

## 数値極限解析による地盤強度の空間的不均一性を考慮した斜面の信頼性評価

笠間, 清伸  
九州大学大学院工学研究院

善, 功企  
九州大学大学院工学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/26431>

---

出版情報 : 材料. 59 (5), pp.336-341, 2010-05. The Society of Materials Science, Japan  
バージョン :  
権利関係 : (C) 2010 日本材料学会



# 数値極限解析による地盤強度の空間的 不均一性を考慮した斜面の信頼性評価

笠間清伸\* 善 功企\*

The reliability assessment for slope stability considering the spatial variability of soil strength using random field numerical limit analyses

by

Kiyonobu KASAMA\* and Kouki ZEN\*

This paper presents a probabilistic approach to evaluating the geotechnical stability problem by incorporating the stochastic spatial variability of soil strength within the numerical limit analyses. The undrained shear strength is treated as a random field which is characterized by a log-normal distribution and a spatial correlation length (i.e., isotropic correlation structure). The current calculations use a Cholesky Decomposition technique to incorporate these random properties in numerical limit analyses. The Random Field Numerical Limit Analyses are applied to evaluate the effect of spatial variability of soil strength on the slope stability and the failure mechanism. Monte Carlo simulations are then used to interpret the failure probability of slope for selected ranges of the coefficient of variation in undrained shear strength and the ratio of correlation length to slope height. The results show how the failure probability of slope is related to the average strength, the coefficient of variation and correlation length scale in the shear strength of slope. Based on the result, the conventional safety factor of slope stability is evaluated to obtain a target probability of failure.

**Key words:** Slope Failure, Shear Strength, Numerical Limit Analysis, Reliability

## 1 は じ め に

土質や岩盤などの地盤材料を対象とする各種構造物の設計に際して、弾性係数や強度などの地盤諸係数がばらついていることはよく知られており、土構造物の安全性評価においては、上記の不確定量を合理的かつ定量的に取り扱う必要がある。確率・統計論に基づく信頼性理論は、これら不確定量を合理的かつ定量的に取り扱う手法であり、信頼性理論を構造物の設計に適用することにより、構造物の安全性を安全性指標または破壊確率として評価することが可能となる。地盤材料を対象とした信頼性設計では、これまでに盛土、擁壁および斜面安定などに適用した研究<sup>1)</sup>が進められている。例えば、桜井と土居<sup>2)</sup>およびMellah et al.<sup>3)</sup>は、斜面安定問題を対象に、線形一次近似法に基づく有限要素法を提案し、極限平衡法による安全率および破壊確率との比較を行っている。Husein Malkawi et al.<sup>4)</sup>は、斜面安定解析手法の違いに着目して、一次近似二次モーメント法(FOSM)およびモンテカルロ法を用いて斜面の信頼性解析の結果を比較している。実務への信頼性解析への適用として、Christian et al.<sup>5)</sup>およびEl-Ramly et al.<sup>6)</sup>は、北米の大規模な電源開発プロジェクトにより、飽和粘性土地盤上に建設される堤体盛土の設計を対象に、地盤諸係数の空間的不均一性、実験誤差および統計的推定誤差などを考慮し、設計安全率の設定を報告している。さらに、最近の数値解析手法の進展に伴い、Griffiths and Fonton<sup>7)</sup>は、地盤のせん断強

度を対数正規分布で表現した弾塑性有限要素解析によるモンテカルロシミュレーションを用いて、平面ひずみ状態における斜面の安定性を明らかにしている。

著者らは、新たな地盤構造物の信頼性解析手法として、地盤諸係数の空間的不均一性を表現するランダム場理論<sup>8)</sup>と地盤の安定性を簡便に計算できる数値極限解析を連結した確率数値極限解析の構築を試みており、地盤の支持力に関する適用を行ってきた。

本論文では、確率数値極限解析を斜面の安定性評価に適用し、地盤強度の空間的不均一性が斜面の安全性および崩壊確率に与える影響を、従来のFOSMによる結果と比較しつつ、その有効性について検討した。

## 2 確 率 数 値 極 限 解 析

本論文では、斜面の安定性を数値解析的に求める手法として、数値極限解析(Numerical Limit Analyses, NLA)<sup>9),10)</sup>を用いた。数値極限解析は、上界数値極限解析(UNLA)と下界数値極限解析(UNLA)からなり、地盤を剛塑性体と仮定し、有限要素法と同様に各メッシュの節点の変数(上界数値極限解析では、変位、下界数値極限解析では応力)を離散化した後、上界定理(下界定理)を利用して、変形を受けた際の地盤の内部消散仕事が最小(最大)となるときの変数を線形計画法によって求める解析手法である。数値極限解析のメリットは、1)斜面の安定係数を、上界・下界数値極限解析から得られる上限値と下限値で挟まれた区間の形で得られる、2)線形計画法によ

+ 原稿受理 平成 年 月 日 Received

\* 正会員 九州大学大学院工学研究院 〒819-0395 福岡市西区元岡744, Kyushu Univ., Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395

り、自動的に最適な破壊モードを計算できる、3)粘土地盤の支持力を $\pm 5\%$ の精度で計算できる<sup>11)</sup>、4)材料の塑性状態(破壊状態)にのみ着目しているため、弾性解析で必要となる弾性係数やポアソン比を必要とせず、粘着力や内部摩擦角といった強度定数のみが入力定数である。

地盤の強度定数の空間的な不均一性を表現するために、ランダム場理論を用いた。地盤の非排水せん断強度 $c_u$ が常に正の値をとるよう対数正規分布で仮定し、変動係数 $COV_c$ と正規化自己相関距離 $\Theta$ (=自己相関距離 $\theta$ /斜面高さ $H$ )を入力定数として、mid-point法を用いて空間的不均一性をモデル化した。ここで、自己相関距離とは、空間的に離れた2点間の相關性がなくなると考えられる距離のことである。例えば、自己相関距離が小さい場合には、空間的に少し離れた場合でも、周辺の値に影響せずに独立に(ランダム)に値が変動することを意味する。逆に、自己相関距離が大きい場合には、周辺の値と相関を有しながら、なめらかに変動することを意味する。本解析では、数値極限解析で必要となる解析メッシュにおける要素の中心座標において、ランダム場理論を用いてせん断強度を計算し、各要素の初期強度とした。自己相関係数は、次式で示される水平方向および鉛直方向の自己相関距離が等しいと仮定した等方マルコフ関数<sup>8)</sup>を用いた。

$$\rho(x_{ij}) = \exp\left\{-\frac{2x_{ij}}{\theta}\right\} \quad (1)$$

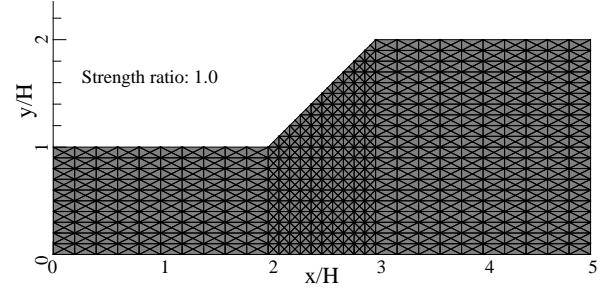
ここで、 $x_{ij}$ は、要素 $i$ と $j$ の中心間の距離である。今回使用したCholesky分解による手法<sup>12)</sup>では、この相関係数を用いて、各要素間の相関係数を表す相関行列 $\mathbf{K}$ を作成した。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

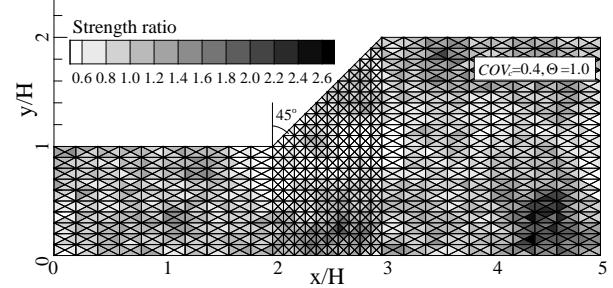
ここで、 $n$ は要素の総数である。さらに、相関行列 $\mathbf{K}$ を上三角形行列 $\mathbf{S}$ と下三角形行列 $\mathbf{S}^T$ に分解した後、 $n$ 個の独立な正規乱数で構成される乱数行列 $\mathbf{R}=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ を用いて、以下の式により要素間の相関性を考慮した正規乱数に変換した。

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \quad (3)$$

式(3)で得られた正規乱数 $\mathbf{R}^*$ 、非排水せん断強度 $c_u$ の平均値 $\mu_c$ および変動係数 $COV_c$ を用いて、各要素の強度を決定した。詳しい計算法は、参考文献12), 13)を参照いただきたい。このようにして得られた非排水せん断強度に、空間的不均一性を有する解析メッシュを、それぞれ上界・下界数値極限解析を用いて解析し、強度の不均一性を考慮した斜面の安定係数 $N_s$ を計算した。さらに、試行回数ごとに独立な乱数行列 $\mathbf{R}$ を発生させ、式(3)より計算した強度分布の異なる解析メッシュを数値解析するモンテカルロシミュレーションを行うことで、確率統計的な観点から斜面の安全性を評価した。本論文では、上



a) Mesh for slope stability with uniform strength



b) Mesh considering the spatial variability of shear strength

Fig. 1 Typical mesh for slope stability

Table 1 Input parameters

Parameter	Value
Angle of slope	45°
Mean undrained shear strength $\mu_c$	100kPa
Coefficient of variability of undrained shear strength $COV_c$	0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0
Ratio of vertical and horizontal correlation length	1.0 (Isotropic)
Normalized correlation length $\Theta=\theta/H$	Random, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0
Number of Monte Carlo iterations	1000

界数値極限解析の結果を主に用い、斜面の安定性を評価するための指標として、次式で示す安定係数 $N_s$ を用いた。

$$N_s = \frac{G \cdot \gamma \cdot H}{\mu_c} \quad (4)$$

$G$ と $\gamma$ は、それぞれ斜面の安全率と単位体積重量である。 $H$ と $\mu_c$ は、斜面高さおよび平均斜面強度である。

Fig. 1に、二次元平面ひずみ条件で斜面勾配を45°としたときの、上界数値極限解析で用いた均一強度を仮定した解析メッシュおよび強度の不均一性を考慮したメッシュ図をそれぞれ示す。通常の有限要素法による要素と接点の関係とは異なり、各要素に独立な節点を配置し、各要素の接点間の相対移動を可能にしている。Fig. 1b)中の各要素の色の濃淡は、 $\Theta=1.0$ と $COV_c=0.4$ のときの地盤の強度分布の一例である。Fig. 1b)では、斜面先周辺において、周辺地盤よりも若干強度の弱い箇所が存在している。解析領域は、斜面高さを $H$ とすると、斜面中央を中心とした両側に $2.5H$ 、深度方向に $H$ の解析領域を設定した。有限要素は正三角形要素とし、要素の斜辺の長さは比較的小さく $1/10H$ に設定し、自己相関距離が小さい場合の強度の空間的ばらつきがうまく表現できるようにした。また、地盤の単位体積重量の変動係数は0.1以下であり、せん断強度の空間的不均一性よりも小さいため、今回の解析では、地盤の単位体積重量を一定とし、

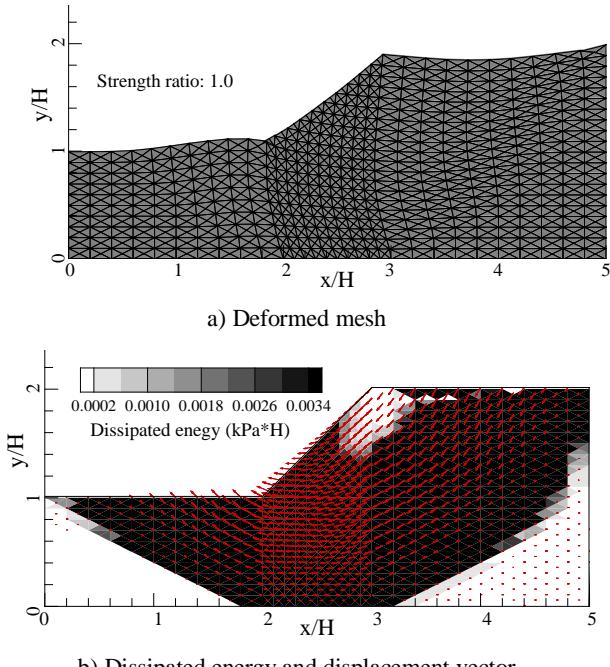


Fig. 2 Result of NLA for slope stability with uniform strength

単位体積重量の不均一性による斜面の安定係数の変化は考慮していない。

Table 1 に、解析条件を示す。非排水せん断強度の変動係数  $COV_c$  については、自然堆積地盤（0.2～0.4 度）から軟弱地盤の強度増加や砂質地盤の液状化対策を目的として地盤改良された固化処理地盤（0.14～0.99）を参考に 0.2～1.0 とした。自己相関距離についても、強度の変動が大きい固化処理地盤の値（0.15～12m）を参考に決定した。また、Cholesky 分解を用いた自己相関距離を考慮した材料定数の決定法では、良好に計算できる最小と最大の自己相関距離は、それぞれ要素間距離（ $1/10H=0.1H$ ）の 2 倍程度（ $0.2H$ ）と全解析領域（水平領域  $5H$ ）程度であること<sup>13)</sup>から、正規化自己相関距離を 0.25～4.0 とし、自己相関距離が要素間距離よりも小さい場合を考慮し、要素の強度をランダムに決定した条件（Table 1 中では、Random と表記）についても計算した。

### 3 均一強度の斜面の安定解析

斜面安定を対象とした数値極限解析の精度を調べるために、均一強度を与えた場合の解析を行い、既往の研究による斜面安定解析結果と比較した。Fig. 2 に、上界数値極限解析から得られた斜面の変形図、消散エネルギー図および変位ベクトル図を示す。均一強度の場合には、地盤底面を通るすべり面を有する崩壊形状、いわゆる底部崩壊の崩壊形状を示した。また、斜面肩部を除いて、滑り土塊全体で大きなエネルギーが消散されるのが特徴であり、斜面崩壊による変位ベクトルの影響範囲もかなり大きい。このとき得られた斜面の安定係数  $N_{suni}$  は 5.57 であり、Taylor<sup>14)</sup>による 5.52 および Terzaghi and Peck<sup>15)</sup>による 5.59 にほぼ等しい結果が得られた。

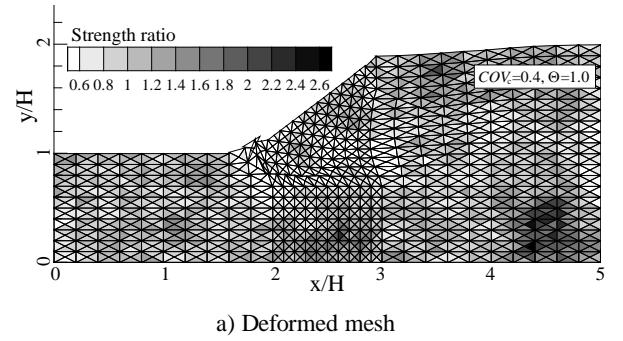


Fig. 3 Result of NLA for slope stability considering the spatial variability of shear strength

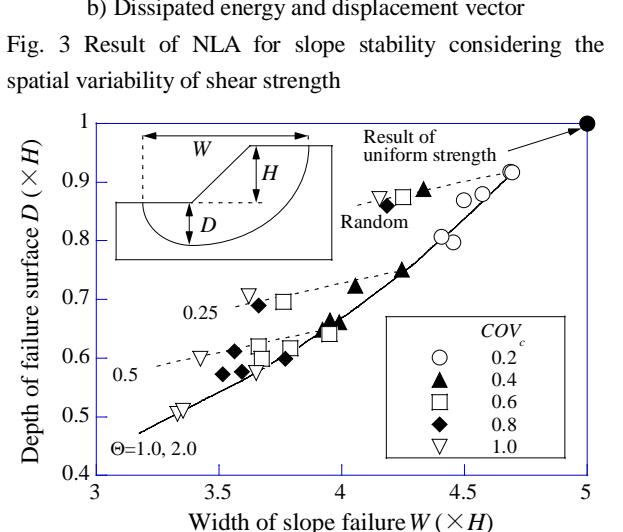
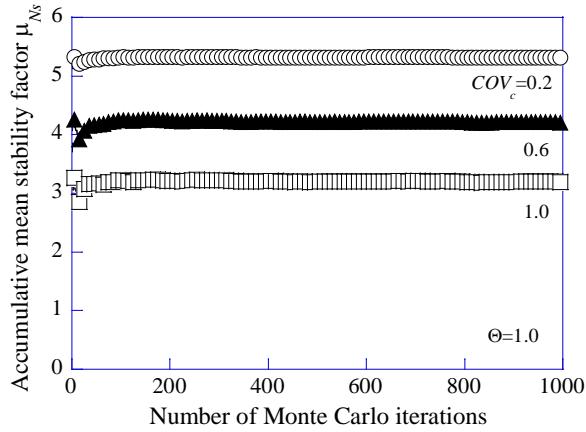


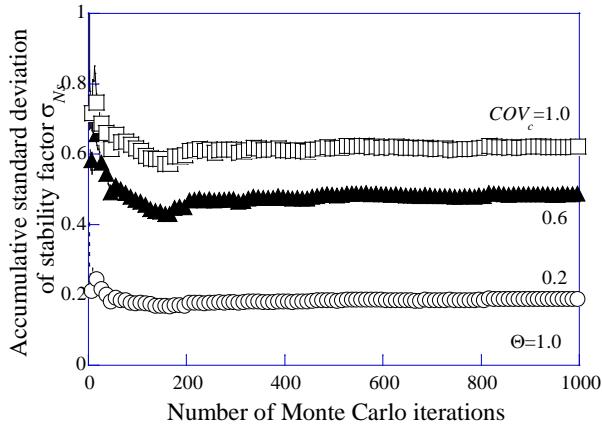
Fig. 4 Relationships between width and depth of failure slope

## 4 強度の空間的不均一性を考慮した斜面の安定解析

**4・1 強度の空間的不均一性を有する斜面の崩壊形状**  
せん断強度に空間的不均一性を有する斜面の崩壊形状を考察するために、Fig. 3 に、Fig. 1b)で示した初期メッシュ図における斜面の変形図、消散エネルギー図および変位ベクトル図を示す。変形図および変位ベクトル図では、Fig. 2 に示す均一強度のように広範囲な地盤の変形ではなく、斜面先および深度-0.3H 付近を通るすべり面を有する底面破壊を示した。これは、斜面先周辺に存在する地盤強度の弱い箇所が影響していると考えられる。また、Fig. 3b)のように斜面先において局的に大きな消散エネルギーを示し、斜面全体において空間的に不均一な消散エネルギーを有する結果となった。このとき得られた安定係数  $N_s$  は 4.26 であり、NLA に均一強度を入力して得られた安定係数  $N_{suni}$ (=5.27)に比べて小さくなった。



a) Accumulative mean stability factor



b) Accumulative standard deviation of stability factor

Fig. 5 Accumulative mean and standard deviation of stability factor in Monte Carlo iterations

せん断強度の空間的不均一性を考慮した斜面の崩壊形状を統計的に考察するために、Fig. 4 に崩壊斜面の平均幅と平均深度の関係を示す。均一強度の崩壊斜面の幅と深度は、それぞれ  $5.0H$  と  $1.0H$  であり、図中の右上の点で示している。変動係数が増加するほど、崩壊斜面の幅と深度は減少し、その傾向は、正規化自己相関係数が大きくなるほど顕著であった。以上のことから、強度の空間的不均一性は、斜面の変形および安全性に大きく影響することが示唆される。

#### 4・2 安定係数の統計値

せん断強度に空間的不均一性を有する斜面の安定性を評価するために、モンテカルロシミュレーション  $i$  回目の解析により得られた斜面の安定係数  $N_{si}$  を用いて、累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$  と累積標準偏差  $\sigma_{Nc}$  を以下の式で計算した。

$$\mu_{Ns} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{si} \quad (5)$$

$$\sigma_{Nc} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (N_{si} - \mu_{Ns})^2} \quad (6)$$

Fig. 5 に、 $\Theta=1.0$  におけるモンテカルロシミュレー

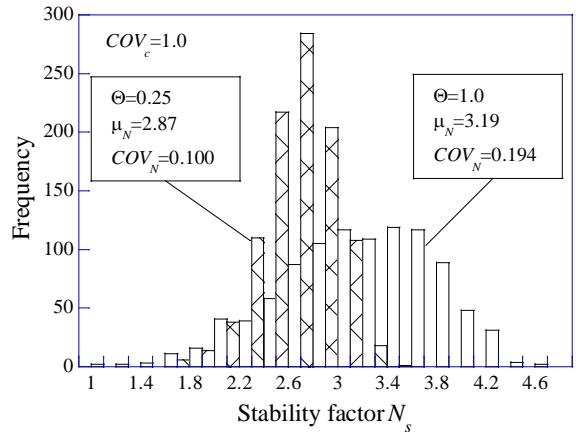


Fig. 6 Histogram of stability factor for slope

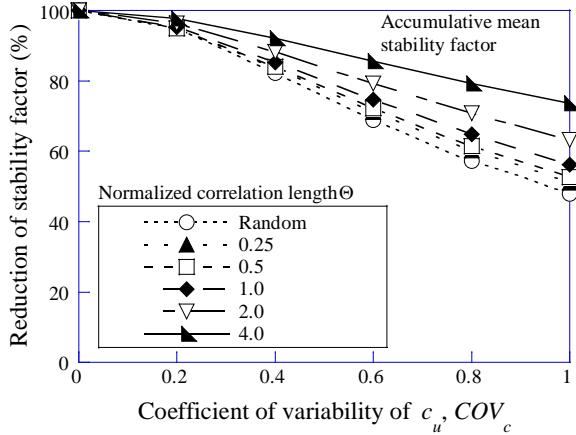


Fig. 7 Reduction of stability factor due to  $COV_c$  for a given  $\Theta$

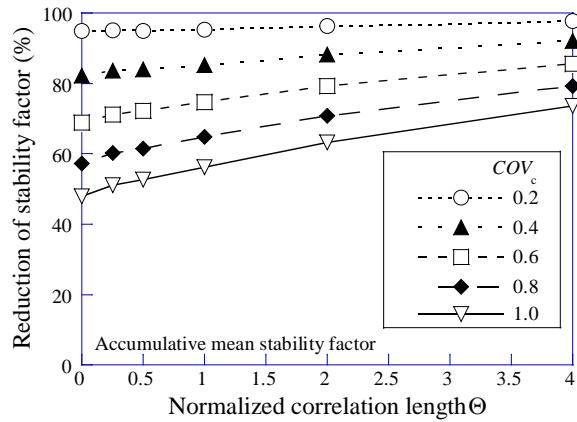
ション過程における累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$ 、累積標準偏差  $\sigma_{Nc}$  と解析回数の関係を示す。Fig. 5a)に示す累積平均安定係数は、変動係数  $COV_c$  の大きさによらず解析回数 50 回程度まで若干変動するが、200 回以降での変動はきわめて小さい結果が得られた。また、Fig. 5b)に示す累積標準偏差は、地盤の変動係数  $COV_c$  が大きくなるにつれ増加したが、1000 回において十分に収束値が得られた。これら収束した累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$  と累積標準偏差  $\sigma_{Nc}$  を用いることで、各入力定数における平均支持力係数を土 5% の精度で推定できることを確認している。

Fig. 6 に、 $COV_c=1.0$ 、 $\Theta=0.25$  と  $1.0$  における安定係数のヒストグラムを示す。得られたヒストグラムの形状は、それぞれ平均値付近にピークが存在し、山型の分布形状を示した。また、分布型の適合度検定( $\chi^2$ 検定)から、強度に空間的不均一性を有する斜面の安定係数は、正規分布と対数正規分布の両者に 5% の有意水準で適合した。

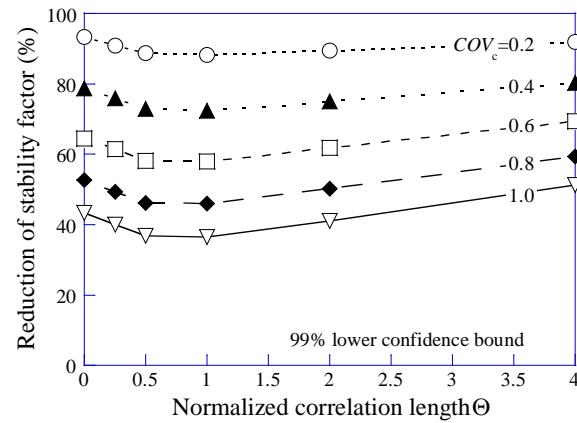
#### 4・3 強度の空間的不均一性に起因した安定性の低減

せん断強度の空間的ばらつきに起因した斜面の安定係数の低減割合を評価するために、Fig. 7 に、解析回数 1000 回における累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$  を、均一強度として計算した斜面の安定係数  $N_{suni}$  で正規化(以下、安定係数低減率とよぶ)した値と、変動係数の関係を示す。変動係数の増加とともに安定係数低減率は、ほぼ直線的に減

少



a) Accumulative mean stability factor



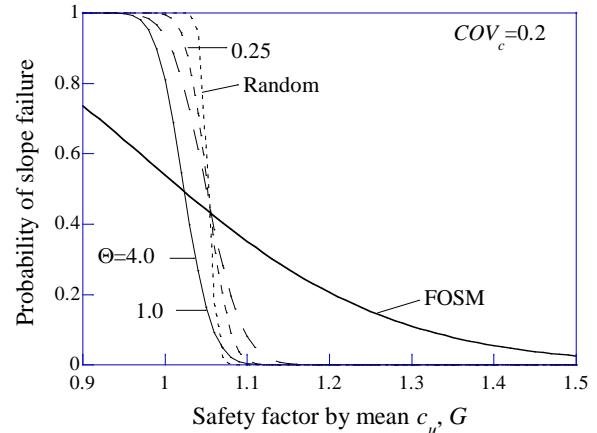
b) 99% lower confidence bound of stability factor

Fig. 8 Reduction of stability factor due to  $\Theta$  for a given  $COV_c$

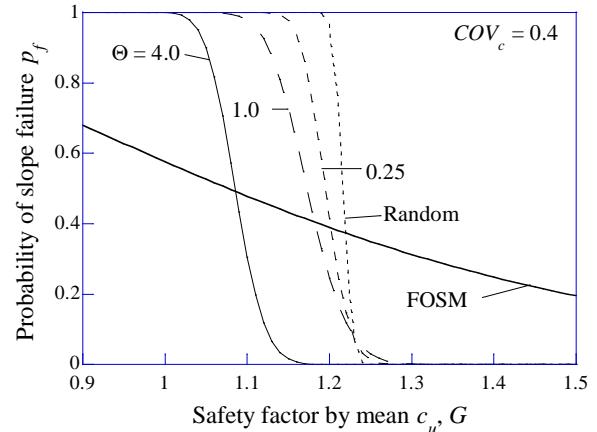
した。ただし、その減少傾向は、正規化自己相関距離が小さくなるほど顕著であり、ランダム強度の斜面(有限要素ごとにランダムに強度を決定した斜面)の場合が最も大きい結果となった。Fig. 7より、変動係数 0.2~0.4 程度の自然堆積地盤<sup>12),16)</sup>では、平均安定係数は 80~90% 減少すると推定される。

安定係数の低減に与える自己相関距離の影響を確率統計的に評価するために、Fig. 8 に安定係数低減率と正規化自己相関距離の関係を示す。Fig. 8a)と 8b)は、それぞれ累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$  と安定係数の分布形を考慮し、安定係数の 99% 信頼下限値を用いた安定係数低減率である。ここで、99% 信頼下限値は、累積平均安定係数  $\mu_{Ns}$  と累積標準偏差  $\sigma_{Ns}$  を用いて計算したもので、斜面の安定性に与える強度不均一性の影響を危険側で評価するための試みである。また、ランダム強度の斜面の結果は、 $\Theta$  が微小であると仮定し、図中では  $\Theta=0$  の座標にプロットした。Fig. 8a)に示す累積平均安定係数で評価した低減率は、変動係数によらず、正規化自己相関距離の増加とともに、徐々に增加了。一方、Fig. 8b)に示す 99% 信頼下限値による安定係数低減率は、変動係数の値によらず、正規化自己相関距離  $\Theta$  が 0.5~1.0 付近で最小値を示した。

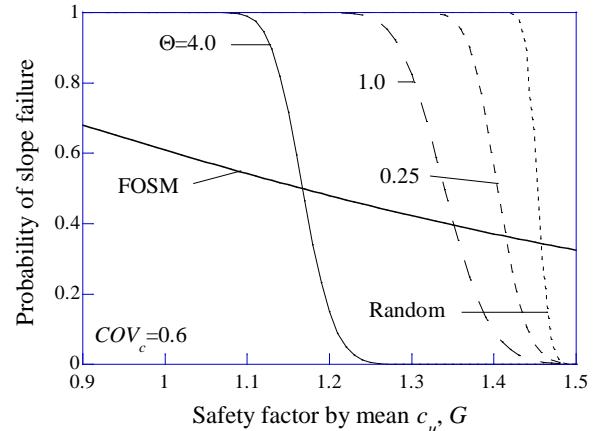
しかしながら、本解析で行った  $0 < \Theta \leq 4.0$  の範囲では、



a)  $COV_c=0.2$



b)  $COV_c=0.4$



c)  $COV_c=0.6$

Fig. 9 Probability of slope failure compared with FOSM

$COV_c$  一定での安定係数低減率の差は 10% 程度であり、自己相関距離は変動係数ほど大きく安定係数には影響しないといえる。つまり、強度の空間的不均一性を表す指標として、強度の自己相関距離よりも変動係数の方が安定係数に対して大きな影響をおよぼすと考えられる。

## 5 斜面の安全率と崩壊確率

本節では、斜面の安全性について、従来の FOSM による手法と比較しながら、確率統計的な観点から検討を試

みる。ここでは簡便のために、斜面崩壊の誘因となる斜面に作用するせん断応力は一定とし、斜面のせん断強度の不均一性のみを考慮して、斜面の安全率および崩壊確率を評価する。従来のFOSMでは、斜面のせん断強度の平均値を用いて斜面の中央安全率 $G$ を算定し、崩壊確率 $p_f$ の算定では、簡便のため斜面のせん断強度の自己相関距離を考慮せず、せん断強度の変動係数と安全率の変動係数が等しいとして計算される<sup>1)</sup>。Fig. 9a), b)およびc)には、 $COV_c=0.2, 0.4$ および $0.6$ において、FOSMにより計算した斜面の中央安全率 $G$ と崩壊確率 $p_f$ を示している。FOSMで計算した場合には、中央安全率1.0のとき、崩壊確率は必ず0.5となる。また、斜面強度の変動係数 $COV_c$ が大きくなるほど、中央安全率 $G > 1.0$ の範囲で崩壊確率は増加した。

今回の確率数値極限解析により得られた斜面の中央安全率と崩壊確率の関係もFig. 9a), b)およびc)に示す。前節で示したように、斜面の安定係数が均一強度で評価した安定係数 $N_{sumi}$ よりも小さくなるため、平均強度で計算した中央安全率 $G$ が1.0としても、斜面の崩壊確率が0.5以上となるのが特徴である。変動係数が一定の条件下で比較すると、Fig. 9a)に示す変動係数 $COV_c=0.2$ の崩壊確率は、 $1.0 < G < 1.2$ の範囲における変動が顕著であり、FOSMで計算された崩壊確率よりも減少の程度が顕著である。これは、本研究で使用した確率数値極限解析が、Fig. 4で示したように、斜面の全体的な崩壊だけではなく、斜面の局所的な崩壊現象も再現できるため、不均一性に起因して局所崩壊が発生しやすくなり崩壊確率が急増したと考えられる。また、Fig. 9b)とc)のように変動係数が増加するほど、崩壊確率が顕著に変動する中央安全率の値は増加し、かつその変動幅も拡大した。正規化自己相関距離の大きさに着目すると、斜面の崩壊確率は、正規化自己相関距離が大きくなるほど減少した。またFig. 9を用いることで、従来の斜面の安定評価に用いられる中央安全率ならびに地盤の自己相関距離から、対象斜面の崩壊確率を推定することが可能となった。

## 6 ま と め

本論文では、強度の空間的不均一性を考慮した斜面の安定性を、確率数値極限解析を用いて明らかにした。得られた結論をまとめると以下のようになる。

- 1) 強度の空間的不均一性を考慮した斜面の安定係数は、正規分布および対数正規分布の両者で適合した。
- 2) 斜面の安定係数は、強度の変動係数が増加するほど直線的に減少し、その傾向は自己相関距離が小さいほど顕著であった。一方では、安定係数の99%信頼下限値には、安定係数低減率が最小となる自己相関距離が存在し、今回の解析では $\Theta=0.5\sim1.0$ であった。
- 3) 斜面の平均強度で計算した安全率が1.0としても、0.5以上の崩壊確率が存在し、崩壊確率の変動は従来の一次近似二次モーメント法(FOSM)の結果より顕著であった。
- 4) 従来の斜面の安定評価に用いられる中央安全率ならびに地盤の自己相関距離から、対象斜面の崩壊確率を推

定することが可能となった。

## 参 考 文 献

- 1) M. Matsuo, "Geotechnical Engineering -Concept and Practice of Reliability-based Design-", Gihodo Shuppan, Ltd. (1984).
- 2) S. Sakirai and Y. Doi, "Reliability analysis of slope by finite element method", J. of Japan Society of Civil Engineers, JSCE, Vol.330, pp.87-97 (1983).
- 3) R. Mellah, G. Auvinet and F. Masrouri, "Stochastic finite element method applied to non-linear analysis of embankments", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.15, pp.251-259 (2000).
- 4) A.I. Husein Malkawi, W.F. Hassan and F.A. Abdulla, "Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability", Structural Safety, Vol.22, pp.161-187 (2000).
- 5) J.T. Christian, C.C. Ladd and G.B. Baecher, "Reliability Applied to Slope Stability Analysis", J. Geotech. ASCE, Vol. 120, No. 12, pp.2180-2207 (1994).
- 6) H. El-Ramly, N.R. Morgenstern and D.M. Cruden, "Probabilistic slope stability analysis for practice", Can. Geotech. J., Vol. 39, pp.665-683 (2002).
- 7) D.V. Griffiths and G.A. Fenton, "Probabilistic Slope Stability Analysis by Finite Elements", J. Geotech and Geoenvi. Eng., ASCE, Vol.130, No.5, pp.507-518 (2004).
- 8) E.H. Vanmarcke, "Random fields: Analysis and synthesis", MIT press, Cambridge, Mass (1984).
- 9) A.V. Lyamin and S.W. Sloan, "Lower bound limit analysis using non-linear programming", Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.55, No.5, pp.573-611 (2002).
- 10) S.W. Sloan and P.W. Kleeman, "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.127, pp.293-314 (1995).
- 11) B. Ukritchon, A.J. Whittle and S.W. Sloan, "Undrained limit analyses for combined loading of strip footing on clay", J. Geotech. Eng., ASCE, Vol.124, No.3, pp.265-276 (1998).
- 12) G.B. Baecher and J.T. Christian, "Reliability and statistics in geotechnical engineering", John Wiley & Sons, Ltd. (2003).
- 13) K. Kasama, K. Zen and A.J. Whittle, "Bearing capacity characteristics of cohesive ground using random field numerical limit analyses", Journal of Applied Mechanics, JSCE, Vol.11, pp.291-298, (2008).
- 14) D.W. Taylor, "Fundamentals of soil mechanics", John Wiley and Sons, Inc., New York (1948).
- 15) K. Terzaghi and R.B. Peck, "Soil mechanics in engineering practices, 2<sup>nd</sup> edition", John Wiley & Sons, (1967).
- 16) Phoon, K.K. and Kulhawy, F.H.: Characterization of geotechnical variability, Canadian Geotechnical Journal,

36, 612-624, 1999.