_k H(j - a_{k+m}) \quad (2.4)$$

証明

j と a_m の大小関係によって場合を分ける.

(i) $j < a_m$ の時

$\sum_{k=1}^K H(j - a_k) \leq m$ なので次が言える.

$$\begin{aligned} \max \left(\sum_{k=1}^K H(j - a_k) - m, 0 \right) &= 0 \\ &= \sum_{k=1}^{K-m} H(j - a_{k+m}) \end{aligned}$$

(ii) $a_m \leq j$ の時

$\sum_{k=1}^K H(j - a_k) \geq m$ なので次が言える.

$$\begin{aligned} \max \left(\sum_{k=1}^K H(j - a_k) - m, 0 \right) &= \sum_{k=1}^K H(j - a_k) - m \\ &= \sum_{k=1}^K H(j - a_k) - \sum_{k=1}^m H(j - a_k) \\ &= \sum_{k=1+m}^K H(j - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K-m} H(j - a_{k+m}) \end{aligned}$$

3 ECA184 の Euler-Lagrange 変換

まず ECA184 についての Euler-Lagrange 変換の様子を紹介する. ECA184 の max-plus による Euler 表現は次である [3].

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \min(u_{j-1}^n, 1 - u_j^n) - \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n) \quad (3.1)$$

これを空間座標 1 から j までの粒子の個数を表す変数 $s_j^n = \sum_{i=1}^j u_i^n$ へと変換すると次の式になる.

$$s_j^{n+1} = \max(s_{j-1}^n, s_{j+1}^n - 1) \quad (3.2)$$

さらにこの変数 s_j^n を変換する. 粒子の個数を数えている変数であることを考え, 粒子の存在する位置で不連続に増加するものとし, ステップ関数を用いて $s_j^n = \sum_{k=1}^K H(j - x_k^n)$ と変換すれば

$$\sum_k H(j - x_k^{n+1}) = \max \left(\sum_k H(j - 1 - x_k^n), \sum_k H(j + 1 - x_k^n) - 1 \right) \quad (3.3)$$

$$= \max \left(\sum_k H(j - 1 - x_k^n), \sum_k H(j + 1 - x_{k+1}^n) \right) \quad (3.4)$$

$$= \sum_k H(j - \min(x_k^n + 1, x_{k+1}^n - 1)) \quad (3.5)$$

という式が得られる. この時の式変形にはステップ関数と $\max, \min$ との性質を用いた.

これにより ECA184 の Lagrange 表現

$$x_k^{n+1} = \min(x_k^n + 1, x_{k+1}^n - 1) \quad (3.6)$$

$$= x_k^n + \min(1, x_{k+1}^n - x_k^n - 1) \quad (3.7)$$

を得ることができる. この発展式の CA は, 粒子番号 $k+1$ の粒子と k の粒子が並んでいれば $x_{k+1}^n - x_k^n - 1 = 0$ となり k の粒子はうごかない. 粒子同士が離れていれば $x_{k+1}^n - x_k^n - 1 \geq 1$ となり k の粒子が 1 動く. この事からも, これが ECA184 の Lagrange 表現であることが確認できる. 以上が文献 [1] の骨子である.

4 この方法で変換できる CA の一般形

式変形の様子より, max-plus による Lagrange 表現において, 「max, min の各項が”更に max, min の入れ子である”か, または” $x_{k+p}^n + q$ (但し p, q は整数) の形をしている”」ような形をした時間発展式をもつ粒子 CA がこの方法で Euler-Lagrange 変換ができる事が推測できる. ただし, 常に粒子の位置が粒子番号に対して単調増加していなければならない. つまり時間発展によって粒子番号の入れ替えが起こらないルールである必要がある.

そこで以下の各時間発展で粒子番号の入れ替えが起こらないルールの CA に関しての命題を示す.

命題 1

$$x_k^{n+1} = \max(\min(\max(\dots(x_{k+p}^n + q, \dots)\dots))) \quad (4.1)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \min(\max(\min(-u_j^n - u_{j-1}^n - \dots - u_{j-q+1}^n - p, \dots)\dots) - \min(\max(\min(-u_{j-1}^n - u_{j-2}^n - \dots - u_{j-q}^n - p, \dots)\dots))) \quad (4.2)$$

という形をした 2 つの時間発展方程式は同じ粒子 CA を表したものであり,

$$u_j^n = \sum_k (H(j - x_k^n) - H(j - 1 - x_k^n)) \quad (4.3)$$

という変換で互いに変換することができる.

証明

式 (4.2) に変換 $u_j^n = s_j^n - s_{j-1}^n$ を施し添字 j がそろうように両辺に整理する.

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} - s_j^n - \min(\max(\min(\dots(s_{j-q}^n - s_j^n - p, \dots)\dots))) \\ = s_{j-1}^{n+1} - s_{j-1}^n - \min(\max(\min(\dots(s_{j-q-1}^n - s_{j-1}^n - p, \dots)\dots))) \end{aligned} \quad (4.4)$$

この式より $F(j) = s_j^{n+1} - s_j^n - \min(\max(\min(\dots(s_{j-q}^n - s_j^n - p, \dots)\dots)))$ とすればこれが j に対する保存量であることがわかる. そこで $F(j) = 0$ として,

$$s_j^{n+1} = \min(\max(\min(\dots(s_{j-q}^n - p, \dots)\dots))) \quad (4.5)$$

とできる.

次に $s_j^n = \sum_k H(j - x_k^n)$ と変換して性質を用いて式変形をすると以下の様になる.

$$\sum_k H(j - x_k^{n+1}) = \min(\max(\min(\dots(\sum_k H(j - q - x_k^n) - p, \dots)\dots))) \quad (4.6)$$

$$= \min(\max(\min(\dots(\sum_k H(j - q - x_{k+p}^n), \dots)\dots))) \quad (4.7)$$

$$= \sum_k H\left(j - \min(\max(\min(\dots(x_{k+p}^n + q, \dots)\dots))\right) \quad (4.8)$$

よって

$$x_k^{n+1} = \max(\min(\max(\dots(x_{k+p}^n + q, \dots)\dots))) \quad (4.9)$$

以上により式 (4.2) から式 (4.1) へ変換できる.

5 結論

時間発展によって粒子番号の入れ替えの起こらない粒子 CA の時間発展方程式が, Euler 表現であれば,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \min(\max(\min(-u_j^n - u_{j-1}^n - \cdots - u_{j-q+1}^n - p, \dots)) \dots) - \min(\max(\min(-u_{j-1}^n - u_{j-2}^n - \cdots - u_{j-q}^n - p, \dots)) \dots) \quad (5.1)$$

という形, また Lagrange 表現であれば,

$$x_k^{n+1} = \max(\min(\max(\dots (x_{k+p}^n + q, \dots) \dots))) \quad (5.2)$$

という形であれば, ステップ関数を用いた方法で Euler-Lagrange 変換ができる事がわかった.

CA の時間発展方程式を考える際, 粒子の動きやセルの状態を実現するだけならば, ルール表や適当な関数を用いて幾通りも式表現を考える事ができ, どれが”良い”式であるかが問題となる場合がある.

その時に”Euler-Lagrange 変換できる”ということがひとつの判断材料になる場合もある. 実際この Euler-Lagrange 変換の場合でも Euler の式については, これは Cole-Hopf 変換が可能な式であるということでもでき, この方法で変換できる様な式は”良い”式であると言える.

ECA184 以外でも, 近傍数が 4 の 3 種類の粒子 CA についてこの方法で Euler-Lagrange 変換できることが確認できている.

4 近傍粒子 CA はもうあと 1 種類あり, 時間発展式もいくつか候補があるがどれもこの方法で Euler-Lagrange 変換できない.

この粒子 CA は「粒子の密度だけでは全体の総流量が定まらない」という性質を持っている.

この様な粒子 CA の Euler-Lagrange 変換を探す事を今後の研究課題としたい.

またこの方法で変換できる粒子 CA の性質の「時間発展で粒子番号の入れ替えが起こらない」という事について, 命題では前提条件としてしまったが, 粒子番号の入れ替えが起こるかどうかと言うことを式の形で表現できないのか, 又はそれがどのような条件であるのか, ということも現在の課題である.

参考文献

- [1] Junta Matsukidaira and Katsuhiro Nishinari Phys. Rev. Lett. 90, 088701 (2003)
- [2] Daisuke Takahashi, Junta Matsukidaira, Hiroaki Hara and Bao-Feng Feng J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 135102
- [3] 広田良吾・高橋大輔著『差分と超離散』(共立出版, 2003)