

笹野系の q -類似について

増田, 哲
青山学院大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/27170>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (10), pp.71-76, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3
「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

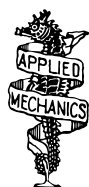
Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 10 (pp. 71 - 76)

笹野系の q -類似

増田 哲 (MASUDA Tetsu)

(Received 8 January 2013; accepted 7 February 2013)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

笹野系の q -類似

青山学院大学 理工学部 増田 哲 (MASUDA Tetsu)

概要 笹野系と呼ばれる D 型アフィン Weyl 群対称性をもつ高階 Painlevé 型微分方程式系に注目し、それらの q -類似を構成する。

1 はじめに

近年、高階 Painlevé 型微分方程式の研究が著しく進展している。Painlevé VI 方程式を含む系列として、 A 型アフィン Weyl 群対称性をもつもの [1, 7, 10]、 D 型アフィン Weyl 群対称性をもつもの [6]、行列 Painlevé 系 [5] の 3 系列が知られており、様々な観点から盛んに研究されている。特に 4 階の場合、Fuchs 型線型方程式のモノドロミー保存変形として得られるものは、これら 3 つと Garnier 系とで尽きることが明らかにされている [5]。

一方、Painlevé 方程式の離散類似については坂井 [3] により分類がなされ、Painlevé 微分方程式を含むより基本的な力学系であることが認識されている。従って、高階 Painlevé 型微分方程式の離散類似について考察することは自然であろう。上で述べた 3 系列のうち、 A 型対称性をもつものについては q -類似が構成されている [8, 9]。また、Garnier 系の q -類似 [4] も知られている。

本稿では D 型アフィン Weyl 群対称性をもつ高階 Painlevé 型微分方程式系（以下、笹野系と呼ぶ）に注目し、その q -類似を与える。

2 $D_{2N+2}^{(1)}$ 型笹野系

$D_{2N+2}^{(1)}$ 型笹野系は、 $H = \sum_{i=1}^N H_{VI}(q_i, p_i; a_i, b_i, c_i, d_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} p_i(q_i - t)q_j(p_j(q_j - 1) + \beta_{2j})$ を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad ' = t(t-1) \frac{d}{dt}$$

として定式化される。ここで、

$$\begin{aligned} a_i &= \beta_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{2j+1}, & b_i &= \beta_{2N+1} + \sum_{j=i}^{N-1} \beta_{2j+1} + 2 \sum_{j=i}^{N-1} \beta_{2j+2}, \\ c_i &= \beta_{2N+2} + \sum_{j=i}^{N-1} \beta_{2j+1}, & d_i &= \beta_{2i} \left(\beta_1 + \beta_{2i} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{2j} + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{2j+1} \right) \end{aligned}$$

であり、 $H_{VI}(q, p; a, b, c, d)$ は、Painlevé VI 方程式の Hamiltonian

$$H_{VI}(q, p; a, b, c, d) = q(q-1)(q-t)p^2 - [(a-1)q(q-1) + bq(q-t) + c(q-1)(q-t)]p + dq$$

である。また、パラメータ β_i ($i = 0, \dots, 2N+2$) の間に、 $\beta_0 + \beta_1 + 2(\beta_2 + \dots + \beta_{2N}) + \beta_{2N+1} + \beta_{2N+2} = 1$ が成り立つ。

笹野系の Bäcklund 変換について述べよう。Bäcklund 変換とは、方程式中のパラメータの値を変えることは許して、解を（別の）解に移す操作のことである。変換 w_i ($i = 0, 1, \dots, 2N+2$) を、

$$w_i(\beta_j) = \beta_j - a_{ij}\beta_i, \quad A = (a_{ij})_{i,j=0}^{2N+2} : D_{2N+2}^{(1)} \text{ の Cartan 行列,}$$

$$\begin{aligned}
w_0 &: p_1 \mapsto p_1 - \frac{\beta_0}{q_1 - t}, \\
w_{2i} &: q_i \mapsto q_i + \frac{\beta_{2i}}{p_i} \quad (i = 1, \dots, N), \\
w_{2i+1} &: p_i \mapsto p_i - \frac{\beta_{2i+1}}{q_i - q_{i+1}}, \quad p_{i+1} \mapsto p_{i+1} + \frac{\beta_{2i+1}}{q_i - q_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, N-1), \\
w_{2N+1} &: p_N \mapsto p_N - \frac{\beta_{2N+1}}{q_N - 1}, \quad w_{2N+2} : p_N \mapsto p_N - \frac{\beta_{2N+2}}{q_N}
\end{aligned}$$

で定めよう．これらは（従って，その合成も）笹野系の Bäcklund 変換であり，アフィン Weyl 群 $W(D_{2N+2}^{(1)}) = \langle w_0, w_1, \dots, w_{2N+2} \rangle$ を生成することが知られている．

この微分方程式系の q 類似，すなわち 1 階 $2N$ 連立の q -差分方程式系であって， $W(D_{2N+2}^{(1)})$ 対称性を持ち，かつ連続極限において笹野系に帰着するものを構成することが，本稿の主題である．

3 $\tilde{W}(D_{2N+3}^{(1)})$ のトロピカル表現

津田，竹縄は，一般化された Dynkin 図形に付随する，有理多様体上の双有理変換群としての Weyl 群の実現を構成した [12]．彼らの構成に基づいて，拡大アフィン Weyl 群 $\tilde{W}(D_{2N+3}^{(1)}) = \langle s_0, \dots, s_{2N+3}, \rho \rangle$ のトロピカル表現を与えよう．

パラメータ $a_i (i = 0, \dots, 2N+3)$ および変数 $f_i (i = 0, \dots, 2N+1)$ を用意し，条件

$$a_0 a_{2N+3} (a_1 \cdots a_{2N})^2 a_{2N+1} a_{2N+2} = q \in \mathbb{C}^\times, \quad \prod_{n=0}^N f_{2n} = \prod_{n=0}^N f_{2n+1} = 1$$

を課す．これらへのアフィン Weyl 群 $W(D_{2N+3}^{(1)}) = \langle s_0, \dots, s_{2N+3} \rangle$ の作用は，

$$\begin{aligned}
s_i(a_j) &= a_j a_i^{-C_{ij}}, \quad C = (C_{ij})_{i,j=0}^{2N+3} : D_{2N+3}^{(1)} \text{ の Cartan 行列}, \\
s_1(f_0) &= a_1 f_0 \frac{f_1 + v_1^{-1}}{f_1 + u_1}, & s_1(f_2) &= a_1^{-1} f_2 \frac{f_1 + u_1}{f_1 + v_1^{-1}}, \\
s_n(f_{n-1}) &= f_{n-1} \frac{a_n f_n + 1}{f_n + a_n}, & s_n(f_{n+1}) &= f_{n+1} \frac{f_n + a_n}{a_n f_n + 1} \quad (n = 2, \dots, 2N-1), \\
s_{2N}(f_{2N-1}) &= a_{2N} f_{2N-1} \frac{f_{2N} + v_{2N}^{-1}}{f_{2N} + u_{2N}}, & s_{2N}(f_{2N+1}) &= a_{2N}^{-1} f_{2N+1} \frac{f_{2N} + u_{2N}}{f_{2N} + v_{2N}^{-1}}
\end{aligned}$$

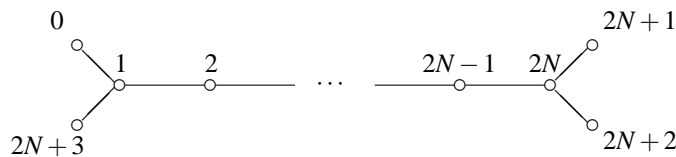
で与えられる．ここで，

$$u_1 = a_1 a_0^{-1/2} a_{2N+3}^{1/2}, \quad v_1 = a_1 a_0^{1/2} a_{2N+3}^{-1/2}, \quad u_{2N} = a_{2N} a_{2N+1}^{-1/2} a_{2N+2}^{1/2}, \quad v_{2N} = a_{2N} a_{2N+1}^{1/2} a_{2N+2}^{-1/2}$$

と記した．また， ρ の作用は，

$$\begin{aligned}
\rho &: a_0 \mapsto a_{2N+1} \mapsto a_{2N+3} \mapsto a_{2N+2} \mapsto a_0, \quad a_n \mapsto a_{2N+1-n} \quad (n = 1, \dots, 2N), \\
&f_{\{0,2,\dots,2N\}} \mapsto 1/f_{\{2N+1,2N-1,\dots,1\}}, \quad f_{\{1,3,\dots,2N+1\}} \mapsto f_{\{2N,2N-2,\dots,0\}}
\end{aligned}$$

で与えられる．基本関係は，Dynkin 図形



で定まるものに加え， $\rho^4 = 1$ および $\rho s_{\{0,2N+3,1,\dots,2N,2N+1,2N+2\}} = s_{\{2N+1,2N+2,2N,\dots,1,2N+3,0\}} \rho$ である．

4 q -差分方程式系の導出

前節で得られた $D_{2N+3}^{(1)}$ 型離散力学系において，平行移動演算子

$$T = \rho^2 s_{N, \dots, 2, 1, 0, 2N+3, 1, 2, \dots, 2N, 2N+1, 2N+2, 2N, \dots, N+1} \in \tilde{W}(D_{2N+3}^{(1)})$$

を考えよう．ここで， $s_{i, \dots, j} = s_i \cdots s_j$ と記した．パラメータへの作用は $T : (a_N, a_{N+1}) \mapsto (qa_N, a_{N+1}/q)$ で与えられる． $\tilde{W}(D_{2N+3}^{(1)})$ の元であって T と可換なもの全体は，拡大アフィン Weyl 群

$$\tilde{W}(D_{2N+2}^{(1)}) = \langle s_0, s_{2N+3}, s_1, \dots, s_{N-1}, s_{N, N+1, N}, s_{N+2}, \dots, s_{2N}, s_{2N+1}, s_{2N+2}, \rho \rangle$$

をなす．平行移動 T の変数 f_i への作用を書き下せば，この $\tilde{W}(D_{2N+2}^{(1)})$ を対称性とする q -差分方程式系が得られる．実際， $N = 1$ の場合は， q -Painlevé VI 方程式 [2] が得られる [11, 12]．紙幅の都合で，本稿では $N = 2$ の場合の結果のみを記す．

変数 $f_i (i = 0, \dots, 5)$ への作用は，

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 f_0 &= \frac{u_1^{-1/2} f_1 g_l + u_1^{1/2} a_2 h_l \tilde{u}_1^{-1/2} f_1 g_l + \tilde{u}_1^{1/2} a_2 h_l}{v_1^{1/2} a_2 f_1 g_l + v_1^{-1/2} h_l \tilde{v}_1^{1/2} a_2 f_1 g_l + \tilde{v}_1^{-1/2} h_l}, \\ \bar{f}_1 f_1 &= \frac{f_2 + a_2}{a_2 f_2 + 1} \frac{\bar{f}_0 f_0 f_2 + a_0 a_7 a_1^2 a_2}{f_0 f_0 f_2 a_0 a_7 a_1^2 a_2 + 1}, \\ \underline{f}_4 f_4 &= \frac{a_3 f_3 + 1}{f_3 + a_3} \frac{\underline{f}_5 f_5 f_3 a_3 a_4^2 a_5 a_6 + 1}{\underline{f}_5 f_5 f_3 + a_3 a_4^2 a_5 a_6}, \\ \underline{f}_5 f_5 &= \frac{v_4^{1/2} a_3 f_4 h_r + v_4^{-1/2} g_r \tilde{v}_4^{1/2} a_3 f_4 h_r + \tilde{v}_4^{-1/2} g_r}{u_4^{-1/2} f_4 h_r + u_4^{1/2} a_3 g_r \tilde{u}_4^{-1/2} f_4 h_r + \tilde{u}_4^{1/2} a_3 g_r} \end{aligned}$$

である．ここで， $\bar{x} = T(x)$ ， $\underline{x} = T^{-1}(x)$ であり，

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 a_0^{-1/2} a_7^{1/2}, & v_1 &= a_1 a_0^{1/2} a_7^{-1/2}, & u_4 &= a_4 a_5^{-1/2} a_6^{1/2}, & v_4 &= a_4 a_5^{1/2} a_6^{-1/2}, \\ \tilde{u}_1 &= a_1 a_0^{3/2} a_7^{1/2}, & \tilde{v}_1 &= a_1 a_0^{1/2} a_7^{3/2}, & \tilde{u}_4 &= a_4 a_5^{3/2} a_6^{1/2}, & \tilde{v}_4 &= a_4 a_5^{1/2} a_6^{3/2}, \\ g_l &= a_2 f_2 + 1, & h_l &= f_2 + a_2, & g_r &= a_3 f_3 + 1, & h_r &= f_3 + a_3 \end{aligned}$$

と記した ($f_0 f_2 f_4 = f_1 f_3 f_5 = 1$ に注意)．この系は，連続極限において $D_6^{(1)}$ 型の笹野系に帰着する．具体的には，

$$\begin{aligned} a_i &= e^{-\varepsilon \beta_j / 2} \quad (i = 0, 7, 1, 4, 5, 6 \text{ に対し } j = 0, 1, 2, 4, 5, 6), \\ a_2 &= t^{-1/2} (t-1)^{1/2} e^{-\varepsilon(\beta_4 - \beta_2 + \beta_3)/4 - \varepsilon(\beta_5 + \beta_6 - \beta_0 - \beta_1)/8}, \\ a_3 &= t^{1/2} (t-1)^{-1/2} e^{-\varepsilon(\beta_2 - \beta_4 + \beta_3)/4 - \varepsilon(\beta_0 + \beta_1 - \beta_5 - \beta_6)/8}, \end{aligned}$$

$$f_0 = -t^{-1/2} (t-1)^{-1/2} (q_1 - t), \quad f_1 = -e^{-\varepsilon g_1}, \quad f_4 = -e^{-\varepsilon g_4}, \quad f_5 = t^{-1/2} (t-1)^{1/2} \frac{q_2}{q_2 - 1}$$

とにおいて， $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を採ればよい．ここで，

$$g_1 = (q_1 - t)p_1 + \frac{-\beta_0 + \beta_1 + 2\beta_2}{4}, \quad g_4 = p_2(q_2 - 1)q_2 + \beta_4 q_2 - \frac{2\beta_4 + \beta_5 - \beta_6}{4}$$

である．アフィン Weyl 群 $W(D_6^{(1)})$ の元を $w_j = s_i (i = 0, 7, 1, 4, 5, 6 \text{ に対し } j = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$ および $w_3 = s_{2,3,2}$ と読み替えれば，連続極限において $D_6^{(1)}$ 型笹野系の Bäcklund 変換を再現する．

5 $D_{2N+1}^{(1)}$ 型笹野系とその q -類似

$D_{2N+1}^{(1)}$ 型笹野系 [6] は, $H = \sum_{i=1}^N H_V(q_i, p_i; a_i, b_i, c_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} p_i q_j (p_j (q_j - 1) + \beta_{2j-1})$ を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad ' = t \frac{d}{dt}$$

として定式化される．ここで,

$$a_i = \beta_{2N+1} + \sum_{j=i}^{N-1} \beta_{2j}, \quad b_i = \beta_{2i-1}, \quad c_i = \beta_{2N} + \beta_{2N+1} + 2 \sum_{j=i}^{N-1} (\beta_{2j} + \beta_{2j+1})$$

であり, $H_V(q, p; a, b, c)$ は, Painlevé V 方程式の Hamiltonian

$$H_V(q, p; a, b, c) = q(q-1)p(p+t) + ap + btq - cpq$$

である．この系の Bäcklund 変換を記述するため, 従属変数 $\varphi_i (i = 0, 1, \dots, 2N+1)$ を

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{p_1 + t}{\sqrt{t}}, \quad \varphi_1 = -\frac{p_1}{\sqrt{t}}, \quad \varphi_{2N} = \sqrt{t}(1 - q_N), \quad \varphi_{2N+1} = \sqrt{t}q_N, \\ \varphi_{2i} &= \sqrt{t}(q_i - q_{i+1}), \quad \varphi_{2i+1} = \frac{p_{i+1}}{\sqrt{t}} \quad (1 \leq i \leq N-1) \end{aligned}$$

で導入しよう ($\varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_{2N} + \varphi_{2N+1} = \sqrt{t}$ である)．変換 w_i および ρ を

$$w_i(\beta_j) = \beta_j - a_{ij}\beta_i, \quad w_i(\varphi_j) = \varphi_j + u_{ij} \frac{\beta_i}{\varphi_i},$$

$$\begin{aligned} \rho : \quad \beta_0 &\mapsto \beta_{2N+1} \mapsto \beta_1 \mapsto \beta_{2N} \mapsto \beta_0, \quad \beta_k \mapsto \beta_{2N+1-k} \quad (k = 2, \dots, 2N-1), \\ \varphi_0 &\mapsto \varphi_{2N+1} \mapsto \varphi_1 \mapsto \varphi_{2N} \mapsto \varphi_0, \\ \varphi_{2k} &\mapsto -\varphi_{2N+1-2k}, \quad \varphi_{2k+1} \mapsto \varphi_{2N-2k} \quad (k = 1, \dots, N-1), \end{aligned}$$

で定めれば, これらは (従って, その合成も) $D_{2N+1}^{(1)}$ 型笹野系の Bäcklund 変換であり, 拡大アフィン Weyl 群 $\tilde{W}(D_{2N+1}^{(1)}) = \langle w_0, \dots, w_{2N+1}, \rho \rangle$ を生成することが知られている．

以下では, 第 3 節で与えた離散力学系において, 部分群

$$\tilde{W}((A_1 + D_{2N+1})^{(1)}) = \langle r_0, r_1, w_0, \dots, w_{2N+1}, \rho, \omega \rangle \subset \tilde{W}(D_{2N+3}^{(1)})$$

の作用のみを考察する．ここで, $\omega = s_{0,2N+3,2N+1,2N+2}$ および

$$\begin{aligned} r_1 &= s_{2N, \dots, 2, 1, 2, \dots, 2N}, \quad r_0 = \omega r_1 \omega^{-1}, \\ w_0 &= s_{2N+3, 1, 2N+3}, \quad w_1 = s_{0, 1, 0}, \quad w_k = s_k \quad (k = 2, \dots, 2N-1), \\ w_{2N} &= s_{2N+1, 2N, 2N+1}, \quad w_{2N+1} = s_{2N+2, 2N, 2N+2} \end{aligned}$$

である．パラメータ b_i および変数 g_i を

$$b_0 = a_{2N+3}a_1, \quad b_1 = a_0a_1, \quad b_{2N} = a_{2N}a_{2N+1}, \quad b_{2N+1} = a_{2N}a_{2N+2}, \quad b_k = a_k \quad (k = 2, \dots, 2N-1)$$

および

$$\begin{aligned} g_0 &= (a_0a_{2N+3})^{1/2}f_1, \quad g_1 = (a_0a_{2N+3})^{1/2}f_1^{-1}, \\ g_{2N} &= (a_{2N+1}a_{2N+2})^{1/2}f_{2N}^{-1}, \quad g_{2N+1} = (a_{2N+1}a_{2N+2})^{1/2}f_{2N}, \\ g_k &= f_k \quad (k = 2, \dots, 2N-1) \end{aligned}$$

で導入しよう．これらは，関係式 $b_0 b_1 (b_2 \cdots b_{2N-1})^2 b_{2N} b_{2N+1} = q$ および $g_0 g_1 = a_0 a_{2N+3}$, $g_{2N} g_{2N+1} = a_{2N+1} a_{2N+2}$ を満たす．

さて，元 $\mathcal{T} = \rho^2 \omega r_1 \in \tilde{W}(A_1^{(1)})$ を考えよう．パラメータ b_i は \mathcal{T} の作用で不変であり，

$$\mathcal{T} : g_0 g_1 \mapsto q g_{2N} g_{2N+1}, \quad g_{2N} g_{2N+1} \mapsto q g_0 g_1$$

である．また， $g_0 g_1, g_{2N} g_{2N+1}$ は $\tilde{W}(D_{2N+1}^{(1)}) = \langle w_0, \dots, w_{2N+1}, \rho \rangle$ の作用で不変である．そこで，以下では $c := g_0 g_1 = g_{2N} g_{2N+1}$ としよう．以上のことから， \mathcal{T} の変数 g_i への作用を書き下せば， c を独立変数とし， $\tilde{W}(D_{2N+1}^{(1)})$ を対称性とする q -差分方程式系が得られることがわかる．

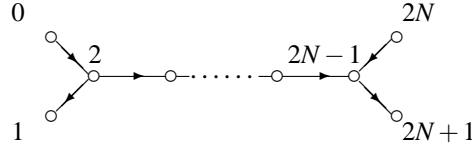
対称性から論じよう．拡大アフィン Weyl 群 $\tilde{W}(D_{2N+1}^{(1)}) = \langle w_0, \dots, w_{2N+1}, \rho \rangle$ の作用は，

$$w_i(b_j) = b_j b_i^{-a_{ij}}, \quad w_i(g_j) = g_j \left(\frac{b_i + g_i}{1 + b_i g_i} \right)^{u_{ij}}$$

および

$$\begin{aligned} \rho : b_0 &\mapsto b_{2N+1} \mapsto b_1 \mapsto b_{2N} \mapsto b_0, & b_k &\mapsto b_{2N+1-k} \quad (k = 2, \dots, 2N-1), \\ g_0 &\mapsto g_{2N+1} \mapsto g_1 \mapsto g_{2N} \mapsto g_0, \\ g_{2k} &\mapsto 1/g_{2N+1-2k}, & g_{2k+1} &\mapsto g_{2N-2k} \quad (k = 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで， $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{2N+1}$ は $D_{2N+1}^{(1)}$ 型の Cartan 行列であり， $U = (u_{ij})_{i,j=0}^{2N+1}$ は Dynkin 図形



で定まる向き付け行列である．

ここでも，紙幅の都合で $N = 2$ の場合の結果のみを記そう．変数 $g_i (i = 0, \dots, 5)$ への作用は，

$$\begin{aligned} \bar{g}_0 g_0 &= c_l b_2 b_3 c_r \frac{c_l b_2 b_3 c_r \check{\omega}_r^{(1)} + \check{g}_2 \check{\chi}_r^{(1)}}{\check{\omega}_r^{(1)} + c_l b_2 b_3 c_r \check{g}_2 \check{\chi}_r^{(1)}}, & \bar{g}_1 g_1 &= c_l b_2 b_3 c_r \frac{\check{\omega}_r^{(1)} + c_l b_2 b_3 c_r \check{g}_2 \check{\chi}_r^{(1)}}{c_l b_2 b_3 c_r \check{\omega}_r^{(1)} + \check{g}_2 \check{\chi}_r^{(1)}}, \\ \bar{g}_3 g_3 \cdot \bar{g}_0 g_0 &= \frac{\check{\omega}_l^{(2)} + c_l b_2 b_3 b_4 g_4 \check{\chi}_l^{(2)}}{\check{\omega}_l^{(2)} + (c_l b_2 b_3 b_5 g_5)^{-1} \check{\chi}_l^{(2)}}, & \bar{g}_2 g_2 \cdot \bar{g}_5 g_5 &= \frac{\check{\omega}_r^{(2)} + b_2 b_3 c_r b_0 g_0 \check{\chi}_r^{(2)}}{\check{\omega}_r^{(2)} + (b_2 b_3 c_r b_1 g_1)^{-1} \check{\chi}_r^{(2)}}, \\ \bar{g}_4 g_4 &= c_l b_2 b_3 c_r \frac{c_l b_2 b_3 c_r \check{\chi}_l^{(1)} + \check{g}_1 \check{\omega}_l^{(1)}}{\check{\chi}_l^{(1)} + c_l b_2 b_3 c_r \check{g}_1 \check{\omega}_l^{(1)}}, & \bar{g}_5 g_5 &= c_l b_2 b_3 c_r \frac{\check{\chi}_l^{(1)} + c_l b_2 b_3 c_r \check{g}_3 \check{\omega}_l^{(1)}}{c_l b_2 b_3 c_r \check{\chi}_l^{(1)} + \check{g}_3 \check{\omega}_l^{(1)}} \end{aligned}$$

である．ここで， $\check{\chi}_r^{(k)}, \check{\omega}_r^{(k)}$ および $\check{\chi}_l^{(k)}, \check{\omega}_l^{(k)}$ は，それぞれ

$$\begin{aligned} \check{\chi}_r^{(1)} &= b_3 c_r \check{g}_3 + 1, & \check{\omega}_r^{(1)} &= \check{g}_3 + b_3 c_r, \\ \check{\chi}_r^{(2)} &= b_2 b_3 c_r g_2 \check{\chi}_r^{(1)} + \check{\omega}_r^{(1)}, & \check{\omega}_r^{(2)} &= g_2 \check{\chi}_r^{(1)} + b_2 b_3 c_r \check{\omega}_r^{(1)} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \check{\chi}_l^{(1)} &= c_l b_2 \check{g}_2 + 1, & \check{\omega}_l^{(1)} &= \check{g}_2 + c_l b_2, \\ \check{\chi}_l^{(2)} &= \check{\chi}_l^{(1)} + c_l b_2 b_3 g_3 \check{\omega}_l^{(1)}, & \check{\omega}_l^{(2)} &= c_l b_2 b_3 \check{\chi}_l^{(1)} + g_3 \check{\omega}_l^{(1)} \end{aligned}$$

で定まる．また， $c_l = (b_0 b_1 g_0 g_1)^{1/2}$, $c_r = (b_4 b_5 g_4 g_5)^{1/2}$ および

$$\check{g}_2 = g_2 \frac{(b_1 g_1)^{1/2} + (b_1 g_1)^{-1/2}}{(b_0 g_0)^{1/2} + (b_0 g_0)^{-1/2}}, \quad \check{g}_3 = g_3 \frac{(b_5 g_5)^{1/2} + (b_5 g_5)^{-1/2}}{(b_4 g_4)^{1/2} + (b_4 g_4)^{-1/2}}$$

と記した。この部分力学系は、連続極限において $D_5^{(1)}$ 型笹野系（の対称形式）に帰着する。具体的には、

$$q = e^{-\varepsilon^2/2}, \quad b_i = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\beta_i}, \quad g_i = -e^{-\varepsilon\varphi_i}, \quad c = e^{-\varepsilon\sqrt{t}}$$

とにおいて、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を採ればよい。拡大アフィン Weyl 群 $\tilde{W}(D_5^{(1)})$ の作用は、 $D_5^{(1)}$ 型笹野系の Bäcklund 変換を再現する。

参考文献

- [1] K. Fuji, T. Suzuki, Drinfeld-Sokolov hierarchies of type and fourth order Painlevé systems, Funkcial. Ekvac. **53** (2010) 143-167.
- [2] M. Jimbo and H. Sakai, A q -analog of the sixth Painlevé equation, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145-154.
- [3] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001) 165-229.
- [4] H. Sakai, A q -analog of the Garnier system, Funkcial. Ekvac. **48** (2005) 273-297.
- [5] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, preprint.
- [6] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies, 215-225, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B2**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.
- [7] T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, to appear in AMS Contemporary Mathematics.
- [8] T. Suzuki, A q -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type and q -Painlevé system, preprint.
- [9] T. Tsuda, On an integrable system of q -difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q -Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **293** (2010) 347-359.
- [10] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, to appear in J. reine angew. Math.
- [11] T. Tsuda and T. Masuda, q -Painlevé VI equation arising from q -UC hierarchy, Comm. Math. Phys. **262** (2006) 595-609.
- [12] T. Tsuda and T. Takenawa, Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties, Adv. Math. **221** (2009) 936-954.