学部生のための 「ミクロ・マクロ双対性」 とその周辺の物理学講義　第1講：ミクロ・マクロ双対性の門前

成清, 修
九州大学理学部物理学科

出版情報：2018-12-18
バージョン：
権利関係：

学部生のための
「ミクロ・マクロ双対性」
とその周辺の物理学講義

九州大学理学部物理学科　成清 修

第1講：ミクロ・マクロ双対性の門前

開講にあたって

「ミクロ・マクロ双対性を学ぶ[1]には [赤本] と [黄本] を読めばよろしい。講義終了。」というわけにもいかないので、これらのテキストをそれほど深く理解しているわけではない私ですが講義を始めます。[赤本] と [黄本] は教科書として使っていくので、てもとに用意しておいてください。

私もそこそこ長い間、物理学科の教壇に立ってきましたが、「来年度から○○の講義をお願いします」という話がきてから、あわててその科目の勉強をやり直し、その準備で昔よくわかっていなかったところをはじめて理解できたという経験の繰り返しであったように思います。Feynman 先生も「教えることが最高の勉強法だ」というようなことを言われているようですし、私自身がミクロ・マクロ双対性について、わかるようになりたいので、講義[2]という形に踏み切ってしまいました。

ミクロ・マクロ双対性の創始者である小嶋先生には、講義のもととなった内容についてところどころ御教示をいただいており、冒頭に御礼を申し上げておきます。「御指導たいへんに有り難うございます。」

この講義ノートには、私の理解が足りずに、いろいろな間違いが含まれているかもしれません。受講されるみなさんには、講義内容を懐疑的に検討し、自分なりの理解を達成されることを望みます。

[1]なぜ、ミクロ・マクロ双対性なのかということは、追い追い明らかしていきますが、[赤本] と [黄本] に論じ尽くされています。

[2]バーチャル講義で、単なる備忘メモなのかもしれませんが。

物理学とは何だろうか

最初の最初に、暫定的に

「物理学とは測定データを構造化する数学的手続きである」

ということにして[3]講義を始めたいと思います。

今回のめあて

今回は、本格的にミクロ・マクロ双対性に入門する前段として

「物理的測定の記述は von Neumann 環による」

ということを確認したいと思います。これにより、私たちは作用素環[4]の言葉で語らなければならない[5]ということになります。

物理的測定

まず第一に考えるべきことは、物理的測定の状況を記述することです。物理的測定の詳しい説明は [荒木] の pp.1-20 を読んでもらうこととして、ここでは直ちに、函手の随伴対の話[6]に進みます。といっても、圏論を導入するのはずっと先になるので、ここでは雰囲気だけの話をしてみます。

マクロな装置でミクロな系を測定することを考えます。測定データを構造化するために、仮想的な情報処理のための空間として Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を導入し、ミクロな系をそこでのベクトルや作用素を用いて表現することにします。

マクロな装置ではピンポイントに特定の作用素 A の情報を得ることはできないので、マクロな測定ではフィルター関数をかけたような作用素群のサンプリングをしていると考えることにします。このサンプリングを $E(a)$ とします。

[3][黄本] の p.12 の物理量代数の議論の精神です。

[4]とりあえず、線形代数の無限次元バージョンと思うことにします。無限次元への入り口での注意としては、例えば「新版量子論の基礎」清水明 §4.7 があります。

[5]数理物理シリーズ（日本評論社）の編者（荒木・江沢）は各巻の冒頭で、場の量子論に対する Wightman や Haag の姿勢を「数学的な注意深さなしには一歩も前進できないと考えた」としています。

[6][赤本]-1.1.3 の議論を劣化させた抜粋です。

作用素 A はスペクトル分解[7]できて[8]

$$A = \int \lambda \, \mathrm{d}E^A_\lambda$$

となります。x と y を $\mathcal{H}$ のベクトルとして、内積

$$\langle x, Ay \rangle = \int \lambda \, \mathrm{d}\langle x, E^A_\lambda y \rangle$$

を考えます。$\langle x, E^A_\lambda y \rangle$ は Radon 測度と呼ばれるものだそうです。この内積は、λ に関する積分として形式的に

$$\langle x, Ay \rangle = \int \mathrm{d}\lambda \, f^A_{x,y}(\lambda)$$

と書くことができます。サンプリング $E(a)$ も同様に

$$\langle x, E(a) y \rangle = \int \mathrm{d}\lambda \; g^{E(a)}_{x,y}(\lambda)$$

と書くことができます。この内積を用いて作用素弱位相[9]を

$$\big| \langle x, E(a) y \rangle - \langle x, Ay \rangle \big| < \eta$$

のように導入することができます。

作用素 A の期待値を与える手続きがあって、その期待値を $F(A)$ とします。サンプリング $E(a)$ は測定値と対応づけられて、その測定値を a とします。これらに対して物理的位相[10]を

$$\big| F(A) - a \, \big| < \varepsilon$$

のように導入することができます。

η および ε は測定誤差の表現となっていて、測定誤差の範囲で同一視することを

$$E(a) \leftarrow A$$

および

$$a \leftarrow F(A)$$

[7] [黄本]-3.1.2

[8] A は後で von Neumann 環の作用素ということになり、スペクトル分解できる作用素です。

[9] [荒木]-(B.8)

[10] [荒木]-(1.39)

のように書くことにします。

マクロ古典系 $\mathcal{A}$（現実）とミクロ量子系 $\mathcal{X}$（仮想）の間に対応関係

$$\mathcal{A}\big(a \leftarrow F(A)\big) \simeq \mathcal{X}\big(E(a) \leftarrow A\big)$$

があるとするのが物理的測定を理解しようとする際の基本的な構図です。圏論では、$\simeq$ は自然同値ということになります。

von Neumann 環

物理的測定には誤差がつきものです。その誤差を情報処理空間（Hilbert 空間）で自然に表現できるのが、前項の作用素弱位相でした。

また、我々は無限自由度の量子系 [11] の理解を目標とするので、閉包 [12] ということが大事になります。閉包については補習で整理することにします。

閉包をとることを認めると、物理的測定を記述するためには、作用素弱位相で閉じた $*$ 部分環 [13] が必然となります。これが [14]von Neumann 環です。

実は、作用素弱位相による von Neumann 環の定義（位相的定義）は、可換子環による定義（代数的定義）と等価となります。この事実は演習で確認します。可換子環はとても便利で重要なものです。補習で可換子環の導入を行います。次回以降、可換子環が大活躍する予定です。

[11] 無限次元の線形代数を考えることになり、無限次元ベクトルとしての連続関数を考えるためには、位相の導入が不可避となります。無限ということに関しては、例えば、数理物理シリーズ（日本評論社）の編者（荒木・江沢）は各巻の冒頭で、「数学は元来、無限を対象とするもので、経験では得られない超限的な理論だ」という文章を引用しています。位相ということに関しては、例えば、「作用素環入門 I 」生西・中神（岩波書店）の p.vi には、「位相を用いて無限を調教」や「作用素環の本地は無限次元線形代数であり、それを位相という解析的道具を用いて、うまく垂迹できた部分が C^* 環あるいは von Neumann 環として姿を現している」と書いてあります。ちなみに、「岩波数学辞典・第 4 版」15.A を抜粋すれば :「集合に適当な構造を与えると、極限や連続などの概念が定義され、それらについて解析学で用いられるような理論が展開できるようになる。このような構造を位相という。」ということになっています。ついでに、「位相のこころ」森毅（ちくま学芸文庫）の p.229 では、「位相とはひとくちにいって、収束の概念である」としています。

[12] 作用素弱位相で閉包をとることの意義は [赤本]-p.20-脚注 10 に説明があります。

[13] $*$ 環については、今日は説明しないので、[荒木] で勉強しておいてください。「岩波数学辞典・第 4 版」390.A によれば、言葉の定義は次のとおりです :「$\mathcal{H}$ の有界線形作用素全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ とします。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合が積に関して閉じているならば部分環といい、さらに $*$ 演算に関して閉じているならば $*$ 部分環といいます。」

[14] 後述のように恒等作用素 $\mathbf{1}$ を含むものとします。

補習

この補習では、無限自由度系に切り込むための戦略について少しだけ考えてみます。無限に大きな集合は相手にしたくないので、その部分集合を考えることにし、さらに閉集合であるようなものを考えるというのがその戦略です。閉部分集合はコンパクトや完備といった望ましい性質につながります。

まず、無限自由度の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分空間を $\mathcal{K}$ とすると $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}$ となっています[15]。ここに、$\mathcal{K}^{\perp}$ は $\mathcal{K}$ の直交補空間です。$\mathcal{K}$ について調べようとするときに、$\mathcal{K}$ が閉じているといろいろと助かります。そのときは、$\mathcal{K}^{\perp\perp}=\mathcal{K}$ となっていて[16]、$\mathcal{K}^{\perp\perp}$ は閉包と呼ばれます。

次に、作用素の閉包を考えてみます。それを実装するために可換子環[17]を導入します。$\mathcal{H}$ の有界線形作用素[18]の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ とします。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合を $\mathcal{S}$ とします。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のうち $\mathcal{S}$ のすべての元と交換する元からなる部分集合を $\mathcal{S}'$ とします。明らかに、$\mathbf{1}\in\mathcal{S}'$ および $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}''$ となります[19]。ここに、$\mathbf{1}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の恒等作用素で、$\mathcal{S}''=(\mathcal{S}')'$ です。

少し考える[20]と、$\mathcal{S}'=\mathcal{S}'''=\mathcal{S}'''''=\cdots$ および $\mathcal{S}''=\mathcal{S}''''=\mathcal{S}''''''=\cdots$ であることがわかるので、$\mathcal{S}\subset\mathcal{S}''$ だけが特殊な関係[21]であることが判ります。ここで、$\mathcal{S}\to\mathcal{S}''$ とするような集合の拡大を代数的閉包 $\mathrm{Cl_A}$ と呼ぶことにします[22]（$\mathrm{Cl_A}(\mathcal{S})=\mathcal{S}''$）。

以下で、作用素弱位相による閉包 $\mathrm{Cl_W}$ と作用素強位相による閉包 $\mathrm{Cl_S}$ を導入します[23]が、演習で示すように

$$\mathrm{Cl_A}(\mathcal{S})=\mathrm{Cl_W}(\mathcal{S})=\mathrm{Cl_S}(\mathcal{S})$$

となります。

$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の近傍に $A'\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が含まれる条件を内積

$$\big|\langle x,A'y\rangle-\langle x,Ay\rangle\big|<\epsilon$$

[15] 作用素の場合は、因子環 $\mathcal{R}$ に対して $\mathcal{B}(\mathcal{H})=\mathcal{R}\vee\mathcal{R}'$ となります（[Haag]-(III.2.15))。

[16] [Landsman]-pp.562-563 および [黄本]-p.15

[17] $(\mathcal{S}')=(\mathcal{S}')''$ で $\mathbf{1}\in\mathcal{S}'$ なので $\mathcal{S}'$ は von Neumann 環になっています。

[18] 非有界作用素への対応については、[赤本]-p.13

[19] 余計な説明ですが：$\mathcal{S}\subset\mathcal{S}''$ は「$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の中には、$\mathcal{S}$ には含まれないが、$\mathcal{S}'$ のすべての作用素と交換する作用素があってもよい」という意味です。

[20] [赤本]-p.20

[21] $\mathcal{S}$ が von Neumann 環であるか否かに関係なく、$\mathcal{S}'$ は必ず von Neumann 環となります。$\mathcal{S}''$ も必ず von Neumann 環となります。

[22] [Landsman]-p.742

[23] [荒木]-2-2 および B-2

またはベクトルノルム

$$\left\| A'z - Az \right\| < \delta$$

によって考えることにします。ここに、x と y と z は $\mathcal{H}$ の任意のベクトルです。前者による位相の方が粗く、後者による位相の方が細かくなっています。よって、前者の位相空間の開集合は必ず後者の位相空間の開集合となりますが、逆は成り立ちません。これをもって、前者の位相は弱く、後者の位相は強いといいます。前者の位相でつくった閉集合を $\mathrm{Cl_W}$、後者の位相でつくった閉集合を $\mathrm{Cl_S}$ とします。

演習

問題 作用素弱位相で閉じた $*$ 部分環を $\mathcal{M}$ とすると、$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ であることを示しなさい。

説明 この講義は、できることならば、数学に深入りせずに進めていきたいと考えています。また、この講義で必要となる数学的知識は、普通の数学の本やインターネット情報で確認することができる程度なので、証明などはスキップすることにします。とはいえ、最初から何も説明しないのも気が引けるので、今回は例外的に説明をつけてみます。

まず、問題文の前半が von Neumann 環 $\mathcal{M}$ の定義です。$\mathcal{M}$ は $*$ 環で $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合です。また、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の恒等作用素 $\mathbf{1}$ に関して、$\mathbf{1} \in \mathcal{M}$ とした方が自然で簡単 [24] なので、そうします。

後半に二重可換子環 $\mathcal{M}''$ が登場するので、この問題の内容は、von Neumann の二重可換子環定理と呼ばれることがあります。$\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$ であり、可換子環 $\mathcal{M}'$ は、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のうち $\mathcal{M}$ のすべての元と交換する元からなる部分集合です。明らかに、$\mathbf{1} \in \mathcal{M}'$ および $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ となります。

以下では、$\mathcal{M}$ の作用素弱位相による閉包を $\mathrm{Cl_W}(\mathcal{M})$ と書くことにします。補助的に、作用素強位相による閉包も導入して $\mathrm{Cl_S}(\mathcal{M})$ と書きます。

定義から $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ は明らかなので、逆向きの $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}''$ を示すのが課題です。

定義より $\mathcal{M} = \mathrm{Cl_W}(\mathcal{M})$ であり、位相の強弱から $\mathrm{Cl_W}(\mathcal{M}) \supset \mathrm{Cl_S}(\mathcal{M})$ である [25] から、正味の課題は $\mathrm{Cl_S}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}''$ を示すこととなります。こ

[24] [Haag] では Definition 2.1.2 の Remark で「簡単のため」としています。

[25] もともと $\mathcal{M}$ には含まれていなかったが、閉包をとることにより $\mathrm{Cl_S}(\mathcal{M})$ に含まれるようになった作用素 X があったとします。このような X が $\mathrm{Cl_W}(\mathcal{M})$ と $\mathrm{Cl_S}(\mathcal{M})$ に差をもたらす可能性があります。このとき X の強位相による近傍 $U_{\mathrm{S}}(X)$ には $\mathcal{M}$ の作用素が存在します。X の弱位相による近傍 $U_{\mathrm{W}}(X)$ で $U_{\mathrm{S}}(X)$ を含むものが必ずあるの

こで示すべき内容[26]は von Neumann の稠密定理として知られているものの一部です。

$\mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}''$ とは、勝手に選んだ $A \in \mathcal{M}''$ に対して、$A \in \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})$ がいえることです。

作用素強位相は $\mathcal{H}$ のベクトルを用いて定義されているので、作用素 $A \in \mathcal{M}''$ そのものではなく、ベクトル $Ax \in \mathcal{H}$ を用いて議論します。ここに、x は $\mathcal{H}$ のベクトルです（$x \in \mathcal{H}$）。

まず、x をひとつ固定して、x に $\mathcal{M}$ のすべての元を作用させた結果の集合を $\mathcal{M}x$ とします。$\mathcal{H}$ を $\mathcal{M}x$ に射影[27]する作用素を P とします。

少し考えると、$P \in \mathcal{M}'$ である[28]ことが判ります。これが突破口となって以下のように進撃できます。

$\mathcal{M}''$ は $\mathcal{M}'$ の可換子環なので、$AP = PA$ となっています。また、$\mathbf{1} \in \mathcal{M}$ より $x \in \mathcal{M}x$ なので、$x = Px$ となっています。これらより、$Ax = APx = PAx$ となり、$Ax \in \mathcal{M}x$ であることが判ります。

この関係から、$\mathcal{H}$ での閉包[29]を Cl として、$Ax \in \mathrm{Cl}(\mathcal{M}x)$ となります。この閉包を作用素強位相の定義に用いたノルムと同じノルムで行えば、$Ax \in \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})x$ となります。これが任意の x に対して成り立つので、$A \in \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})$ であることがいえます。

以上をまとめると

$$\mathcal{M}'' \supset \mathcal{M} = \mathrm{Cl}_\mathrm{W}(\mathcal{M}) \supset \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}''$$

で、$U_\mathrm{W}(X)$ にも $\mathcal{M}$ の作用素が存在することになります。よって、$X \in \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})$ ならば $X \in \mathrm{Cl}_\mathrm{W}(\mathcal{M})$ となります。

逆に、もともと $\mathcal{M}$ には含まれていなかったが、閉包をとることにより $\mathrm{Cl}_\mathrm{W}(\mathcal{M})$ に含まれるようになった作用素 Y があったとします。このとき Y の弱位相による近傍 $U_\mathrm{W}(Y)$ には $\mathcal{M}$ の作用素が存在しますが、$U_\mathrm{W}(Y)$ の中に、$U_\mathrm{W}(Y)$ より小さい、強位相による近傍 $U_\mathrm{S}(Y)$ をとると、$U_\mathrm{S}(Y)$ には $\mathcal{M}$ の作用素は存在しないかもしれません。

[26] [Takesaki] の Lemma 3.8 の内容です。

[27] $y \in \mathcal{H}$ に対して、$y \in \mathcal{M}x$ ならば $Py = y$、そうでなければ（$y \in (\mathcal{M}x)^\perp$ ならば）$Py = 0$ とします。

[28] すべての $B \in \mathcal{M}$ に対して、$PBy = BPy$ となっています（$y \in \mathcal{H}$ は任意）:

- $y \in \mathcal{M}x$ ならば、y と x を繋ぐ $C \in \mathcal{M}$ があって（$y = Cx$）、両辺とも By となります。（右辺では、$Py = y$）（左辺では、$By = BCx \in \mathcal{M}x$ より $PBy = By$）
- $y \in (\mathcal{M}x)^\perp$ ならば、右辺において $Py = 0$ となり、左辺においては y と x を繋ぐ $\mathcal{M}$ の作用素は無く $By \in (\mathcal{M}x)^\perp$ なので $P(By) = 0$ となります。

y は任意なので、$PB = BP$ がすべての $B \in \mathcal{M}$ に対して成り立つことになります。

[29] 一般に $\mathcal{M}x \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{M}x)$ ですが、$\mathcal{M} \supset \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})$ と想定して話を進めているので、以下で $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}x) = \mathrm{Cl}_\mathrm{S}(\mathcal{M})x$ とする際に違和感があるかもしれません。しかし、結局は次項の結論のようになっている訳です。

がいえたことになります。

結論 $$\mathcal{M}'' = \mathcal{M} = \mathrm{Cl}_{\mathrm{W}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Cl}_{\mathrm{S}}(\mathcal{M})$$

宿題

- [赤本] の 1.1.3 のうち、今日の内容に関する部分を確認しておくこと。
- [黄本] の 2.1.1 のうち、今日の内容に関する部分を確認しておくこと。
- [赤本] の p.20 あたりの von Neumann 環に関する部分を確認しておくこと。
- [黄本] の p.21 あたりの von Neumann 環に関する部分を確認しておくこと。
- [黄本] の p.22 あたりの物理的同値に関する部分を確認しておくこと。

おわりに

今回の内容はスナップショット的にミクロ・マクロ双対性の部分をとらえたものです。今後、動力学的側面の議論を加えて四項図式に進まれることを期待します。四項図式をとると、どのような視界がひらけるかについては [赤本] と [黄本] をご覧ください。

以上で、今日の講義はおしまいです。次回の日程は決まっていませんが、年に数回は開講したいと思っています。この講義ノートの末尾に日付を付しましたが、これは、講義ノートの内容が、この日までの私の理解に過ぎないことを示すためで、後日の講義で、訂正や修正が入ることもあるかと思います。

参考文献

[赤本]

小嶋「量子場とミクロ・マクロ双対性」(丸善出版, 2013)

[黄本]

小嶋・岡村「無限量子系の物理と数理」(サイエンス社, 2013)

[荒木]

荒木「量子場の数理」(岩波書店, 1993)

[Haag]

Haag「Local Quantum Physics」(Springer, 2nd, 1996)

[Landsman]

Landsman「Foundations of Quantum Theory」(Springer, 2017)

[Takesaki]

Takesaki「Theory of Operator Algebras I」(Springer, 1979)

(2018-12-18)