

## 超楕円曲線に付随する倍角写像力学系

野邊, 厚  
千葉大学教育学部

<https://doi.org/10.15017/27171>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (11), pp.77-82, 2013-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3

「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

*Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by

*Kyushu University Global COE Program*

*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 11 (pp. 77 - 82)

# 超楕円曲線に付随する倍角写像力学系

野邊 厚 (NOBE Atsushi)

(Received 15 January 2013; accepted 13 March 2013)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2013

# 超楕円曲線に付随する倍角写像力学系

野邊 厚

NOBE ATSUSHI

千葉大学教育学部

## 概要

種数  $g$  の超楕円曲線  $H$  の  $g$  次対称積  $\text{Sym}^g(H)$  から Picard 群  $\text{Pic}^0(H)$  への全射を通して  $\text{Sym}^g(H)$  上に定まる加法は,  $H$  とある二つの曲線  $C_1, C_2$  との交叉を用いて幾何学的に実現できる. この事実を利用して,  $\text{Sym}^g(H)$  上の倍角写像力学系を有理写像の定める複素力学系として実現する.

## 1 超楕円曲線の加法 [1]

自然数  $g$  に対し,  $2g + 2$  次多項式  $h(x)$

$$h(x) = x^{2g+2} + a_{2g+1}x^{2g+1} + a_{2g}x^{2g} + \cdots + a_1x + a_0$$

の定めるアフィン曲線  $H_0 := (y^2 - h(x) = 0)$  および  $H_\infty := (v^2 - u^{2g+2}h(1/u) = 0)$  を貼り合わせて得られる射影曲線を  $H$  とおく. 方程式  $h(x) = 0$  が重解をもたないとき,  $H$  は無限遠点を 2 点含む<sup>1</sup>種数  $g$  の超楕円曲線である:

$$H = H_0 \cup \{P_\infty, P'_\infty\}.$$

対合  $\iota: H \rightarrow H; P = (x, y) \mapsto P' = (x, -y)$  に対し,  $P'$  を  $P$  の共役と呼ぶ.  $\mathcal{D}(H)$  を  $H$  の因子群とすると,  $\iota$  は  $\mathcal{D}(H)$  上へ自然に拡張される:

$$\iota(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) := P'_1 + P'_2 + \cdots + P'_n.$$

$\mathcal{D}_0(H)$  を  $H$  上の次数 0 の因子のなす群とする. また,  $\mathcal{D}_l(H)$  を  $H$  上の有理関数の主因子群とする. 剰余類群  $\text{Pic}^0(H) := \mathcal{D}_0(H)/\mathcal{D}_l(H)$  を Picard 群と呼ぶ.  $H$  上の次数  $g$  の正因子全体の集合を  $\mathcal{D}_g^+(H)$  で表す:

$$\mathcal{D}_g^+(H) = \{D \in \mathcal{D}(H) \mid D > 0, \deg D = g\}.$$

簡単のため,  $\mathcal{D}_g^+(H)$  の元  $P_1 + P_2 + \cdots + P_g$  を  $D_P$  で表す.  $\mathcal{D}_g^+(H)$  の元  $D^*$  を一つ選んで固定し, 標準写像  $\Phi: \mathcal{D}_g^+(H) \rightarrow \text{Pic}^0(H)$  を次で定める:

$$\Phi(A) := A - D^* \pmod{\mathcal{D}_l(H)} \quad \text{for } A \in \mathcal{D}_g^+(H).$$

このとき次が成り立つ.

**定理 1** 標準写像  $\Phi$  は全射. とくに,  $g = 1$  のときのみ単射でもある.

<sup>1</sup>すなわち, 無限遠点は分岐点ではなく通常点である.

標準写像  $\Phi$  を用いて,  $H$  の  $g$  次対称積  $\text{Sym}^g(H) := H^g / \mathfrak{S}_g$  上に加法を定める. 全単射  $\mu : \mathcal{D}_g^+(H) \rightarrow \text{Sym}^g(H); D_P \mapsto \mu(D_P) = \{P_1, P_2, \dots, P_g\}$  を導入し,  $\mu(D_P)$  および  $\mu(D_{P'})$  をそれぞれ  $d_P$  および  $d_{P'}$  で表す.  $\tilde{\Phi} := \Phi \circ \mu^{-1} : \text{Sym}^g(H) \rightarrow \text{Pic}^0(H)$  とおく.  $\tilde{\Phi}$  は全射なので  $\text{Pic}^0(H) = \{\tilde{\Phi}(d) \mid d \in \text{Sym}^g(H)\}$  であることに注意して, 対称積  $\text{Sym}^g(H)$  における加法  $\oplus : \text{Sym}^g(H) \times \text{Sym}^g(H) \rightarrow \text{Sym}^g(H)$  を次で定める:

$$d_P \oplus d_Q := \tilde{\Phi}^{-1} \left( \tilde{\Phi}(d_P) + \tilde{\Phi}(d_Q) \right).$$

加法の単位元を  $o$  とすると, ある  $D \in \ker \Phi$  に対し  $o = \mu(D)$  である.

$\text{Sym}^g(H)$  の元  $d_P, d_Q, d_R$  が加法公式

$$d_P \oplus d_Q \oplus d_R = o. \quad (1)$$

をみたすとする. これは Picard 群上の加法公式

$$D_P + D_Q + D_R - 3D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(H)}. \quad (2)$$

に対応する. (2) 式は  $H$  上の有理関数  $k_1 \in L(3D^*) := \{k \in \mathbb{C}(H) \mid (k) + 3D^* > 0\}$  の存在を意味する. 有理関数  $k_1$  により定まる曲線を  $C_1$  とすると,  $k_1$  のゼロ点  $P_1, \dots, P_g, Q_1, \dots, Q_g, R_1, \dots, R_g$  は  $C_1$  上の点である. 一方, これらの点は定義より  $H$  上の点でもあるので, すなわち  $H$  と  $C_1$  との交点である. このようにして, 加法公式 (1) は  $H$  と  $C_1$  との交叉を用いて実現される.

さらに

$$d_{\tilde{R}} = d_P \oplus d_Q \quad (3)$$

とおく. このとき  $d_{\tilde{R}} \oplus d_R = o$ , すなわち  $d_{\tilde{R}}$  は  $d_R$  の逆元の一つである. また

$$D_{\tilde{R}} + D_R - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(H)}. \quad (4)$$

より,  $H$  上の有理関数  $k_2 \in L(2D^*)$  が存在し,  $k_2$  の定める曲線  $C_2$  と  $H$  との交点が  $R_1, \dots, R_g, \tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_g$  となる. このようして, 与えられた  $2g$  点  $P_1, \dots, P_g, Q_1, \dots, Q_g$  から  $H$  と  $C_1$  の交叉を通して  $g$  点  $R_1, \dots, R_g$  が定まり, さらに  $H$  と  $C_2$  の交叉を通して  $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_g$  が定まる. こうして得られた  $d_{\tilde{R}} = \mu(\tilde{R}_1 + \dots + \tilde{R}_g)$  は  $d_P = \mu(P_1 + \dots + P_g)$  と  $d_Q = \mu(Q_1 + \dots + Q_g)$  の和  $d_P \oplus d_Q$  に他ならない.

## 2 倍角写像力学系

Riemann-Roch 定理より  $\dim L(3D^*) = 2g+1$  なので, 一般の位置にある  $2g$  点  $P_1, \dots, P_g, Q_1, \dots, Q_g$  が与えられれば, それらを零点にもつ有理関数  $k_1 \in L(3D^*)$  は定数倍の不定性を除いて一意に定まる. よって,  $k_1$  の定める曲線  $C_1$  と  $H$  との残り  $g$  個の交点  $R_1, \dots, R_g$  が一意に定まる. 同様に,  $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_g$  も  $H$  と  $C_2$  の交点として一意に定まる. ここで  $Q_1, \dots, Q_g$  を固定すれば, この加法は写像力学系  $(P_1, \dots, P_g) \mapsto (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_g)$  と見なすことができる. 津田により, QRT 系が楕円曲線に付随するこのような写像力学系であることが示された [2]. また, 周期離散戸田格子などの有限次元可積分系がこのような幾何学的描像をもつこともよく知られている [3, 4, 7].

一方,  $Q_i = P_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) とおけば, 加法公式 (3) は倍角公式

$$d_{\tilde{R}} = 2d_P \quad (5)$$

となり、この倍角公式を写像力学系

$$\psi : \text{Sym}^g(H) \rightarrow \text{Sym}^g(H); \{P_1, \dots, P_g\} \mapsto \{\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_g\} \quad (6)$$

と見なすことができる。ここでは、このような力学系を**超楕円曲線  $H$  に付随する倍角写像力学系**と呼ぶことにする<sup>2</sup>。

次に、 $\text{Sym}^g(H)$  の加法の幾何学的実現を通して、 $H$  に付随する倍角写像力学系から有理写像により与えられる複素力学系を構成しよう。まず、標準写像の固定点  $D^*$  を次のようにとる。

$$D^* = \begin{cases} \frac{g}{2}(P_\infty + P'_\infty) & \text{for even } g, \\ \frac{g-1}{2}(P_\infty + P'_\infty) + P_\infty & \text{for odd } g. \end{cases}$$

このとき、標準写像  $\Phi$  の核に関する次の定理を得る。

**定理 2** 自然数  $n$  に対し  $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$  とおく。このとき次が成り立つ：

$$\ker \Phi = \begin{cases} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^g P_i \mid \forall i \in I_g \exists j \in I_g \text{ s.t. } P_j = P'_i, j \neq i \right\} \right\} & \text{for even } g, \\ \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{g-1} P_i + P_\infty \mid \forall i \in I_{g-1} \exists j \in I_{g-1} \text{ s.t. } P_j = P'_i, j \neq i. \right\} \right\} & \text{for odd } g. \end{cases}$$

$g = 1$  のときのみ  $\Phi$  は単射であったが (定理 1),  $g \geq 2$  に対しても “どこで単射になるか” が正確に分かる。

**定理 3**  $g \geq 2$  のとき次が成り立つ：

$$\Phi(D_P) = \Phi(D_Q) \iff \exists D \in \mathcal{D}_g^+(H) \text{ s.t. } D_P + D'_Q = D + D'.$$

とくに、 $g = 2$  のとき  $\Phi$  は  $\mathcal{D}_g^+(H)/\ker \Phi$  上全単射である：

$$\Phi(D_P) = \Phi(D_Q) \text{ and } D_P \neq D_Q \iff D_P, D_Q \in \ker \Phi.$$

種数  $g = 1$  の楕円曲線に付随する倍角写像力学系 (可解カオス系) についてはよく調べられている [5, 6, 8]. そのためここでは  $g = 2$  の場合を考察する。

種数  $g = 2$  のとき、超楕円曲線  $H$  を定める多項式  $h(x)$  は次のように与えられる：

$$h(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

また、 $D^* = P_\infty + P'_\infty$  より

$$L(3D^*) = \langle 1, x, x^2, x^3, y \rangle$$

となる。ただし、 $x, y$  は座標関数であり、それらの主因子はそれぞれ次のようになる：

$$(x) = P_0 + P'_0 - P_\infty - P'_\infty, \quad (y) = \sum_{i=1}^6 P_{\xi_i} - 3(P_\infty + P'_\infty)$$

<sup>2</sup>種数 1 の場合、このような倍角写像力学系は厳密解をもつカオス系であるため、可解カオス系と呼ばれる。

ここで、 $P_0$  は  $x$  成分が 0 である  $H$  上の点、 $P_{\xi_i}$  は  $h(x) = 0$  の解を  $x$  成分とする  $H$  上の点 (分岐点) である。したがって、 $k_1 \in L(3D^*)$  は次のように表される：

$$k_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta y, \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{C}.$$

$H$  上の点  $P_1 = (p_1, q_1)$ ,  $P_2 = (p_2, q_2)$  を  $P_1 + P_2 \notin \ker \Phi$  をみたすようにとる ( $p_1 \neq p_2$  とすればよい)。倍角公式 (5) をみたす点  $\tilde{R}_1 = (\bar{p}_1, \bar{q}_1)$ ,  $\tilde{R}_2 = (\bar{p}_2, \bar{q}_2)$  を求めよう。有理関数  $k_1$  の定める曲線  $C_1$  は  $H$  上の点  $P_1, P_2$  をそれぞれ二重に通るので

$$k_1(p_i, q_i) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j p_i^{j-1} + \beta q_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{d}{dx} k_1(p_i, q_i) = \sum_{j=2}^4 \alpha_j (j-1) p_i^{j-2} + \frac{h'(p_i)}{2q_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

をみたす。これを解いて

$$\alpha_0 = \begin{vmatrix} 2h(p_1)q_2 & p_1 & p_1^2 & p_1^3 \\ 2h(p_2)q_1 & p_2 & p_2^2 & p_2^3 \\ h'(p_1)q_2 & 1 & 2p_1 & 3p_1^2 \\ h'(p_2)q_1 & 1 & 2p_2 & 3p_2^2 \end{vmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2h(p_1)q_2 & p_1^2 & p_1^3 \\ 1 & 2h(p_2)q_1 & p_2^2 & p_2^3 \\ 0 & h'(p_1)q_2 & 2p_1 & 3p_1^2 \\ 0 & h'(p_2)q_1 & 2p_2 & 3p_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & 2h(p_1)q_2 & p_1^3 \\ 1 & p_2 & 2h(p_2)q_1 & p_2^3 \\ 0 & 1 & h'(p_1)q_2 & 3p_1^2 \\ 0 & 1 & h'(p_2)q_1 & 3p_2^2 \end{vmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_1^2 & 2h(p_1)q_2 \\ 1 & p_2 & p_2^2 & 2h(p_2)q_1 \\ 0 & 1 & 2p_1 & h'(p_1)q_2 \\ 0 & 1 & 2p_2 & h'(p_2)q_1 \end{vmatrix},$$

$$\beta = 2w(s^2 - 4t)^2.$$

ここで、 $s = p_1 + p_2$ ,  $t = p_1 p_2$ ,  $w = q_1 q_2$  とおいた。こうして曲線  $C_1$  が定まり、 $H$  との交点として  $R_1, R_2$  を得る。

次に  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$  を求めるために曲線  $C_2$  を定めなければならないが、とくに偶数種数に限り次の命題が成り立つので、 $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = \{R'_1, R'_2\}$  である。

**命題 1** 種数  $g$  が偶数ならば  $d_P \in \text{Sym}^g(H)$  に対し次が成り立つ：

$$d_P \oplus d_{P'} = o$$

すなわち  $d_{P'}$  は  $d_P$  の逆元である。

$y^2 - h(x) = 0$  および  $k_1(x, y) = 0$  から  $y$  を消去すると  $x$  の 6 次方程式を得る：

$$(x - p_1)^2 (x - p_2)^2 \omega(x) = 0,$$

$$\omega(x) = (\beta^2 - \alpha_3^2) x^2 + \{2(\beta^2 - \alpha_3^2) s - 2\alpha_2 \alpha_3 + a_5 \beta^2\} x + \frac{a_0 \beta^2 - \alpha_0^2}{t^2}.$$

いま  $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = \{R'_1, R'_2\}$  より、 $\omega(x)$  の根が  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  なので

$$\bar{s} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \frac{2\alpha_2 \alpha_3 - 2(\beta^2 - \alpha_3^2) s - a_5 \beta^2}{\beta^2 - \alpha_3^2}, \quad (7)$$

$$\bar{t} = \bar{p}_1 \bar{p}_2 = \frac{a_0 \beta^2 - \alpha_0^2}{(\beta^2 - \alpha_3^2) t^2}. \quad (8)$$

ここで、 $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) は  $q_1, q_2$  の斉次1次式であることに注意すると、 $\alpha_i \alpha_j$  は  $q_1, q_2$  の斉次2次式である。しかし、 $q_i^2 = h(p_i)$  ( $i = 1, 2$ ) より、 $\alpha_i \alpha_j$  は  $w = q_1 q_2$  の1次式に帰着できる。したがって、(7),(8) はそれぞれ  $w$  について1次の有理式である。さらに、各  $\alpha_i$  は  $p_j$  の対称式であることに注意すると、(7),(8) はそれぞれ  $s, t, w$  の有理式であることが分かる。

再び  $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = \{R'_1, R'_2\}$  に注意して

$$\bar{w} = \bar{q}_1 \bar{q}_2 = \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 \bar{p}_1 + \alpha_2 \bar{p}_1^2 + \alpha_3 \bar{p}_1^3)(\alpha_0 + \alpha_1 \bar{p}_2 + \alpha_2 \bar{p}_2^2 + \alpha_3 \bar{p}_2^3)}{\beta^2} \quad (9)$$

となるが、この右辺も同様に  $s, t, w$  の有理式である。このようにして、(7),(8),(9) が  $\mathbb{C}^3$  上の有理写像力学系  $\phi: (s, t, w) \mapsto (\bar{s}, \bar{t}, \bar{w})$  を与えることが示された。

また、 $P_1, P_2 \in H$  なので  $q_1^2 = h(p_1)$ 、 $q_2^2 = h(p_2)$  より

$$w^2 = h(p_1)h(p_2) \quad (10)$$

であるが、この右辺は  $p_1, p_2$  の対称多項式、したがって  $s, t$  の多項式である。ゆえに、(10) は力学系  $\phi$  の不変曲面を定める。このようにして、倍角写像力学系  $\psi$  から、それと等価な有理写像力学系  $\phi$  が構成された (表1)。

表 1: 倍角写像  $\psi$  と有理写像  $\phi$

	空間	写像	不変曲面
$\psi$	$\text{Sym}^2(H)$	(6)	$H$
$\phi$	$\mathbb{C}^3$	(7),(8),(9)	(10)

例えば  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$  とおき、種数2の超楕円曲線族  $\{H\}_{a_0 \in \mathbb{C}}$  を考えると、倍角写像力学系  $\psi$  のある初期値に対する軌道は図1のようになる。図1の初期値からの時間発展に対して、

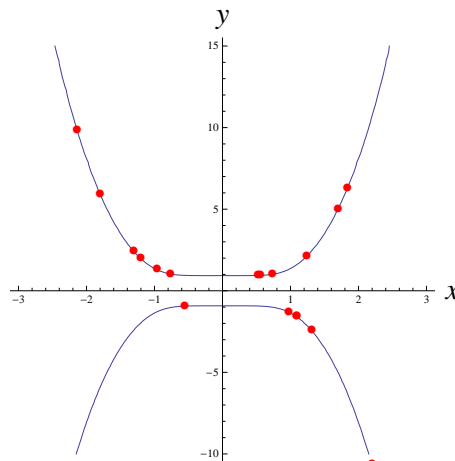


図 1: 超楕円曲線  $H$  上の点  $P_1^0, P_2^0$  の倍角写像 (6) による軌道。ただし、超楕円曲線  $H$  の実平面による切り口を図示した。初期値を  $P_1^0 = (1.7, 5.0)$ 、 $P_2^0 = (-1.8, 5.9)$  とした。パラメータ  $a_0$  の値は  $0.862431$  となる。

2次方程式  $\omega(x) = 0$  の判別式を考えると、超楕円曲線  $H$  と曲線  $C_1$  との交点は一般には実平面に含まれず倍角写像の軌道の大部分は実平面に現れないことが分かる。

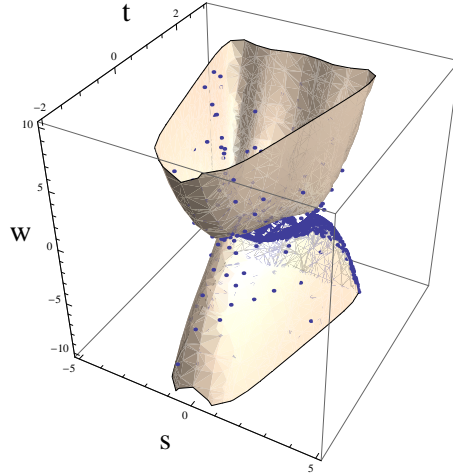


図 2: 不変曲面 (10) 上の点  $(s_0, t_0, w_0)$  の有理写像 (7),(8),(9) による軌道. 図 1 と対応する初期値をとった.

一方, 図 1 の初期値に対して, 有理写像力学系  $\phi$  の軌道は図 2 のようになる. 初期値  $(s_0, t_0, w_0)$  が実空間  $\mathbb{R}^3$  に含まれるため  $\phi$  の軌道はすべて  $\mathbb{R}^3$  に含まれる.

ここではとくに種数  $g = 2$  の場合を示したが, 同様の方法で一般種数  $g$  の倍角写像力学系  $\psi : \text{Sym}^g(H) \rightarrow \text{Sym}^g(H); \{P_1, P_2, \dots, P_g\} \mapsto \{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_g\}$  から有理写像力学系  $\phi : \mathbb{C}^{g(g+1)/2} \rightarrow \mathbb{C}^{g(g+1)/2}; (s_1, \dots, s_g, w_{12}, \dots, w_{g-1,g}) \mapsto (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_g, \bar{w}_{12}, \dots, \bar{w}_{g-1,g})$  が構成できる. ただし,  $P_i = (p_i, q_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) に対し,  $s_i$  を  $p_1, p_2, \dots, p_g$  の  $i$  次基本対称式とし,  $w_{ij} = q_i q_j$  とする.

倍角とは限らない一般の加法についても, ここでの  $s, t, w$  に相当するようなよい変数の取り方を見つけることができれば, 同様に有理写像力学系を構成できると期待される.

## 参考文献

- [1] 小木曾啓示 「代数曲線論」 朝倉書店 (2002)
- [2] Tsuda T, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 2721-2730
- [3] Iwao S, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 115201
- [4] Iwao S, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010), 155208
- [5] Kajiwara K, Nobe A and Tsuda T, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 395202.
- [6] Kajiwara K, Kaneko M, Nobe A and Tsuda T, *Kyushu J. Math.* **63** (2009), 315-338.
- [7] Kimijima T and Tokihiro T, *Inv. Prob.* **18** (2002), 1705-32.
- [8] Umeno K, *Phys. Rev. E* **55** (1997), 5280-84.