

表層流・潮汐に関する覚書：海洋レーダー観測に関連して

増田，章
九州大学応用力学研究所

<https://doi.org/10.15017/26828>

出版情報：九州大学応用力学研究所所報. 132, pp.55-74, 2007-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

表層流・潮汐に関する覚書 —海洋レーダー観測に関連して—

増田 章*1

(2007年1月31日受理)

A note on some aspects of surface currents and tides in relation to the measurement with ocean radar

Akira MASUDA,

E-mail of corresponding author: *masuda@riam.kyushu-u.ac.jp*

Abstract

A concise and mathematical description is given of several aspects of surface currents and tides that are encountered in the measurement and analysis of surface currents with ocean HF radar. The subjects in concern are not only for practical data analysis but also for theoretical investigation: the representation of tidal ellipses in terms of complex harmonic constants, the veering of tidal ellipses with depth, Ekman currents in response to stochastic wind stress, and nearby fields around amphidromic or anti-amphidromic points. Complex representation turns out quite useful in discussing those subjects. It is shown that, even when the vertical eddy viscosity is uniform, the unsteadiness of wind stress (and shallow depth of the sea) lowers the angle between wind stress and surface current below 45 degrees on an average with a weight proportional to the power of wind stress. The vertical veering of tidal ellipse is argued to occur when the vector of the surface tidal current rotates in the same direction as the inertial oscillation, in certain circumstances. Under the same conditions, analytical expression is obtained for the depth dependence of the major axis of the tidal ellipse as well. The co-range and co-tidal lines around an amphidromic point (the point of vanishing tidal amplitude) are shown to be robust. On the other hand, the co-tidal lines around the anti-amphidromic point do not necessarily assume such typical hyperbolic curves, if the anti-amphidromic point is defined merely as a saddle point with respect to the amplitude of the component tide.

Key words : *ocean surface current, ocean radar, harmonic analysis of tide, Ekman current, amphidromic and anti-amphidromic points*

1. はじめに

本稿の目的は二つある。一つは海洋レーダーを用いて海流を観測する際に出てくる現象および解析法について整理しておくことである。調和解析、潮流楕円、その転流、エクマン吹送流、無潮点、反無潮点を取り上げる。既によく知られた(と思われている)結果も記述する。但し導出方法に新しいものがあると思う。複素数表現を多用して見通し良い記述をしたつもりである。もう一つの目的は、このような簡明な記述を用いて、表層海流および無潮点・反無潮点周りの場の性質を考察することである。

その理由を述べる。1999年の試験観測(山本ほか

2002)を経て、2002年よりこの方、海洋レーダーシステムで対馬海峡の表層海流面分布を連続計測し、対馬海峡の海流や潮位の変動を研究している(山下ほか2004, 奥野ほか2004, 遙山ほか2004, 奥野ほか2005, Yoshikawa et al. 2006)。その過程で、表層海流や潮汐のことで理解しておくべきことやすっきりしないことがいくつかあった。自分なりに考えてきたことを現時点でまとめておき、今後のレーダー観測と研究に役立てようという趣旨である。例えば、潮流の代表的なものは M_2 潮であるが、その M_2 潮は日本海に入ったすぐ韓国寄りに無潮点がある。また対馬海峡では反無潮点の特性を持つといわれている。無潮点と反無潮点の特性はどの程度分かっているのだろうか。また、海洋レーダーは表面付近の流れを観測

*1 九州大学応用力学研究所

する。その意味で海流の鉛直分布は重要である。鉛直粘性によって生じる鉛直分布と潮流楕円の転流の性質について考察する。極く表層の流れを測っている海洋レーダーでは、常に問題になる吹送流もこの観点から調べておく必要がある。

次の節で調和解析とくに潮流楕円に関する複素表現を、三節で鉛直粘性による表層海流の鉛直分布、四節で無潮点・反無潮点周りの場の特性を論じる。

2. 潮汐の調和解析と潮流楕円

本節を複素表現の準備と定式化に当てる。 $i \equiv \sqrt{-1}$ は虚数単位、 \bullet^* は \bullet の複素共役、 $|\bullet|$ は \bullet の絶対値、 $\arg(\bullet)$ は \bullet の偏角、 $\Re[\bullet]$ は \bullet の実部、 $\Im[\bullet]$ は \bullet の虚部を表すものとする。

簡単のため、この節では分潮を一つ固定する。一般性を失うことなく分潮の振動数 (> 0) を $\omega = 1$ としてよい (時間の単位を調節した)。またある固定した空間点における調和解析として、時刻原点 $t = 0$ を、当該分潮を表す仮想天体の南中時に合わせる。

2.1 視線方向成分から東西南北成分へ変換する

潮汐に入る前に海洋レーダー計測法の話から始めよう。海洋レーダーでは視線方向流速を観測するので二つの斜交する視線方向から東西南北方向へ変換する必要がある。 $(u, v) = (x, y)$ 成分 \equiv (東向き, 北向き) 成分 としよう。また

$$\hat{u} \equiv \mu \text{ 方向の成分}, \quad \hat{v} \equiv \nu \text{ 方向の成分}$$

をレーダーの視線方向に対応する速度成分とする。このとき、複素数を用いて

$$\begin{cases} \hat{u} = \Re[(u + iv)e^{-i\mu}] \\ \hat{v} = \Re[(u + iv)e^{-i\nu}] \end{cases}$$

と表される。よって成分ごとの変換としては

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ \cos \nu & \sin \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1)$$

であり、その逆として

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\mu - \nu)} \begin{pmatrix} -\sin \nu & \sin \mu \\ \cos \nu & -\cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を得る。視線方向成分を東西・南北成分に変換する際、分母に $\sin(\mu - \nu)$ があるので、二つのレーダー

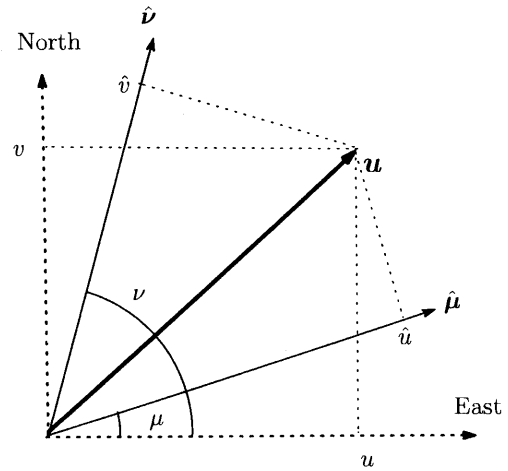


Fig. 1 Radar observes only the radial component of the current vector, so that at least two such components are necessary to determine the current vector. In the figure two components \hat{u} and \hat{v} are measured by two radars in the direction of $\hat{\mu}$ and $\hat{\nu}$, respectively. Those components are used to synthesize the current vector, as is described in the text.

の見る視線方向の成す角度の正弦関数値が小さいとき、大きな誤差を生むことになる。

ちなみに斜交座標系で考えれば流速ベクトル u を

$$\begin{aligned} u &= \frac{(u, \hat{\nu})}{(\hat{u}, \hat{\nu})} \hat{\nu} + \frac{(u, \hat{\mu})}{(\hat{v}, \hat{\mu})} \hat{\mu} \\ &= \frac{\hat{u}}{(\hat{\mu}, \hat{\nu})} \hat{\nu} + \frac{\hat{v}}{(\hat{\nu}, \hat{\mu})} \hat{\mu} \end{aligned}$$

と表現できる。ここに $\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルで、 $\hat{\nu}_\perp$ は $\hat{\mu}$ に直交する単位ベクトル、 $\hat{\nu}$ 、 $\hat{\nu}_\perp$ も同様とする。この関係を複素数で表現すれば

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{\hat{u}ie^{i\nu}}{\Re[-ie^{i(\mu-\nu)}]} + \frac{\hat{v}ie^{i\mu}}{\Re[-ie^{i(\nu-\mu)}]} \\ &= \frac{\hat{u}ie^{i\nu} - \hat{v}ie^{i\mu}}{\sin(\mu - \nu)} \end{aligned}$$

を得て、実部と虚部から u, v が求まる。但し

$$\begin{cases} u \leftrightarrow u + iv \\ \hat{\mu} \leftrightarrow e^{i\mu}, \quad \hat{\mu}_\perp \leftrightarrow ie^{i\mu} \\ \hat{\nu} \leftrightarrow e^{i\nu}, \quad \hat{\nu}_\perp \leftrightarrow ie^{i\nu} \end{cases}$$

なる対応を用いた。

2.2 複素調和定数と潮流の複素数表現

ある空間点で潮汐を調和解析し、潮位 η 、東向き流速 u 、北向き流速 v についてその調和定数、

$Y_c, Y_s, U_c, U_s, V_c, V_s$ を得たとしよう. どれも実変数である. 当該分潮を

$$\begin{cases} \eta = Y_c \cos t + Y_s \sin t & \text{潮位水位} \\ u = U_c \cos t + U_s \sin t & \text{東向き流速} \\ v = V_c \cos t + V_s \sin t & \text{北向き流速} \end{cases}$$

と書く.

$$\begin{cases} Y_- \equiv Y_c + iY_s, & Y_+ \equiv Y_c - iY_s \\ U_- \equiv U_c + iU_s, & U_+ \equiv U_c - iU_s \\ V_- \equiv V_c + iV_s, & V_+ \equiv V_c - iV_s \end{cases}$$

と複素調和定数を定義すれば

$$\begin{cases} 2\eta = Y_+ e^{+it} + Y_- e^{-it} = 2\Re[Y_- e^{-it}] \\ 2u = U_+ e^{+it} + U_- e^{-it} = 2\Re[U_- e^{-it}] \\ 2v = V_+ e^{+it} + V_- e^{-it} = 2\Re[V_- e^{-it}] \end{cases}$$

と書ける.

実表現も複素表示を用いて次の様に表せる.

$$\begin{cases} \eta = \Re[Y_- e^{-it}] = \Re[|Y_-| e^{i(\theta_\eta - t)}] \\ \quad = |Y_-| \cos(t - \theta_\eta) \\ u = |U_-| \cos(t - \theta_u) \\ v = |V_-| \cos(t - \theta_v) \end{cases}$$

但し

$$\begin{cases} |Y_-| \equiv \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2}, & \theta_\eta \equiv \arg(Y_-) \\ |U_-| \equiv \sqrt{U_c^2 + U_s^2}, & \theta_u \equiv \arg(U_-) \\ |V_-| \equiv \sqrt{V_c^2 + V_s^2}, & \theta_v \equiv \arg(V_-) \end{cases}$$

である.

水平流速ベクトル (u, v) に一つの複素数を対応させることができる. 即ち, 複素数の実部でベクトルの x -成分, 虚部で y -成分を表す. ある特定周波数の潮流では

$$\begin{aligned} 2(u + iv) &= (U_+ + iV_+)e^{it} + (U_- + iV_-)e^{-it} \\ &= W_+ e^{+it} + W_- e^{-it} \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける. 但し

$$W_\pm \equiv U_\pm + iV_\pm = (U_c \pm V_s) + i(\mp U_s + V_c)$$

である. W_+ が反時計回りの, W_- が時計回りの回転成分の振幅を表す. $W_+ \neq W_-^*$ には注意する.

$$\begin{cases} W_+ + W_- = 2(U_c + iV_c) \\ i(W_+ - W_-) = 2(U_s + iV_s) \end{cases} \quad (4)$$

という関係がある.

ここまではよく知られた事項を単に複素数を用いて書き換えているに過ぎない. 見た目に複雑な実表現が複素表現を用いると簡明で見通し良いものになることは追って分かる.

2.3 流速の調和定数から潮流楕円要素を求める

潮汐の解説 (彦坂 1971, 宇野木 1993, Yanagi 1999 など) を読むと潮流楕円という言葉はよく出てくる. なのに潮流楕円要素 (長軸長, 短軸長ほか) の求め方を書いたものはなかなか見かけない. 複素表現を使えば簡単に導けるのでここにまとめておく.

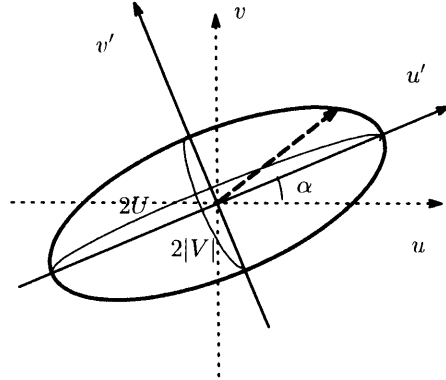


Fig. 2 Tidal ellipse: (u, v) denote the (eastward, northward) velocity components of tidal current, (u', v') the velocity components of tidal current in the (long, short) axes of the tidal ellipse, $2U > 0$ denotes the length of the long axis of the tidal ellipse, $2|V|$ the length of the short axis of the tidal ellipse, and α the angle of the long axis with u the eastward component. The tidal current vector at a moment is denoted by a dashed arrow, which rotates with time clockwise when $V < 0$ and anticlockwise when $V > 0$.

潮流楕円の長軸を u' 軸, 短軸を v' 軸, 長軸の長さを $U' > 0$, 短軸の長さを $|V'|$, u' 軸が u 軸と成す角を α , 潮流ベクトルが長軸のところにくる時刻を β とする. 長軸方向と短軸方向の速度成分は

$$\begin{cases} u' = U' \cos(t - \beta) = \frac{U'}{2} (e^{i(t-\beta)} + e^{-i(t-\beta)}) \\ v' = V' \sin(t - \beta) = \frac{V'}{2i} (e^{i(t-\beta)} - e^{-i(t-\beta)}) \end{cases}$$

と書ける. 後述するように潮流ベクトルは時刻とともに時計回りに回る場合と反時計回りに回る場合がある. この二つの回転方向を表すために短軸長 V' に正・負の値を許す. こうすれば

$$\begin{aligned} \frac{u'}{U'} + i \frac{v'}{V'} &= e^{i(t-\beta)} \Rightarrow \\ \frac{u'}{|U'|} + i \frac{v'}{|V'|} &= e^{i \cdot \text{sgn}(V') \cdot (t-\beta)} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。但し sgn は符号関数であり

$$\text{sgn}(\bullet) = \begin{cases} +1 & (\bullet > 0) \\ 0 & (\bullet = 0) \\ -1 & (\bullet < 0) \end{cases}$$

である。(5) の式は、時刻の増加とともに

$$\frac{u'}{|U'|} + i \frac{v'}{|V'|}$$

が複素平面上で単位円上を

$$\begin{cases} \text{正の向きに回る} & (V' > 0) \\ \text{負の向きに回る} & (V' < 0) \end{cases}$$

ことを表す。

さて

$$\begin{aligned} u + iv &= (u' + iv')e^{i\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(U' + V')e^{i(\alpha-\beta)}e^{it} \\ &\quad + \frac{1}{2}(U' - V')e^{i(\alpha+\beta)}e^{-it} \end{aligned} \quad (6)$$

なので (3) と (6) を比べれば

$$\begin{cases} (U' + V')e^{i(\alpha-\beta)} = W_+ \\ (U' - V')e^{i(\alpha+\beta)} = W_- \end{cases} \quad (7)$$

従って

$$\begin{cases} U' + V' = |W_+| \\ U' - V' = |W_-| \end{cases} \quad (8)$$

ゆえに長軸長 $U' > 0$ と短軸長 V' (符号付き) を

$$\begin{cases} U' = \frac{|W_+| + |W_-|}{2} \geq 0 \\ V' = \frac{|W_+| - |W_-|}{2} \end{cases} \quad (9)$$

と求めることができる。同様に長軸の向き (angle) α と位相の遅れ (phase) β も

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\arg(W_-) + \arg(W_+)}{2} \\ \beta = \frac{\arg(W_-) - \arg(W_+)}{2} \end{cases} \quad (10)$$

と複素数で表現する方が簡明である。序でに

$$\text{楕率} \equiv \epsilon \equiv \frac{V'}{U'} = \frac{|W_+| - |W_-|}{|W_+| + |W_-|} \quad (11)$$

となる。

上に求めた関係は $\omega \neq 1$ の場合でもそのまま成り立つ。位相の遅れ β についてののみ

$$\omega\beta = \frac{\arg(W_-) - \arg(W_+)}{2}$$

としておく。

2.4 潮流ベクトルが (時が進むにつれ) 正の向きに回るための必要十分条件

正の向きに回るとは反時計回りに回ることである。後の議論に出てくるので前項でみたことをここでまとめておく。

これまでの議論と

$$\begin{aligned} |W_+|^2 - |W_-|^2 &= [(U_c + V_s)^2 + (-U_s + V_c)^2] \\ &\quad - [(U_c - V_s)^2 + (U_s + V_c)^2] \\ &= 2(U_c V_s - U_s V_c) \end{aligned}$$

なる関係を用いると

$$\text{正の向きに回る} \Leftrightarrow V' > 0$$

$$\Leftrightarrow |W_+| > |W_-|$$

$$\Leftrightarrow U_c V_s - U_s V_c > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ベクトル積 } (U_c, V_c) \times (U_s, V_s) > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \arg(U_s + iV_s) - \arg(U_c + iV_c) < \pi$$

を得る。但し二つの二次元 (水平) ベクトルのベクトル積とは、三次元ベクトルとしてのベクトル積の鉛直成分を言う。

以上はコリオリ係数 f に無関係であり南北半球の如何に依らない。調和定数、複素数表現、角度の定義のみで決まる。なお、回転スペクトルの諸公式は潮流楕円の諸公式と共通する。

2.5 潮流楕円要素から東西南北流速成分へ変換する

潮流楕円要素から東西・南北方向の調和定数に移すには次の様にする。 U', V', α, β が既知だから (8) により W_+, W_- が分かる。次に (4) を用いて

$$\begin{cases} 2U_- = \Re[W_+ + W_-] + i\Im[W_- - W_+] \\ 2iV_- = \Re[W_- - W_+] + i\Im[W_+ + W_-] \end{cases} \quad (12)$$

とすれば複素調和定数が求まる。その実部、虚部を取れば実の調和定数 U_c, U_s, V_c, V_s が分かる。調和定数を陽に楕円要素で表すには (7) と (12) を用いて次のようにする。

$$\begin{cases} U_- = (U' \cos \alpha \cos \omega\beta + V' \sin \alpha \sin \omega\beta) \\ \quad + i(U' \cos \alpha \sin \omega\beta - V' \sin \alpha \cos \omega\beta) \\ V_- = (U' \sin \alpha \cos \omega\beta - V' \cos \alpha \sin \omega\beta) \\ \quad + i(U' \sin \alpha \sin \omega\beta + V' \cos \alpha \cos \omega\beta) \end{cases} \quad (13)$$

となる。 $\omega \neq 1$ でも良い形にしておいた。

3. 表層海流・潮流楕円の鉛直分布 —鉛直渦粘性効果—

係留式流速計や底置型の ADCP (音響測流計) で比較的長期の計測をすれば潮流楕円の鉛直分布が求ま

る。海面流速を測る海洋レーダーで求めた海面の潮流楕円との関係を調べるには潮流楕円の鉛直分布を調べておく必要がある。また海洋レーダーで測る海流は吹送流の影響を受けるので、吹送流の鉛直分布も検討しておかねばならない。ここでは、密度成層や水平方向の変化といったことは議論しない。鉛直粘性で決まる潮流流速ベクトルの鉛直分布のみを論じよう。なお、潮流楕円の鉛直分布では既に Yanagi (1999) に同様の記述がある。

3.1 潮流楕円の鉛直分布

振動数 ω の分潮を一つ固定し、その潮流楕円が海面で既知とする。即ち W_{\pm} が海洋レーダー観測で分かっているとす。鉛直座標を z で表し、その原点 $z = 0$ を海面とする。水深は H で一様としておく。潮流の水平規模は大きいものとし、圧力 p に水平傾度はあるものの、流速自体は水平に一様と仮定する。渦鉛直粘性係数 ν は水平にも鉛直にも一様としておく。コリオリ係数 f も一定とする。このとき支配方程式と境界条件は以下ようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PDE: } \frac{\partial}{\partial t}(u + iv) + if(u + iv) \\ \quad = \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ \text{b.c.: } \left\{ \begin{array}{l} \text{海面で水平流速が所与の値を取る。} \\ W_+(0)e^{+i\omega t} + W_-(0)e^{-i\omega t} \\ \text{海面 } z = 0 \text{ で } \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = 0 \\ \text{水底 } z = -H \text{ で水平流速は } 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

を得る。 W_{\pm} 等の引数は鉛直座標 z を意味する。ここで

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \text{ は未知だが } \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ は分かっている。}$$

さて固定した ω に対する

$$2(u + iv) = W_- e^{-i\omega t} + W_+ e^{i\omega t}$$

という表現では

$$i(f \pm \omega)W_{\pm} = \nu \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial z^2} + \exists G_{\pm}$$

となる。ここで G_{\pm} は圧力傾度ベクトルに対応する未知量である。

$$\kappa_{\pm} \equiv \sqrt{\frac{(f \pm \omega)i}{\nu}} = \sqrt{\frac{|f \pm \omega|}{2\nu}} (1 + \text{sgn}(f \pm \omega)i)$$

を用いると、海面・海底の条件を満たす解として

$$\begin{aligned} \frac{W_{\pm}(z)}{W_{\pm}(0)} &= \frac{\cosh \kappa_{\pm} H - \cosh \kappa_{\pm} z}{\cosh \kappa_{\pm} H - 1} \\ &= 1 - \frac{\sinh^2 \kappa_{\pm} z/2}{\sinh^2 \kappa_{\pm} H/2} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。

$W_{\pm}(z)$ が分かったので

$$2(u + iv) = W_+ e^{+i\omega t} + W_- e^{-i\omega t}$$

の実部と虚部をとれば水平流速ベクトルの時間変化・鉛直分布が分かる。また

$$\begin{aligned} 2\omega(\xi + i\eta) &= -iW_+ e^{i\omega t} + iW_- e^{-i\omega t} \\ &= W_+ e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} + iW_- e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

の実部と虚部をとれば当該分潮の潮流に乗って移動する水粒子の周期的変位が分かる。海水移動ベクトルを表す楕円の長軸・短軸比、長軸・短軸の向きは潮流楕円と同じである。但し位相が $\pi/2$ 遅れる。もっとも鉛直渦粘性の仮定など曖昧な事項が多いので定性的な議論と理解しておかねばならない。なお ν が鉛直座標に依存する場合も形式的には同様である。必要なら WKB 法を使うこともできる。

ちなみに

$$\begin{aligned} -2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \sum_{\pm} G_{\pm} e^{\pm i\omega t} \\ &= \sum_{\pm} \left[i(f \pm \omega) - \nu \frac{d^2}{dz^2} \right] W_{\pm}(z) e^{\pm i\omega t} \\ &= \sum_{\pm} \frac{i(f \pm \omega) W_{\pm}(0) \cosh \kappa_{\pm} H}{\cosh \kappa_{\pm} H - 1} e^{\pm i\omega t} \\ &= \sum_{\pm} i(f \pm \omega) \left(1 + \frac{1}{2 \sinh^2 \kappa_{\pm} H/2} \right) W_{\pm}(0) e^{\pm i\omega t} \end{aligned}$$

となる。実部と虚部をとれば観測地点における当該分潮の水位勾配(圧力傾度)の時間変化も分かる。要するに振動する風応力に対する応答問題と同じである。つまり振動境界層(ストークス層)が海底から滲み出る問題である。この式は、測定した流速変動から順圧の圧力変動を推定できる可能性を示す。

もし海底で流速が消えるという条件でなく

$$\nu \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = R(u + iv)W$$

という境界条件(柳ほか 1983)を使うなら

$$\begin{aligned} \frac{W_{\pm}(z)}{W_{\pm}(0)} &= \frac{(\cosh \kappa_{\pm} H - \cosh \kappa_{\pm} z) - \frac{\nu \kappa_{\pm}}{R} \sinh \kappa_{\pm} H}{(\cosh \kappa_{\pm} H - 1) - \frac{\nu \kappa_{\pm}}{R} \sinh \kappa_{\pm} H} \\ &= 1 - \frac{\sinh^2 \kappa_{\pm} z/2}{\sinh^2 \kappa_{\pm} H/2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\nu \kappa_{\pm}}{R} \coth \kappa_{\pm} H/2} \end{aligned}$$

とすればよい。この場合は抵抗係数 R を更の一つ指定しなければならない。またこの条件では海底で流

速が 0 にならない (海底接地境界層の外を想定). 但し $R \rightarrow \infty$ とすれば元の境界条件に対する解 (14) に帰着する.

3.2 振動する風応力に応答する表層海流

海洋レーダーは海面付近の平均流速を測る. 平均といっても海面下高々 1m 程度以浅の平均値である. 風が吹いていれば表層吹送流の分だけ海洋本体の平均流速とは異なる. また最近の漂流ブイ観測では, 風向きとブイの移動方向に関係があったとするものが多い. そこで変動する風応力に対して海面付近の海流分布がどのように応答するかを調べておこう. 要するに問題はエクマン吹送流である. 但し風は不規則に変動している. 前項と同様にして応答流を求める.

当該地点の海面にかかる風応力ベクトル $T(t)$ を複素表示して $\tilde{T}(t)$ と書く (水平流速ベクトルに対するのと同様).

$$T(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{T}(t) dt$$

はその複素フーリエ変換である. \tilde{T} は実数でないので, 一般には

$$T(-\omega) \neq T(\omega)^*$$

である.

例によって ω を一つ固定する. 海面では風応力条件

$$\nu \frac{\partial W}{\partial z} = T$$

を適用する. それ以外の境界条件は同じである. このとき振動数 ω で回転する風応力に対する応答として

$$2(u + iv) = \frac{1}{\nu\kappa} \frac{\sinh \kappa(H + z)}{\cosh \kappa H} T e^{i\omega t}$$

が解になる. 但し

$$\kappa \equiv \kappa(\omega) = \sqrt{\frac{f + \omega}{2\nu}} (1 + i \operatorname{sgn}(f + \omega))$$

である. ω は正負いずれでも良いものとしているので添字 \pm は要らない.

上の式を基に風応力ベクトルと表層流ベクトルの成す角度 ϕ_E を考察することができる. 海面における流速ベクトルは

$$2(u + iv)(0) = \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{\nu\kappa(\omega)} T e^{i\omega t}$$

なので

$$\arg(u + iv)(0) - \arg(T e^{i\omega t}) = \arg\left(\frac{\tanh \kappa(\omega) H}{\kappa(\omega) H}\right)$$

は水深 H と ω に依存する.

$$\kappa = |\kappa| \times \begin{cases} e^{+i\frac{\pi}{4}} & (f + \omega > 0 \text{ のとき}) \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} & (f + \omega < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考えると, 風に対する海面流速の応答は

$$\begin{aligned} \frac{\tanh s_{\pm}}{s_{\pm}} &= \frac{(1 - e^{-2s_{\pm}})(1 + e^{-2s_{\mp}})}{s_{\pm}|1 + e^{-2s_{\pm}}|^2} \\ &= \frac{1 - e^{-4s} \pm 2ie^{-2s} \sin 2s}{s \cdot (1 \pm i)(1 + e^{-4s} + 2e^{-2s} \cos 2s)} \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{1 \mp i}{2s} & s \rightarrow +\infty \\ 1 & s \searrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

で決まる. 但し $s_{\pm} = s \cdot (1 \pm i) = \kappa(\omega)H$ で s は正の数である. その偏角は

$$\begin{aligned} \arg\left[\frac{\tanh s_{\pm}}{s_{\pm}}\right] &= \mp \frac{\pi}{4} + \arg(1 - e^{-4s} \pm 2ie^{-2s} \sin 2s) \end{aligned}$$

となる. s により偏角は変るが, 可能な範囲は

$$\begin{cases} 0 > \arg\left(\frac{(u + iv)(0)}{T e^{i\omega t}}\right) \geq -\frac{\pi}{4} - 0.0278 \dots \\ (f + \omega > 0) \\ 0 < \arg\left(\frac{(u + iv)(0)}{T e^{i\omega t}}\right) \leq +\frac{\pi}{4} + 0.0278 \dots \\ (f + \omega < 0) \end{cases}$$

にある (付録参照). $H \rightarrow \infty$ の極限では,

$$\begin{aligned} \arg((u + iv)(0)) - \arg(T e^{i\omega t}) &\rightarrow \arg(\kappa^*) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & (f + \omega > 0) \\ +\frac{\pi}{4} & (f + \omega < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る. これは $f + \omega$ の符号に依存する. 逆に $H \rightarrow 0$ の極限では

$$\arg((u + iv)(0)) - \arg(T e^{i\omega t}) \rightarrow 0$$

となり, 表面流速は風と同じ方向を向く. 水深が浅くも深くも無い中間の場合には概ね中間の向きを取る (僅かではあるが $\pi/4$ 以上になる水深 [と周波数の組みあわせ] もある). 定常な風 ($\omega = 0$) なら, 一様な鉛直渦粘性で水深が浅いだけでも, 風応力ベクトルと海面流のなす角度は $\pi/4$ 以下に狭まる傾向がある (これは良く知られた結果である).

不規則に変動する風応力を考慮するには ω に関する積分を考えればよく

$$u + iv = \int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{2\nu\kappa(\omega)} dT(\omega) e^{i\omega t} \quad (15)$$

となる。ここでは不規則変動を表すものとして確率振幅 $dT(\omega)$ を用いてスティルチェス積分の形で表した。これが変動する風応力に対する一般応答問題の解である。

3.3 風応力と表層流の成す角度

前項の考察を、不規則変動する風応力がある場合のエクマン吹送流の問題に適用する。エクマンの理論によれば、海面で海流は風応力ベクトルの右側 45 度を向くという (北半球)。しかし実際にはこれより小さい角度になるという観測が多い。筆者の知る限りでは、この不一致について二種類の説明がある。一つは渦粘性係数の大きさが深さによって異なるからとするものである。海面近くで小さい渦粘性の場合の計算では確かに 45 度より小さくなる (付録参照)。

もう一つの説明は、粘性係数が深さに依らず一様とするが、実際の風が定常ではないためとするものである。しかし定常でない場合に、定常エクマン層の議論が使えないのは良いとしても、 $-45^\circ = -\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$ (北半球で) となる理由が曖昧のように思う。上に求めた式を基に、この解釈が成り立つかどうかを考えよう。非定常な場合には、「角度差」 ϕ_E 自体が一定ではない。角度差の定義から始めなければならない。ここでは、上に求めた定式化に合わせて次の定義を採用する。

$$\phi_E \equiv \arg(\overline{(u+iv)(0) \cdot \dot{T}^*}) \quad (16)$$

但し \bullet は \bullet の平均を表す。統計的定常性は仮定しておく。ここに $(u+iv)\dot{T}^*$ とは

$$\begin{cases} x \text{ 成分が } |\mathbf{u}||\mathbf{T}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{T}) \\ y \text{ 成分が } |\mathbf{u}||\mathbf{T}| \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{T}) \end{cases} \quad (17)$$

なるベクトルを複素表現したものである。 $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{T})$ とは \mathbf{T} に対して水平流速ベクトル \mathbf{u} の成す角を表す。

この定義は定常流なら $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{T})$ に他ならない。不規則風応力の場合には、いわば風応力の大きさにより重みを付けて平均をとったベクトルの偏角を表す。エクマン層の調節には (中緯度で) 少なくとも半日程度以上時間がかかるので、時間遅れ $\tau \sim$ 半日を考慮して

$$\overline{(u+iv)[t+\tau]\dot{T}^*[t]}$$

から $\phi_E(\tau)$ を定義することも可能であるが、未知量が増えるばかりなので、ここでは $\tau=0$ としておく。このような表現は実際の観測資料の解析にも有効であろう。

さて、一つ注意しなければならないのは、ここで扱っている流速ベクトル $u+iv$ が海洋本体部分の海流速度を差し引いた表面吹送流のみを表すことである (対応して、圧力傾度項 $G=0$ としている)。通常の計測で得た流速は両方が入っているのでこのままでは使えない。もし海面流速ベクトルとして海面の吹送流以外の成分 $\hat{u}+i\hat{v}$ の入った観測資料 $(u+iv)^{\text{obs}}(0)$ を用いると

$$\phi_E^{\text{obs}} = \arg(\overline{(\hat{u}+i\hat{v}) \cdot \dot{T}^* + (u+iv)(0) \cdot \dot{T}^*})$$

になる。真の ϕ_E を得るには

$$\phi_E = \arg(\overline{[(u+iv)^{\text{obs}} - (\hat{u}+i\hat{v})] \cdot \dot{T}^*})$$

としなければならない。 $\hat{u}+i\hat{v}$ 自体は海流や潮汐を含む変動量なのでこの量の計測・推定は容易でない。しかし、もし $\hat{u}+i\hat{v}$ の変動部分と \dot{T}^* の変動部分に相関がないか、あるいは小さいなら

$$\phi_E = \arg(\overline{(u+iv)^{\text{obs}} \cdot \dot{T}^* - (\hat{u}+i\hat{v}) \cdot \dot{T}^*})$$

となる。この量を変動する観測値から見積もるにはやや長期の平均量として $\overline{\hat{u}+i\hat{v}}$ と $\overline{\dot{T}^*}$ が分かればよい。第二項の方が大きいほど ϕ_E を良く推定できる。但し第二項が大きいとその誤差が ϕ_E の誤差に大きく反映する。この意味で対馬海峡なら東水道の冬で小潮時の観測資料が良い。 $\overline{\hat{u}+i\hat{v}}$ が小さく風が強いからである。

話を元に戻す。先に求めた一般解を用いて

$$\begin{aligned} \overline{(u+iv)\dot{T}^*} &= \int \int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{2\nu\kappa(\omega)} \\ &\quad \times dT(\omega) dT^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')t} \\ &= \int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{2\nu\kappa(\omega)} F_T(\omega) d\omega \end{aligned}$$

を得る。但し $F_T(\omega) \geq 0$ を風応力ベクトルのスペクトルとして

$$\overline{dT(\omega) dT^*(\omega')} = F_T(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega$$

となることを用いた。振動数の異なる風応力成分どうしは無相関としている ($F_T(\omega)$ は風応力の回転スペクトルに相当し、 ω 成分と $-\omega$ 成分の間にも特別な関係はない)。この積分を評価して ϕ_E の可能な範囲を決めよう。以下 $f > 0$ としておく。

まず水深 $H \rightarrow \infty$ の極限を考える。

$$\phi_E = \arg \left[\int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{2\nu\kappa(\omega)} F_T(\omega) d\omega \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \arg \left[\int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{\kappa(\omega)} F_T(\omega) d\omega \right] \\
&\rightarrow \arg \left[\int \frac{F_T(\omega)}{\kappa(\omega)} d\omega \right] \\
&= \arg \left[e^{+\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^{-f} \frac{F_T(\omega)}{\sqrt{|f+\omega|}} d\omega \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{-f}^{\infty} \frac{F_T(\omega)}{\sqrt{|f+\omega|}} d\omega \right] \\
&= -\frac{\pi}{4} + \arg \left[\left(\int_{-f}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{-f} \right) \frac{F_T(\omega) d\omega}{\sqrt{|f+\omega|}} \right] \quad (18)
\end{aligned}$$

となる。

(18) 式右辺にある \arg の引数をみると実部も虚部も正である。従って

$$|\phi_E| < \frac{\pi}{4}$$

でなければならないことが分かる。

また風のスペクトルが低周波ほど大きく、また $F_T(-\omega) \approx F_T(\omega)$ (ともかく現実的なもの) なら右辺で \arg の引数の虚部は実部より小さい。よって

$$-\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$$

を得る。即ち非定常性な場合にこのように定義した偏角 ϕ_E は時計回りではあるが、 45° より小さくなる。

一方、水深の浅い極限で

$$\phi_E \rightarrow 0$$

となることは前の考察から明かである。

無限水深の場合で既に $-\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$ であり、水深の小さい極限で $\phi_E \rightarrow 0$ だし、その中間の水深では無限水深の場合より風向きに沿う。いずれにしろ、北半球 ($f > 0$) では

$$-\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$$

となると考えられる。即ち風応力の変動だけでも $-\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$ となる傾向 (北半球) だけは説明できる。

沿岸域や大陸棚域など水深を含めて角度を評価するには

(1) $|T(\omega)|^2$ は低周波で大きい

その低周波域で

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa(\omega)} &= \sqrt{\frac{\nu}{2|f+\omega|}} (1 - i \operatorname{sgn}(f+\omega)) \\
&\rightarrow \sqrt{\frac{2\nu}{|f|}} (1 - i \operatorname{sgn}(f)) \propto e^{-i \operatorname{sgn}(f) \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

(3) $\omega = -f$ は被積分関数の特異点であり

$$\omega \sim -f \text{ 付近で } \frac{\tanh \kappa H}{\kappa} \sim H \in \mathbf{R}$$

といった性質を考える必要がある。

試みに $\omega_T > 0$ をある定数として

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega_T^2}$$

なる風応力のスペクトルを無限水深で考えよう。このスペクトルは低周波で白色、高周波で

$$F(\omega) \approx \omega^{-2} \sim \omega^{-\frac{5}{3}}$$

の形をもつ。実際、対馬海峡の海上観測塔において長年観測した風の解析によれば、実際これに近いスペクトル形を有する (Masuda et al. 1999)。気象庁が琉球沖や四国沖で計測した風についても支持する解析結果がある (草場ほか 2002)。この形のスペクトルの場合には ϕ_E を解析的に求めることができ、

$$\phi_E = \arg \left(1 - i \frac{\operatorname{sgn}(f)}{\sqrt{1 + \frac{\omega_T^2}{f^2} + \frac{\omega_T}{|f|}}} \right) \quad (19)$$

となる (付録参照。偏角だけでなく大きさも求まる)。

Fig. 3 にこの様子を示す。北半球なら右よりだが 45° より大きくはならない。

$$\begin{cases} \phi_E \rightarrow -\frac{\pi}{4} = -45^\circ & \omega_T \rightarrow 0 \text{ のとき} \\ \phi_E = -0.62452 \dots = -35.78^\circ & \omega_T = \frac{f}{3} \text{ のとき} \\ \phi_E \rightarrow 0 & \omega_T \rightarrow \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

程度である。ここで仮定したスペクトル形に当てはめると実際の風の ω_T は小さいだろうから、非定常性の効果はさほど大きくない。単に非定常というだけでは $|\phi_E|$ を狭める効果が全くないこともある ($\omega_T \rightarrow 0$ で $\phi_E = -\frac{\pi}{4}$)。

ちなみに エクマン層の応答の遅れをある τ に固定すると

$$\phi_E(\tau) = \arg \left[\int \frac{\tanh \kappa(\omega) H}{\kappa(\omega)} F_T(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right]$$

になる。低周波の風応力が効くなら τ の影響は小さい。潮汐周期付近の風応力が多少影響するかもしれない。

ここでは、鉛直渦粘性係数が一定でも、非定常性があれば観測結果を定性的に説明できることを示した。但し実際の海のエクマン層では、非定常性以外に渦粘性係数の深さ依存性が効く可能性が強い。その他、風波の碎波など海面付近の乱流については未解明の事項が多い。単に ϕ_E を観測なり模型で評価してみても、その結果がどの程度妥当か判断するのは現段階では難しいと思う。

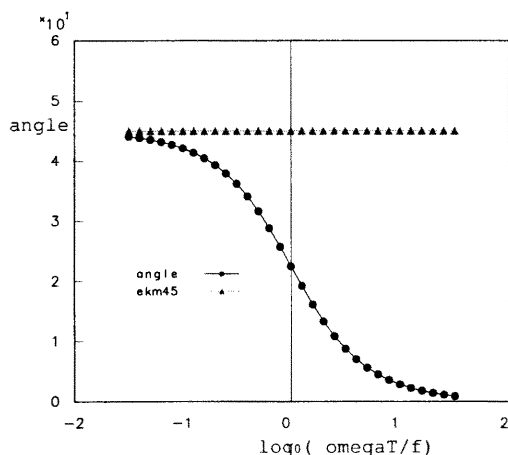


Fig. 3 The angle $-\phi_E$ of the variable surface current with the variable wind stress of a specified spectral form. See text for the definition of ϕ_E and the spectral form of wind stress. The abscissa and ordinate denote $\log_{10} \frac{\omega_T}{f}$ and $-\phi_E$ in degrees, respectively, for the northern hemisphere. Note that $-\phi_E$ (\bullet) decreases from the theoretical value 45° (\blacktriangle) to 0, as ω_T increases from 0 to infinity.

3.4 潮流楕円の鉛直分布とくに転流

潮流楕円の話に戻る。粘性効果で(潮流ベクトルの)回転の向きが深さによって異なることが実際の海で起こる(柳ほか 1983)。対馬海峡にもその事例がある(Takikawa et al. 2003)。この現象をここでは潮流楕円の転流と呼ぶことにする。

特定の分潮の潮流ベクトルが反時計回りか時計回りかどうかは $|W_+|$ と $|W_-|$ の大小関係で決まることを述べた。従って、潮流楕円の転流とは $2V' = |W_+| - |W_-|$ の符号がある深さを境に変わることである。時計回りと反時計回りの成分がある深さで同じ大きさになると言い換えても良い。転流の生じる深さでは短軸長が 0 にならなければならない。よって、前節で求めた W_\pm に粘性係数、コリオリ係数、水深等の数値を当てはめれば潮流楕円が転流するかどうかは直ちに判定できる(柳ほか 1983)。

ただ数値計算のみでは理解が難しい。ここでは定性的な理解を目的にしているので数式表現によって様子を見る。

$\nu \rightarrow 0$ を仮定する。まず $f \pm \omega \neq 0$ としよう。この場合、潮流楕円は深さ方向にあまり変化しない。海

底境界層 ($|\kappa_\pm|^{-1}$ の厚みをもつ) の中でしか顕著な変化がない。粘性が小さいので海底境界層付近を除き上下の変化は小さいということである。実際、渦粘性が小さければ $|\kappa_\pm|$ が大きいので、 W_\pm の値は海面近くの値を保ち海底近くでのみ急減衰する。従って、潮流楕円の長軸、短軸、長軸の向き、位相の遅れは全て海面から海底近くまで同じで変化しない。潮流ベクトルの回転方向も逆転しない。

$\nu \rightarrow 0$ を認めても $\omega \rightarrow f$ となると上の議論は使えなくなる。 $|\kappa_+|$ は確かに大きいが

$$|\kappa_-| = \left| \sqrt{\frac{|f - \omega|}{\nu}} \right|$$

が大きいとは限らないからである。つまり $\omega \approx f$ なら(自転効果がなくなり)粘性は実質的に大きく効いてきて海底の影響が海面近くまで現れやすい。つまり $\omega \rightarrow f$ だとエクマン層型の海底境界層が厚くなりうる。日本近海でいえば日周潮の方が起きやすい。このことは(北半球では) $\kappa_- (W_-)$ にのみ生じうる。通常の渦粘性係数と水深だと κ_+ による境界層は十分薄いので $\kappa_+ (W_+)$ にはこの効果が殆どない。なお水深が小さい場合にも κ_- に対応する海底境界層の影響が表層付近まで出やすい。

この状況を $|\kappa_- H| \ll 1$ なる近似で考える。

$$\begin{aligned} \frac{W_-(z)}{W_-(0)} &= 1 - \frac{\sinh^2 \kappa_- z/2}{\sinh^2 \kappa_- H/2} \\ &= 1 - \frac{z^2}{H^2} \left[1 - \frac{\kappa_-^2 H^2}{12} \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) + \dots \right] \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) \left(1 + i \frac{(f - \omega) H^2 z^2}{12\nu H^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

となる。

$|f - \omega| \ll 1$ と限る必要はないが(限れば日本近海の半日周潮に適用できない)。

$$\begin{cases} W_+(z) \approx W_+(0) \\ \text{(通常この条件は問題なく満たす)} \\ W_-(z) \approx W_-(0) \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

という近似自体は成り立っているとしよう。

北半球で (21) が成り立つ状況は $|\kappa_+ H|$ が大きく $|\kappa_- H|$ が小さいことを意味する。普通とまではいえないが使える近似ではあろう。とくに潮流楕円の転流が見えるならこの状況に近いだろう。このとき (8) により

$$V'(-H) = U'(-H) > 0$$

が成り立つことを注意しておく。慣性運動と同じ回転の成分が摩擦により海底付近で消え、逆回りの円運動のみが残るということを意味する。

さて (9) と (21) を用いて

$$2V'(z) = |W_+(0)| - |W_-(0)| \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) \\ \approx V'(0) \left(2 - \frac{z^2}{H^2}\right) + U'(0) \frac{z^2}{H^2}$$

を得る。但し短軸長 V' は正・負がありうる。南半球も含めて

$$2V'(z) \sim |W_+(0)| \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) - |W_-(0)| \\ = V'(0) \left(2 - \frac{z^2}{H^2}\right) + \text{sgn}(f)U'(0) \frac{z^2}{H^2}$$

と表せる。

この場合の転流の有無を調べるには

$$h(z) \equiv \frac{V(z)}{V(0)'} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{U'(0)}{V'(0)}\right) \frac{z^2}{H^2} \\ = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn}(f)}{\epsilon(0)}\right) \frac{z^2}{H^2} \quad (22)$$

を考えればよい。 $\epsilon(0)$ は海面での (符号付き) 楕率を表し $|\epsilon(0)| < 1$ に注意しよう。 $h(0) = 1$ なので

$$0 > 2h(-H) = 1 + \frac{\text{sgn}(f)}{\epsilon(0)} \Leftrightarrow \frac{\text{sgn}(f)}{\epsilon(0)} < -1 \\ \Leftrightarrow \text{sgn}(f)\epsilon(0) < 0 \quad (|\epsilon(0)| \leq 1)$$

が転流が起こるための必要十分条件である。即ち海面で慣性振動と同じ向きに潮流ベクトルが回転していればよい。今の近似では海底で $V'(-H) = U' (= H) > 0$ なのだから、転流するには $V'(0) < 0$ であればよいということである。この条件を満たせば、

$$\frac{z}{H} = -\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{|\epsilon(0)|}}} = -\sqrt{\frac{2|\epsilon(0)|}{1 + |\epsilon(0)|}} \quad (23)$$

なる深度で転流が起こる。これより深いところでは潮流ベクトルが慣性円と逆向きに回り、海底付近では殆ど円になる。海面で潮流楕円の楕率 (の絶対値) が小さいほど (即ち直線往復運動に近いほど) 浅いところで転流する。

潮流楕円長軸の長さの鉛直分布も同じ近似で論じることができる。(22) を導いたと同様に

$$\frac{U'(z)}{U'(0)} = 1 - \frac{z^2}{2H^2} \left(1 - \text{sgn}(f) \frac{V(0)'}{U(0)'}\right) \\ = 1 - \frac{1 - \text{sgn}(f)\epsilon(0)}{2} \frac{z^2}{H^2} \quad (24)$$

を得る。長軸は常に海面から海底へ次第に減少する。減少する割合は転流する場合 ($\text{sgn}(f)\epsilon(0) < 0$) の方が大きい。

$$\frac{U'(-H)}{U'(0)} = \frac{1 + \text{sgn}(f)\epsilon(0)}{2}$$

なので転流が起っていると海底付近の長軸長は海面での値の半分以下になる。但し海底 $z = -H$ とは、海底付近の薄い境界層 (北半球なら κ_+ によるもの) の外側を指すものとしている。海底付近で長軸が零になるには海面で慣性円になっていなければならない。

長軸の向き α と位相の遅れ β が深さとともに変わる様子も同様に調べられる。ただ (21) の近似だと海面から海底まで変化しない:

$$\begin{cases} \alpha(z) - \alpha(0) \\ \beta(z) - \beta(0) \end{cases} = \frac{\arg(W_-(z)) - \arg(W_-(0))}{2} \\ = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{W_-(z)}{W_-(0)}\right) = 0$$

しかし (20) に近似を上げると

$$\begin{cases} \alpha(z) - \alpha(0) \\ \beta(z) - \beta(0) \end{cases} = \frac{1}{2} \arg\left(1 + i \frac{(f - \omega)H^2}{12\nu} \frac{z^2}{H^2}\right) \\ \approx \frac{(f - \omega)H^2}{24\nu} \frac{z^2}{H^2} \quad (25)$$

となる。日本近海の半日周潮では $f - \omega < 0$ だから、深くなるにつれ時計回りに長軸が回る。二次関数の形から海面付近での変化は小さい。また長軸の向きと位相の成す角は深さに依らない。

Figs. 4-5 に潮流楕円長軸長 $U'(z) > 0$ 、(符号付き)の短軸長 $V'(z)$ および長軸の向き $\alpha(z) - \alpha(0)$ (海面での値に相対的に測る) の鉛直分布を示す。それぞれ、海面の楕率 $\epsilon(0)$ は -0.3 および $+0.3$ である。前者では転流が生じ、後者では生じない。なお $U'(z)$ と $V'(z)$ は海面の長軸長 $U'(0)$ で規格化しているし $\alpha(z) - \alpha(0)$ も $\frac{(f - \omega)H^2}{24\nu}$ で規格化している。最後の量は小さい。また $f - \omega$ の正負で符号が変わることに注意する。

図も参考にしながら、以上の結果を見てまとめよう。(21) の近似が成り立つ状況で

- 1 海面で慣性振動と逆向きに回る潮流楕円なら転流は生じない。海面で慣性振動と同じ向きに回る潮流楕円なら、海面の潮流楕円の楕率で決まる (23) の深さで転流し深いところで慣性振動と逆向きに回る。いずれにしても底近くでは円運動に近い。

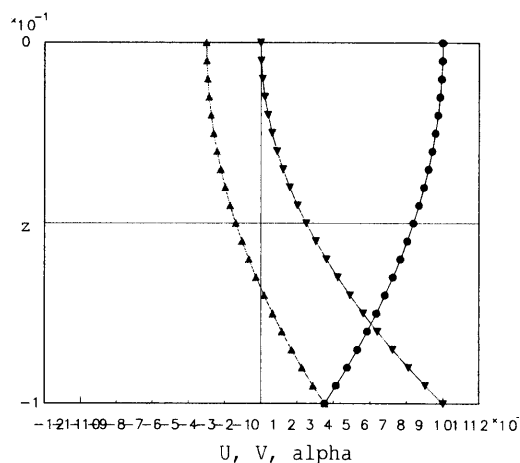


Fig. 4 An example of the profiles of tidal ellipses; ●: U' the length of the long axis, ▲: V' the length of the short axis and ▼: $\alpha - \alpha(0)$, where U' and V' are normalized by $U'(0)$ and $\alpha - \alpha(0)$ is normalized by $\frac{(f - \omega)H^2}{24\nu}$. The argument 0 means the value at the sea surface ($z = 0$). See text for details. The profiles were calculated according to the approximation described in the text. The ordinate is the normalized depth $\frac{z}{H}$. $\frac{V'(0)}{U'(0)} = -0.3$ for this case, so that V' changes the sign near the bottom.

2 潮流楕円長軸の長さは深さとともに減る。転流が生じしかも海面での潮流楕円の楕率 (の絶対値) が大きいほどこの減少が大きい。転流している場合、海底付近の潮流楕円長軸長は海面での値の半分以下になる。逆に転流しない場合、海底付近の潮流楕円長軸長は海面での値の半分以上になる。

3 潮流楕円長軸の向き α と位相遅れ β は (25) に従って深さとともに僅かに変化する。但し α, β については (20) の近似を用いた。

播磨灘における潮流楕円の観測 (柳ほか 1983) の結果は確かに上に述べた性質を有するようである。

対馬海峡では Takikawa et al. (2003) が定期客船搭載の ADCP 計測資料を用いて航路に沿った断面で M_2 潮の潮流楕円を計算している。これによれば概ねどの場所でも時計回りの潮流楕円が海面から海底まで続く。潮流楕円の転流が見られるのは西水道の対馬寄りで水深 130 m 以上の深い所だけである。鉛直

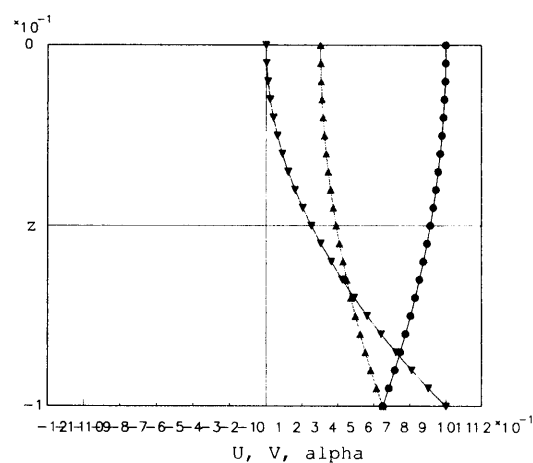


Fig. 5 The same as Fig. 4 except that $\frac{V'(0)}{U'(0)} = 0.3$. Note that V' remains positive and increases its magnitude toward the bottom.

渦粘性意外に他の (例えば地形) 効果が働いているかもしれない。内部潮汐の可能性、理論で用いている近似 (仮定) の妥当性、観測の精度なども検討する必要がある。

最後に転流深度の水平分布を、(21) に基づく上の議論が成り立つ場合について考えてみよう。海面の潮流楕円は水平方向に徐々に変化するとする。海面における (符号付きの) 楕率が 0 になる所を境にして潮流楕円の転流の有無が分かれる。また海面潮流楕円の楕率の水平分布を反映して潮流楕円の水平・鉛直分布に上に述べた特徴が現れる。例えば楕率の水平勾配が一樣なところでは、転流深度が $\sqrt{\text{楕率 } 0 \text{ の線からの水平距離}}$ に比例して大きくなる。もっとも、(21) の近似が悪かったり、地形や密度成層の効果が働いてこのようにならないことも多いだろう。

4. 潮差停留点周りの様子

—とくに無潮点・反無潮点—

無潮点 (amphidromic point = [running about] point) というのは各分潮についての概念である。「無潮点」というと潮汐固有のもののように聞こえるが、とくに珍しいものではない。

コリオリ係数がない場合を考えよう。矩形的湾奥への進行波と湾奥からの反射波で作る定在波の節では水位変動の振幅が 0 になる。これが無潮点の原型であり、無潮「線」である。コリオリ力の効かない

水面波の定在振動では節線が現れるのが普通だがコリオリ力が働くと、湾奥に進む波と湾奥からの反射波の振幅はどちらも湾幅方向に一様でなくなり無潮線が無潮点に縮む。このとき等潮差線は無潮点の周りに同心円状に並ぶ。また等時潮線は無潮点の周りに放射状(1周期分)に並ぶ。

北半球の湾内(簡単のため推進一定の矩形湾としておく)に進入する潮汐は反時計回り(Kelvin波の進む向き)に位相が進む傾向がある。コリオリ力のため、湾内に進む波は湾奥に向かって右側の振幅が大きく、湾奥から反射してくる波は湾奥に向かって左側の振幅が大きい。すなわち Kelvin 波の性質を有する。このため、無潮点ができやすい(Taylor 1920)。その場合、摩擦により反射波の振幅が小さくなるので、無潮点は湾奥に向かって左側に偏ることが多い。

無潮点ができるには、湾の奥行きが潮汐波の波長($\sqrt{gh} \times$ 周期)の1/4以上あることが必要だろう。無潮点は半波長毎の一つと考えられるので、奥行きのある湾ほど無潮点は多くなる。

隣り合う無潮点と無潮点との間に「反無潮点」(anti-amphidromic point) (cf. node \leftrightarrow anti-node) が現れる(ことがある)。Odamaki (1989), 宇野木 (1993) によれば対馬海峡の半日周潮は明瞭な反無潮点という。反無潮点は潮差について鞍点風(奥行き方向に極大だが、湾の左岸右岸を横切る方向に極小)であるだけでなく等時潮線も鞍点状になる。本当は、等時潮線は反無潮点の周りで殆ど一定なのだが細かく見れば反無潮点の位相との差の分布が鞍点風ということである。

以上のように述べただけでは、あるいは事例図を示しただけではどの程度一般性があるのか分からない。その理屈を踏み込んで調べるのが本節の目的である。

4.1 無潮点と反無潮点の近くの様子を単純な数式で見える

無潮点と反無潮点の原型として次の様に一様水深の細長い長方形の湾を考える。湾奥側を $x > 0$ の向きに、 $y > 0$ を湾の左岸側(湾奥から見て)にとる。本質的には逆向きに進む二つのケルビン波の重ね合わせでよい(同じ設定は例えば宇野木 (1993) の解説にも見られる)。この場合流体運動水平成分は湾奥方向にのみ振動であり潮流楕円は直線になる。次元量に $*$ を付ける。次のように無次元化する。

$$y = \frac{f_* y_*}{\sqrt{g_* H_*}}, \quad x = \frac{\omega_* x_*}{\sqrt{g_* H_*}}$$

但し g_* は重力加速度で H_* は湾の水深である。この無次元化だと x と y に歪みがある。時間は振動数で無次元化する。湾の中央部を $y = 0$ にとり η を潮位とする。また $z \equiv x + iy$ とする。

$$\begin{aligned} 2\eta &= \cos(x-t)e^{-y} + \cos(x+t)e^y \\ &= \frac{e^{i(x-t)-y} + e^{-i(x-t)-y}}{2} + \frac{e^{i(x+t)+y} + e^{-i(x+t)+y}}{2} \\ &= e^{it} \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} + e^{-it} \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= e^{it} \cos(x-iy) + e^{-it} \cos(x+iy) \\ &= 2\Re[\cos z e^{-it}] = 2\Re[|\cos z| e^{-i(t-\arg(\cos z))}] \\ &= 2A(x, y) \cos(t - \theta(x, y)) \end{aligned}$$

$$\text{但し } \begin{cases} A(x, y) \equiv |\cos z| = \exp[\Re \log \cos z] \\ \theta(x, y) \equiv \arg(\cos z) = \Im \log \cos z \end{cases} \quad (26)$$

である。即ち前に述べた複素調和定数 $Y_- = \cos z$ を場所 $z = x + iy$ の解析関数として陽に表せる。

この式を基に無潮点と反無潮点の特徴を見ていく。無潮点では $A = 0 \Leftrightarrow \cos z = 0$ だから

$$z = x + iy = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

無潮点(例えば) $z = -\pi/2$ の近くで

$$x = x' - \frac{\pi}{2}, \quad z = z' - \frac{\pi}{2}, \quad |z'| \ll 1$$

として

$$\begin{aligned} A &= |\cos z| = |\sin z'| \approx |z'| = |x' + iy| \\ &= \sqrt{x'^2 + y^2} \\ \theta &= \arg(\sin z') \approx \arg z = \arg(x' + iy) \end{aligned}$$

なので潮差 $\sim A$ は無潮点からの「距離」に比例し等時潮線 θ は時計回りに遅れる。

一方、反無潮点 $z = 0$ の近くでは

$$\begin{aligned} A &= |\cos z| \approx \left|1 - \frac{z^2}{2}\right| \\ &= \left|1 - \frac{x^2 - y^2}{2} - ixy\right| \approx 1 - \frac{x^2 - y^2}{2} \\ &= \Re\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arg(\cos z) \approx \arg\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \\ &= \Im \log\left(1 - \frac{z^2}{2}\right) \approx -\Im\left[\frac{z^2}{2}\right] \\ &= -xy \end{aligned} \quad (28)$$

となる。潮差も位相差も鞍点状の分布をする。反無潮点との位相差は極く僅か($\sim O(|x|^2)$)である。反無潮点上では圧力傾度が0で、無潮流点になっている。

ところで、無潮点は潮差が 0 となる地点と定義する。他方、反無潮点の定義は明確でないように思う。潮差がその周りで鞍状に分布するような地点あるいは(少なくとも近似的に)無潮流の点という定義が良いように思う。

無潮点と反無潮点の周りで等潮差線と等時潮線とは直交することを見た。実は、この状況だとこの直交性は無潮点・反無潮点近傍に限らずどこでも成り立つ。というのは(26)が示すように等潮差線と等時潮線とは解析関数の実部と虚部の等値線にほかならないからである(いろいろな意味で使ってきた複素表現がこの場合も明快な意味を与える)。但し x 方向と y 方向の歪みを考慮し元の長さ(本来の平面配置)に戻すと直交性の意味が異なることを注意しておく。

4.2 無潮点周りの様子一般

前項では、逆向きに進行するケルビン波の重ね合わせという特殊ではあるが典型的な状況で無潮点・反無潮点周りの様子を見、反無潮点を定義した。

しかし少々地形を変えても無潮点というものは同じように現れる。無潮点付近の流れと潮位場の様子が壊れず存在し続けるという意味で頑健(robust)である。ところが無潮点是非回転系なら定在波の節であり、点ではなく線をなすことが知られている。この場合も少々地形を変えたからといって節線が生じ頑健である。潮汐の場合に無潮点が点という形を保ちつつ頑健に現れるのは当然だろうか。無潮点([running about] point)があると、その英語の意味するとおり等時潮線はその周りを必ず一周するものだろうか。また同じように反無潮点というのも頑健に存在し続けるものだろうか。このような疑問に答えることが以下の目的である。まず一般の無潮点の近くの様子を調べよう。

今、分潮を一つ固定しその無潮点の一つが原点 $(x,y)=(0,0)$ にあるとすると

$$Y_- = Y_c + iY_s = 0 \quad \text{at} \quad (x,y) = (0,0) \quad (29)$$

Y_- を無潮点の周りで Taylor 展開すれば

$$\begin{aligned} \exists a, \exists b, \exists c, \exists d \in \mathbf{R}: \alpha &\equiv a + ib, \beta \equiv c + id, \\ Y_- = Y_c + iY_s &= \alpha x + \beta y + O(|\mathbf{x}|^2) \\ &= (ax + cy) + i(bx + dy) + O(x^2 + y^2) \\ |\mathbf{x}| &\equiv \sqrt{x^2 + y^2} \\ \eta(x, y, t) &= \Re[(\alpha x + \beta y)e^{-it}] + O(|\mathbf{x}|^2) \\ &= \Re[\zeta e^{-it}] + O(|\mathbf{x}|^2) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= |\zeta| \cos(t - \arg(\zeta)) + O(|\mathbf{x}|^2) \\ \zeta &\equiv \xi + i\eta \equiv (ax + cy) + i(bx + dy) \end{aligned}$$

となる。ここでは β を単なる複素定数として用いており位相差の意味ではない。また η を、水位と $bx + dy$ の両様に使っているが紛らわしいことはないだろう。

ところで (x,y) と (ξ,η) が 1:1 の関係にあるための必要十分条件は

$$0 \neq ad - bc = \Im[\alpha^* \beta]$$

である。このとき

$$\begin{aligned} x + iy &= A\xi + B\eta \\ \text{但し } A &\equiv \frac{d - ib}{ad - bc}, \quad B \equiv \frac{-c + ia}{ad - bc} \text{ は複素数} \end{aligned}$$

となる。

$$\Im[A^* B] \cdot \Im[\alpha^* \beta] = 1 \quad (31)$$

もすぐ分かる。

普通には (generic というような意味で) $|ad - bc| \neq 0$ を仮定してよい(非回転系の定在波では $ad - bc = 0$ になる)。つまり斜交座標系である (ξ,η) 座標系に置き換えてみると、(30)の表す複素調和定数は前項で見た無潮点周りの複素調和定数

$$Y_- = \sin z' \sim z'$$

と全く同じである。従って前項で見た無潮点周りの挙動はそのまま ζ 面で成り立つ。

このことを用いて、一般の無潮点 ($ad - bd \neq 0$) の周りの場の性質を調べよう。

ζ 面なら等潮線は円で $|\zeta| = \text{const}$ を満たす (x,y) 系に戻せば

$$(ax + cy)^2 + (bx + dy)^2 = \text{const}$$

という正値二次形式で楕円を表す。行列

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

の固有ベクトルの方向が楕円の長軸と短軸の向きを表す。つまり等潮線 (co-range line) は無潮点を中心とする楕円である。よって

[1]: 等潮線 (co-range line) は無潮点を中心とする楕円である。

等時潮線は ζ 面上で

$$t - \arg(\zeta) = \text{const} \quad (32)$$

であり正の向きに回る。

$R \geq 0, r \geq 0$ を用いて座標を表す複素数を

$$\begin{cases} \xi + i\eta = Re^{i\varphi} \\ x + iy = re^{i\theta} \end{cases}$$

と極表示しよう。 m を正定数として $(x, y) \rightarrow (mx, my)$ とすると $(\xi, \eta) \rightarrow (m\xi, m\eta)$ なので原点から出る直線の上で偏角の対応関係は不変である。従って等時潮線は無潮点から放射状に出ることが分かる。

さて一般に

$$\frac{d}{d\varphi}(x + iy = re^{i\theta}) = \left(\frac{dr}{d\varphi} + ir \frac{d\theta}{d\varphi} \right) e^{i\theta}$$

である。この両辺に $x - iy = re^{-i\theta}$ を乗じて

$$(x - iy) \frac{d}{d\varphi}(x + iy) = \left(r \frac{dr}{d\varphi} + ir^2 \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

を得る。よって、等潮線 $|\zeta| = R = \text{const}$ 上では

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{d\varphi} &= \Im \left[(x - iy) \frac{d}{d\varphi}(x + iy) \right] \\ &= \Im \left[(A^* \xi + B^* \eta) \frac{d}{d\varphi}(A\xi + B\eta) \right] \\ &= \Im[A^* B] \left(\xi \frac{d\eta}{d\varphi} - \eta \frac{d\xi}{d\varphi} \right) \\ &= \Im[A^* B] R^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{R^2}{ad - bc} = \text{const} \end{aligned}$$

となる。 φ が増加すると θ も増加ないし減少する。また回る向きは $ad - bc$ の正負で決る。 θ が $0 \rightarrow 2\pi$ となったとき、 φ も 2π だけ増加または減少する (1:1 の関係があった)。以上をまとめると

[2]: 等時潮線 (co-tidal line) は無潮点から放射状に出る。等時潮線は「面積速度一定」則を満たしつつ一周期の間に無潮点の回りを一周する。また等時潮線が正の向きに回るための必要十分条件は $\Im[\alpha^* \beta] = ad - bc > 0$ であり、これは $\nabla Y_c \times \nabla Y_s > 0$ と言い換えても良い。

次に無潮点における潮流楕円との関係を見よう。非粘性として

$$i(f \pm \omega)(u + iv)_{\pm} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\pm} \quad \text{であり}$$

$$i(f \pm \omega)W_{\pm} = G_{\pm}$$

である。等時潮線の回転する向きは $ad - bc = \Im[\alpha^* \beta]$ で決まるのに対し潮流ベクトルの回転する向きは

$$\begin{aligned} 2V' &= |W_+| - |W_-| = \frac{|G_+|}{|(f + \omega)|} - \frac{|G_-|}{|(f - \omega)|} \\ &= \frac{|\alpha^* + i\beta^*|}{|(f + \omega)|} - \frac{|\alpha + i\beta|}{|(f - \omega)|} \end{aligned}$$

の符号次第だった。従って

[3]: 無潮点付近で流速ベクトルの回る向きと等時潮線の回る向きに特別な関係はない。

無潮点の周りの性質をもう少し調べよう。一様水深、線形、非粘性としておく。 $(0, 0)$ で $|\eta| = 0$ だから、そこでは

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 & \Rightarrow \text{発散なし} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f}{H} \eta = 0 & \Rightarrow \text{渦度なし} \end{cases}$$

になっている。だから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - f \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\nabla^2 p = -g \nabla^2 \eta \\ &\Rightarrow \nabla^2 Y_- = 0 \end{aligned}$$

となる。よって

[4]: 線形、非粘性、一様水深を仮定した上で、特定分潮の潮流は無潮点上で発散 0、渦度 0 である。無潮点上で $\nabla^2 \eta = 0$ なので複素数 $\exists \alpha, \exists \beta, \exists \gamma, \exists \varepsilon$ を用いて複素調和定数を

$$\begin{aligned} Y_- &= \alpha x + \beta y \\ &\quad + \gamma(x^2 - y^2) + 2\varepsilon xy + O(|x|^3) \end{aligned}$$

と近似できる。

以上により

[5]: 潮差が 0 になる所として定義した無潮点は、その周りの場の状況 (等潮線、等時潮線の分布) をよく保つことが分かった。勿論、歪みは伴う。

最後に、無潮点が節点であり節線ではない理由を簡単に言えば次のとおりである。 $\eta(x, y, t) = Y_c \cos \omega t + Y_s \sin \omega t$ としたとき、 $Y_c(x, y), Y_s(x, y)$ はそれぞれの空間分布を持つ。無潮点とは

$$\begin{cases} Y_c(x, y) = 0 \text{ で定義する曲線} \\ Y_s(x, y) = 0 \text{ で定義する曲線} \end{cases}$$

の交わりである。従って一般性で言えば二つの曲線の交わりとして点になる。その意味では非回転系の場合に節線となることの方にこそ説明が必要である。それは、非回転系の定在波 (固有振動) については

$$Y_c(x, y) \propto Y_s(x, y)$$

となる (固有関数は実関数であり $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の係数の空間分布に区別がない) からである。この場合、 $Y_c(x, y) = 0$ 即 $Y_s(x, y) = 0$ であり、無潮点は常に無潮線になる。当然

$$ad - bc = \nabla Y_c \times \nabla Y_s = 0$$

となりここで述べた議論は使えない。いわばコリオリ係数の存在が非回転系の「縮退」を解いている。

4.3 潮差停留点の分類

とくに反無潮点周りの場

前に見た反無潮点というのは潮差の鞍点になっている。より広く潮差の停留点、即ち

$$0 = \nabla |Y_-|^2 = \nabla (Y_c^2 + Y_s^2)$$

となる点 $(x, y) = (0, 0)$ を分類してみる。以下の考察に潮汐の流体力学は要らない (逆に潮汐の条件が加わると更に精密な結果が成り立つ可能性もある)。

さて潮差停留点は先ず

$$\begin{cases} 0 = |Y_-(0, 0)| & \text{無潮点} \\ 0 \neq |Y_-(0, 0)| & \text{非無潮点} \end{cases}$$

の二つに分類できる。無潮点周りの解析は前項で済んでいる。以後は非無潮点を調べる。

時刻 t の原点を適当に選び大きさを適当に無次元化すれば $Y_c(0, 0) = 1$, $Y_s(0, 0) = 0$ としてよい。潮差の停留点であるための条件は

$$0 = (\nabla [Y_c^2 + Y_s^2])_{(0,0)} = (Y_c \nabla Y_c)_{(0,0)}$$

なので例外的でない (二階微分値が全て消えるといった特殊な状況を例外的と呼ぶ) という意味で

$$Y_c = 1 + \exists p x^2 + \exists q y^2 + 2\exists r xy + O(|\mathbf{x}|^3)$$

$$Y_s = 2\exists a x + \exists p' x^2 + \exists q' y^2 + 2\exists r' xy + O(|\mathbf{x}|^3)$$

$$Y_- = 1 + i 2ax + \gamma x^2 + \delta y^2 + 2\epsilon xy + O(|\mathbf{x}|^3)$$

$$\gamma \equiv p + ip', \quad \delta \equiv q + iq', \quad \epsilon \equiv r + ir'$$

としてよい。ここでは x 軸を適当に選んだ。

周りの潮位は

$$\eta(x, y, t) = |Y_-| \cos(t - \arg(Y_-))$$

である。等潮線は $\text{const} = |Y_-|^2$ で決まるが、

$$\begin{aligned} |Y_-|^2 &= 1 + 4a^2 x^2 + 2(px^2 + qy^2 + 2rxy) + O(|\mathbf{x}|^3) \\ &= 1 + 2(2a^2 + p)x^2 + 2qy^2 + 4rxy + O(|\mathbf{x}|^3) \end{aligned}$$

という二次形式から

$$\begin{cases} r^2 - (2a^2 + p)q < 0 \text{ なら極大(小)点} \\ \quad \begin{cases} q > 0 \text{ なら極大点} \\ q < 0 \text{ なら極小点} \end{cases} \\ r^2 - (2a^2 + p)q > 0 \text{ なら鞍点} \end{cases}$$

となる。

地形等を僅かに変化させたとしても調和定数 Y_c , Y_s は極く僅か変化するだけである。従ってある状況で

$$|Y_-|^2 \equiv Y_c^2(x, y) + Y_s^2(x, y)$$

の極大点 (極小点, 鞍点) が存在するとしよう。それは

$$\begin{cases} \frac{\partial |Y_-|^2}{\partial x} = 0 & \text{で定義する曲線} \\ \frac{\partial |Y_-|^2}{\partial y} = 0 & \text{で定義する曲線} \end{cases}$$

の交点である。地形等を僅かに変化させた場合も、この交点は引き続き存在する。また二次形式の判別式の符号も変化しない。よって

[1]: 潮差停留点の周りの等潮線は停留点を中心とする楕円または双曲線になる。潮差停留点は地形等を僅かに変化させても存在し続ける。即ち頑健である。

潮差停留点における位相の遅れは

$$\begin{aligned} \arg(Y_-) &= \Im \log(1 + (Y_- - 1)) \\ &= \Im \left[(Y_- - 1) - \frac{(Y_- - 1)^2}{2} + O(|\mathbf{x}|^3) \right] \\ &= 2ax + p'x^2 + q'y^2 + 2r'xy + O(|\mathbf{x}|^3) \\ &\approx p' \left(x + \frac{a}{p'} \right)^2 + q'y^2 + 2r'xy - \frac{a^2}{p'^2} \end{aligned}$$

となる。等時潮線は第一近似で ax のようになる。二次曲線である等潮線とは無関係である。停留点から離れた点 $(-a/p', 0)$ を中心とするある楕円または双曲線の一部を見ていることになる。

従って

[2]: $a \neq 0$ という殆どの (非無潮点) 潮差停留点は無潮流点ですらない。潮差で鞍点になっていたとしてもその周りで等時潮線が双曲線状に現れることを期待できない。つまり、等潮線の鞍点という定義だけでは反無潮点周りの特性を保つことはない。

ここで反無潮点を次のように二通りに定義しよう。潮差でも位相の遅れでも鞍点になっている点を強い意味の反無潮点と定義する。潮差の意味の鞍点と位相の遅れの鞍点が隣接して存在するとき、弱い意味の反無潮点(反無潮域ともいうべきか)と定義する(隣接とは、等潮差・等潮時分布の特性長に比べて遥かに小さい距離で二つの鞍点が存在することを言う)。潮差の鞍点と潮時の鞍点の位置が少しずれていることは許す。弱い意味の反無潮点(域)では、 $|a| \ll 1$ ($\sim |p'|$) でなければならない。

強い意味の反無潮点では $a = 0$ なので

$$\begin{cases} |Y_-| \approx 1 + (px^2 + qy^2 + 2rxy) \\ \approx Y_c = \Re[Y_-] \\ \arg(Y_-) \approx p'x^2 + q'y^2 + r'xy \\ \approx Y_s = \Im[Y_c] \end{cases} \quad (33)$$

となり、潮差は Y_c だけで、位相遅れは Y_s だけでそれぞれ表現できる。

よって、潮差でも位相の遅れでも鞍点になっているためには

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 + 2rxy \\ p'x^2 + q'y^2 + 2r'xy \end{cases}$$

の両方が双曲型の二次形式になっていなければならない。即ち

$$r^2 - pq > 0, \quad r'^2 - p'q' > 0,$$

を満たさなければならない。また複素調和定数を

$$\begin{aligned} Y_c &= 1 + \gamma x^2 + \delta y^2 + 2\epsilon xy + O(|x|^3) \\ &= 1 - (\xi^2 - \eta^2) - i\xi'\eta' + O(|x|^3) \end{aligned}$$

と近似することができる。但し

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 + rxy = -\xi^2 + \eta^2 \\ p'x^2 + q'y^2 + r'xy = -\xi'\eta' \end{cases} \quad (34)$$

となるように実部、虚部の各々に斜交座標系 (ξ, η) , (ξ', η') を選んだ。これを前項の (27), (28) の表現と比較すると良い。この二つの斜交座標系は一般に独立なので、等潮線と等時潮線の交わり方をこれだけで議論することはできない。

また (33) と (34) より

$$\begin{cases} |Y_-| \approx 1 + \xi^2 - \eta^2 \\ \arg(Y_-) \approx -\xi'\eta' \end{cases}$$

となるが、この結果も前項の (27), (28) と同様である。但し潮差と位相遅れで用いる斜交座標が異なるところが異なるので直交性といった議論はできない。

以上により

[3]: 強い意味の反無潮点は、歪はともなうものの、純粋な反無潮点の特性を持つ。即ち潮差・潮時どちらで見ても鞍点を成し無潮流点になっている。

強い意味の反無潮点に対する条件は厳しい。存在したとしても地形等の設定を僅かに変えれば消滅する。しかし、弱い条件を満たす反無潮点なら ($|a| \ll 1$), 地形等の設定を僅か変えたときに対応する鞍点の位置が僅かにずれるだけである。それぞれの鞍点周りの判別式の符号は変わらない。よって

[4]: 強い意味の反無潮点は頑健でないが、弱い意味の反無潮点は頑健である。

先に述べたような非回転系水路定在波の腹に回転系の効果が加わっても反無潮点はある程度頑健にその性質を保つであろう。Odamaki (1989) によれば、対馬海峡に見られる M_2 潮では潮差が極大となる所があり、しかもその付近で等時潮線が双曲線様になっている。強い意味ではなくても弱い意味の反無潮点にはなっていると考えられる(宇野木 1993)。

ところで強い意味での反無潮点では

$$G_{\pm} = 0$$

なので無潮流点でもある。弱い意味の反無潮点の近くでも $|a| \ll 1$ なので潮流は弱い。

逆に無潮流点があるとすればその周りの潮位の複素調和定数は

$$Y_- = 1 + \gamma x^2 + \delta y^2 + 2\epsilon xy$$

の形の分布をする。よって

[5]: 無潮流点は潮差で見て極大点・極小点または鞍点のいずれかであり、潮時で見ても極大点・極小点または鞍点のいずれかである。但し潮差で鞍点なら潮時でも鞍点になるといった対応は期待できない。

5. おわりに

海洋学の中で潮汐・潮流の研究には長い歴史がある。だからといって分かり易い記述になっているかというところでもない。

表層流と潮汐の記述には複素表現が極めて有効であることを強調しておきたい。複素表現を用いると潮流楕円要素の導出も容易だし、無潮点・反無潮点周りの場の様子を簡明に記述できる。更に、潮差の

零点と定義した無潮点周りの場の構造は頑健であり、潮差の鞍点と定義した反無潮点周りの場は頑健でないことを示した。なおここで導いたいくつかの式は実用上も有用であろう。

本稿では、とくにエクマン吹送流と風応力の成す角度 ϕ_E が 45 度以内になることに関してやや詳しく論じた。その結果、渦粘性係数が一定でも非定常性あるいは浅い水深の効果で $|\phi_E| < 45^\circ$ となることを明快な形で示すことができた。但し、実際には深さに依存する渦粘性係数の効果が優ると考えている。また非定常な場合に ϕ_E を定義したが、この定義は資料解析にも有用であろう。観測を含め今後の発展を待つ。海洋レーダーに底置型 ADCP の測流資料や風観測資料と付き合わせて解析すれば ϕ_E の実態が見えてくると期待している。

本稿は心覚えに書きとめたものであり、可能な限り数式表現を得るよう努めた。数値計算だけだと事例研究としての意味はあるが結果の一般性に曖昧さが残るからである。ただ数式計算が多いので思わぬ間違いの恐れなしとしない。次の機会には(誤りがあれば訂正し)内容を補うつもりである。

謝 辞

本研究は、科学研究費基盤研究(B)「海洋レーダーを中心として沿岸部・海峡部の表層海況を監視するシステムの開発研究 - 対馬海峡を実験海域として -」の一環として行ったものである。応用力学研究所共同研究「海洋短波レーダーによる日本沿岸海況監視システムの開発」(代表: 藤井智史, 平成 17-18 年度)により一部援助を受けた。また本稿の作成作業を池末あけみさんに手伝って頂いた。記して謝意を表すものである。

参 考 文 献

- 1) 宇野木早苗: 沿岸の海洋物理学, 東海大学出版会, (1993) 672 pp.
- 2) 奥野章, 吉川 裕, 増田 章, 丸林賢次, 石橋道芳: 対馬海峡表層海況監視海洋レーダーシステム, 応用力学研究所所報, **126**, (2004) 57-67.
- 3) 奥野 章, 吉川 裕, 増田 章, 丸林賢次, 石橋道芳, : 短波レーダーにより観測された対馬海峡の潮流, 九州大学大学院総合理工学報告, **27**, No.1, (2005) 9-18.
- 4) 草場忠夫, 増田 章, 高野洋雄, 植野耕治: 琉球沖東シナ海および四国沖太平洋における海上風と有義波の変動特性, 応用力学研究所所報, **122**, (2002) 43-48.
- 5) 遙山 誠, 増田 章, 吉川 裕, 奥野 章: 日本沿岸域における M_2 潮汐振幅の季節変動および経年変動, 九州大学大学院総合理工学報告, **26**, No.3, (2004) 365-372.
- 6) 彦坂繁雄: 潮汐, 海洋科学基礎講座 III, 東海大学出版会, (1971) 109-254.
- 7) 柳哲雄, 西井正樹, 樋口明生: 潮流楕円の鉛直構造, 海岸工学講演会論文集, (1983) 459-499.
- 8) 山下義幸, 増田 章, 吉川 裕, 丸林賢次, 石橋道芳, 奥野 章: 海洋レーダー観測システムで用いる基線付近流速場の補間・推定手法, 応用力学研究所所報, **126**, (2004) 47-56.
- 9) 山本秀幸, 増田 章, 草場忠夫, 丸林賢次, 石橋道芳, 奥野 章, 藤井智史, 佐藤健治: HF レーダーを用いた対馬海峡表層海流の観測 - 予備解析 -, 応用力学研究所所報, **122**, (2002) 9-23.
- 10) Masuda, A., T. Kusaba, K. Marubayashi and M. Ishibashi: Statistics of Wind and Waves off Tsuyazaki, Fukuoka, in the Eastern Tsushima Strait, *Journal of Oceanography*, **55**, (1999) 289-305.
- 11) Odamaki, M.: Tides and tidal currents in the Tsushima Strait, *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **45**, (1989) 65-82.
- 12) Takikawa, T., J.-H. Yoon and K.-D. Cho: Tidal currents in the Tsushima Straits estimated from ADCP data by ferryboat, *Journal of Oceanography*, **59**, (2003) 37-47.
- 13) Taylor, G. I.: Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **2**, **20**, (1920) 148-181.
- 14) Yanagi, T.: *Coastal Oceanography*, Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, (1999) 162 pp.
- 15) Yoshikawa, Y., A. Masuda, K. Marubayashi, M. Ishibashi and A. Okuno: On the accuracy of

HF radar measurement in the Tsushima Strait,
J. Geophys. Res., **111**, C04009, (2006) 1-10.

付 録

A1. 渦粘性係数が深さに依存する場合の 海面エクマン層と ϕ_E

風が定常であったとしても、(渦)粘性係数 ν が深さ z に依存する場合は、 $|\phi_E| \neq \frac{\pi}{4}$ でもよい。この場合の ϕ_E を WKB 法を用いて考察しよう。

設定は次のとおりである。水平速度ベクトル $(u_x, u_y) \in \mathbf{R}^2$ を一つの複素数 u で

$$u \equiv u_x + iu_y \in \mathbf{C},$$

表す。また海は無限に深いとする。このとき定常 Ekman 層の支配方程式は

$$0 = \nu(z) \frac{d}{dz} \left(\nu(z) \frac{du}{dz} \right) - i f \nu(z) u, \quad (\text{A1})$$

である。鉛直座標 z に替えて新しい独立変数 ζ を

$$\nu(z) d\zeta \equiv -dz$$

となる様に定義する。 ζ は海底に向かって増えるようにとった。この場合

$$0 = \frac{d^2 u}{d\zeta^2} - i f \nu(z) u,$$

となる。海面 ($\zeta = \zeta_1 > 0 \leftrightarrow z = z_1 < 0$) では海側にかかる応力条件

$$\dot{T} = \nu(z_1) \frac{du}{dz_1} = -\frac{du}{d\zeta}(\zeta_1)$$

を満たす。WKB 法が使えるように海面 $\zeta_1 \gg 1$ としておく。

WKB 法により (A1) の解を求めよう。

$$\mu^4(\zeta) \equiv f\nu(\zeta) (\geq 0), \quad \ast \frac{d\mu}{d\zeta} \cdot \frac{d\nu}{d(-z)} \geq 0$$

$$P = i \text{sqr}t i \mu^2$$

$$i\tau = i \int^{\zeta} P d\zeta = - \int^{\zeta} \sqrt{i} \mu^2 d\zeta$$

を計算しておけば解は

$$u \sim \frac{1}{\sqrt{P}} e^{i\tau} \propto \frac{1}{\mu} \exp \left[- \int^{\zeta} \sqrt{i} \mu^2 d\zeta \right]$$

と求められる。

複素表現を用いているので

$$\begin{aligned} \phi_E &= \arg[\text{水平流速ベクトル (の複素表現)}] \\ &\quad - \arg[\text{風応力ベクトル (の複素表現)}] \\ &= - \arg \left[\frac{\text{風応力ベクトル}}{\text{水平流速ベクトル}} \right] \\ &= - \arg \left[\frac{-1}{u} \frac{du}{d\zeta} \right] = - \arg \left[- \frac{d(\log u)}{d\zeta} \right] \end{aligned}$$

の値を海面で見ればよい。なお、この量は海中のどの深さでも同じ意味を持つことを注意しておく。即ち、ある深さの海水がその上にある海水または大気から受ける接線応力ベクトルとその深さでの流速ベクトルの成す角を表す。

u の近似解が分かっているので

$$\begin{aligned} \phi_E &= - \arg \left[- \frac{d \log u}{d\zeta} \right] \approx - \arg \left[\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\zeta} + \sqrt{i} \mu^2 \right] \\ &= - \frac{\pi}{4} - \arg \left[1 - \frac{\sqrt{i} d\mu}{\mu^3 d\zeta} \right] \end{aligned}$$

とできる。これから

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0 & \left(\leftarrow \frac{d\mu}{d\zeta} > 0 \right) \\ -\pi < \phi_E < -\frac{\pi}{4} & \left(\leftarrow \frac{d\mu}{d\zeta} < 0 \right) \end{cases}$$

を得る。よって (WKB 法の適用範囲内で) 海面における速度ベクトルの向きを風応力ベクトルの向きと比較すると

$$\begin{cases} \nu(z) = \text{const} & \text{なら} & \text{大気側から見て右 45 度傾く} \\ \frac{d\nu}{d(-z)} > 0 & \text{なら} & \text{右 45 度より小さい} \\ \frac{d\nu}{d(-z)} < 0 & \text{なら} & \text{右 45 度より大きい} \\ & & & \text{但し 180 度を超えない} \end{cases}$$

ということが分かる。水面下の乱流が壁乱流と同様なら、渦粘性係数は海面からの距離に比例して大きくなる。少なくともこれに近いものと考えれば、

$$-\frac{\pi}{4} < \phi_E < 0$$

となり、よく言われている観測結果と定性的に一致する。

ところで壁乱流と同様に考えて良いなら $\kappa = 0.4$ をカルマン定数、 u_* を水の摩擦速度として

$$\nu(z) = \kappa u_* |z|$$

として良い。但しこのままだと海面に特異性が出て具合が悪いので仮想原点を考え $z = -z_1$, $z_1 > 0$ を

海面としよう。このときは厳密解が求まる。詳細は略すが次のとおりである。複素速度は

$$u \propto H_0^{(2)}(\zeta)$$

となる。鉛直座標を摩擦速度 u_* とコリオリ係数 f で適当に無次元化している。また $H_m^{(2)}$ は m 次第二種のハンケル関数を表し、 $\zeta \equiv 2\sqrt{-i}\sqrt{-z}$ である。

深いところ $z \rightarrow -\infty$ では

$$H_0^{(2)}(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{-i(\zeta - \frac{2\nu+1}{4}\pi)}$$

なる漸近展開により

$$\phi_E = -\arg \left[\frac{-1}{u} \frac{du}{d(-z)} \right] \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$

を得る。即ち流速ベクトルは応力ベクトルに対し時計回りに 45 度を向く。

次に $z \rightarrow 0$ の様子を見る。

$$\begin{aligned} iH_0^{(2)}(\zeta) &= N_0(\zeta) + iJ_0(\zeta) \\ &\approx \frac{2}{\pi} \log \frac{\zeta}{2} + i \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\log \sqrt{-z} + \log \sqrt{-i} \right) + i \\ &= \frac{2}{\pi} \log \sqrt{-z} - \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} i + i \\ &= \frac{2}{\pi} \log \sqrt{-z} + \frac{i}{2} \\ iH_1^{(2)}(\zeta) &\approx -\frac{2}{\pi\zeta} = -\frac{2}{2\pi\sqrt{-i}\sqrt{-z}} \end{aligned}$$

なる展開により

$$\begin{aligned} \phi_E &= -\arg \left[\frac{-1}{u} \frac{du}{d(-z)} \right] = -\arg \left[\sqrt{-i} \frac{H_1^{(2)}}{H_0^{(2)}} \right] \\ &= \arg \left[\frac{1}{\sqrt{-i}} \frac{H_0^{(2)}}{H_1^{(2)}} \right] \\ &\approx \arg \left[- \left(\log \sqrt{|z|} + \frac{i\pi}{4} \right) \right] \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } |z| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。即ち流速ベクトルは風応力の向きに近づく。 $|z_1|$ が小さい有限値なら風応力の少し右側を向く。次元量で表せば

$$\phi_E = \arg \left[\log \sqrt{\frac{\kappa u_*}{f|z_1|}} - \frac{i\pi}{4} \right]$$

になる。

A.2. 変動する風応力に応答するエクマン吹送流に関する補足

1. 特定周波数の風応力に対する応答

本文中で述べたように $s > 0$ なら

$$\frac{\pi}{4} > \arg(1 - e^{-2s} + 2ie^{-s} \sin s) \geq -0.0278 \dots$$

となる。数値計算をしてみれば明かであるが次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2s} + 2ie^{-s} \sin s &= 2e^{-s} [\sinh s + i \sin s] \\ &= 2e^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{k-1}i)s^{2k-1}}{(2k-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sinh s - \sin s = 4e^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s^{4m-1}}{(4m-1)!} > 0 \\ \sinh s + \sin s = 4e^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^{4m+1}}{(4m+1)!} > 0 \end{cases}$$

だから $s \neq 0$ なら $1 - e^{-2s} > |2e^{-s} \sin s|$ となる。これから

$$|\arg(1 - e^{-2s} + 2ie^{-s} \sin s)| < \frac{\pi}{4}$$

が言える。

$1 - e^{-2s}$ が単調増大であり、 $2e^{-s} \sin s$ が減衰振動であることを用いると

$$\min_{s>0} \arg(1 - e^{-2s} + 2ie^{-s} \sin s)$$

は $s = \frac{5\pi}{4}$ で起こることが分かる。その最小値に達するとき

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{5\pi}{2}} + 2ie^{-\frac{5\pi}{4}} \sin \frac{5\pi}{4} \\ = 0.9996 \dots - i0.02786 \dots \end{aligned}$$

である。対応する偏角は $0.0278 \dots = -1.596 \dots^\circ$ になる。従って、周波数と深さによっては風応力ベクトルと海面吹送流の角度が 45° 以上になることもある。

2. ϕ_E が解析的に求まる風応力スペクトルの例

それらしい風応力スペクトル

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega_T^2}$$

に対して ϕ_E を求めよう。

$$\int_{-f}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{|f + \omega|(\omega^2 + \omega_T^2)}}$$

$$\begin{aligned}
& +i \int_{-\infty}^{-f} \frac{d\omega}{\sqrt{|f+\omega|(\omega^2 + \omega_T^2)}} \\
& = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{|\omega|((\omega-f)^2 + \omega_T^2)}} \\
& \quad +i \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{|\omega|((\omega-f)^2 + \omega_T^2)}} \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \operatorname{sgn}(\omega))d\omega}{2\sqrt{|\omega|((\omega-f)^2 + \omega_T^2)}} \\
& \quad +i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \operatorname{sgn}(\omega))d\omega}{2\sqrt{|\omega|((\omega-f)^2 + \omega_T^2)}} \quad (\text{A2})
\end{aligned}$$

を求めればよい。

この計算には、フーリエ変換の畳み込みの性質と以下のような積分を用いる。

$$\begin{aligned}
(1): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \\
(2): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{|x|}} e^{iyx} dx = \frac{i \operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{|y|}} \\
(3): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{iyx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|y|}}{a} \\
(4): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a|x|+ixy}}{\sqrt{|x|}} dx = \frac{\sqrt{\sqrt{y^2 + a^2} + a}}{\sqrt{y^2 + a^2}} \\
(5): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x)e^{-a|x|+ixy}}{\sqrt{|x|}} dx \\
& = i \operatorname{sgn}(y) \frac{\sqrt{\sqrt{y^2 + a^2} - a}}{\sqrt{y^2 + a^2}}
\end{aligned}$$

多くはフレネル積分に類する。(4), (5) で $a = 0$ と置けば (1), (2) になる。

積分自体も求められるが偏角 ϕ_E に直すには

$$\begin{aligned}
\phi_E & = \frac{-\pi}{4} + \arg \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+i)d\omega}{2\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-i)\operatorname{sgn}(\omega)d\omega}{2\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right] \\
& = \arg \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(1+i)d\omega}{2\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(1-i)\operatorname{sgn}(\omega)d\omega}{2\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right] \\
& = \arg \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right. \\
& \quad \left. -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\omega)d\omega}{\sqrt{|\omega|((f-\omega)^2 + \omega_T^2)}} \right] \\
& = \arg \left(\frac{\sqrt{\sqrt{f^2 + \omega_T^2} + \omega_T}}{\sqrt{f^2 + \omega_T^2}} \right. \\
& \quad \left. -i \operatorname{sgn}(f) \frac{\sqrt{\sqrt{f^2 + \omega_T^2} - \omega_T}}{\sqrt{f^2 + \omega_T^2}} \right) \\
& = \arg \left(1 - i \operatorname{sgn}(f) \left(\sqrt{1 + \frac{\omega_T^2}{f^2}} - \frac{\omega_T}{|f|} \right) \right) \\
& = \arg \left(1 - i \frac{\operatorname{sgn}(f)}{\sqrt{1 + \frac{\omega_T^2}{f^2} + \frac{\omega_T}{|f|}}} \right)
\end{aligned}$$

とすればよい。北半球として $\omega_T = 0$ でこそ右 45° だが、 $\frac{\omega_T}{f}$ とともに単調に減少する。