

改良型適応型サンプル値フィルタについて(その6)

小段, 謙一

<https://doi.org/10.15017/264>

出版情報 : 九州大学医療技術短期大学部紀要. 25, pp.39-44, 1998-03. Kyushu University School of Health Sciences Fukuoka, Japan

バージョン :

権利関係 :

改良型適応形サンプル値フィルタについて(その6)

小 段 謙 一

On Improved Adaptive Sampled-Data Filters (VI)

Ken-ichi Kodan

When the filter processes the signals, there is a case where the input frequency of the system varies at too short intervals for the system to reach the steady state.

In the previous study it was discussed that the minimum value of the time intervals enabled the system to get the period from the output signals even in above case.

But that discussion included only the case of smaller change in input frequency.

In this paper, the minimum value of the time intervals is discussed for the rest case.

まえがき

改良型適応形サンプル値フィルタで構成した共振器は、入力信号から基本波を抽出する場合、共振器のパラメータや共振特性を変更することなく、短い応答時間で入力周波数の変動に追従することが可能である¹⁻³⁾。

これまでの考察では、入力周波数の変動が一定時間をおいて連続する場合を考え、システムから得られる周期情報が利用可能となる最小の時間間隔を求めた。その結果、周波数変動率の大きさにより最小時間間隔の計算式に違いが有ることが明らかとなったが、変動率の大きい領域については時間間隔が大きくなる可能性が示されるに留まった^{5,6)}。

本稿では、上記の領域における最小時間間隔の計算式を導出する。

1. 改良型適応形サンプル値フィルタ

1.1 回路の構成と基本式

改良型適応形サンプル値フィルタ(以下、改良型フィルタという)の構成を図1に示す。

この改良型フィルタが二次系共振器として動作し、入力周波数の変動に追従して入力信号から基本波を抽出し得るための基本式は、次の(1)~(4)式である^{1,2)}。

$$y_n = x_n + 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot y_{n-1} - r^2 y_{n-2} \quad (1)$$

$$T_i = N T_s \quad (2)$$

$$T_s = T_o / N \quad (3)$$

$$y'_n = y_n + a \cdot y_{n-N/2} \quad (4)$$

但し、 T_i 、 T_s 、 T_o は各々、入力周期、サンプル値フィルタのサンプリング間隔、周期検出信号 y'_n から検出された周期である。周期検出は y'_n を滑らかに結ぶ線(y' とする)がゼロクロスする間隔から求めている。 T_i 、 T_s 、 T_o は時間とともに変化し、最終的には(2)式が満足される様に適応動作が行われ T_i と T_o が一致する。(1)、(4)の添字 n は第 n サンプリング時点を示す。又、 r 、 N 、 a は改良型フィルタのパラメータであり、特に N は入力信号一周分のサンプリング点数を意味する。

次に、定常状態での共振特性は次式の様に r, N の関数で与えられる。ここで H は振幅特性、 θ は位相特性である。

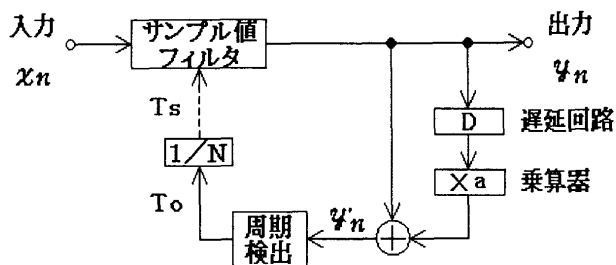


図1. 改良型適応形サンプル値フィルタ

$$H = 1 / \left\{ (1-r) \sqrt{1 - 2r \cos(4\pi/N) + r^2} \right\} \quad (5)$$

$$\theta = \frac{2\pi}{N} - \tan^{-1} \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{2\pi}{N} \right) \quad (6)$$

1.2 入力周波数の変動が連続した場合の応答

$t=0$ で、定常状態にある共振器の入力周期 T_i を $T_i' \rightarrow T_i''$ にステップ変化させ、ある時間間隔において再び T_i' に戻してやる($T_i'' \rightarrow T_i'$ にステップ変化)。ここで、入力周波数変動率を M とすると、 T_i'' は $T_i'' = T_i' / M$ と表わせる($0.29 \leq M \leq 3.4$)⁹⁾。

これまでの考察による結果を以下にまとめておく。

システムから得られる周期情報が利用可能であるためには、変動の時間間隔は或る値以上でなければならない。その値を最小時間間隔(T_p)ということにすると、 T_p はシステムが変動後の定常周期を初めて検出する時点であり、変動後の定常振幅に達する時点より時間的に早い。

そこで、 T_p を求めるには入力周期が $T_i' \rightarrow T_i'' = T_i' / M$ にステップ変化する場合のみ考えれば良いことになる。

変動前のサンプリング間隔を T_s' とすると($T_s' = T_i' / N$)、 T_p は M の値により異なる次の2式で表わされる。⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} T_p &= \left(2 + \frac{N}{2M} \right) T_s' & (0.29 \leq M < M_1) \\ T_p &= \left(1 + \frac{N}{2M} \right) T_s' & (M_1 \leq M < M_2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

但し、 M_1 、 M_2 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{N}{2\pi} \sin^{-1}(C) \\ M_2 &= \frac{N}{2} - M_1 \\ C &= H \left\{ 2r \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \sin \theta + r^2 \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{N} \right) - a \sin \left(\theta - \frac{6\pi}{N} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

次章では、残りの $M_2 \leq M \leq 3.4$ の場合の最小時間間隔 T_p の計算式導出について検討を行う。

2. $M \geq M_2$ の場合の最小時間間隔 T_p に関する考察

2.1 周期検出用信号 y'_n

適応形サンプル値フィルタにおいては、歪の軽減された出力信号を利用して、変動する入力周期を検出する。改良型フィルタにおいては実際に利

用するのは出力信号 y_n ではなく、それを加工した y'_n である。

定常状態では、(4)式より次の関係が成立する⁹⁾。

$$y'_n = (1-a) y_n \quad (9)$$

これは y'_n と y_n が定常状態では同位相であることを意味する⁹⁾。(1-a>0)

又、 T_p を求めるためには、 y' のゼロクロスの有無を調べるために、 y'_n の符号の検討が特に重要となる。

これまでの考察によると、 M の範囲と y'_n の符号の間には以下の関係があった⁹⁾。

$$y'_0 > 0, y'_1 > 0, y'_2 < 0 \quad (M < M_1)$$

$$y'_0 > 0, y'_1 < 0 \quad (M_1 \leq M < M_2)$$

$$y'_0 > 0, y'_1 > 0, y'_2 > 0 \quad (M \geq M_2)$$

2.2 T_p の導出

2.2.1 $x_n=0$ の仮定

$M \geq M_2$ と $M < M_2$ の場合のサンプリング間隔の時間推移を図2に示す。共振器のパラメータは $r=0.92$ 、 $N=8$ 、 $a=0.78$ とした⁹⁾。以下も、この設定で検討を進める。上記のパラメータの値より、 $M_2=3.1425$ となるので $M=3.2$ 、 $M=2$ を夫々 $M \geq M_2$ 、 $M < M_2$ の代表とした。

この図より、 $M \geq M_2$ の場合は $M < M_2$ の場合と比べ、サンプリング間隔((3)式より出力周期も同じ傾向を示す)の振れが大きく、変動後の定常値に落ち着くまでの時間が長いことがわかる。

システムが入力周波数変動を感知し得るための情報源は x_n のみであるから、定常状態に落ち着く

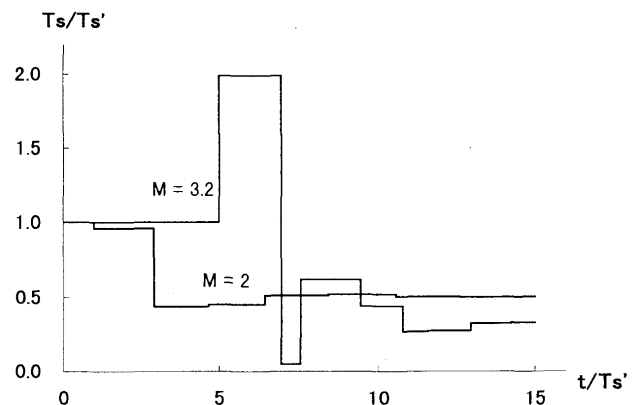


図2. サンプリング間隔の時間推移

までの時間が長いということは $M \geq M_2$ の場合は入力 x_n の影響が小さいことが原因であると考えられる。

x_n をゼロとした時とそうでない時で y_n にどの位の差があるかを考えてみると、(1)式より次の様な結果が得られた。差を δ_n と置くと、 δ_n は次式の様に見える。

$$\delta_n = \sum_{i=0}^n k_i x_i \quad (10)$$

ここで、 k_i は r, N, a の関数であり、夫々の最適値においては $k_i > 0$ となる。又、図2において t が小さい所では $T_s = T'_s$ であり入力 x_n は $x_n = -\sin(2Mn\pi/N)$ で与えられるので、 $M \geq M_2$ の場合 x_i と x_{i+1} は反対符号となる。そこで、(10)式の右辺の各項は打ち消し合い、結果として差 δ_n の値は小さくなると考えられる。

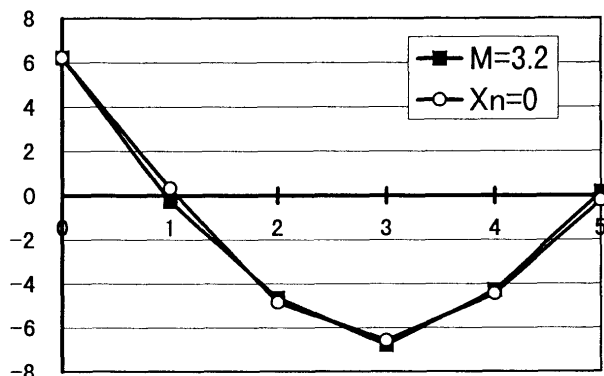


図3. 入力信号の有無による y_n の違い
(横軸は t/T'_s , 縦軸は y_n)

図3に、入力信号の有無による y_n の値を示したが、両者の差が小さいことが良くわかる。入力有りの場合は $M \geq M_2$ の範囲でほぼ同じ値を取るのを代表例として $M=3.2$ の場合を示した。又、実際の y_n は或るサンプリング時点での値が次のサンプリング時点までホールドされるが、比較を容易にするため各サンプル時点での値を折れ線で結んで表示してある。

両者の差が小さいことがわかったので、簡単のため、以下では $x_n = 0$ として考察を進める。

2.2.2 第1~5サンプリング時点の検討

$t=0$ で入力信号 x_n がゼロになるとして、(1)式を y_n について解くと、 y_n は変動前の入力周期と同

じ周期で振幅は r^n で減衰する。 $|y_n|$ の極大値は r^4 で減衰するから y_n は以下の様に表わせる。

$$\begin{aligned} y_{-3} &= H \cos \theta_1 \\ y_{-2} &= H \cos \theta_2 \\ y_{-1} &= H \cos \theta_3 \\ y_0 &= H \cos \theta_4 \\ y_1 &= -Hr^4 \cos \theta_1 \\ y_2 &= -Hr^4 \cos \theta_2 \\ y_3 &= -Hr^4 \cos \theta_3 \\ y_4 &= -Hr^4 \cos \theta_4 \\ y_5 &= Hr^8 \cos \theta_1 \\ y_6 &= Hr^8 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (11)$$

但し、 $\theta_i = \theta - \pi/2 + i\pi/4$ である。

(11)式と(4)式より、

$$\begin{aligned} y'_1 &= H \cdot (a - r^4) \cos \theta_1 \\ y'_2 &= H \cdot (a - r^4) \cos \theta_2 \\ y'_3 &= H \cdot (a - r^4) \cos \theta_3 \\ y'_4 &= H \cdot (a - r^4) \cos \theta_4 \\ y'_5 &= -Hr^4 (a - r^4) \cos \theta_1 \\ y'_6 &= -Hr^4 (a - r^4) \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (12)$$

(5), (6)式より、 r, N, a の最適値においては、 $H > 0, r^4 > 0, a - r^4 > 0, \cos \theta_i > 0$ となるから $y'_{1 \sim 4} > 0, y'_5 < 0$ となり、 y'_n を滑らかに結ぶ線 y' は第4, 第5サンプリング時点間、すなわち $t=4T'_s$ と $5T'_s$ の間でゼロクロスする。

又、 $\cos \theta_4 > r^4 \cos \theta_1$ より $|y'_4| > |y'_5|$ となるので、ゼロクロス時点はほぼ $t=5T'_s$ となる。このゼロクロス時点の一つ前のゼロクロス時点は $\{(-\theta - \pi)/(\pi/4)\} \cdot T'_s$ であり、従って検出周期は $5T'_s - (-3T'_s) = 8T'_s = 2T'_i$ 、よってサンプリング間隔は $2T'_s$ となる。

2.2.3 第6サンプリング時点以降の検討

第6サンプリング時点での入力信号 x_6 は $t=5T'_s + 2T'_s$ 付近での値となるので $x_6 \approx -\sin(14M\pi/N)$ となり、 $M \geq M_2$ の時 $x_6 > 0$ である。

又, $t=7T_s'$ 以降は $x_n=0$ の仮定は成立しなくなる。すなわち, この辺りから x_n すなわち M の影響が顕著になる。

よって, (12)式の最下式より $y'_6 = -\sin(14M\pi/N) - Hr^4(a-r^4)\cos\theta_2$, M に依らない項を C' とのおくと($C' < 0$), $y'_6 = C' - \sin(14M\pi/N)$ となる。

この式と $M_2 \leq M \leq 3.4$ の時 $\sin(14M\pi/N)$ は約 $\sin 5.5\pi$ と $\sin 6\pi$ の間にあること, 更に $C' < 0$ を考慮すると $y'_6 = 0$ となる M の値が求められる。これを M_3 とおくと, M_3 は次式で与えられる。

$$M_3 = 8\{\pi + \sin^{-1}(C')\} / (14\pi) \quad (13)$$

但し, $C' = -Hr^4(a-r^4)\cos\theta_2$ である。

これより, y'_n の符合は次の様になる。

(i) $M_2 \leq M < M_3$ では $y'_5 < 0$, $y'_6 > 0$

(ii) $M \geq M_3$ では $y'_5 < 0$, $y'_6 < 0$

夫々の場合について T_p を求める。

先ず, (i)の場合は, y'_5 が小さな値であることにより $t=7T_s'$ 以降でのサンプリング間隔は微小な値を取る。 $t=7T_s'$ では $x_n > 0$ であり時間とともに減少してゼロに達する。サンプリング間隔が微小なので x_n を滑らかに結ぶ線が $t=7T_s'$ 以降でゼロクロスする時点が y' がゼロクロスする時点であると仮定しても大差はない。この様に仮定すると, $t=7T_s'$ 以降で x_n を滑らかに結ぶ線が最初にゼロクロスするのは $(24/M)T_s'$ である。この時点付近で y_n , y'_n を滑らかに結ぶ線もゼロクロスするので(9)式より出力周期は変動後の定常状態に近付いたといえる。そこで, T_p は $(24/M)T_s'$ に変動後の定常周期の半分を加えて次式の様に表わせる²⁾⁹⁾。

$$T_p = \frac{28}{M} T_s' \quad (M_2 \leq M < M_3) \quad (14)$$

以上を T_s に関してまとめると, 「 $t=0 \sim 5T_s'$ では $T_s = T_s'$, $t=5T_s' \sim 7T_s'$ では $T_s \approx 2T_s'$, $t=7T_s'$ 付近では T_s は微小な値, $t=7T_s'$ 以降では T_s は T_s'/M に落ち着いて行く」とまとめられる。

これは, 図2の $M=3.2$ の場合と良く一致している。

次に, (ii)の場合は(i)の場合と同様の考察により, $t=9T_s'$ 以降で x_n を滑らかに結ぶ線が最初にゼロクロスする時点が $(32/M)T_s'$ と求まるので, T_p

は以下の様に表わすことができる。

$$T_p = \frac{36}{M} T_s' \quad (M_3 \leq M \leq 3.4) \quad (15)$$

そこで, M の範囲と T_p の関係は, (7), (14), (15)式より次の様にまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} T_p &= 2 + \frac{4}{M} & (0.29 \leq M < M_1) \\ T_p &= 1 + \frac{4}{M} & (M_1 \leq M < M_2) \\ T_p &= \frac{28}{M} & (M_2 \leq M < M_3) \\ T_p &= \frac{36}{M} & (M_3 \leq M < 3.4) \end{aligned} \right\} (16)$$

3. 結果

前章の考察により T_p の計算値が(16)式の様に求められたので, これを(1)~(4)式に基づく計算機シミュレーション値と比較する。(図4, $r=0.92$, $N=8$, $a=0.78$, $M_1=0.8575$, $M_2=3.1425$, $M_3=3.3715$)

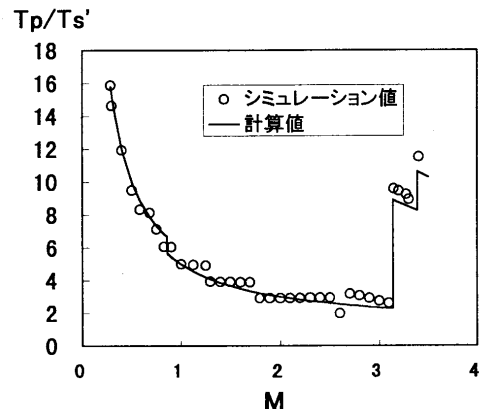


図4. 入力周波数変動率 M と最小時間間隔 T_p の関係 ($r=0.92$, $N=8$, $a=0.78$)

計算値はシミュレーション値と良く合致している。又, M_{1-3} の値も良く一致している。

次に, 入力周期が $T_i' \rightarrow T_i'/M \rightarrow T_i'$ の様に変化した場合, 入力周期が変化してから出力周期が元に戻るまでの最小時間($T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)$ とする)は, $T_i'/M \rightarrow T_i'$ の変化は $T_i' \rightarrow MT_i'$ の $1/M$ に相当するので, 次式の様に表わせる。

$$T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) = T_p(M) + \frac{1}{M} T_p\left(\frac{1}{M}\right) \quad (17)$$

(16)式と(17)式から M の範囲と $T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)$ の関係をまとめると次の様になる。

$$\left. \begin{aligned}
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 38 + \frac{4}{M} \quad (0.29 \leq M \leq \frac{1}{M_3}) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 30 + \frac{4}{M} \quad (\frac{1}{M_3} < M \leq \frac{1}{M_2}) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 6 + \frac{5}{M} \quad (\frac{1}{M_2} < M \leq M_1) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 5 + \frac{5}{M} \quad (M_1 < M < \frac{1}{M_1}) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 5 + \frac{6}{M} \quad (\frac{1}{M_1} \leq M < M_2) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 4 + \frac{30}{M} \quad (M_2 \leq M < M_3) \\
 T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1) &= 4 + \frac{38}{M} \quad (M_3 \leq M \leq 3.4)
 \end{aligned} \right\} (18)$$

(18)式の関係を図示したものが図5である。

$T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)/T_s'$

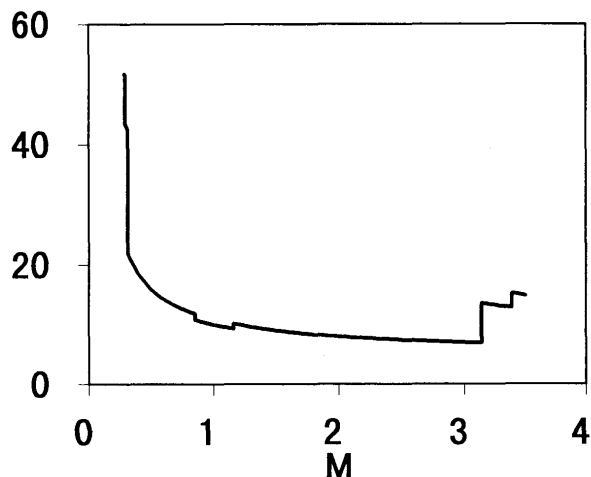


図5. M と $T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)$ の関係

図5より、上記の目的に適した M の値を以下の条件によって求めることにする。

① M の異なった幾つかの変動を併用する場合も考慮に入れると、 M の広い範囲にわたって $T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)$ は一定で小さな値を取ることが望ましい。

② $M < 1$ の場合よりも $M > 1$ の場合の方が当然 $T_p(1 \rightarrow M \rightarrow 1)$ は小さい。

③ M が1に近い所では、本当の変動と誤差による変化の区別が付き難い。

以上の条件により、周期情報を利用する場合に使用可能な周波数の変動率は大略1.5から3までの範囲であると考えられる。

あとがき

サンプリング間隔と、周期検出用信号の符号を検討することにより、入力信号の周期情報のみを利用する場合に入力周期の変動の時間間隔は最低どれだけ必要かということが変動率の全範囲にわたって理論的に求められ、良好な結果が示された。又、これを用いて、使用可能な変動率の最適範囲の大略値も求められた。

今後の課題としては、上記範囲の下限の詳細な検討があり、現在検討中である。

参考文献

- 1) 小段謙一: 適応形サンプル値フィルタについて. 九大医短大紀要 14: 15-21, 1987.
- 2) 小段謙一: 適応形サンプル値フィルタの応答時間の改善. 九大医短大紀要 15: 7-10, 1988.
- 3) 小段謙一: 改良型適応形サンプル値フィルタの応答時間. 九大医短大紀要 16: 19-21, 1989.
- 4) 小段謙一: 改良型適応形サンプル値フィルタについて(その2). 九大医短大紀要 20: 19-22, 1993.
- 5) 小段謙一: 改良型適応形サンプル値フィルタについて(その4). 九大医短大紀要 22: 27-30, 1995.
- 6) 小段謙一: 改良型適応形サンプル値フィルタについて(その5). 九大医短大紀要 24: 37-42, 1997.