

流軸の揺れで生じる流軸に平行な向き渦成海水輸送

増田, 章
九州大学応用力学研究所

<https://doi.org/10.15017/26827>

出版情報 : 九州大学応用力学研究所所報. 132, pp.37-53, 2007-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

流軸の揺れで生じる流軸に平行な向きの渦成海水輸送

増田 章*¹

(2007年1月30日受理)

The eddy-induced mass transport along the mean current by the fluctuation of the stream axis

Akira MASUDA,

E-mail of corresponding author: masuda@riam.kyushu-u.ac.jp

Abstract

Numerical simulation with an eddy-permitting OGCM (Ocean General Circulation Model) revealed that western boundary currents in the North Pacific are accompanied by eddy-induced mass transport *along* the mean stream axis which is much larger than that *across* it, where "eddy-induced mass (thickness) transport" means the mass flux by fluctuating velocity along with the fluctuating thickness of a layer of the same density. The eddy-induced mass transport is directed downstream and upstream in the left-hand and right-hand sides of the mean stream axis, respectively. The property holds not only for the subtropical gyre (Kuroshio), but also for the subarctic gyre (Oyashio and Alaska Current).

A simple mechanism is proposed for this eddy-induced mass transport along the mean current. The model is based on the fluctuation of the stream axis with its cross-stream structure invariant. The model qualitatively explains well the downstream and upstream mass transport in the left-hand and right-hand sides of the current. The magnitude and the cross-stream profile of the along-current mass transport depend on factors such as the mean distribution of the current, the characteristic amplitude of the migration of the current axis. Analytical formulas are obtained for the distribution of the eddy-induced mass transport for suitable assumptions of the Gaussian fluctuation of the stream axis and the specific profile of the thickness associated with the current. Roughly speaking, the eddy-induced mass transport has a cross-stream profile like the derivative of the probability density distribution of the Gaussian distribution. Also it is to be noted that the instantaneous current profile is recovered from the mean current profile in the model of the fluctuating stream axis.

Key words : *eddy-induced mass (thickness) transport, fluctuation of the stream axis, Gent-McWilliams parametrization*

1. はじめに

変動する渦は、平均流と異なる仕方で海水や物質を運ぶ。渦による水輸送・物質輸送の量と向きを平均流・平均物質分布で表す仮説を「完結仮説」という。細かい変動を子細に追跡し、あるいは数値モデルで表現するのは実際問題として限界があるので、適切な完結仮説があればそれに越したことはない。しかし「完結仮説」という流体力学の古い問題は極めて難しいということになっている。

とはいえ海と大気は普通の流体と違う。地球自転・密度成層の効く海の方が完結仮説は却ってうまくいくかもしれない。事実、海水各層の厚みを均すように海

水を運ぶという Gent and McWilliams (1990, 1994) の混合表現 (以下 GM 式表現と略記する) を用いると、海水循環、物質循環が格段に良く表現出来るようになるという (Gent et al. 1995)。北太平洋中層水や南大洋の Deacon 循環で調べた例もある。また、思いがけずも、GM 式混合表現は深層循環に関する「拡散性伸縮」項 (Masuda and Uehara 1992, Masuda and Mizuta 1995, Mizuta and Masuda 2003) との類似性があることが明らかになった。

ところが実はこれも怪しい。分解能を挙げて渦を表現するような数値実験によれば、渦 (変動成分) による海水輸送は極めて複雑であった (Ishizaki 私信, 後述)。しかも (GM 式混合が表現する) 層厚の変化

*1 九州大学応用力学研究所

する向きより層厚等値線に沿う向き(流れの向き)の方に顕著な海水輸送があることが分かってきた。石崎の結果によれば黒潮やアラスカ海流といった表層強流帯では顕著な渦による(変動成分による)水輸送が流れに沿う方向にあるという。また、いずれの海流でも流れの右側には本流と逆向きで左側には本流と同じ方向の変動流による水輸送があった。

そこで、ここでは、石崎の数値実験で見えてきた渦による「層厚」輸送に基づく、主に表層の海水・物質輸送を理解することを目標にする。そのために、なるべく単純な模型(流軸変動模型と呼ぶ)で簡単な状況設定を扱い数値実験結果と比較する。本稿の目的は流軸変動模型によって生じる渦成海水輸送の考え方を提示し、解析的に表し、その性質を論じることにある。

ところで GM 式混合表現に限らず、従来の海洋渦拡散模型では、平均場の変化する向きの海水・物質輸送を表現しようとする。流下方向には物事が一樣という前提があるので、流下方向の輸送を考えない。場の平均量の変化に流下方向の輸送が寄与しないので、表現する必要がないからである。

これに対し、ここで扱うのは平均場の等値線に沿う方向(海流の方向)の輸送・物質輸送である。流れ自体は流下方向に一樣(に近い)ということが成り立っていても、水質や物質の分布は必ずしもそうでない。流下方向の渦成水輸送があれば、水質・物質の分布に甚大な影響が出る。ラグランジュ的観点からは流下方向の渦成輸送を無視することはできない。従来の研究にはこのような問題意識と発想がなかった。実際の数値実験でも平均層厚勾配の向きより平均層厚等値線に沿う向きの渦成水輸送の方が大きいことが分かってきた。流下方向の水輸送過程は極めて重要である。本稿の主題は従来の視点になかった向きの渦成海水輸送であることを強調しておきたい。

黒潮や湾流の沖合側と沿岸側での渦による流下方向の海水・物質輸送を平均海流で表現できれば素晴らしい。うまくいけば、黒潮の沖側と沿岸側における(渦による)海水輸送が平均流から推定できるようになる。その結果、例えば水産資源である卵稚仔や陸起源淡水の流軸に沿う向きの輸送量の推定にも役立つだろう。

次節では渦成水輸送を定義し、数値実験に見る流れに沿う層厚輸送の特徴をまとめ、これを説明するための流軸変動模型を定式化する。第三節では、流軸変動模型を基に、典型的な状況で生じる層厚輸送を数式で解析的に表す。その際は、海流の特性や流

軸変動の確率過程は適当に所与としなければならない。また変動する西岸境界流に関連する問題を流軸変動模型で論じる。第四節では、層厚輸送の特性や問題点を広い観点から数値実験と比較しながら論じる。最後に結果をまとめ今後の課題を述べる。

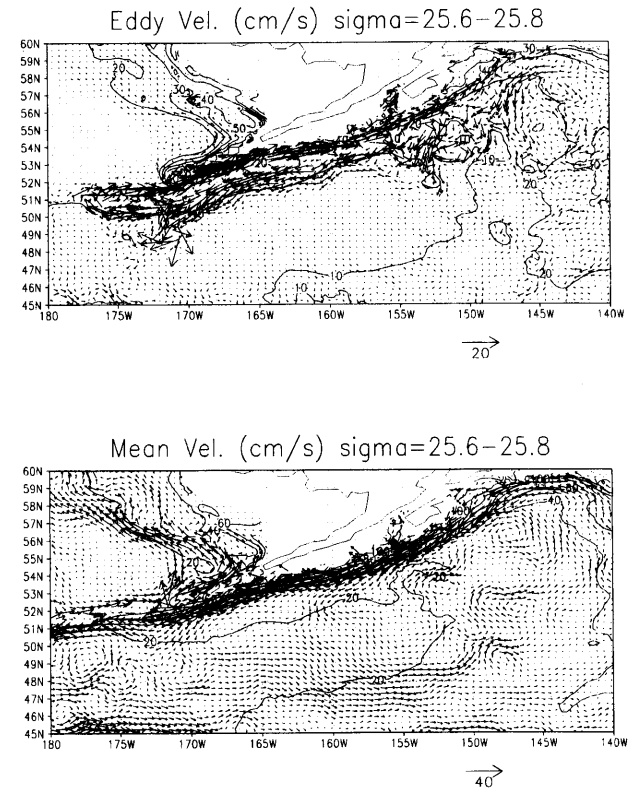


Fig. 1 The eddy-induced transport velocity \mathbf{u}^* (top) and mean current velocity $\bar{\mathbf{u}}$ (bottom) of the density layer $\sigma = 25.6$ to 25.8 near the sea surface in a realistic numerical experiment of OGCM for the North Pacific. The contours show (top) the mean thickness of the density layer and (bottom) the mean depth of the top of the density layer. Note that the eddy-induced transport velocity is the same and the opposite to the mean current on the left-hand and right-hand sides of the Alaska Current, respectively (courtesy of Ishizaki, private communication).

2. 流軸変動模型における層内渦動体積輸送

2.1 層厚輸送, 層内渦動体積輸送(速度)

Gent and McWilliams (1990, 1994) は「層内渦動体積輸送」ないし「層厚輸送」という概念とその径数表現を論じた。当該論文適宜を参照すればよいが、

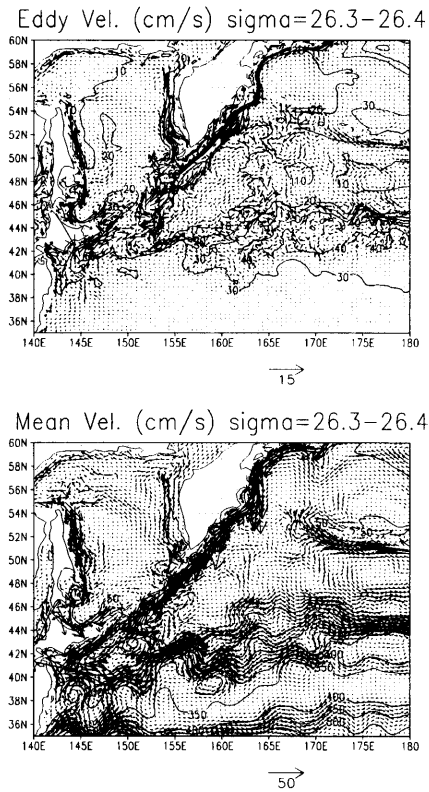


Fig. 2 The same as Fig. 1 except for the layer of density $\sigma = 26.3$ to 26.4 of the Oyashio (courtesy of Ishizaki, private communication).

議論に必要な範囲で層厚輸送を定義しておく。

変動量 \bullet の平均を $\bar{\bullet}$ で、変動分を \bullet' で表す。平均は確率平均でもよいが、数値模型との関係では、局所時空間平均と考えることが多い。

密度 ρ の層が厚さ h を占めるという形で密度成層をしており、その層が u なる水平速度で流れているとしよう。この密度の水の水平輸送量は、瞬間毎および地点毎に hu である。この水輸送 (層厚輸送ともいう) の平均は

$$\overline{hu} = \bar{h}\bar{u} + \overline{h'u'} \quad (1)$$

となる。水平位置と密度層を固定して見る (上下の移動はあり得る) と層厚輸送 $\overline{h'u'} \neq 0$ が現れる。これを渦成 (海) 水輸送または渦成体積輸送と呼ぶ。但し渦とは変動分を表す意味であり渦とは限らない。また

$$\mathbf{u}^* \equiv \frac{\overline{h'u'}}{\bar{h}} \quad (2)$$

を層厚輸送速度 (eddy-induced transport velocity, bolus velocity), (層内) 渦成水輸送速度と呼び、層内

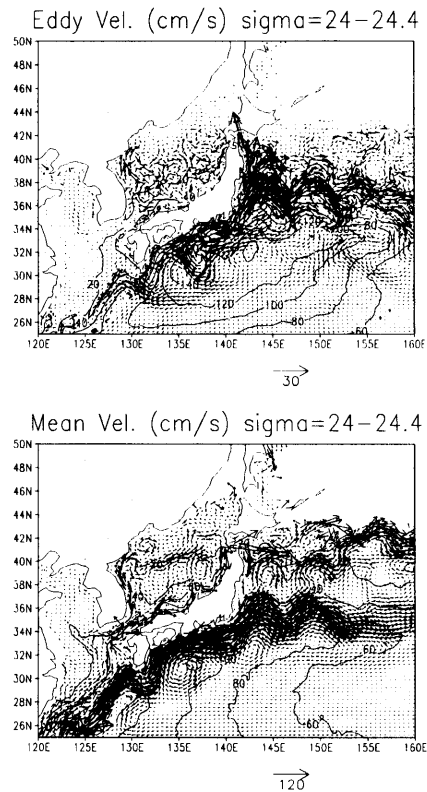


Fig. 3 The same as Fig. 1 except for the layer of density $\sigma = 24$ to 24.4 of the Kuroshio (courtesy of Ishizaki, private communication).

渦成水輸送の表現に換えることもある。

$\overline{h'u'}$ なり \mathbf{u}^* を平均場によってどのように表せば良いか (完結仮説) ということが次の問題になる。Gent and McWilliams (1990, 1994) は、大循環への適用を念頭におき、また変動 (渦) が主として傾圧不安定によると考え

$$\overline{h'u'} \propto -\nabla_{\rho}\bar{h} \quad (3)$$

という仮説を提案した。但し ∇_{ρ} は密度座標系における水平傾度演算子である。これは等密度層の厚みを水平に均すように変動成分が層内の水を輸送するということである。位置エネルギーを減らすという意味で妥当性があると考えられている。

なお空間に固定した純オイラー的観点では渦 (変動成分) による体積輸送というものはない。水面波のように境界が変動する場合は、水の実質輸送があるが、これは水面の変動 (層厚の変動に類似) に起因するものである。この場合はストークス輸送と呼び水面波の分野では良く知られた現象である。

2.2 流軸に平行な方向の渦成水輸送

北太平洋を模した高分解能の数値実験 (Ishizaki 私信) で見られた表層に近い密度の層厚輸送速度と平均流速の分布を Figs. 1-3 に示す. 順にアラスカ海流, 親潮 (亜寒帯循環), 黒潮 (亜熱帯循環) である. 複雑な分布だがいくつか明瞭な特徴がある. その第一は西岸境界層の両脇に, 主流に沿う方向の層内体積輸送があることである. GM 混合では平均層厚の勾配がある方向 (密度勾配のある方向) に渦成水輸送を考えている. それは表層強流帯で密度勾配の方向とは主流とほぼ直角に交わる. しかしながら, Figs. 1-3 では, 主流に沿う向きの層厚輸送の方が主流と直交する向きの層厚輸送より遙かに大きい.

もう一つの特徴は, 西岸境界層主流の流軸の右側 [流下する向きに見て] で負 (主流に逆行する) の, 左側で正 (主流と同じ向き) の渦成水輸送があることである. これは亜熱帯循環の黒潮 (日本南岸) にも亜熱帯循環の親潮 (カムチャッカ半島沖), アラスカ海流 (アラスカ半島沖) にも共通して見られる. つまり, 層内体積輸送の向きの違いは岸か沖かに依るわけではない. 流軸の右側か左側かである.

この二つの特徴は, 流軸が変動すると考えれば説明することができる. 黒潮を例に考えよう. 地衡流平衡にある黒潮の表層水は沖側 (右側) で厚く岸側 (左側) で薄い. 黒潮流速は流軸で最大であり, 沖側にも岸側にも流速は小さくなる. 黒潮の流軸がその構造を保ったままで沖側に揺れたとしよう. 流軸の平均位置の右側では層厚が減り ($h' < 0$), 流速が増える ($v' > 0$) ので $h'v'$ は負になる. 但し v は流下方向の速度である. 一方, 流軸の左側では層厚が減り流速が減るので $h'v'$ は正になる. 流軸が岸側に揺れた場合も同様であり, いずれにしても $h'v'$ は流軸が揺れさえすれば流軸の左側で正, 右側で負となる. つまり平均として流軸の左側で流下方向に, 右側では遡る向きに渦成水輸送が生じる. この考えを定式化したものが次に述べる流軸変動模型である.

2.3 層内水輸送の定式化

渦成水輸送は水平方向にも密度にも依存し極めて複雑であった. 西岸境界流表層の流軸方向の層内体積輸送は疑いない. そこで, 西岸境界層のみの層内体積輸送を明らかにする枠組みの第一段階として以下のような軸変動模型を定式化する. 断らない限り北半球の海が対象である.

流軸に沿う向きの座標を y に, 流れを右側に横切る向きの座標 x にとる. (u, v) は (x, y) 向きの流速

を表す. 密度一定の表層のみが, 流軸 $x = 0$ 付近に集中した噴流として $y > 0$ の向きに流下する. 流れの様子は変わらず, ただ流軸が $x = 0$ の周りに揺れているものとする. 流軸が平均流の流軸に一致するときの流速分布を $\hat{v}(x)$ と書く. 下層は静止しているため表層厚 h も y に依存するが, 地衡流平衡は常に成り立っているとす.

各瞬間の水質 c は流軸からの距離で決まるとしておく. 流下方向に変化する水質という場合が興味深い, 以下のような流下方向の平均水質輸送を議論するには適切でない.

まとめると, 流軸 $x = \xi$ が平均の流軸位置 $x = 0$ に一致したとき,

$$\begin{cases} v = \hat{v}(x) & \text{噴流の形} \\ h = \hat{h}(x) = \exists h_0 + \int_0^x \hat{v}(x') dx' & \text{地衡流} \\ c = \hat{c}(x) & \text{水質分布} \end{cases}$$

である. 適当に無次元化して, コリオリ係数を $f = 1$, 換算重力を $g' \equiv \frac{g\Delta\rho}{\rho} = 1$ としている. 但し g は重力加速度, ρ は表層水の密度, $\Delta\rho \ll \rho$ は下層水と表層水の密度差を表す.

流軸の位置 ξ は揺れており ξ は確率変数である. その確率密度関数を $p(\xi) \equiv \text{PDF}(\xi)$ で表す. この流軸変動に伴い, 流下方向の速度 v , 層厚 h , 水質 (パッシブ・スカラー) c も確率変数となる.

$$\begin{cases} v(x, t) = \hat{v}(x - \xi(t)) \\ h(x, t) = \hat{h}(x - \xi(t)) \\ c(x, t) = \hat{c}(x - \xi(t)) \end{cases}$$

h と c の表現は殆ど同じなので以下では省略することが多い.

さて, 平均流速分布と瞬間毎の流速分布 (高分解能の数値模型で見える流れ) は同じでない. 平均した黒潮は瞬間毎の黒潮よりも幅が広い. 平均場と瞬間場との関係は以下のように表される.

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x - \xi) p(\xi) d\xi \\ \bar{v}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x - \xi) p(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{h}}{dx}(x - \xi) p(\xi) d\xi \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x - \xi) p(\xi) d\xi = \frac{d\bar{h}}{dx}(x) \quad (4) \end{aligned}$$

従って瞬間毎の流れと層厚が地衡流の関係にあれば平均流と平均層厚も地衡流の関係を満たすことが分

かる。また明らかに

$$\int \bar{v}(x) dx = \int \hat{v}(x) dx \quad (5)$$

$$\int \bar{h}(x) dx = \int \hat{h}(x) dx \quad (6)$$

が成り立つ。(5)は表面線積分流量であり断面流量とは違う。水位差によって表面線積分流量を見積もることがある(例は Takikawa et. al 2005)が、それなら瞬間場でも平均場からでも同じことを表す(流軸変動模型の意味)。

断面の海水輸送については

$$\bar{h}v(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x-\xi)\hat{h}(x-\xi)p(\xi)d\xi$$

$$\overline{h'v'}(x) \equiv \overline{h}v(x) - \bar{h}(x) \cdot \bar{v}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h}v(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x) \bar{v}(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h'v'}(x) dx = 0 \quad (8)$$

となる。当然ながら、平均場による水輸送は、渦成水輸送の分だけ真の輸送 $\overline{h}v$ と食い違う。(8)が示すように渦成水輸送は総量として消え、水輸送の総量は平均場から見積もっても同じになる。

また水質輸送は

$$\overline{hcv}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x-\xi)\hat{c}(x-\xi(t))\hat{h}(x-\xi)p(\xi)d\xi$$

$$\widehat{hcv}(x) \equiv \overline{hcv}(x) - \bar{h}(x)\bar{c}(x)\bar{v}(x)$$

である。強い海流の沿岸寄りと沖寄りでは諸物質の輸送を平均流と平均水質場によって単純に見積もると間違ふ。なお渦成水質輸送 $\widehat{hcv}(x)$ は微妙であり

$$\widehat{hcv}(x) - \overline{h'v'}(x)\bar{c}(x)$$

$$= \overline{h'c'}(x)\bar{v}(x) + \overline{c'v'}(x)\bar{h}(x) + \overline{c'v'h'}(x) \quad (9)$$

なので渦成水輸送を平均水質場に乘じるだけでは渦成水質輸送を表せない。渦成水質輸送を表す速度は

$$v^\dagger \equiv \frac{\widehat{hcv}}{\bar{h}\bar{c}} \neq v^* = \frac{\overline{h'v'}}{\bar{h}} \quad (10)$$

となり、渦成水輸送を表す速度と異なる。

3. 流軸変動模型に基づく渦成水輸送の事例と関連問題

前節の定式化を基に、ガウス分布のような典型的な流速分布を対象にして渦成水輸送ほかを調べる。その際、次のような問題があることを念頭に置く。

1. 平均流と平均層厚の分布は揺れ幅と元の海流分布にどう依存するか
2. $\overline{h'v'}$ と v^* の大きさと分布形を決める因子は何か。とくに流軸の揺れ幅と海流の幅がどのように効くか。
3. 海流速度分布の非対称性や流軸の揺れの非正規性はどのような効果を持つか。
4. 水質輸送はどのような表現になるか。体積輸送との関係は。
5. 微量による展開や近似形はどうなるか。
6. 遠州灘の黒潮は平均流路に二様性がある。このようにつまり大きな揺れと小さな揺れが複合している場合、平均流速分布と渦成体積輸送はどのようになるか。
7. 平均流の分布は瞬間毎の分布とは異なる。観測値として平均分布があるとして、瞬間毎の分布である噴流の形を逆算するにはどうすればよいか。

記号・関数の定義や数式の詳しい導出は本文で省略することが多い。十分ではないが付録で補う。

3.1 噴流の幅が流軸の揺れ幅より狭く集中した場合

流軸の揺れ幅という尺度で見れば、前線にしか見えない強流帯があるという状況である。 $\Delta h = 1$, $\Delta c = 1$ とするような無次元化をしておく。 $x = \xi$ に集中した流れがあるということだから

$$\begin{cases} v(x, t) = \delta(x - \xi(t)) \\ h(x, t) = h_0 + \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \xi(t)) \quad h_0 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

水質 c にも流軸を境に跳び $\Delta c = \pm 1$ があるとして

$$c(x, t) = c_0 \pm \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \xi(t))$$

このとき

$$c(x, t)h(x, t) = c_0 h_0 \pm \frac{1}{4} \text{sgn}^2(x - \xi(t))$$

$$+ \frac{c_0 \pm h_0}{2} \text{sgn}(x - \xi(t))$$

となる。

流軸の揺れが正規分布即ち $p(\xi) = \text{gauss}(x; 0, 1)$ とすると

$$\bar{v} = \text{gauss}(x; 0, 1)$$

$$\bar{h} = h_0 + \text{erf}(x) = \left(h_0 - \frac{1}{2} \right) + \Phi(x)$$

$$\overline{vh} = h_0 \cdot \text{gauss}(x; 0, 1)$$

$$\bar{c} = c_0 \pm \text{erf}(x)$$

$$\overline{ch} = c_0 h_0 + \frac{1}{4} + \frac{c_0 \pm h_0}{2} \text{erf}(x)$$

$$\overline{chv} = c_0 h_0 \cdot \text{gauss}(x; 0, 1)$$

$$\overline{v'h'} = -\text{erf}(x) \cdot \text{gauss}(x; 0, 1)$$

$$v^* = \frac{\overline{v'h'}}{\bar{h}}$$

を得る。瞬間的には前線様の噴流でも流軸の揺れを反映して平均流速は正規分布になる。渦成水輸送は流軸平均位置の右側で負、左側で正であり、実験結果のとおりである。渦成水輸送速度 v^* は、 \bar{h} の小さい左側で大きくなる。

水質輸送は

$$\begin{aligned} \widehat{hcv} &= \overline{hcv} - \bar{h}\bar{c}\bar{v} \\ &= -[(c_0 \pm h_0) + \text{erf}(x)] \cdot \text{erf}(x) \cdot \text{gauss}(x; 0, 1) \\ &= \bar{c}(x)\overline{h'v'}(x) \mp h_0 \cdot \text{erf}^2(x) \cdot \text{gauss}(x; 0, 1) \\ &\begin{cases} < \bar{c}(x)\overline{h'v'}(x) & (\Delta c > 0) \\ > \bar{c}(x)\overline{h'v'}(x) & (\Delta c < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

である。即ち、変動成分を考慮したとしても、渦成水輸送と平均水質を掛けて見積もると真の渦成水質輸送と異なる。右側で \bar{c} が大きければ過大評価であり、小さければ過小評価になってしまう(定符号)。この違いはそれほど大きいものではない。分布としては平均流軸の両脇で極大を取り、流軸上と遠方で 0 に落ちる。

流軸の揺れ方が正規分布に従うとは限らない。例えば流軸の揺れがレイリー分布に従う、即ち

$$p(\xi) = \text{rayl}(\xi)$$

という場合はどうだろうか。日本南岸の黒潮は岸側(左側)で殆ど揺れず右側にのみ触れることを表すものとして選んだものである。このときは $x > 0$ に対し ($\Delta c = 1$ とする)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \text{rayl}(x) \\ \bar{h} &= \left(h_0 - \frac{1}{2}\right) + (1 - e^{-x^2/2}) \\ \overline{vh} &= h_0 \cdot \text{rayl}(x) \\ \bar{c} &= c_0 - \frac{1}{2} + (1 - e^{-x^2/2}) \\ \overline{ch} &= (c_0 - 1/2)(h_0 - 1/2) \\ &\quad + (h_0 + c_0) \left(1 - e^{-x^2/2}\right) \\ \overline{chv} &= c_0 h_0 \cdot \text{rayl}(x) \end{aligned}$$

$$\overline{v'h'} = \left(\frac{1}{2} - e^{-x^2/2}\right) \cdot \text{rayl}(x)$$

$$\begin{aligned} \widehat{hcv} &= \bar{c}(x)\overline{h'v'}(x) \\ &\quad - h_0 \left(\frac{1}{2} - e^{-x^2/2}\right)^2 \cdot \text{rayl}(x) \end{aligned}$$

となる。平均流速は流軸の揺れの分布と同じでレイリー分布をしている。平均流の流軸位置は $x = 1$ にあり、そこで流速は最大値 $\bar{v}_{\max} = e^{-1/2} = 0.60653$ を取る。渦成水輸送が 0 となる位置は $0 = (1/2 - e^{-x^2/2})$ から決まり $x \approx 1.18 > 1$ と平均流軸より右側にある。渦成水輸送が軸平均位置付近およびその左側で正、右側で負というのを含め、流軸の揺れの非対称性があっても殆ど同じである。

岸が右側にある親潮やアラスカ海流の場合は $p(\xi) = \text{rayl}(-\xi)$ とすれば良い。

$$\bar{v} = \text{rayl}(-x),$$

$$\overline{v'h'} = (1/2 - e^{-x^2/2}) \cdot \text{rayl}(-x)$$

となるので、軸平均位置付近およびその右側で負、軸平均位置の左側で正となりこの場合も符号は数値実験の結果と合う。

3.2 Gauss 分布型流速分布で 流軸の揺れ幅が小さい場合

先ほどと逆の状況を考える。つまり流れは幅を持ち、流軸の揺れ幅が小さいとする。また瞬間毎の流れと層厚を

$$\hat{v}(x) = \text{gauss}(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\hat{h}(x) = h_0 + \text{erf}(x; 1)$$

$$\therefore \frac{d\hat{h}}{dx} = \text{gauss}(x; 0, 1)$$

と正規分布形に仮定する。流軸の揺れは正規分布に従い

$$p(\xi) = \text{gauss}(\xi; 0, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\xi^2/(2a^2)}$$

としておく。 a が流軸の揺れ幅を意味する。以下では諸平均を a のべき級数の形に求める。

平均流速、平均層厚はべき級数にしないでも

$$\bar{v}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x - \xi) p(\xi) d\xi$$

$$= \text{gauss}(x; 0, 1 + a^2)$$

$$\bar{h}(x) = h_0 - 1/2 + \int_{-\infty}^x \bar{v}(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= h_0 - 1/2 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\
&= \hat{h}(x) + \left[\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+a^2}}\right) - \Phi(x)\right]
\end{aligned}$$

と求まる。しかし、様子を知る上ではべき級数が有効なので

$$\begin{aligned}
\bar{v}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x-\xi)p(\xi) d\xi \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^{2m}\hat{v}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \\
&= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m}(x)}{m!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \right] \text{gauss}(x; 0, 1) \\
\bar{h}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x-\xi)p(\xi) d\xi \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^{2m}\hat{h}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \\
&= h_0 + \text{erf}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^{2m}\hat{h}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \\
&= \hat{h}(x) - \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_{2m-1}(x)}{m!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \right] \text{gauss}(x; 0, 1)
\end{aligned}$$

とする。さらに

$$\begin{aligned}
\bar{h}(x)\bar{v}(x) &= \hat{h}(x)\bar{v}(x) \\
&\quad - \left[\sum_{l=1}^{\infty} H_{2l-1}(x) \frac{a^{2l}}{2^l l!} \right] \hat{v}(x)\bar{v}(x) \\
&= \hat{h}(x) \left[\sum_{m=0}^{\infty} H_{2m}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \right] \hat{v}(x) \\
&\quad - \left[\sum_{m=0, l=1}^{\infty} H_{2m}(x) H_{2l-1}(x) \frac{a^{2(m+l)}}{2^{m+l} m! l!} \right] \hat{v}^2(x)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\bar{h}(x)\bar{v}(x) &- \left[\sum_{m=0}^{\infty} H_{2m}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \right] \hat{h}(x)\hat{v}(x) \\
&= - \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{H_{2(m-k)}(x) H_{2k-1}(x)}{(m-k)! k!} \right] \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \hat{v}^2(x) \\
&= - \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m {}_m C_k H_{2(m-k)}(x) H_{2k-1}(x) \right] \frac{a^{2m} \hat{v}^2(x)}{2^m m!} \\
&\approx -\frac{a^2}{2} H_0(x) H_1(x) \hat{v}^2(x)
\end{aligned}$$

としてもよい。

真の平均水輸送を評価するにはまず

$$\frac{d^n(\hat{h}\hat{v})}{dx^n}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^n {}_n C_l \frac{d^l \hat{h}}{dx^l} \frac{d^{n-l} \hat{v}}{dx^{n-l}} \\
&= \hat{h}(x) \frac{d^n \hat{v}}{dx^n} + (-1)^{n-1} \sum_{l=1}^n {}_n C_l H_{l-1}(x) H_{n-l}(x) \hat{v}^2(x) \\
&= (-1)^n \hat{h}(x) H_n(x) \hat{v}(x) \\
&\quad + (-1)^{n-1} \sum_{l=1}^n {}_n C_l H_{l-1}(x) H_{n-l}(x) \hat{v}^2(x)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\frac{d^{2m}(\hat{h}\hat{v})}{dx^{2m}} &= \hat{h}(x) H_{2m}(x) \hat{v}(x) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{2m} {}_{2m} C_l H_{l-1}(x) H_{2m-l}(x) \hat{v}^2(x)
\end{aligned}$$

となることを用いる。

$$\begin{aligned}
\overline{h\hat{v}}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(x-\xi)\hat{v}(x-\xi)p(\xi; a) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x-a\eta)\hat{v}(x-a\eta)\text{gauss}(\eta; 0, 1) d\eta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^{2m}(\hat{h}\hat{v})}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\hat{h}(x) H_{2m}(x) \hat{v}(x) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=1}^{2m} {}_{2m} C_l H_{l-1}(x) H_{2m-l}(x) \hat{v}^2(x) \right) \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \\
&= \hat{h}(x)\text{gauss}(x; 0, 1+a^2) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{2m} {}_{2m} C_l H_{l-1}(x) H_{2m-l}(x) \right] \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \frac{\hat{v}^2(x)}{m!} \\
&\approx \hat{h}(x)\bar{v}(x) - \frac{3}{2} a^2 H_0(x) H_1(x) \hat{v}^2(x; 0, 1)
\end{aligned}$$

を得る。以上から渦成水輸送について

$$\begin{aligned}
\overline{h'\hat{v}'}(x) &\equiv \overline{h\hat{v}}(x) - \bar{h}(x)\bar{v}(x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m {}_m C_k H_{2(m-k)}(x) H_{2k-1}(x) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{2m} {}_{2m} C_k H_{k-1}(x) H_{2m-k}(x) \right) \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \frac{\hat{v}^2(x)}{m!}
\end{aligned}$$

となる。右辺の()の中に出てくる $2m-1$ 次多項式を $Q_m(x)$ と表せば

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \left(\frac{a^2}{2}\right)^m \frac{\hat{v}^2(x)}{m!} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_m(x)}{2\pi m!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^m e^{-x^2}
\end{aligned}$$

低次の $Q_n(x)$ は

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= H_0(x)H_1(x) \\ &\quad - (2H_0(x)H_1(x) + H_0(x)) \\ &= -2x \\ Q_2 &= (2H_2H_1 + H_0H_3) \\ &\quad - (4H_0H_3 + 6H_1H_2 + 4H_2H_1 + H_3H_0) \\ &= -4x(3x^2 - 5) \end{aligned}$$

といった具合である。 $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ は奇関数なので a^2 の高次べきまでとっても反対称な関数になる。

以上により a^2 の一次近似で

$$\overline{h'v'}(x) \approx -\frac{a^2}{2\pi} x e^{-x^2}$$

というレイリー分布 (一次のエルミート多項式 \times ガウス分布の密度関数) の形が得られた。

これに次元を入れて表現すれば

$$\frac{\overline{h'v'}(x)}{\Delta h \cdot V} \sim -\frac{a^2 x}{L^3} e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

となる。但し V は流軸における平均流の表層流速、 $\Delta h \equiv h(+\infty) - h(-\infty)$ は表層流の層厚の右側と左側の差、 x は流軸平均位置からの距離、 a は流軸の揺れの特性幅、 L は平均流の特性幅である。また

$$\frac{\max \overline{h'v'}}{\Delta h \cdot V} \propto \frac{a^2}{L^2}$$

であり、渦成水輸送は流軸の揺れ幅 (が小さいとして) の自乗に比例する。 h', v' の二つが流軸の揺れ幅に比例することを考えれば当然であろう。

Fig. 4 に流速の瞬間分布 $\hat{v} = \text{gauss}(x; 0, 1)$, 平均分布 $\bar{v} = \text{gauss}(x; 0, 2)$ を示す。但し図では見やすいように x, v を $-y, u$ と交換している。流軸の揺れを表す確率密度分布関数は $p(\xi) = \text{gauss}(\xi; 0, 1)$ である。つまり流れの幅程度の振幅で揺らぐとしている。同じ図に流軸における層厚を基準とする層厚を描く。瞬間分布 $\hat{h} - \hat{h}(0)$ と平均分布 $\bar{h} - \hat{h}(0)$ である。流軸が揺れるので平均場の方が広くなだらかになる。

同様に、Fig. 5 には平均流速 \bar{v} (Fig. 4 と同じで \bar{v} と表示)、渦成水輸送 $\overline{h'v'}$, 渦成水輸送速度 $v^* = \frac{\overline{h'v'}}{\bar{h}}$, 平均流速と平均層厚による体積輸送 $\bar{h}\bar{v}$ を示す。この場合は流軸における層厚を $\bar{h}(0) = \bar{h}(-\infty) - \bar{h}(+\infty)$ となるように仮定している。但し、渦成水輸送、渦成水輸送速度は a^2 展開の一次近似から求めたものなのでレイリー分布と同じ形である。横軸の原点と縮尺が前の図と異なるので注意する。平均流と平均層

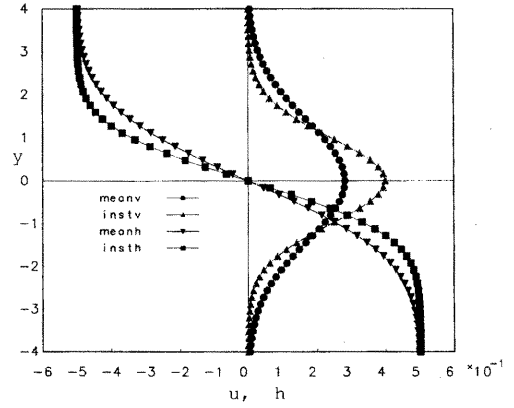


Fig. 4 Profiles of mean current distribution $\bar{v} = \text{gauss}(y; 0, 2)$ (●) and instantaneous current distribution $\hat{v} = \text{gauss}(y; 0, 1)$ (▲) for the Gaussian fluctuation of the stream axis such that $p(\eta) = \text{gauss}(\eta; 0, 1)$. Also thickness relative to that at the stream axis is drawn for the mean and instantaneous fields (▼ and ■, respectively). For visual convenience, three roles of x and $-y$ are exchanged from those in the text. Also v in the text is replaced by u .

厚の積は流軸の右側で極大値を取る。渦成水輸送は流軸の左側で負、右側で正となり、小さくはない。

上に述べた前提の下で (a^2 が小さいとしておく)、平均場と瞬間場との関係、渦成水輸送について次のような結論を得る。

- 1 $\bar{v}(x)$ の幅は \hat{v} の幅の $\sqrt{1+a^2}$ 倍になり、 $\bar{v}(x)$ の最大値は \hat{v} の最大値の $1/\sqrt{1+a^2}$ 倍に減る。平均流は流軸の揺れ幅分広がり、全体として遅くなる (a^2 が大きくても成り立つ)。
- 2 前にも述べたとおり $\bar{v}(x) = \frac{d\bar{h}}{dx}(x)$ であり、平均流と平均層厚は地衡流の関係を満たす。
- 3 流軸の左側で負、右側で正という $\overline{h'v'}(x)$ が見られる (当然だが)。 $\overline{h'v'}(x)$ は流軸の平均位置について反対称な分布をする (\hat{v} が対称なら成り立つ)。
- 4 $|\overline{h'v'}(x)|$ の最大値が見られるのは $x = \pm 1/\sqrt{2}$ であり、瞬間流速場 \hat{v} の変曲点 ($x = 1$) より更に内側にある。
- 5 渦成水輸送速度 $v^*(x)$ で見ると、平均層厚の小さい流れの左側で大きくなる。

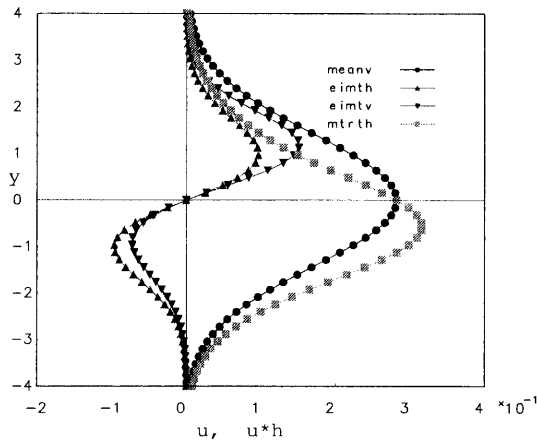


Fig. 5 Profiles of the mean current \bar{u} (\bullet), eddy-induced mass transport $\overline{h'v'}$ (\blacktriangle), eddy-induced transport velocity $v^* \equiv \frac{\overline{h'v'}}{\bar{h}}$ (\blacktriangledown), and mass transport due to the mean field $\bar{h}\bar{u}$ (\blacksquare), where the eddy-induced transports two are approximated to the lowest-order approximation and the layer thickness at the stream axis is the same as the difference of the layer thickness across the current so that $\bar{h}(-\infty) - \bar{h}(\infty) = \bar{h}(0)$. The situation is the same as Fig. 4. Note the scale and origin of the abscissa differ from those in Fig. 4.

- 6 $\overline{h'v'}(x)$ の広がり を最大, 最小値の位置 $x = \pm 1/\sqrt{2}$ で測ると瞬間毎の流れ \hat{v} の幅 1 より小さい. また流軸位置の揺れ幅 a にあまり依存しない.
- 7 一方 $|\overline{h'v'}(x)|$ の大きさは流軸位置の揺れ幅 a の自乗に比例する.
- 8 h_0 は v^* の大きさには大きな影響を及ぼすが $\overline{h'v'}(x)$ には関係しない.
- 9 $a \rightarrow \infty$ だと流軸の揺れ幅が全ての分布を決める. これは 3.1 節でみたとおりである.
- 10 $a \ll 1$ でも $a \rightarrow \infty$ でも渦成水輸送の様子は似ている. a が中庸の値でも定性的には同じということを示唆している.

3.3 揺れ幅が小さい時の一般論

瞬間毎の流速分布 \hat{v} および流軸の揺れの確率分布が例えば正規分布のように簡単な場合を調べてきた. ここでは揺れ幅が小さい場合に有効な一般的方法を示す. 但し, 出てくる関数は滑らかで, モーメントも全て存在すると仮定する.

さて時刻 t に流軸が $x = -\delta x$ にあるとしよう. δx は確率変数である. このとき

$$h(x, t) = \hat{h}(x + \delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \hat{h}}{dx^n}(x) (\delta x)^n \\ \approx \hat{h}(x) + \frac{d\hat{h}}{dx}(x) \delta x(t)$$

として良い. また奇数次モーメントがあっても

$$\bar{h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \hat{h}}{dx^n}(x) \overline{(\delta x)^n} \\ \bar{v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \hat{v}}{dx^n}(x) \overline{(\delta x)^n}$$

と書けるので

$$\bar{h}(x) \bar{v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^k \hat{h}}{dx^k}(x) \frac{d^l \hat{v}}{dx^l}(x) \frac{\overline{(\delta x)^k} \overline{(\delta x)^l}}{k! l!} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{d^k \hat{h}}{dx^k}(x) \frac{d^{n-k} \hat{v}}{dx^{n-k}}(x) \frac{\overline{(\delta x)^k} \overline{(\delta x)^{n-k}}}{n!} \\ \bar{h} \bar{v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n (\hat{h} \hat{v})}{dx^n}(x) \frac{\overline{(\delta x)^n}}{n!}$$

は明かである. よって

$$\overline{h'v'}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{(\delta x)^n}}{n!} \left[\frac{d^n (\hat{h} \hat{v})}{dx^n}(x) - \left(\sum_{k=0}^n {}_n C_k \frac{d^k \hat{h}}{dx^k}(x) \frac{d^{n-k} \hat{v}}{dx^{n-k}}(x) \frac{\overline{(\delta x)^k} \overline{(\delta x)^{n-k}}}{(\delta x)^n} \right) \right] \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{(\delta x)^n}}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k \frac{d^k \hat{h}}{dx^k}(x) \frac{d^{n-k} \hat{v}}{dx^{n-k}}(x) \\ \times \left(1 - \frac{\overline{(\delta x)^k} \overline{(\delta x)^{n-k}}}{(\delta x)^n} \right)$$

とすればよい. ここまでは収束性・モーメントの存在を仮定すれば一般に成り立つ.

さらに δx の確率密度関数が $\text{gauss}(x; 0, a^2)$ なら

$$\overline{(\delta x)^n} = \text{even}(n) (n-1)!! a^n$$

を用いて

$$\overline{h'v'}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m}}{2^m m!} \sum_{k=1}^{m-1} {}_{2m} C_{2k} \\ \times \frac{d^{2k} \hat{h}}{dx^{2k}}(x) \frac{d^{2(m-k)} \hat{v}}{dx^{2(m-k)}}(x) \\ \times \left(1 - \frac{(2k-1)!! (2m-2k-1)!!}{[(2m-1)!!]^2} \right) \\ \approx a^2 \frac{d\hat{h}}{dx}(x) \frac{d\hat{v}}{dx}(x)$$

とする. ここで $\hat{v} = \text{gauss}(x; 0, 1)$ とすれば 3.2 節で求めた渦成水輸送の式になることは明かである.

3.4 平均場と揺れの性質から瞬間場を推定する

Fig. 3 を見れば分かるように時間平均した黒潮は幅が広い。平均流は、流軸の揺れ幅分だけ瞬間毎の分布より広くなるからである (Fig. 4)。

流軸の揺れの確率密度関数を所与として \hat{v} から \bar{v} を求めるのは容易だった。逆に \bar{v} から \hat{v} を求めることもできる。次のようにすればよい。 \bar{v} は \hat{v} と $p(\xi) = \text{gauss}(\xi; 0, a)$ の畳み込みなので、畳み込みのフーリエ変換はフーリエ変換の積である。 \mathcal{F} でフーリエ変換を表すと

$$\mathcal{F}[\bar{v}](k) = \mathcal{F}[\hat{v}](k)\mathcal{F}[p](k)$$

だから

$$\hat{v} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[\hat{v}]) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[\bar{v}](k) \cdot \mathcal{F}[p](k)^{-1})$$

が答えである。

例を挙げよう。3.2 節のように

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= \text{gauss}(x; 0, 1), \\ p(\xi) &= \text{gauss}(\xi; 0, a^2)\end{aligned}$$

なら

$$\begin{aligned}\bar{v}(x) &= \text{gauss}(x; 0, 1 + a^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+a^2}} e^{-\frac{x^2}{2(1+a^2)}}\end{aligned}$$

だった。

$$\begin{cases} \mathcal{F}[\hat{v}](k) = e^{-\frac{k^2}{2}} \\ \mathcal{F}[\text{gauss}(\bullet; 0, a^2)](k) = e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \end{cases}$$

から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\bar{v}](k) &= e^{-\frac{(1+a^2)k^2}{2}} \quad \text{及び} \\ \mathcal{F}[\hat{v}](k) &= \mathcal{F}[\bar{v}](k) \cdot e^{+\frac{a^2 k^2}{2}} = e^{-\frac{k^2}{2}}\end{aligned}$$

とする。これから容易に

$$\hat{v}(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{k^2}{2}}] = \text{gauss}(x; 0, 1)$$

を得て元の瞬間場が求まった。

実用計算には FFT を用いるのが簡単である。揺れ幅が小さい時には次のような展開に基づく近似解法も見通しが良い。

$$\frac{d^m \hat{v}}{dx^m} = \frac{d^m \bar{v}}{dx^m} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^n}{n!} \frac{d^{n+m} \hat{v}}{dx^{n+m}}(x)$$

だから、逐次近似をして

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= \bar{v}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^n}{n!} \frac{d^n \hat{v}}{dx^n}(x) \\ &= \bar{v}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^n}{n!} \frac{d^n \bar{v}}{dx^n}(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^k (\overline{\delta x})^n}{n!k!} \frac{d^{n+k} \hat{v}}{dx^{n+k}}(x) \\ &= \bar{v}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^n}{n!} \frac{d^n \bar{v}}{dx^n}(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^k (\overline{\delta x})^n}{n!k!} \frac{d^{n+k} \bar{v}}{dx^{n+k}}(x) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\overline{\delta x})^n (\overline{\delta x})^k (\overline{\delta x})^l}{n!k!l!} \frac{d^{n+k+l} \hat{v}}{dx^{n+k+l}}(x) \\ &= \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exists P(n; \{(\overline{\delta x})^m | 1 \leq m \leq n\}) \frac{d^n \bar{v}}{dx^n}(x)\end{aligned}$$

とできる。但し $P(n; \{(\overline{\delta x})^m | 1 \leq m \leq n\})$ は $\frac{(\overline{\delta x})^m (\overline{\delta x})^{n-m}}$ の形の項からなる多項式 ($0 \leq m \leq n$) である。これから必要な次数まで

$$\left\{ \frac{d^m \hat{v}}{dx^m} \right\} \text{を} \left\{ \frac{d^m \bar{v}}{dx^m} \right\} \text{で表し}$$

$\hat{v}(x)$ を

$$\left\{ \frac{d^m \bar{v}}{dx^m} \mid 0 \leq m \right\}$$

で表すという手順になる。

更に流軸の揺れが正規分布なら次のようにする。

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= \bar{v}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m}}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2(n+k)}}{2^{n+k} n! k!} \frac{d^{2(n+k)} \bar{v}}{dx^{2(n+k)}}(x) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2(n+k+l)}}{2^{n+k+l} n! k! l!} \frac{d^{2(n+k+l)} \hat{v}}{dx^{2(n+k+l)}}(x) = \dots \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{\exists Q(m; p) a^{2m}}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{Q(m; p) a^{2m}}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exists Q(m) a^{2m}}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a^2)^m}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x) \\ &\approx \bar{v}(x) - \frac{a^2}{2} \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2}(x) + \frac{a^4}{8} \frac{d^4 \bar{v}}{dx^4}(x)\end{aligned}$$

となる。但し

$$Q(n; p) \equiv (-1)^p \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k {}_p C_k (p-k)^n$$

$$Q(n) \equiv \sum_{p=0}^n Q(n; p) = (-1)^n$$

となることを用いた。導出は付録に譲る。
この方法の適用例を一つ示す。

$$\bar{v}(x) = \text{gauss}(x; 0, 1 + a^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+a^2}} e^{-\frac{x^2}{2(1+a^2)}}$$

に対し

$$\hat{v}(x) = \text{gauss}(x; 0, 1)$$

$$\approx \left[1 + \frac{(x^2 - 1)a^2}{2} \right] \hat{v}(x)$$

よって

$$\hat{v}(x) \approx \left[1 - \frac{(x^2 - 1)a^2}{2} \right] \bar{v}(x)$$

とすればよい。

3.5 流路に二様性がある場合

Fig. 3 を見ると、黒潮の平均流は遠州沖で直進しているが、その幅が異常に広い。主流に逆行する渦体水輸送速度の主要部も南に膨らんでいる。その西の紀州沖では、黒潮の大蛇行流路を迂回するような時計回りの渦成水輸送が見える。いずれも黒潮の蛇行流路を反映している。

このような場合を流軸模型で考えて見よう。瞬間毎の流速分布の変化は考えず、流軸の揺れ方に二様性を仮定すれば一応の計算はできる。即ち λ , μ を正定数として

$$\text{PDF}(\xi)$$

$$= \lambda \text{gauss}(\xi; c_\lambda, a_\lambda^2) + \mu \text{gauss}(\xi; c_\mu, a_\mu^2)$$

$$c_\lambda > c_\mu, \quad \lambda + \mu = 1$$

としよう。直進路を取る時期の頻度、平均流軸位置、その揺れ幅を λ , c_λ , a_λ 、蛇行路を取る時期の頻度、平均流軸位置、その揺れ幅を μ , c_μ , a_μ と考えている。黒潮流路の「二様性」を流軸の揺れの二様分布 $p(\xi)$ で表現したものである。

a_λ^2 , a_μ^2 が小さくても、二つの流路の距離 $|c_\lambda - c_\mu|$ が小さくない場合単純なべき級数展開の精度は悪いだろうから 3.3 節の扱いは取らない。

平均流速と平均層厚はともかく重ね合わせて求められる。但し瞬間場 \hat{v} はどちらの流路でも同じと仮定している。

$$\bar{v}^\lambda(x) \equiv \int \hat{v}(x - \xi) \text{gauss}(\xi; c_\lambda, a_\lambda^2) d\xi$$

$$= \int \hat{v}(x - c_\lambda - [\xi - c_\lambda]) \text{gauss}(\xi - c_\lambda; 0, a_\lambda^2) d\xi$$

$$= \int \hat{v}(x - c_\lambda - \eta) \text{gauss}(\eta; 0, a_\lambda^2) d\eta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \hat{v}}{dx^n}(x - c_\lambda) \frac{a_\lambda^n (\overline{\delta \hat{x}})^n}{n!}$$

となり、直進路付近の流軸変動だけなら平均流速 $\bar{v}^\lambda(x)$ となる。 $\bar{v}^\lambda(x)$ は、直進時の平均流軸位置 c_λ を中心とし $\sqrt{1+a_\lambda^2}$ の幅の流れを表す。 $\bar{v}^\mu(x)$ の定義と意味も全く同様である。両方の寄与を加えて

$$\bar{v}(x) = \lambda \bar{v}^\lambda(x) + \mu \bar{v}^\mu(x)$$

が求める平均流速分布を与える。 $\bar{h}(x)$ も容易である。この結果(式)によれば、 $a_\lambda \sim a_\mu \sim |c_\lambda - c_\mu|$ のとき平均流路が幅の広い直進流路に見えることは容易に理解できる。

一方、平均場の担う水輸送は

$$\bar{h}(x)\bar{v}(x) = \lambda^2 \bar{v}^\lambda(x) \bar{h}^\lambda(x) + \mu^2 \bar{v}^\mu(x) \bar{h}^\mu(x)$$

$$+ \lambda \mu \left[\bar{v}^\lambda(x) \bar{h}^\lambda(x) + \bar{v}^\mu(x) \bar{h}^\mu(x) \right]$$

$$- \lambda \mu (\bar{h}^\lambda(x) - \bar{h}^\mu(x)) (\bar{v}^\lambda(x) - \bar{v}^\mu(x))$$

$$= \lambda \bar{v}^\lambda(x) \bar{h}^\lambda(x) + \mu \bar{v}^\mu(x) \bar{h}^\mu(x)$$

$$- \lambda \mu (\bar{h}^\lambda(x) - \bar{h}^\mu(x)) (\bar{v}^\lambda(x) - \bar{v}^\mu(x))$$

となり、重ね合わせが効かない(右辺最後の項)。

各流路における水輸送は

$$\bar{h}v^\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n (\hat{h}\hat{v})}{dx^n}(x - c_\lambda) \frac{(\overline{\delta x})^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n (\hat{h}\hat{v})}{dx^n}(x - c_\lambda) \frac{a_\lambda^n (\overline{\delta \hat{x}})^n}{n!}$$

であり、全体では

$$\bar{h}v(x) = \lambda \bar{h}v^\lambda(x) + \mu \bar{h}v^\mu(x)$$

となる。各流路での渦成水輸送を

$$\bar{h}'v^\lambda(x) \equiv \bar{h}v^\lambda(x) - \bar{h}^\lambda(x)\bar{v}^\lambda(x)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_\lambda^n (\overline{\delta \hat{x}})^n}{n!}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k \frac{d^k \hat{h}}{dx^k}(x - c_\lambda) \frac{d^{n-k} \hat{v}}{dx^{n-k}}(x - c_\lambda)$$

$$\times \left(1 - \frac{(\delta\hat{x})^k (\delta\hat{x})^{n-k}}{(\delta\hat{x})^n} \right)$$

というように定義する。全体としての渦成水輸送は

$$\begin{aligned} \overline{h'v'}(x) &= \overline{hv}(x) - \overline{h}(x)\overline{v}(x) \\ &= \left[\lambda \overline{h'v'}^\lambda(x) + \mu \overline{h'v'}^\mu(x) \right] \\ &\quad + \lambda \mu (\overline{h}^\lambda(x) - \overline{h}^\mu(x)) (\overline{v}^\lambda(x) - \overline{v}^\mu(x)) \end{aligned}$$

となる。小さい揺れの効果 $\sim a_\lambda^2, a_\mu^2$ を表す第一項、および二つの流路が存在することによる寄与を表す第二項からなる。

第二項の意味を、 $a_\lambda = a_\mu, \hat{v}(x) = \text{gauss}(x; 0, 1)$ という簡単な場合で考えよう。

$$\begin{cases} \overline{h}^\lambda(x - c_\lambda) = \overline{h}^\mu(x - c_\mu) \\ \overline{v}^\lambda(x - c_\lambda) = \overline{v}^\mu(x - c_\mu) \\ \overline{h}^\lambda - \overline{h}^\mu(x) \geq 0 \\ \overline{v}^\lambda(x) - \overline{v}^\mu(x) \begin{cases} < 0 & \text{for } x > \frac{c_\lambda + c_\mu}{2} \\ > 0 & \text{for } x < \frac{c_\lambda + c_\mu}{2} \end{cases} \end{cases}$$

なので

$$\begin{aligned} &\lambda \mu (\overline{h}^\lambda(x) - \overline{h}^\mu(x)) (\overline{v}^\lambda(x) - \overline{v}^\mu(x)) \\ &\begin{cases} < 0 & \text{for } x > \frac{c_\lambda + c_\mu}{2} \\ > 0 & \text{for } x < \frac{c_\lambda + c_\mu}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となり第二項は二つの流路の間を挟んで左側で正、右側で負という渦成水輸送を生むことが分かる。即ち単一流路周りの揺れによる効果と同様である。その分布形は λ と μ の値によらない。

蛇行路と直進路の間の領域では $\lambda \overline{h'v'}^\lambda$ 及び $\mu \overline{h'v'}^\mu$ なる渦成水輸送が逆向きで相殺する傾向にある。従って蛇行路の右側と直進路の左側で渦成水輸送が顕著になるだろう。Fig. 3 の遠州沖にこの傾向が見える。

二様性がある場合は $\overline{h'v'}$ をこのように形式的に定義して具合良いかどうかの検討も必要であろう。

4. 議論と考察

本節では関連する諸問題に言及することにより前節を補足し議論を深めたい。なお取り上げる問題には流軸変動模型に直接関するものと周辺のものがある。順不同であり精粗の度合いも様々である。

1. 気候変動研究で用いられる低分解能の数値模型では流軸の揺れといった変動を含まない。複雑に変動する実際の海洋に近づけるには高い分解能を要する。その意味で瞬間毎の揺れる流速場

が高分解能数値模型、平均した流速場が低分解能の数値模型に対応する。ここで考察した渦成水輸送が海洋循環に果たす効果・意味をひとつの例で考えてみよう。

黒潮は沖側の高塩分水を南から北へ、そして統流では東へ運ぶ。低分解能模型なら水輸送がその沖側で大きめ岸側で小さめになる (Fig. 5)。大まかに言えば低分解能模型で塩分輸送が大きめになる。親潮が南へそして東へ運ぶ沖側の淡水は低分解能模型ほど小さ目になる。低分解能では、黒潮も親潮も統流域に大き目の塩分を持ち込む。その塩分は東にも輸送されるので北太平洋の塩分を高めるだろう。結果として中層の低塩分の再現を悪くするかもしれない。

2. 流軸変動があると数値実験で得られるような層厚輸送が生じることを見てきた。一様かつ平行に流軸が動くと考えなくても良いことはすぐ分かる。下層は静止した表層模型で考えよう。

$$\overline{h'v'} = h' \frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h'^2}{2} \right)$$

だから

$$\overline{h'^2} \sim e^{-x^2} \quad \text{なら} \quad \overline{h'v'} \sim -xe^{-x^2}$$

となる。即ち流軸の左側で順行方向の、また右側で逆方向の渦成水輸送がある。

黒潮の変動で変動エネルギーの大きいところが黒潮流軸と一致せず $\exists x_p \neq 0$ に対して

$$\overline{h'^2} \sim e^{-(x-x_p)^2}$$

なら

$$\overline{h'v'} \sim -(x - x_p)e^{-(x-x_p)^2}$$

となって層厚輸送が零となる位置は平均流軸の位置 $x = 0$ から x_p にずれる。一般に陸岸近くを流れる西岸境界流では、岸側の変動は制限される筈だから x_p に相当するものは幾分沖側になる (3.1 節でみたように揺れがレイリー分布に従う場合がそうであった)。従って流軸付近では順行する向きの渦成水輸送速度になると考えられる。同じ理由により、アラスカ海流や親潮では流軸付近で逆行する向きの渦成水輸送速度になる可能性がある。その意味でも流軸の揺れをもたらす仕組みと揺れ具合の頻度を詳しく調べる必要がある。

3. 流軸変動模型によれば、南半球では渦成水輸送の向きが流れの左右で逆になると考えられる。このことは実際に確かめられている (Ishizaki 私信)。
4. 流軸はそのまま平行移動するわけではなく蛇行に近い。流軸の移動ないし蛇行に伴い流軸付近の流れが変化するという効果もある。また流軸の揺れをもたらす要因を特定していない。流れの不安定性、流軸に外洋から伝播してくる渦、(どこかで発生し) 流軸に沿って (流れに乗って) 伝播してくる渦など様々な原因が考えられる。続流域の黒潮や大蛇行のように定在ロスビー波の性格を持つ流路 (流軸) 変動もある。

このような詳細に立ち入らず、単なる確率現象としてある幅をもち流軸が揺れることで生じる渦成輸送および平均流速分布を論じたものである。とはいえ、実際の適用にはもう少し注意深い議論が必要だろう。

5. 関連するが流軸変動以外の仕組みもあり得る。流軸変動と流軸を横切る方向の水輸送との関係を調べていない。流布している GM 式混合はどの程度妥当だろうか。
6. 岸近くの西岸境界流を中心に見てきたが、黒潮続流のように岸の拘束を受けない場合の方が、ここで考察してきた流軸変動模型を適用しやすいと考えられる。しかし Fig. 3 では続流域の渦成水輸送の様子が見にくい。北上してきた黒潮が離岸後に定常蛇行の様相を呈しその振幅が大きいこと、並びに亜寒帯系も合わせ複数の前線 (帯) が存在するためであろう。

このような複雑な要因が水田の数値実験にはない (Mizuta 私信)。西岸に設けた入口から噴流が東向きに流出してくるという設定なので流軸変動模型の設定に近い。Figs. 6-7 はこの数値実験による結果である。主流の左側に正の、右側に負の輸送が確かに現れている。表層と同様の層厚輸送が深層にも見られる。分布形は似ているが大きさはずっと小さい。

7. 瞬間ごとの流速分布が左右対称で揺れも正規分布に従うとした流軸変動模型では、渦成水輸送が零になる位置はほぼ平均流軸位置である。しかし石崎の実験では必ずしもそうでないらしい。これには 2 の最後に述べた要因 (流速分布の非対称性、流軸の揺れの非正規性) が関係している

ことが考えられる。一方、岸・沖の区別がない水田の実験では平均流軸位置に近いようである。非対称な流速分布および流軸の揺れの非正規性の効果を具体的に調べることも課題である。

8. OGCM 数値実験との比較が不十分であった。定性的なことは見えるが、更に詳細な比較が必要である。理想的状況を含めて具体例が少なかった。
9. 流軸の揺れを天下りに正規分布とした。実際の頻度分布を使っても定性的には似たようなものであろう。但し、黒潮流路の二様性といった問題をもう少し精密に扱う必要がある。
10. 表層の単一層として扱った。実際には多くの密度層からなり、水平鉛直方向に細かい分布をもつ。その様子を調べる必要がある。ここで示した定式化は単一層でなくても良い。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = v$$

といった関係はもはや成り立たないが本質ではない。拡張は容易である。

連続成層していても単一層の場合と同様の渦成水輸送が起こっているようである。海面に近い各密度層に限らず深いところでもそうである (Fig. 7)。無論、下層ほど渦成水輸送は小さくなるだろうが、定性的な渦輸送分布形は似たようなものである。但し推測であり定式化と確認が残っている。

11. 水質の渦成輸送は極く簡単な場合を見たに過ぎない。定性的に重要と思われる結論は得たが、図示を含め今後に残した。

5. おわりに

高分解能の OGCM 数値実験で見えてきた北太平洋西岸境界流周りの渦成水輸送は流れに沿うものであり、流軸の左側で主流と同じ向き、右側で逆向きであった。

こういった特徴を、流軸変動模型が定性的によく説明することは疑いない。結論は第 2 節および第 3.2 節にまとめているが、そのほかにも、平均流速場と瞬間流速場の関係を含め、これまで見過ごされてきた (と思う) 変動海流の様々な側面を良く捉えている。

流軸が揺れると流軸の左側に同じ向き、流軸の右側に逆向きの層厚輸送 (水輸送) が生じることは明らかである。但し、実際の海洋では、これ以外の仕組みも働きうることに注意しなければならない。

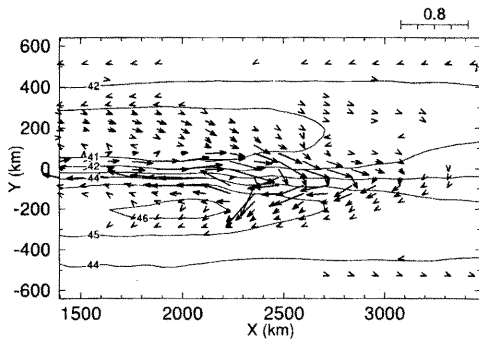


Fig. 6 An example of the eddy-induced mean mass flux (thickness transport) of a certain density near the surface in a numerical experiment of OGCM. The system driven by a specified inflow through the inlet at the central latitude of the western boundary of the basin, as an experiment which simulates the flow in the recirculation area of the Kuroshio or the Gulf Stream. Thus strong current flows along the latitude of $y = 0$ in the western half of the basin. The eddy-induced thickness transport vector is the same and the opposite to the mean current. in the left-hand and right-hand sides of the main stream axis, respectively (courtesy of Mizuta, private communication).

完結仮説ということからいえば、流軸変動モデルでは揺れの特性幅といった量が必要になる。これが流れの不安定に起因し流れの幅と同じ程度とすれば渦成水輸送の大きさと分布を平均流の特性だけで表現できることになる。但し、流軸変動をもたらす要因が他にもある場合はその限りでない。

ここで扱った流れと流軸の揺れを表す確率分布は理想化しあるいは処理しやすいものであった。実際の海流の速度分布は幾分違うだろうが、ここで示した考え方や計算法、結論は実際の黒潮や湾流の流軸変動に伴う変動量統計を論じるのにも有用であろう。

流軸変動モデル自体を深めること以外にも渦成水輸送、水質輸送の仕組みを探り海洋変動のありようとその大循環に及ぼす効果を調べていく必要がある。また GM 式混合のように流れを横断する向きの水輸送は平均場を直接変える効果を持つ。輸送量は小さくとも極めて重要な過程である。その仕組みを明らかにし適切な表現を求めることも目標の一つである。

本稿は覚書きの延長としてまとめた。拙速の嫌い

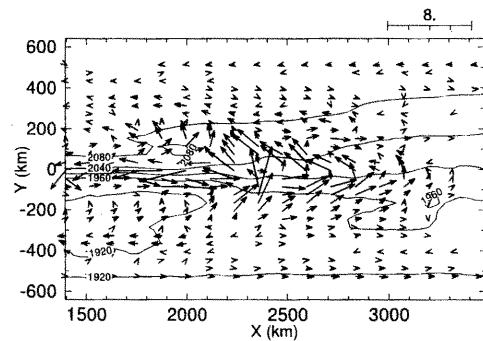


Fig. 7 The same as Fig. 6 except for a density in a deeper layer corresponding to about 3500 m below the surface. The eddy-induced thickness transport vector has the same direction as well in the deeper layer. Note that the magnitude of the eddy-induced transport velocity, which is the eddy-induced thickness transport vector divided by thickness, is much smaller than in Fig. 3 (courtesy of Mizuta, private communication).

があるので思い違いや計算間違いがあるかもしれない。前節で論じた諸問題を含め更に検討・考察していくつもりである。

謝 辞

本研究は、科学研究費(萌芽)「海の渦による海水輸送・物質輸送を平均海流・平均物質場で表す方法の研究」(代表、増田章)の一環として行ったものである。また応用力学研究所共同研究「海洋大循環の力学、とくに中深層循環におよぼす海岸・海底地形の影響に関する研究」(代表: 石崎廣, 平成 17-18 年度)により一部援助を受けた。

気象研究所の石崎廣博士、北海道大学の水田元太博士には渦成水輸送について有益な議論をして頂いた。記して謝意を表すものである。

参考文献

- 1) Gent, P. G. and J. C. McWilliams: Isopycnal Mixing in Ocean Circulation Models, *J. Phys. Oceaogr.*, **20**, No.1, 150-155. (1990)
- 2) Gent, P. G. and J. C. McWilliams: The Wind-Driven Ocean Circulation with an Isopycnal-

エルミート多項式は

$$\begin{aligned} H_n(x) &\equiv (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (\text{A3}) \\ H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

で定義する。

A2. 正規分布に関連する定積分

頻繁に用いるものを挙げる。

$$\begin{aligned} a > 0 \text{ としておく.} \\ \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-at^2} dt &= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \int_0^\infty t e^{-at^2} dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a} = \frac{n!}{2a^{n+1}} \\ \int_{-\infty}^\infty t^{2n} e^{-at^2} dt &= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \int_{-\infty}^\infty e^{-at^2} dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^\infty t^{2n} \text{gauss}(t; 0, 1) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty t^{2n} e^{-t^2/2} dt = (2n-1)!! \\ \int_0^\infty \text{gauss}(\xi; 0, a^2) \cdot \text{gauss}(x-\xi; 0, 1) d\xi \\ &= \text{gauss}(x; 0, 1+a^2) \\ \int_0^\infty \text{gauss}(x-\xi; 0, a^2) d\xi &= \Phi\left(\frac{x}{a}\right) \\ \int_0^\infty \text{gauss}(\xi; 0, 1) \cdot \text{gauss}(x-\xi; 0, a^2) d\xi \\ &= \text{gauss}(x; 0, 1+a^2) \Phi\left(\frac{x}{a\sqrt{1+a^2}}\right) \end{aligned}$$

A3. 正規分布と畳み込み

関数 \hat{f} に対し

$$\bar{f}(x) \equiv \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(x-\xi) \text{gauss}(\xi; 0, a^2) d\xi$$

と定義すれば \bar{f} は \hat{f} と $\text{gauss}(\bullet; 0, a^2)$ との畳み込みを表す。 f が v なら関数 \bar{f} が平均流速分布に、関数 \hat{f} が瞬間毎の流速分布に対応する。 $a^2 \rightarrow 0$ で $\bar{f} \rightarrow \hat{f}$ は明らかだが、次の級数展開が成り立つ。

$$\begin{cases} (1): \bar{f}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{d^{2m} \hat{f}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \\ (2): \hat{f}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{d^{2m} \bar{f}}{dx^{2m}}(x) \frac{(-a^2)^m}{2^m m!} \end{cases} \quad (\text{A4})$$

(1) において a^2 を $-a^2$ に置き換え、 \hat{f} と \bar{f} を交換すれば (2) となる。

さて (1) を示すには次のようにすればよい。 $\xi = a\eta$ と置き換えて

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(x-a\eta) \text{gauss}(\eta; 0, 1) d\eta \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{d^n \hat{f}}{dx^n}(x) \frac{(-a)^n}{n!} \int_{-\infty}^\infty \eta^n \text{gauss}(\eta; 0, 1) d\eta \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{d^{2m} \hat{f}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{(2m)!} \int_{-\infty}^\infty \eta^{2m} \text{gauss}(\eta; 0, 1) d\eta \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{d^{2m} \hat{f}}{dx^{2m}}(x) \frac{(2m-1)!! a^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{d^{2m} \hat{f}}{dx^{2m}}(x) \frac{a^{2m}}{2^m m!} \end{aligned}$$

(2) を示すには畳み込みのフーリエ変換を使う。 \mathcal{F} をフーリエ変換を表す記号とする。但し収束性などは適当に仮定しておく。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\bar{f}](k) &= \mathcal{F}[\hat{f}](k) \cdot e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-a^2)^n k^{2n}}{2^n n!} \mathcal{F}[\hat{f}](k) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(a^2)^n}{2^n n!} \mathcal{F}\left[\frac{d^{2n} \hat{f}}{d^{2n}}\right](k) \end{aligned}$$

この逆変換をとれば

$$\bar{f}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(+a^2)^m}{2^m m!} \frac{d^{2m} \hat{f}}{dx^{2m}}(x)$$

また

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\hat{f}](k) &= \mathcal{F}[\bar{f}](k) \cdot e^{+\frac{a^2 k^2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(+a^2)^n k^{2n}}{2^n n!} \mathcal{F}[\bar{f}](k) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-a^2)^n}{2^n n!} k^{2n} \mathcal{F}\left[\frac{d^{2n} \bar{f}}{d^{2n}}\right](k) \end{aligned}$$

この逆変換をとれば

$$\hat{f}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-a^2)^m}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{f}}{dx^{2m}}(x)$$

で (1) に一致する。

A4. 第 3.4 節の $Q(n; p)$ と $Q(n)$

$n \geq 1, p \geq 1$ としておく。定義により

$$\frac{Q(n; p)}{n!} = (-1)^p \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_p!}$$

である。但し上の式で j_k は整数であり

$$\forall k, j_k \geq 1 \text{ で } \sum_k j_k = n$$

を満たすような和をとるものとする。

右辺を求めよう。 $p = 2$ のときは

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^n {}_n C_k - 1 - 1 \right] \\ &= \frac{2^n - 2 \times 1^n}{n!} \end{aligned}$$

である。次に

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1, l \geq 1, m \geq 1, k+l+m=n} \frac{1}{k!l!m!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 1, l \geq 1, m \geq 1, k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} \\ &= \frac{1}{n!} (3^n - 3 \times 2^n + 3 \times 1^n - 1 \times 0^n) \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1, k \geq 1, l \geq 1, m \geq 1, j+k+l+m=n} \frac{1}{j!k!l!m!} \\ &= \frac{1}{n!} (4^n - 4 \times 3^n + (4 \cdot 3)/(2 \cdot 1)2^n \\ &\quad - 4 \times 1^n + 1 \times 0^n) \end{aligned}$$

である。これを進めて結局

$$\begin{aligned} Q(n; p) \\ &= (-1)^p \sum_{k=0}^p (-1)^k {}_p C_k (p-k)^n \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k {}_p C_k k^n \end{aligned}$$

を得る。

さて $Q(n; p)$ とその構成要素になる級数には次のような面白い性質がある。

$$(1): (-1)^n \sum_{k=0}^p {}_p C_k (-1)^k k^n = \begin{cases} 0 & (n < p) \\ n! & (n = p) \\ \frac{{}_{n-1} C_1 n!}{2!} = \frac{(n-1)n!}{2!} & (n = p+1) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

$$(2): Q(n) \equiv \sum_{p=1}^n Q(n; p) = \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^p (-1)^k {}_p C_k k^n = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

まず (1) を示す。

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{k=0}^p {}_p C_k (-1)^k k^n \\ &= \left[\sum_{k=0}^p {}_p C_k (-1)^k (-k)^n e^{-kx} \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^p {}_p C_k (-1)^k e^{-kx} \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} (1 - e^{-x})^p \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} O(x^p) \right]_{x=0} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $n < p$ なら明かに 0 である。 $n = p, p+1, \dots$ の場合も簡単に求められる。

(2) は (1) から明らかである。より一般に次のようにしてもよい。 $\forall m \geq n \geq 1$ に対し (1) と同様に

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{p=1}^m \sum_{k=0}^p {}_p C_k (-1)^k k^n \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} \sum_{p=1}^m (1 - e^{-x})^p \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} \frac{(1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x})^{m+1}}{1 - 1 + e^{-x}} \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} \{ (e^x - 1) - e^x (1 - e^{-x})^{m+1} \} \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d^n}{dx^n} \{ e^x - 1 - O(x^{m+1}) \} \right]_{x=0} = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $m = n$ とおけば所要の式を得る。なお、 $n = m+1$ なら $1 - n!$ だし、 $n > m+1$ でも同様にできる。

(2) は別のやり方でも導ける。正規分布に従う流軸の揺れでできる平均場 \bar{v} によって瞬間毎の流速場 \hat{v} は

$$\hat{v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q(m) a^{2m}}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x)$$

と表せる。一方、畳み込みの性質から

$$\hat{v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a^2)^m}{2^m m!} \frac{d^{2m} \bar{v}}{dx^{2m}}(x)$$

でもある。この二つは同じなので

$$Q(n) = (-1)^n$$

でなければならない。