九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

最近の所得分布関数の推定

佐伯, 親良
九州大学大学院経済学研究院 : 教授

https://doi.org/10.15017/26262

出版情報：經濟學研究. 79 (5/6), pp.61-78, 2013-03-28. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

最近の所得分布関数の推定*

佐　伯　親　良

1　問題の所在

所得，資産の分布に関する時系列的な変動に関する研究は，これまで多くの研究者による分析がなされてきている．近年では，大竹文雄 (2005) をあげることができよう．大竹では基礎的な不平等度の尺度としてはジニ係数などの集中度係数が利用され，分布の時系列的な変化が考察されている．多くの実証分析ではジニ係数，タイル尺度に代表される不平等度の尺度が直接的に求められ，比較検討がなされているといえよう．他方，所得分布，資産分布の統計的な分布関数を推定し，これに基づく不平等度の尺度を推計する方法も広く進められてきており，最近ではマイクロデータを用いた推計，集計データに基づく新しい方法も進められてきている．本論文はこれらの方法に焦点を当てるものである．サンプルデータからの所得分布関数の推計に関するこれまでの先駆的な研究は，Salem and Mount (1974) によるガンマ分布の適用，Singh and Maddala (1976) による分布に代表されるものである．これらは，少ないパラメータで所得分布関数を当てはめることに成功している．Dagum (2008) はローレンツ曲線との関係を考慮したより柔軟なモデルを導出した．Kleiber (1996)，Kleiber (2008) はこれらの分布の比較，利用の方法についてコンパクトにまとめている．一般化ガンマ分布，一般化ベータ分布（１類，２類）を中心に，より包括的に所得分布関数の導出を試みたのは，McDonald (1984) である．一般化ベータ分布（２類）は，それまでの Singh=Maddala 分布，ガンマ分布，一般化ガンマ分布を包含していることを示した．今日所得分布関数を表す最も代表的な分布として，この一般化ベータ分布（２類）が利用されてきている基礎を McDonald が築いたともいえよう．Chotikapanich (2008) はこれま

*本論文は，科学研究費補助金・基盤研究（C)「経済変動が個人間所得分布に及ぼす計量分析」（平成２４－２６年度：(課題番号２４５３０２３０）の助成を受けたものである．

での先駆的な研究を収集している．公表されてきている所得階層別データの情報を基に，実際に最尤推定法により所得分布関数を推定した初期の分析としては Aigner and Goldberger (1970) をあげることができよう．その後，多くの研究者が最尤推定法を用いた所得分布関数の推定を試みてきており，極めて一般的な方法となってきている．

公表されてきている所得階層別のデータでは，階層別平均所得などのモーメント情報が与えられる場合もある．このような状況ではこれらのモーメント条件を利用したパラメータの推定も考えられ，一般化モーメント法（GMM) の適用も試みられてきている．その先駆的な研究としては，Chotikapanich et al. (2007)，Hajargasht et al. (2012) をあげることができよう．所得分布関数のもう一つのアプローチとして近年注目される方法は，MaxEnt によるものである．エントロピー概念に基づくこの分布関数は，一般化ベータ分布（２類）のように分布関数を特定化する必要がない点でより柔軟なものであるといえよう．Zellner and Highfield (1988) はこの分野で先駆的な研究をしたものであり，今日でもその計算方法は広く利用されてきている．所得分布関数に MaxEnt を導入したのは Wu (2003) であり，米国の CPS のデータに関してこの方法がうまく適合することを示している．本論文ではこのような所得分布関数の推計に関する最近の動向を実際の推計の視点から見ていくこととしたい．続く節では一般化ベータ分布（２類）を基に最尤推定法について述べ，第３節では所得分布関数の推定への GMM 法の適用方法と MaxEnt について見ていく．また，第４節ではこれまで日本の所得分布研究において広く利用されてきている公表データとこれを用いた最尤推定の実際について見ていくこととしよう．

2　所得分布関数の最尤推定法

日本の所得分布に関する情報のほとんどは所得階級別である．例えば，厚生労働省の「国民生活基礎調査」は毎年行われるが，３年ごとに大規模な調査が実施され，所得階級別の集計表が公表されている．また，同省は３年ごとに「所得再分配調査」を実施し当初所得と再分配所得を公表している．総務省統計局は「家計調査」を行っているが，さらに５年ごとにより詳細な「全国消費実態調査」を実施し，結果を公表している．また，賃金分布の詳細については，厚生労働省の「賃金構造基本調査」の賃金階級別データが公表されている[1]．これらは，所得，賃金分布の変動を分析する上で広く利用されてきているが，

[1]近年，日本においてもマイクロデータの利用が制限付きながら利用可能になってきているので，これらに依存した分布関数の推定は可能である．しかしながら，一般に利用可能な情報は集計された情報である場合が多い．

その典型的な集計データは表 1，表 2 のようである．所得再分配調査では各所得階級の所得レンジと各階級に属する所得のシェアに関する情報が得られる．他方，全国消費実態調査ではこれらの情報に加えて，所得階級内の平均所得が得られる．ここでは，これらの情報に基づく所得分布関数の推定について取り上げよう．

現在広く利用されてきている所得分布関数は，一般化ベータ分布（２類）ーGB2 と以下記述するーである．この密度関数は，y を所得とし，$\theta = (a, b, p, q)$ をパラメータとすると，(1) 式のように示される．

$$f_{GB2}(y|\theta) = \frac{\mathrm{a}\mathrm{y}^{ap-1}}{\mathrm{b}^{ap}\mathrm{B}(\mathrm{p},\mathrm{q})[1+(\mathrm{y}/\mathrm{b})^{a}]^{p+q}} \tag{1}$$

ここで，公表されている所得階級別データに関して，K 階級を想定し，第 i 階級の所得区切りを $I_i = (x_{i-1}, x_i)$，この階級に含まれる世帯の数を n_i のように定義しよう．Aigner and Goldberger (1970) は所得階級別データにパレート分布を当てはめることを試みているが，このとき，$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ に多項分布を仮定している．この仮定の下では，尤度関数は，

$$L(\theta) = N! \prod_{i=1}^{k} \frac{P_i(\theta)^{n_i}}{n_i} \tag{2}$$

である．ただし，

$$P_i(\theta) = \int_{I_i} f(y|\theta)\, dy \tag{3}$$

である．(2) 式から対数尤度関数を最大化することにより直接的にパラメータを推定することができよう．ただし，GB2 の分布関数の推定では計算をより容易にするために，さらに次の確率分布関数を定義しよう．

$$F(y|a,b) = 1 - \frac{1}{\left[1+(\frac{\mathrm{y}}{b})^{a}\right]} \tag{4}$$

この確率密度関数は次のようになる．

$$f(y|a,b) = \frac{1}{\left[1+(\frac{\mathrm{y}}{b})^{a}\right]^{2}} \frac{a}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{a-1}$$

このとき，GB2 分布関数の各所得階級の確率を次の (5) 式のように書くことができよう．

$$P_i(\theta) = \int_{I_i} f_{GB2}(y|\theta)\, dy = \frac{1}{\mathrm{B}(\mathrm{p},\mathrm{q})} \int_{I_i} [F(y|a,b)]^{p-1}[1-F(y|a,b)]^{q-1} dF \tag{5}$$

(3) 式にこれを利用することにより，最尤推定法を適用することができる．この定式化はより一般性を持っておりパラメータの推定においても便利である．

先に述べたように，McDonald and Ransom (1979) は GB2 分布が $p = 1$ のとき Singh=Maddala 分布となり，$q = 1$ のとき Dagum 分布となることを示している．このことを確かめるには，$p = 1$，$q = 1$ をそれぞれ (1) 式に代入すればよい．このことから GB2 分布の特性は，これまで広く利用されてきている Singh=Maddala 分布や Dagum 分布の一般的な特性をも含むものとなっている [2]．GB2 分布の特性を記述しておこう．パラメータ b はスケールパラメータである．GB2 の平均は，

$$\mu_{GB2} = \frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p,q)} \tag{6}$$

であり，また，分散は，

$$\sigma^2_{GB2} == b^2\left[\frac{B\left(p + \frac{2}{a}, q - \frac{2}{a}\right)}{B(p,q)}\right] - \left[\frac{B\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p,q)}\right]^2 \tag{7}$$

である．j 次のモーメントは次のようになる．ただし，j 次のモーメントは $-ap < j < aq$ のとき存在する．

$$E\left(Y^j\right) = \frac{b^j B\left(p + \frac{j}{a}, q - \frac{j}{a}\right)}{B(p,q)} \tag{8}$$

所得不平等度の尺度に関しては，Jenkins (2009)，McDonald and Ransom (2008)，Hajargasht et al. (2012) 等で導出されている．ここでは，一般に広く利用されている Gini 係数と Theil 係数を示しておこう．Gini 係数は次の (9) 式で求められる．

$$\begin{aligned} Gini &= \frac{2B\left(2p + \frac{1}{a}, 2q - \frac{1}{a}\right)}{B(p,q)\,B\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}\left\{\frac{1}{p}{}_3F_2\left[\begin{array}{c} 1, p+q, 2p+\frac{1}{a}; 1 \\ p+1, 2(p+q); \end{array}\right]\right\} \\ &- \frac{1}{p+\frac{1}{a}}{}_3F_2\left[\begin{array}{c} 1, p+q, 2p+\frac{1}{a}; 1 \\ p+\frac{1}{a}+1, 2(p+q); \end{array}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，${}_3F_2(\cdot)$ は Generalized hypergeometric series を意味している．また，Theil 係数は次の (10) 式，あるいは，(11) 式で求められる．

$$Theil = \frac{1}{a}\left[\Psi\left(p + \frac{1}{a}\right) - \left(q + \frac{1}{a}\right)\right] + \ln\left(\frac{b}{\mu_{GB2}}\right) \tag{10}$$

[2]所得分布関数間の関係については佐伯親良 福井昭吾 森田 (2007) にも記述している．

$$= \frac{1}{a}\left[\Psi\left(p+\frac{1}{a}\right)-\left(q+\frac{1}{a}\right)\right]+\ln B(p,q)-\ln B\left(p+\frac{1}{a},q-\frac{1}{a}\right) \quad (11)$$

ここで，$\Psi(x)=\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}$ である．また，(11) 式は，GB2 の平均 (6) 式を代入したものである．GB2 所得分布関数を推定すれば，これらの算式により Gini 係数，Theil 係数を求めることが，不平等度の定義に従って直接，これらの係数を求めることもできることは指摘するまでもないであろう．Jenkins (2009) は一般的なこれらの不平等度の尺度の他に，低所得層に感応的な尺度，高所得層に感応的な尺度と GB2 との関係についても言及している．

3　所得分布関数の推定 GMM および MaxEnt

所得分布に関する利用可能な情報としては，所得階級の区分とその所得階級に属する世帯の相対度数が与えられていることは少なくない．例えば，日本の所得分布研究で利用されている「所得再分配調査」では， 表 1 にみられるような標準的な情報が公表されてきている．この場合には，GB2 分布関数を最尤推定法により推定することは一つの適切な方法であるといえよう [3]．他方において，これらの情報に加え所得階級内のその他のモーメント情報が与えられている場合もある．例えば，表 2 は全国消費実態調査の公表データを示したものであるが，この表では階級内の平均所得が与えられている．このような状況のもとでは，これまで述べてきた最尤推定法は与えられた情報を全て利用しているとはいえない．勿論，所得分布の研究において所得分布関数の推定自体は目的ではないので，このように情報が豊富である場合には，例えば，直接ローレンつ曲線を推定することも考えれよう [4]．ただし，ここでは所得分布関数の推定に重点を置くこととしよう．公表されているデータの利用についてさらにみてみると，所得階級区切りではなく五分位，十分位，二十分位データとして，平均所得が公表されている場合もある．このような状況では，これまで述べてきた最尤推定法を適用することが困難となろう．このような状況に鑑み，モーメント情報に依存した所得分布関数の推定が提唱されてきている．近年，福井 (2011)，Hajargasht et al. (2012) は GMM 推定を試みている．特に，後者では所得階層区分が与えられていない場合にも，各所得階級の上限，下限をもパラメータとして推定することを試みている．

[3] このような状況でも階級内の分布の線形近似を想定して，中央値をとりローレンツ曲線を描くことは行われているが，一つの簡便法である．

[4] GB2 分布関数を想定すれば，これに基づいてローレンつ曲線を導出し，累積所得のシェアの実際の値との差の２乗和が最小となるようにパラメータを推定することもできよう．

3.1 GMM

所得分布表が次のように与えられているとする．ここでは，所得分布は M 階層に区切られている．また，総人口は N であるとする．また，所得を y, $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ は各個人の所得である．$(n_1, n_2, \cdots, n_M)$ は各所得階層に属する人数とする．これより，$\frac{n_i}{N} = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, M)$ である．

$$\begin{bmatrix} \text{所得階層} & \text{人口シェア} & \text{平均所得} \\ x_0 \sim x_1 & c_1 & \bar{y}_1 \\ x_1 \sim x_2 & c_2 & \bar{y}_2 \\ \vdots & & \\ x_{M-1} \sim x_M & c_M & \bar{y}_M \end{bmatrix}$$

GMM は母集団モーメントと標本モーメントの差が最小になるようにパラメータを推定する方法である．ここでは, 標本として所得階層別の人口シェアーと平均所得が与えられている場合を想定している．所得分布関数は，$f(y|\theta)$ であるとする．そこで, 母集団の人口シェアー $(k_i(\theta))$, および, 平均所得 $(\mu_i(\theta))$ について見ると，次のようになる．

$$k_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(y|\theta)dy \quad i = 1, 2, \ldots, M \tag{12}$$

$$\mu_i(\theta) = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} yf(y|\theta)dy}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(y|\theta)dy} \quad i = 1, 2, \ldots, M \tag{13}$$

ここで，すべての個人を考慮するために次の２値関数 $g_i(y)$ を導入する．

$$g_i(y) = \begin{cases} 1 & y_{i-1} \leqslant y < y_i \\ 0 & \end{cases}$$

これは，第 j 個人の所得が 第 i 所得階層に落ちれば 1 をとる関数である． このことから,

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g_i\left(y_j\right) = \frac{n_i}{N} = c_i \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

となる．また，第 i 所得階層の人口シェア (12) 式についても次のように表現できよう．

$$k_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(y|\theta)dy = \int_0^{x_N} g_i(y_i) f(y|\theta)dy = E\left[g_i(y_i)\right] \tag{14}$$

このことから，人口シェアに関するモーメント条件（モーメント条件 I ）として，$M-1$ 個の条件，

$$E\left[g_i(y)\right]-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}g_i\left(y_j\right)=0 \tag{15}$$

が得られよう．これはまた，

$$k_i(\theta)-c_i=0 \quad i=1,2,\ldots,M-1 \tag{16}$$

とも表現できる．$\sum_{i=1}^{M}c_i=\sum_{i=1}^{M}k_i(\theta)=1$ であるからモーメント条件は 1 つ減少する．

次に，各所得階層の平均所得に関するモーメント条件を導出する．各所得階層内の平均所得は所得分布関数が $f(y|\theta)$ であるとき，

$$\begin{aligned}\mu_i(\theta) &= \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} yf(y|\theta)dy}{k_i(\theta)}\\ &= \frac{1}{k_i(\theta)}\int_0^{x_M} g_i(y)\,yf(y|\theta)dy\\ &= \frac{1}{k_i(\theta)}E\left[g_i(y)\,y\right]\end{aligned} \tag{17}$$

である．この平均に対応する標本平均は次のようになる．十分大きな N の下では，$k_i(\theta)$ は c_i に近づく (モーメント条件 I ）として，

$$\frac{1}{c_i}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}g_i\left(y_j\right)y_j=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N}g_i\left(y_j\right)y_j=\bar{y}_i \tag{18}$$

である．このことから，モーメント条件 II として，

$$\mu_i(\theta)-\bar{y}_i=0 \quad i=1,2,\ldots,M \tag{19}$$

が得られる．これらのモーメント条件は次のようにまとめられる．

$$H(\theta)=\begin{bmatrix} k_1(\theta)-c_1\\ k_2(\theta)-c_2\\ \vdots\\ k_{M-1}(\theta)-c_{M-1}\\ \mu_1(\theta)-\bar{y}_1\\ \mu_2(\theta)-\bar{y}_2\\ \vdots\\ \mu_M(\theta)-\bar{y}_M \end{bmatrix} \tag{20}$$

同じことではあるが，後のために，(16) 式と (19) 式で与えられるモーメント条件 I と II についてまとめておこう．

$$h_{ij}^1 = g_i\left(y_j\right) - k_i(\theta) \quad i = 1, 2, \cdots, M-1; j = 1, 2, \cdots, N \tag{21}$$

$$h_{ij}^2 = \frac{1}{c_i} g_i\left(y_j\right) y_j - \mu_i(\theta) \quad i = 1, 2, \cdots, M; j = 1, 2, \cdots, N \tag{22}$$

としよう．あらたに次の行列を定義しておく．

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & \cdots & h_{1N}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & \cdots & h_{2N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M-11}^1 & h_{M-12}^1 & \cdots & h_{M-1N}^1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 & \cdots & h_{1N}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 & \cdots & h_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M1}^2 & h_{M2}^2 & \cdots & h_{MN}^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Z}_1$ は人口シェアに関するモーメント条件，$\mathbf{Z}_2$ は所得階層毎の平均所得に関するモーメント条件に関する行列とし，$i_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}'$ とすると，(20) 式のモーメント条件は，

$$plim \frac{1}{N} \mathbf{Z} i_N = \begin{bmatrix} plim \frac{1}{N} \mathbf{Z}_1 i_N \\ plim \frac{1}{N} \mathbf{Z}_2 i_N \end{bmatrix} = 0 \tag{23}$$

のようになる．これらのモーメント条件は，$2M-1$ 個の条件を含んでいる．所得分布関数のパラメータ θ の数が GB2 のように 4 個であるとすると，M が例えば，20 であるとすると過剰識別になる．一般に， GMM ではモーメント条件式の分散・共分散行列の逆行列を最適ウエイとした評価関数を最小化するようにパラメータを推定する．ここでも同様の方法をとる．最適ウエイトを，

$$W = plim \frac{1}{N} (\mathbf{Z} i_N)(\mathbf{Z} i_N)' \tag{24}$$

の逆行列とする．ただし，

$$(\mathbf{Z} i_N)(\mathbf{Z} i_N)' = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 i (\mathbf{Z}_1 i)' & \mathbf{Z}_1 i (\mathbf{Z}_2 i)' \\ \mathbf{Z}_2 i (\mathbf{Z}_1 i)' & \mathbf{Z}_2 i (\mathbf{Z}_2 i)' \end{bmatrix}$$

であり，

$$\mathbf{Z}_1 i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N h_{1j}^1 \\ \sum_{j=1}^N h_{2j}^1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N h_{M-1j}^1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_2 i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N h_{1j}^2 \\ \sum_{j=1}^N h_{2j}^2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N h_{Mj}^2 \end{bmatrix}$$

である．GMM 推定量は，$(\mathbf{Z}i_N)\,W^{-1}(\mathbf{Z}i_N)'$ をパラメータに関して最小にするように求められる．Hajargasht et al. (2012) は所得の区切り $(x_{i-1} \sim x_i)$ が所与ではなく，人口シェアと階層別平均所得のみが提供されている場合に GMM を適用している．そこでは最適ウエイトとして，

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{h}_j\mathbf{h}'_j \tag{25}$$

を定義し，その逆行列を利用している．ただし，

$$\mathbf{h}'_j = \begin{bmatrix} h^1_{1j} & h^1_{2j} & \cdots & h^1_{M-1j} & h^2_{1j} & h^2_{2j} & \cdots & h^2_{Mj} \end{bmatrix}$$

である．これは先の (24) 式で与えられるものとは異なる．実際の推定課程では所得分布関数の想定が必要である．Hajargasht et al. (2012) では GB2 が主として用いられており，その特殊形として，Dagum，Singh=Maddala 分布も考慮されている．先に述べたように多くの場合，所得の区切りと人口シェアのみが公表されている場合が多いが，国際比較の場合には十分な情報が得られていないこともあり，最尤推定法を適用することができない場合もある．他方，平均所得などの情報が得られる場合もある．これらの状況下で GMM が適用可能なことを示した点で，Hajargasht et al. (2012) の役割は大きいといえよう．

3.2 MaxEnt

所得分布関数の推定において上で述べた最尤推定法, GMM は分布関数の形を特定化する必要があった．MaxEnt では明示的に特定化する必要はない．Maxent 分布関数の推定を取り扱った先駆的な研究は Zellner and Highfield (1988) によるところが大きい．近年，多くの研究者が MaxEnt 分布関数の推定を試みてきているが，実際の計算の立場からは，Mohanmmad-Djafari (2001) が有用な方法を提示している．また，所得分布関数の推定に適用したのは Wu (2003), Wu and Jeffrey. (2005)，Wu and Jeffrey (2007) である．

Shannon によるエントロピーの定義は，

$$W = -\int f(y)\log f(y)\,dy \tag{26}$$

である．ここで，$f(y)$ は確率密度関数である．モーメント条件が次の (27) 式ように与えられるとする．

$$\int y^j f(y)dy = \mu_j \quad j = 0, 1, 2, \ldots, L \tag{27}$$

MaxEnt 確率密度関数はこのモーメント条件の下に (26) を最大にするように求められる．これは，モーメント条件をより一般的に，

$$\int g_r(y) f(y) dy = a_r \quad r = 0, 1, 2, \ldots, L \tag{28}$$

のようにすると，次の制約付き最大化問題となる．

$$L = -\int f(y) \log f(y)\, dy - \lambda_0 \left(\int f(y) dy - 1 \right) - \sum_{r=1}^{L} \lambda_r \left[\int g_r(y) f(y) dy - a_r \right] \tag{29}$$

ここで，$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_L)$ はラグランジェ乗数である．この問題を解けば，

$$f(y) = \exp\left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(y) - \lambda_2 g_2(y) - \cdots - \lambda_L g_L(y)\right] \tag{30}$$

となる．実際，$f(y)$ を求めるためには，モーメント条件 (28) 式に (30) を代入し，次式，

$$\int g_r(y) \exp\left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(y) - \lambda_2 g_2(y) - \cdots - \lambda_L g_L(y)\right] dy = a_r \quad r = 0, 1, 2, \ldots, L \tag{31}$$

の非線形連立方程式を解く必要があり容易ではない．Zellner and Highfield (1988) の方法は (31) 式の左辺をラグランジェ乗数 λ の関数と見なして Newton 法による近似を行うものである．

$$G_i(\lambda) = \int g_r(y) \exp\left[-\lambda_0 - \lambda_1 g_1(y) - \lambda_2 g_2(y) - \cdots - \lambda_L g_L(y)\right] dy$$

ただし，$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_L)'$ である．これより，テーラー展開による一次近似により，

$$G_i(\lambda) \approx G_i\left(\lambda^0\right) + \left[\frac{\partial G_i(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda - \lambda^0} \right] \left(\lambda - \lambda^0\right) = \mathbf{a} \tag{32}$$

ただし，$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_L)'$ である．$\mathbf{G} = \frac{\partial G_i(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda - \lambda^0}$，$\delta = \lambda - \lambda^0$，$\mathbf{v} = \mathbf{a} - G_i\left(\lambda^0\right)$ のようにおくと，最終的に

$$\mathbf{G}\delta = \mathbf{v} \tag{33}$$

が得られる．(33) 式は，初めに得られた解を利用して，$\lambda = \lambda^0 + \delta$ の繰り返し法によって解くことが可能となる．Zellner and Highfield (1988) はこの繰り返し法を提唱したものである．所得分布関数の推定に直接この方法を利用することができるのは，マイクロデータが利用可能な場合であろう．先に述べたように一般に公表されている情報は人口シェアと所得階層内の平均所得の

みである場合が多く，２次より上の高次のモーメントが得られる場合は少ない．マイクロデータが利用可能である場合は，これらの高次のモーメントを求めて実際の推定を進めることができよう[5]．MaxEnt 密度関数の推定を所得階層別データにも適用するように拡張したのが Wu and Jeffrey (2007) である．ここでは各所得階層毎のモーメント条件を考慮し，(26) 式を最大化するようにパラメータの推定がなされる．これは所得分布関数の MaxEnt 密度関数を推定する範囲をより柔軟にしたものとして注目されよう．

4　所得分布分析の基本的データと分布関数の推定

4.1　利用可能なデータと推定

これまで所得分布の研究において利用されてきている典型的なデータについてみておこう[6]．表 1 は厚生労働省から公表されている再分配調査のデータである．ここでは，所得階層の区切りと各所得階層の人口シェアのみが与えられてい典型的なデータである．このデータに基づく GB2 の推定結果は表 3 のようである．ここでは，(9) 式と (10) 式に基づいて Gini 係数と Theil 係数が示されている．また，表 2 は 2009 年の全国消費実態調査の公表データである．この表では再分配調査のデータと異なり所得の区切りと人口シェアおよび階層内の平均所得が与えられている．つまり，追加的なモーメント条件として階層内の平均所得が与えられている[7]　表 4 には GB2 の推定結果が示されている．賃金分布に関するデータは「賃金センサス」として，毎年公表されてきている．これに含まれる情報としては年齢，性別，学歴別，企業規模別などの賃金分布表が利用可能である．また賃金センサスの集計された情報としては，かなり細かい所得階層別の情報が公表されている点が特徴的であり，多角的なデータの利用が可能である．表 5 には公表されている分布表から分布関数の推定をおこない，これに基づいて比較可能なように十分位データを作成したものを示している．真の所得分布関数の推定を行うことは重要な一歩であり，

[5]マイクロデータが利用可能である場合は，最尤推定法を利用できるがこの場合には GB2 のように分布を特定化する必要がある．他方，MaxEnt 密度関数の場合にはこれを仮定する必要がないが，高次のモーメントの次数を定めることとなる．Wu (2003) では Sequential Updating により予測モーメントの差が十分小さくなった段階で止めることを提唱している．

[6]ここであげているデータがすべてではない．広く利用されてきている階層別データの典型を示しているにすぎない．

[7]このことから，第 2 節で述べた最尤推定法では与えられた情報を十分に利用していないことになろう．ＧMMを適用することが望ましいと思えるが，この点については次のステップとしたい．

多方面からのアプローチが必要である．今後，ＧＭＭ，MaxEnt を含めた分析が広く展開されることとなろう．

4.2 Dagum 分布関数の推定

GB2 は．Singh=Madda，Dagum 分布を包含していることを先に述べている．Dagum 分布は３パラメータを持つ分布であり，その密度関数は次のように与えられている― Dagum (2008) ―．ここで，特に，Dagum 分布関数の推定を取り上げたのは，実際の分布関数の推定においてこの分布が極めて安定的な推定値を得ることができる点にある [8]．

$$f(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & y = 0 \\ \dfrac{(1-\alpha)\beta\lambda\delta}{y^{1+\delta}\left(1+\frac{\lambda}{y^{\delta}}\right)^{1+\beta}} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{array} \right\} \tag{34}$$

この分布の推定は容易であり，また，適合度も悪くはない．Dagum は所得分布関数の持つべき望ましい性質を考慮してこの分布を導いており意味づけもなされている．これらの点を考えると Dagum 分布を利用することは現実的である．ここでは，Dagum による所得分布関数を賃金分布に適用することを考えてみよう．この推定結果を図示すると，図 1 のようである．低所得層について若干の問題がみられるがおおむね良好であろう．Dagum 分布関数から推定された Gini 係数は 0.25539 である．

今日では GB2 に加えてその一般化，加重一般化ベータ分布，一般化Ｆ－分布などへの拡張も提唱されているが，単なる適合度の良さのみではなく意味づけも必要であろう．

[8]先に，2 節で述べたように GB2 による最尤推定法は広く利用されてきているが，尤度関数がかなり平らになっている場合が散見され，最大値を見いだすことが容易ではない場合もある．

表 1: 所得再分配調査　２００８年

再分配所得階層	世帯数	世帯構成（%）
		構成比
総数	4,792	100.0
50 万円未満	45	0.9
50～100	189	3.9
100～150	281	5.9
150～200	352	7.3
200～250	346	7.2
250～300	350	7.3
300～350	322	6.7
350～400	362	7.6
400～450	295	6.2
450～500	293	6.1
500～550	258	5.4
550～600	234	4.9
600～650	204	4.3
650～700	208	4.3
700～750	140	2.9
750～800	124	2.6
800～850	114	2.4
850～900	76	1.6
900～950	81	1.7
950～1,000	68	1.4
1,000 万円以上	450	9.4

出所　厚生労働省

表 2: 全国消費実態調査　２００９年

年間所得階層	世帯数	平均所得
0〜1000	188	769
1000〜1500	529	1253
1500〜2000	690	1731
2000〜2500	1046	2221
2500〜3000	1172	2712
3000〜3500	1236	3173
3500〜4000	930	3698
4000〜5000	1675	4375
5000〜6000	798	5359
6000〜	1736	8166

出所　総務省統計局

表 3: 所得再分配調査　２００８年 GB2 の推定結果

a=	0.8771
b=	791.1237
p=	2.9117
q=	34.2066
平均所得	507.257
Theil	0.2245
Gini	0.3699

表 4: 全国消費実態調査　GB2 の推定結果

a=	3.0524
b=	35.6029
p=	0.998
q=	1.000
平均所得	42.7255
Theil	0.1978
Gini	0.3274

表 5: 十分位データの推定結果：賃金センサス平成１５年と平成２３年の賃金の比較

	平成１５年			平成２３年		
十分位	平均賃金	所得シェア	累積所得シェア	平均賃金	所得シェア	累積所得シェア
Ⅰ	138.0	0.0456	0.0456	136.7	0.0460	0.0460
Ⅱ	178.7	0.0591	0.1047	175.1	0.0589	0.1049
Ⅲ	204.2	0.0675	0.1722	201.3	0.0677	0.1725
Ⅲ	227.6	0.0752	0.2474	223.1	0.0750	0.2476
Ⅴ	252.8	0.0835	0.3310	249.8	0.0840	0.3316
Ⅵ	282.2	0.0933	0.4242	275.2	0.0926	0.4242
Ⅶ	318.2	0.1052	0.5294	309.1	0.1040	0.5281
Ⅷ	365.2	0.1207	0.6501	354.6	0.1193	0.6474
Ⅸ	435.8	0.1440	0.7941	427.1	0.1437	0.7911
Ⅹ	623.0	0.2059	1.0000	621.1	0.2089	1.0000

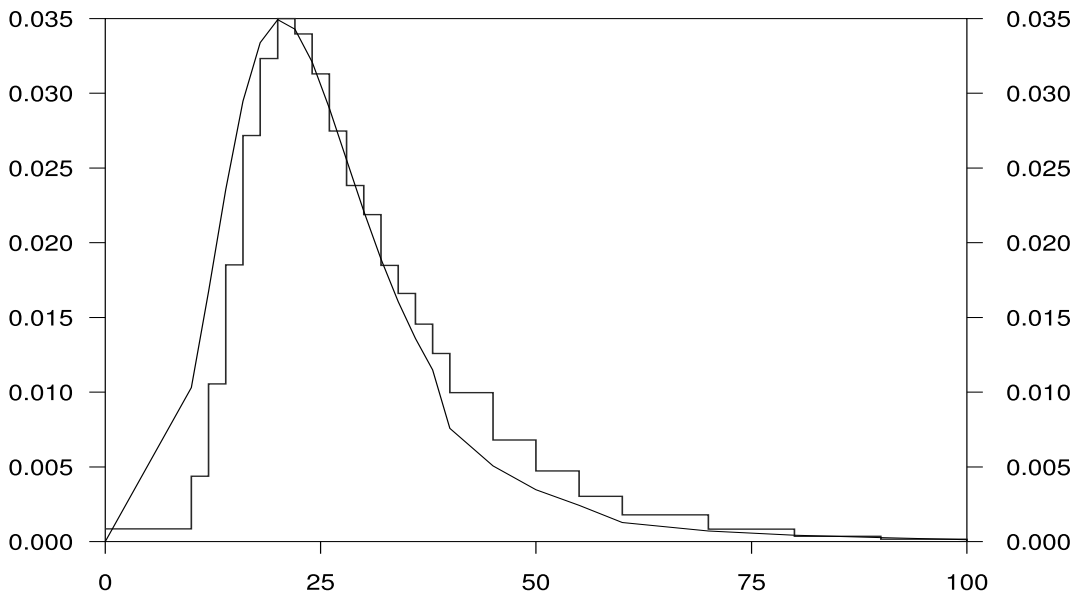

図 1: Dugum 分布関数の推定 平成１５年

5 結論

本論文では最近の所得分布関数の推定についてみてきた．GB2 は近年の研究で広く利用されてきている所得分布関数の代表的なものである．この分布が積極的に採用されている理由としては，この確率分布が所得分布の生成を含めて，これまで提唱されよく適合すると評価されてきた幾多の分布を包含している点にあると考えられる．だだし，留意すべき点も少なくない．推定の実際の視点からよく指摘されることではあるが，非線形最適化法を利用する上で得られた推定値が最適解かどうかに十分注意する必要があろう．推定値が最適解でないと思われる点に収束していることも少なくないので注意が必要である．初期値の設定も問題であるが，最適解を得るためにはパラメータの集約化がより有効と思われる．計量経済学における GMM による推定は最近では一般的であるが，所得分布関数の推定についてはそれほど多くはない．最尤推定法よりもより多くの情報を組み込むことができる点で優れていると思われる．ただし，ローレンツ曲線の推定を優先させた方がよいという状況もあろう．ローレンツ曲線は，階層別所得階層の所得区切りがなくでも，各階層内人口シェアと平均所得が与えられればこれを推定することができ，また，多様なローレンツ曲線の推定方法も提唱されてきている．勿論，所得分布関数のパラメータの推定値が得られれば，不平等度の尺度の計算など自由度は高い．近年，注目されているのは MaxEnt 密度関数の推定である．このアプローチは分布関数の先験的な想定については柔軟であり，階層化された所得分布の情報下でも利用可能なように拡張されてきている．実際の解を求める段階で収束しにくいなどの問題もあるが更なる展開がなされよう．制約された状況ではあるが，徐々にマイクロデータの情報も利用可能なようになってきている．集計された情報とマイクロデータによる補完的な分析が所得分布関数の推定に有効になろう．

参考文献

[1] Aigner, D.J. and A.S. Goldberger (1970) "Estimation of Pareto's Law from Grouped Ovserbations," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 65, pp. 712-723.

[2] Chotikapanich, Duangkamon ed. (2008) *Modeling Income Distribution and Lorenz Curves*: Springer.

[3] Chotikapanich, Duangkamon, Griffiths William, and Rao D.S. Prasada (2007) "Estimating and Combining National Income Distributions Using Limited Data," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 25, No. 1, pp. 97-109.

[4] Dagum, C (2008) "A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation," in Chotikapanich, D. ed. *Modeling Income Distribution and Lorenz Curve*: Springer, pp. 3-25.

[5] Hajargasht, Gholamreza, Griffiths William, Brice Joseph, Rao Prasada, and Duangkamon Chotikapanich (2012) "Inference for Income Distribution Using Grouped Data," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 30, pp. 563-575.

[6] Jenkins, Stephen P. (2009) "Distributionally-Sensitive Inequality Indices and the GB2 Income Distribution," *Review of Income and Wealth*, Vol. 55, pp. 393-398.

[7] Kleiber, C (1996) "Dagum vs. Singh-Maddala income distributions," *Economics Letters*, Vol. 53, pp. 265-268.

[8] ——— (2008) "A Guide to the Dagum Distribution," in Chotikapanich, D. ed. *Modeling Income Distribution and Lorenz Curve*: Springer, pp. 97-117.

[9] McDonald, J.B. (1984) "Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income," *Econometrica*, Vol. 52, No. 3, pp. 647-665.

[10] McDonald, J.B. and M.R. Ransom (1979) "Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income," *Econometrica*, Vol. 47, No. 6, pp. 1513-1525.

[11] ——— (2008) “The Generalized Beta Distribution as a Model for the Distribution of Income: Estimation of Related Measures of Inequality,” in Chotikapanich, D. ed. *Modeling Income Distribution and Lorenz Curve*: Springer, pp. 147-166.

[12] Mohanmmad-Djafari, Ali (2001) “A Matlab Program to Calculate the Maximum Entropy Distribution,” November. Mimeo, (available at: http://arxiv.org/abs/physics/0111126/).

[13] Salem, A. B. Z. and T. D. Mount (1974) “A Convenient Descriptive Model for Income Distribution: The Gamma Density,” *Econometrica*, Vol. 42, No. 6, pp. 1115-1127.

[14] Singh, S.K. and G.S. Maddala (1976) “A Function for Size Distribution of Incomes,” *Econometrica*, Vol. 44, No. 5, pp. 963-970.

[15] Wu, Ximing and Peroff Jeffrey. (2005) “China’s Income Distributions, 1985-2001,” *Review of Economics and Statistics*, Vol. 87, pp. 763-775.

[16] Wu, Ximing and Peroff Jeffrey (2007) “GMM Estimation of a Maximum Entropy Distribution with Interval Data,” *Journal of Econometrics*, Vol. 138, pp. 532-546.

[17] Wu, Ximing (2003) “Calculation of Maximum Entropy Densities with Application to Income Distribution,” *Journal of Econometrics*, 第 115 巻, 347-345 頁.

[18] Zellner, Arnold and Richard A. Highfield (1988) “Calculation of Maximum Entropy Distributions and Approximation of Marginal Posterior Distributions,” *Journal of Econometrics*, Vol. 37, pp. 195-209.

[19] 大竹文雄 (2005) 『日本の不平等』, 日本経済新聞社.

[20] 佐伯親良 福井昭吾 森田充 (2007)「所得分布と不平等度尺度の計量分析 - PPID の開発 -」, 3 月. Discussion Paper, No.2007-1, Graduate School of Economics, Kyushu University.

[21] 福井昭吾 (2011) 「所得分布関数の GMM 推定」,『地域総合研究』, 第１・２合併号巻, 31-42 頁, 12 月. 鹿児島国際大学.

〔九州大学大学院経済学研究院　教授〕