

弾性波動乱流のスケール依存性と異種乱流の共存について

横山, 直人
京都大学大学院工学研究科

高岡, 正憲
同志社大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/27161>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 24A0-S3 (1), pp.1-7, 2013-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.24AO-S3

「非線形波動研究の最前線 — 構造と現象の多様性 —」 (研究代表者 太田 泰広)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.24AO-S3

Frontiers of nonlinear wave science — various phenomena and structures

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 1 - 3, 2012

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 1 (pp. 1 - 7)

弾性波動乱流のスケール依存性と異種 乱流の共存について

横山 直人 (YOKOYAMA Naoto), 高岡 正憲
(TAKAOKA Masanori)

(Received 9 January 2013; accepted 11 February 2013)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2013

弾性波動乱流のスケール依存性と異種乱流の共存について

京都大学大学院工学研究科 横山直人 (YOKOYAMA Naoto)
同志社大学理工学部 高岡正憲 (TAKAOKA Masanori)

概要 弾性薄板の波動に関する実験及び数値計算の先行研究では、様々な巾のエネルギースペクトルが観測され、弱乱流理論や次元解析から予想されるスペクトルも含め、統一的理解は得られていない。我々は系のエネルギーをコントロールしたシミュレーションをすることにより、これまでに得られたスペクトルを統一的理解できることを示した。また、大きいスケールでは次元解析で予想されるスペクトルの巾、小さいスケールでは弱乱流理論で予想されるスペクトルの巾、という2種類の巾則が共存していることを見出した。これら異種乱流の境目となるスケールを見積もる方法を提案し、系のパラメータを変えたシミュレーションの結果と比較してその妥当性を検証した。

1 はじめに

薄板の弾性波動は、弱乱流理論を数値計算および実験により検証するのに適した系である。Düringら [1] は数値シミュレーションにより、この系の弱乱理論の定常解である $\mathcal{E}(k) \propto k(\log(k_*/k))^{1/3}$ を得た。他方、鉄の薄板を使った実験では、傾きが正負逆の $\mathcal{E}(k) \propto k^{-0.2}$ を観測した [2, 3]。このエネルギースペクトルの違いに対して、参考文献 [4] ではシステムの非等方性に原因を求め、参考文献 [5] では数値計算における離散化の影響に原因を求めている。しかしながら、これらの原因では全ての結果を統一的に説明できない。

加えて、エネルギースペクトルに対する理論的な予測も一意的には決まらない。弱乱流理論における運動学的方程式には2種類の統計的平衡状態があり、一つは非平衡状態の $\mathcal{E}(k) \propto k(\log(k_*/k))^{1/3}$ であり、もう一つは熱平衡状態の $\mathcal{E}(k) \propto k$ である。他方、自己相似性に基づいた次元解析でも2種類のエネルギースペクトルが可能である。一つはエネルギーカスケードを伴う $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1}$ であり、もう一つは wave action カスケードを伴う $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1/3}$ である。

薄板の波動乱流のエネルギースペクトルについては、この様に実に様々な巾が予測及び観測されている。我々は、これらのエネルギースペクトルの出現に対し統一的理解を試みている。本報告では、低波数側に外力項と高波数側に散逸項を加えた支配方程式を直接数値シミュレーションし、非平衡の定常状態を作ったところ、いくつかのエネルギースペクトルの出現に対する統一的理解が得られたので、それらの結果をまとめる。

2 支配方程式と定式化

2次元の弾性波動は、非線形性と分散性を持つ大自由度系である。薄板の横変動 ζ とその運動量 p の支配方程式は、Föppl–von Kármán (FvK) 方程式と呼ばれ、次式で与えられる [6]、

$$\partial_t p = -\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\}, \quad \partial_t \zeta = \frac{p}{\rho}, \quad \Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\}, \quad (2.1)$$

ここに χ は、Airy 応力ポテンシャルである。Laplace 作用素と Monge–Ampère 作用素をそれぞれ Δ と $\{f, g\} = \partial_{xx} f \partial_{yy} g + \partial_{yy} f \partial_{xx} g - 2 \partial_{xy} f \partial_{xy} g$ で表す。Young 率 E や Poisson 比 σ や密度 ρ は板の物性値であり、 h は板の厚さを表す。

この式の線形分散関係は，波数ベクトルを k とし，それに対応した振動数を ω_k とすると

$$\omega_k = \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)\rho}} k^2, \quad (2.2)$$

ここで $k = |\mathbf{k}|$ である．

次に， p や ζ の Fourier 成分を \tilde{p}_k や $\tilde{\zeta}_k$ として，要素波を表す複素振幅 $a_k = (\rho\omega_k\tilde{\zeta}_k + i\tilde{p}_k)/\sqrt{2\rho\omega_k}$ を導入すると，先の支配方程式は，次のように書き換えられる

$$\dot{a}_k = -i\omega_k a_k + \mathcal{N}_k, \quad (2.3)$$

ここで \mathcal{N}_k は 4 波の非線形相互作用の項を形式的に表したものである．この非線形項は参考文献 [1] にも書かれているが，3 波の相互作用は存在しない．この方程式はまた次の Hamiltonian 形式にも書き直せる $i\dot{a}_k = \delta\mathcal{H}/\delta a_k^*$ ，ここで $\delta/\delta a_k^*$ は a_k の複素共役による汎関数微分を表す．

wave action, n_k は， $\langle a_k a_k^* \rangle = n_k \delta_{kk'}$ として定義される．ここに， $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を， $\delta_{kk'}$ は Kronecker のデルタである．この量は，系が等方的なときには，エネルギースペクトル $\mathcal{E}(k)$ と $\mathcal{E}(k) \propto k\omega_k n_k$ の関係で結びついている．

3 数値計算法

統計的定常状態を得るために，低波数側でエネルギーを注入する外力項を，高波数側に散逸項を，それぞれ支配方程式 (2.3) に付加した．外力を加えた波数領域 $|\mathbf{k}| \leq 8\pi$ では複素振幅の絶対値 $|a_k|$ が C となるように因子 $C/|a_k|$ を毎時刻乗じた．高波数側の散逸項には 8 次の超粘性 $-\nu(|\mathbf{k}|/k_d)^8 a_k$ を用いた．ここで， ν は粘性係数， k_d は散逸波数である．乱流理論との整合性のため周期境界条件を課した．非線形項の計算には 4/2-則でエイリアジングを除去した擬スペクトル法を用いた．時間発展には，安定性向上のために線形項を解析的に解いて繰り込んだ 4 次の Runge-Kutta 法を用いた．

数値シミュレーションに用いた物性値は Boudaoud ら [2] の鉄板を用いた実験に合わせた．すなわち， $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\sigma = 0.30$, $h = 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ である．板は 1m 四方の周期境界であるとした．

数値計算は， 512^2 の格子点数 (エイリアジング除去後のモード数 256^2) で行った．この系では，4 波共鳴相互作用を厳密に満たすモードの数は十分大きく，数値計算による離散化の影響はほとんど無いと考えられ，いわゆる凍結乱流状態 [7] にはならないことも確かめた．

4 計算結果

4.1 エネルギースペクトル

図 1 には，我々の数値シミュレーションで得られた非平衡定常状態におけるエネルギースペクトルが描かれている．計算サイズは Düring ら [1] の数値計算の $(1/2)^2$ であるが，彼らと同程度かそれ以上のレンジに渡り，対数補正を考慮した弱乱流理論の予測するスペクトル $\mathcal{E}(k) \propto k(\log(k_*/k))^{1/3}$ を示している．加えられた外力項や散逸項の形が巾則の領域を広げるのに適していたと考えられる．

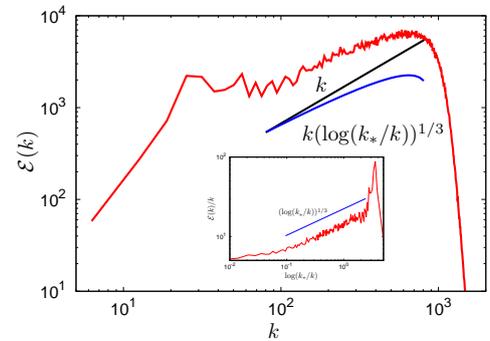


図 1: エネルギースペクトル $\mathcal{E}(k)$ ．挿入図は自己相似形からのずれ． $k_* = 288\pi$ とした．

計算格子点数 512^2 で、外力のエネルギーレベルを9段階に変えてシミュレーションして得られた非平衡定常乱流のエネルギースペクトルを図2に示す。低エネルギーレベル (E1–E3) では、スペクトルの相似性が見られ、その形状は弱乱流理論で予測されるスペクトル $\mathcal{E}(k) \propto k(\log(k_*/k))^{1/3}$ に近いものとなっている。高エネルギーレベル (E7–E9) でも、スペクトルの相似性が見られ、その形状は、自己相似性に基づいた次元解析で得られる wave action カスケードを伴う $\mathcal{E}(k) \propto k^{-1/3}$ に近いものとなっている。中間のエネルギーレベル (E4–E6) では、これらのスペクトルの共存が見られ、高波数側は弱乱流理論で予測されるスペクトルであり、低波数側から wave action カスケードのスペクトルの領域がエネルギーレベルの上昇に応じて広がっている。エネルギーレベルが E6 と E7 の間にある波動乱流のエネルギースペクトルを無理やり一つの中で近似すると参考文献 [2] や [3] で見られた $\mathcal{E}(k) \propto k^{-0.2}$ に近いものとなるだろう。我々の数値計算の全般に渡って等方性は精度よく成り立っており、参考文献 [4] の説明には無理があり、我々は系の非線形性が重要であると考えている。

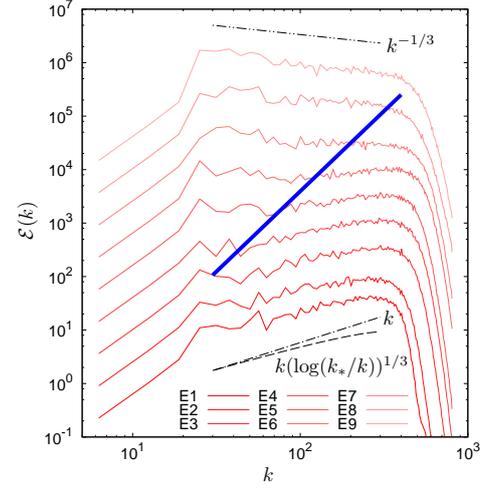


図2: 種々のエネルギーレベルにおけるエネルギースペクトル。

4.2 要素波の非線形性

各スケールにおける非線形性の強さを調べるために、代表する波数ベクトルとして $\mathbf{k} = (16\pi, 0), (32\pi, 0), (64\pi, 0), (128\pi, 0)$ を選び、その波数における $a_{\mathbf{k}}$ の規格化された振動数スペクトルを図3に描いた。式(2.3)からもわかるように、非線形項が無ければグラフは $\Omega/\omega_{\mathbf{k}} = -1$ に1本の線分となる。エネルギーレベルが高いほど、そして低波数ほど、振動数スペクトルは、よりブロードになり、より負の大きい振動数側へとシフトしている。これに対しエネルギーレベルが低い場合は、線形分散関係のスペクトルとほとんど一致する。この場合でも、挿入図に示されたように、低波数側ほど振動数のシフトが大きい。これは実験 [8] と合致している。また、図2に示されたスペクトルの形状とも整合性がとれており、低波数側や高エネルギーレベルで非線形性が強くなっていることがわかる。

この振動数のシフトは、分散項のような役割をする自己相互作用により見積もられる。式(2.3)は、自己相互作用以外の非線形項を $\mathcal{N}'_{\mathbf{k}}$ と書くと、次のように書き換えられる。

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = -i(\omega_{\mathbf{k}} + \Delta\omega_{\mathbf{k}})a_{\mathbf{k}} + \mathcal{N}'_{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

それ故、自己相互作用による振動数シフトは

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{E}{4\rho^2\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}} \frac{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|^4}{|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|^4} (|a_{\mathbf{k}'}|^2 + |a_{-\mathbf{k}'}|^2). \quad (4.2)$$

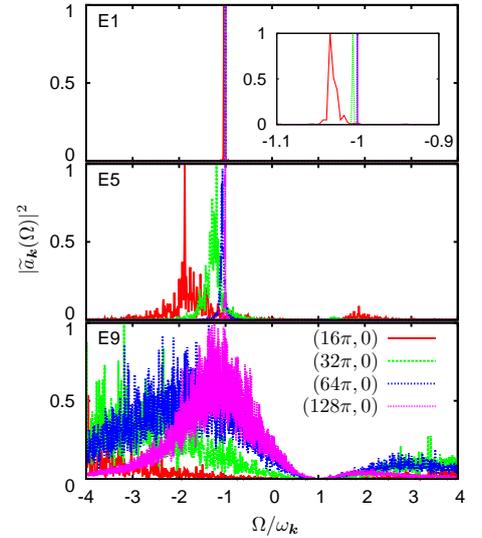


図3: 複素振幅の規格化された振動数スペクトル。エネルギーレベルはE9, E5, E1で、挿入図は $\Omega/\omega_{\mathbf{k}} = -1$ 付近の拡大図。

と表される．

自己相相スペクトル $\mathcal{E}(k) = \frac{k\omega_k}{2\pi} \langle |a_k|^2 \rangle = Bk^m$ を仮定し，波数ベクトルについての離散和 Σ_k を積分で近似すると，この積分は $-1 < m < 3$ のとき収束し，

$$\Delta\omega_k = \frac{3E}{4\rho^2} \left(\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)\rho} \right)^{-3/2} \frac{-1}{(m+1)(m-3)} k^{-1} \mathcal{E}(k) \quad (4.3)$$

となる．弱乱流理論により予測されるスペクトル ($m=1$) のときは，この振動数シフト $\Delta\omega_k$ は一定となる．数値シミュレーションによる振動数シフトは図4となり，上の見積りで予測されるような「一定」との対応はそれほどよくない．この原因として，数値データの揺らぎが大きい，外力や散逸の影響を含むスペクトルの有限性，弱乱流スペクトルにおける対数補正，等が考えられる．

図4の「nE5」(白抜きの) は，式(4.3)の表現をチェックするためにE5とE1の $\mathcal{E}(k)$ の比でE5のデータをE1に対応するようスケールした振動数のシフトである．高波数側で $\Delta\omega_k$ と $\mathcal{E}(k)$ の関係が，式(4.3)のそれと合っていることが確認できる．線形分散関係(2.2)により規格化すると，

$$\frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} = -\frac{2^2 3^3 (1-\sigma^2)^2}{Eh^4} \frac{Bk^{m-3}}{(m+1)(m-3)} \quad (4.4)$$

となり，エネルギーレベル $\mathcal{E}(k)$ に依存しない量となる．このことを踏まえて，次のサブセクションでは，この規格化された量を弱乱流理論の破れの指標として利用する．

次に，数値シミュレーションの結果のスペクトルにより近い共存型スペクトル $\mathcal{E}(k) = B_l k^{m_l}$ ($k < k_c$)， $\mathcal{E}(k) = B_r k^{m_r}$ ($k > k_c$) を仮定し，振動数スペクトルを見積もってみる．但し， $k = k_c$ での連続性より $\mathcal{E}(k_c) = B_l k_c^{m_l} = B_r k_c^{m_r}$ である．非線形性の強い $k < k_c$ では自己相互作用以外の相互作用の影響が無視できなくなるが，簡単な解析表現は得られないので，ここでは先の表現で $\Delta\omega_k$ の積分を評価する．図2より $m_l = -\frac{1}{3}$ ， $m_r = 1$ とすると，強非線形 ($m = -\frac{1}{3}$) の領域 ($k < k_c$) で

$$\Delta\omega_k = \frac{3E}{4\rho^2} \left(\frac{Eh^2}{3(1-\sigma^2)\rho} \right)^{-3/2} B_l \left(\frac{9}{5} k^{-4/3} + \frac{1}{5} k_c^{-10/3} k^2 \right) \quad (4.5)$$

となり，弱非線形 ($m=1$) の領域 ($k > k_c$) で

$$\Delta\omega_k = \frac{3E}{4\rho^2} \left(\frac{Eh^2}{3(1-\sigma^2)\rho} \right)^{-3/2} B_r (k_c^2 k^{-2} + 1) \quad (4.6)$$

となる．図4中にこの表現によるグラフを描いてある．グラフの作成に用いた k_c の値は，図2から読み取ったE1では 3π ，E5では 20π ，E9では 80π を用いた．エネルギーレベルが上がると k 依存性は出てくるが，凸性がシミュレーションの結果と逆になってしまう．

離散和を積分で置き換えたこととモード数の有限性の影響を確認するために， $\Sigma_{k=k_1+k_2+k_3}$ の直接和をモード数を 128^2 として数値的に計算した．但し，エネルギースペクトルの関数形は先の共存型スペクトルのままである．図5からもわかるように，打切波数近くでエネルギースペクトルは直線のままだが， $\Delta\omega$ は数値シミュレーションのそれと同様に下がる．このことはモード数を 1024^2 と増やしても成り立っており，モード数の有限性により $\Delta\omega$ の k 依存性が出るのがわかる．

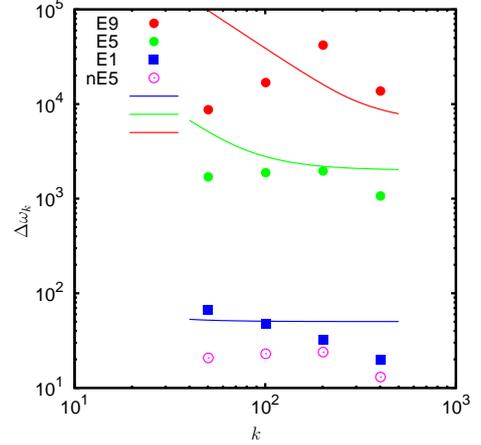


図4: 各エネルギーレベルにおける代表波数の複素振幅の振動数シフト．「nE5」は $\mathcal{E}(k)$ の比でE1に対応するよう規格化した振動数シフト．

数値的に直接和をとることで定性的に近い結果が得られたので、共存型スペクトルで低波数と高波数での打ち切りを考慮して、振動数シフトの解析表現を求める。

エネルギースペクトルとして $\mathcal{E}(k) = B_l k^{m_l}$ ($k_0 < k < k_c$), $\mathcal{E}(k) = B_r k^{m_r}$ ($k_c < k < k_d$), 他は $E(k) = 0$ とする。離散和を積分で近似すると先の自己相似スペクトルと同様に評価ができ、強非線形 ($m = -\frac{1}{3}$) の領域 ($k < k_c$) で

$$\Delta\omega_k = \frac{3E}{4\rho^2} \left(\frac{Eh^2}{3(1-\sigma^2)\rho} \right)^{-3/2} B_l \times \left(\frac{9}{5}k^{-4/3} + \frac{1}{5}k_c^{-10/3}k^2 - \frac{3}{2}k_0^{2/3}k_c^{4/3}k^{-2} - \frac{k_d^{-2}k_c^{-4/3}}{2}k^2 \right) \quad (4.7)$$

となり、弱非線形 ($m = 1$) の領域 ($k > k_c$) で

$$\Delta\omega_k = \frac{3E}{4\rho^2} \left(\frac{Eh^2}{3(1-\sigma^2)\rho} \right)^{-3/2} B_r \times \left(k_c^2 k^{-2} + 1 - \frac{3}{2}k_0^{2/3}k_c^{4/3}k^{-2} - \frac{k_d^{-2}}{2}k^2 \right) \quad (4.8)$$

となる。図6の作成に用いた (k_c, k_0, k_d) の値は、図2から読み取った値、E1では ($3\pi, 8\pi, 120\pi$)、E5では ($20\pi, 8\pi, 144\pi$)、E9では ($80\pi, 8\pi, 144\pi$) を用いた。有限領域とすることで数値シミュレーションの結果とかなり近いものとなった。

4.3 臨界波数の見積り

振動数シフトの解析表現を見積もるために共存型スペクトルを用いる場合、エネルギースペクトルの折れ曲がりの臨界波数が必要となる。この臨界波数は、図6では図2から読み取った値を用いたが、弱乱流理論が予測するスペクトルの下限の波数となることから理論的に見積もれると考えた。弱乱流理論の前提条件である弱非線形性の破れは $\omega_k \approx \Delta\omega_k$ で起こると考え、この式を満たす波数を臨界波数とした。

図2との関係を見るため、この臨界波数におけるエネルギースペクトルの値を求めると、自己相似スペクトルの場合は、

$$\mathcal{E}(k_c) = \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} (3-m)(1+m) \frac{Eh^4}{(1-\sigma^2)^2} k_c^3 \quad (4.9)$$

となるので、 $m = 1$ を代入すると

$$\mathcal{E}(k_c) = \frac{1}{3^3} \frac{Eh^4}{(1-\sigma^2)^2} k_c^3 \quad (4.10)$$

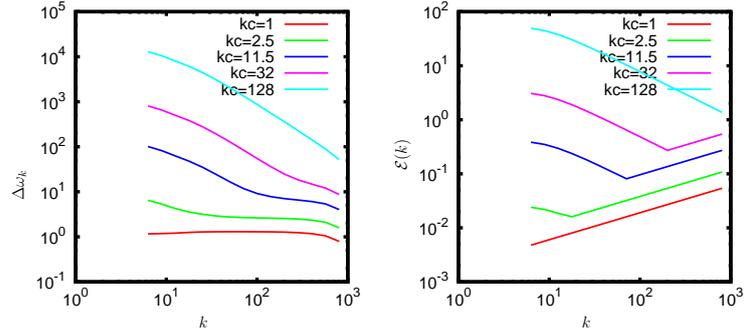


図5: 臨界波数 k_c を与えて式(4.7)により評価した振動数シフトとエネルギースペクトル。

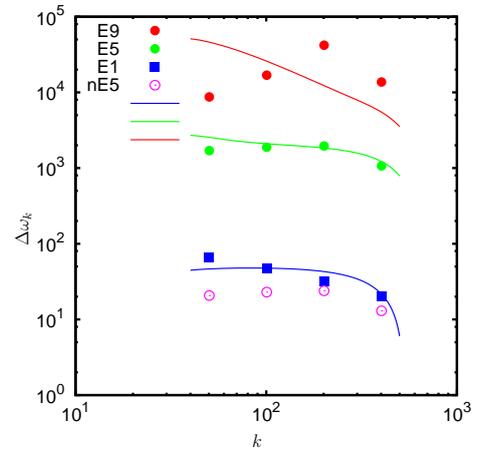


図6: 共存型スペクトルで低波数と高波数での打ち切りを考慮して見積もった振動数シフト。

を得る．他方，共存型スペクトルの場合は，

$$\mathcal{E}(k_c) = \frac{1}{3^3} \frac{(3-m_r)(1+m_l)}{4-m_r-m_l} \frac{Eh^4}{(1-\sigma^2)^2} k_c^3 \quad (4.11)$$

となり， $m_l = -1/3$, $m_r = 1$ を代入すると

$$\mathcal{E}(k_c) = \frac{1}{2 \cdot 3^3} \frac{Eh^4}{(1-\sigma^2)^2} k_c^3 \quad (4.12)$$

を得る．面白いことに，両者の見積りは因子「2」が異なるだけである．ここでの見積りでは，弱非線形性の破れとして $\omega_k \approx \Delta\omega_k$ としたが，より正確には，理論の範囲としては $\omega_k \sim \Delta\omega_k$ 程度ということがわかるだけであることを注意しておく．

この見積りが合っているかどうかを見るために，Young 率 E を変えてシミュレーションした．臨界波数が大きくなる外力のエネルギーの大きい場合は計算サイズを大きくし，エイリアジング除去後のモード数を 256^2 または 512^2 とした．式(4.10)による見積りと定常状態となったときのエネルギースペクトルを図7にまとめて描いてある．各グラフは， $E = 2.0 \times 10^{11}/64$ Pa (黄色系列)， $E = 2.0 \times 10^{11}/8$ Pa (紫色系列)， $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa (赤色系列)， $E = 2.0 \times 10^{11} \times 8$ Pa (緑色系列)， $E = 2.0 \times 10^{11} \times 64$ Pa (水色系列)，である．Young 率およびエネルギーの広い領域に渡って，臨界波数をかなり精度よく見積もっていることがわかる．

5 結論

薄板の弾性波動の乱流状態を調べるために，Föppl-von Karman 方程式に基づく直接数値計算を行った．非平衡定常状態におけるエネルギースペクトルには，高波数領域では弱乱流スペクトルで期待される $\mathcal{E} \propto k$ が，低波数領域では wave action カスケードに相当する $\mathcal{E} \propto k^{-1/3}$ が見られた．

系全体の非線形性は，曲げエネルギーに対する歪みエネルギーの比や，変位の勾配の二乗平均平方根の値などで見積もることができるが，ここでは，各波数(スケール)毎の非線形性を評価するために，複素振幅の時間発展を Fourier 変換し，その振動数の線形分散関係からのシフトを調べた．

これによりエネルギースペクトルの多様性が，系の非線形性の強さに由来することを確認した．

エネルギースペクトルの折れ曲がりの臨界波数を見積もるために，「非線形性の破れ」に着目して，「線形振動数 \approx 非線形振動数」の条件から振動数シフトの解析表現を得た．いくつかの自己相似的なエネルギースペクトルを仮定し比較した．その中でスペクトルの有限性を考慮することで定性的一致がよくなることがわかった．臨界波数の解析表現から，エネルギースペクトルの折れ曲がりの値を表す解析表現を求めた．この表現は，Young 率およびエネルギーの広い領域に渡って，その値をかなりよく見積もっていることがわかった．

本研究では，そのデータの膨大さから，振動数シフトを調べるために時系列データを残した複素振幅は代表的な4モードのみであった．非線形振動数の関数形を考えるためには，より詳細な

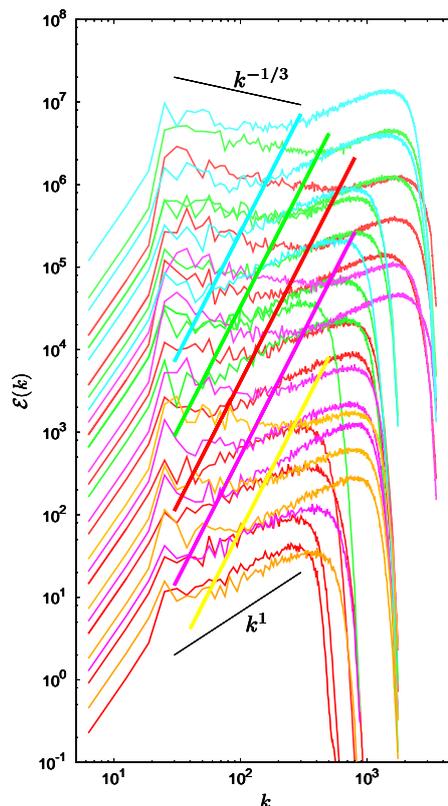


図7: Young 率およびエネルギーレベルを変えたエネルギースペクトルと臨界波数の見積り線．

時系列データを残す必要がある．また，エネルギースペクトルの形成機構の解明も今後の課題である．高波数側の弱乱流理論のスペクトルと熱平衡のスペクトルは leading order で同じ巾 $\mathcal{E} \propto k$ であり，低波数側のエネルギーの巾は実験では次元解析の $k^{-1/3}$ より少し浅く $\mathcal{E} \propto k^{-0.2}$ と報告されている．これらを区別するには，エネルギーおよび wave action のフラックスを調べればよい．これは，既に試みているが収束が遅く長大なデータが不可欠である．両スペクトルの共存機構と，Critical Balance との関係や実場の構造との関係も今後の課題である．

6 謝辞

本研究は JSPS 科研費 22540402 の助成を受けたものである．

参考文献

- [1] G. Düring, C. Josserand and S. Rica: “Weak turbulence for a vibrating plate: Can one hear a Kolmogorov spectrum?”, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006), 25503.
- [2] A. Boudaoud, O. Cadot and B. Odille and C. Touzé: “Observation of wave turbulence in vibrating plates”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008), 234504.
- [3] N. Mordant: “Are there waves in elastic wave turbulence?”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008), 234505.
- [4] B. Miquel and N. Mordant: “Nonstationary Wave Turbulence in an Elastic Plate”, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 034501.
- [5] B. Miquel and N. Mordant: “Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence”, *Phys. Rev. E* **84** (2011), 066607.
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Theory of Elasticity*, Butterworth–Heinemann, Oxford (1986)
- [7] A. N. Pushkarev: “On the Kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves”, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18** (1999), 345–351.
- [8] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux and N. Mordant: “Space-Time Resolved Wave Turbulence in a Vibrating Plate”, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009), 204301.