

## 不安定条件下での宇宙エレベーターの挙動

辻野, 勇樹  
九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻

<https://hdl.handle.net/2324/2558967>

---

出版情報 : 九州大学, 2018, 修士, 修士  
バージョン :  
権利関係 :

平成 30 年度  
九州大学大学院総合理工学府  
大気海洋環境システム学専攻修士論文

不安定条件下での宇宙エレベーターの挙動

氏名	辻野 勇樹		
指導教員	羽田 亨	教授	
	松清 修一	准教	

# 目次

1. 序論 .....	2
1.1. 宇宙エレベーターの概要 .....	2
1.1.1. ロケットと宇宙エレベーター .....	2
1.1.2. 宇宙エレベーターの歴史 .....	2
1.1.3. 宇宙エレベーターの原理 .....	2
1.1.4. ケーブルの材料に求められる条件 .....	5
1.1.5. 宇宙エレベーターの建設方法 .....	6
1.1.6. 宇宙エレベーターとロケットの輸送の比較 .....	7
1.1.7. 宇宙エレベーターの実現への課題 .....	7
1.1.8. 宇宙エレベーターのダイナミクスの研究の現状 .....	8
1.2. 研究目的 .....	9
2. 研究手法 .....	10
2.1. Lumped mass 法 .....	10
2.2. 回転座標系での運動方程式 .....	10
2.3. 外力 .....	12
2.3.1. 重力 .....	12
2.3.2. 内部応力 .....	13
2.4. ケーブルのモデル化 .....	14
3. 平衡位置での固有値解析 .....	16
3.1. ケーブルの平衡位置の決定 .....	16
3.2. 微小振動の固有値解析 .....	23
4. 衝撃を与えた時の宇宙エレベーターの挙動 .....	26
4.1. 質点 20 に衝撃を与える .....	26
4.1.1. 初速度 1 を与えた場合 .....	26
4.1.2. 初速度を大きくした場合 .....	28
4.1.3. 限界張力による破壊 .....	29
4.2. 全質点に衝撃を与えた場合 .....	32
4.3. 宇宙デブリや隕石の衝突 .....	33
5. 結論 .....	36
6. 謝辞 .....	37
7. 参考文献 .....	38

## 1. 序論

### 1.1. 宇宙エレベーターの概要

#### 1.1.1. ロケットと宇宙エレベーター

1961年4月11日、宇宙飛行士ガガーリンは人類初の宇宙飛行を成功させた。それ以来、人類は急速に宇宙開発を進めてきた。人が初めて月に降りた時や国際宇宙ステーションに向かった時も、人はロケットに打ち上げられてきた。また、宇宙ステーションに物資を送る時や気象衛星のような人工衛星を宇宙に飛ばす時のように、宇宙と地上で物のやり取りをする時にもロケットが用いられてきた。こういった中で、宇宙と地球（地上）間での人や物の新たな輸送手段として、「宇宙エレベーター」が近年、注目を集めている。

#### 1.1.2. 宇宙エレベーターの歴史

宇宙エレベーターの起源は、1885年ロシア（ソ連）の物理学者ツィオルコフスキーが赤道上からまっすぐ天に向かっていく塔を建て、それを静止軌道まで伸ばすというバベルの塔構想を発表したことである。そして、それを検証した当時ロシアの学生だったアルツターノフが、静止軌道上からケーブルを上下に伸ばすという現行の宇宙エレベーターを構想した。そこから数々の宇宙エレベーターの案が考えられてきた。一方、ケーブルの建設に耐えうる十分な強度を持つ素材を使う必要があり、開発は困難だとされてきた。ケーブルの耐久性に見合う素材の大きな条件としては、ケーブルにはたらく大きな張力に対して強いものであること、ケーブル自身の重さに耐えることができるように質量密度が小さいものであることである。そして、1991年に飯島澄男氏により、張力への強さと軽さを兼ね備えた新素材カーボンナノチューブの存在がはじめて実験的に検証されたのをきっかけに技術的に実現の可能性が高まり、世界中で議論されつつある。

#### 1.1.3. 宇宙エレベーターの原理

地球の赤道上から高度約 35,786km（地球半径 6,371km の約 5.6 倍）では、地球の自転と同期する軌道があり、これを静止軌道という。宇宙エレベーターは、地上から静止軌道高度をこえてケーブル（テザー）を設置し、クライマーと呼ばれる昇降機が地上と宇宙を行き来することにより人や物資を輸送するシステムである。Fig. 1-1 のように地球からケーブルが伸び、途中にいくつかの宇宙ステーションがあり、その間をクライマーと呼ばれる昇降機が行き来する。宇宙空間でケーブルは地球の重力（万有引力）と地球の自転による遠心力を受け、伸び縮みした状態になる。この時、宇宙エレベーター全体の重心は地球の静止軌道上の付近にある必要がある。もし全体の重心が静止軌道よりも内側にあると、エレベーター全体が地球に落下し、全体の重心が静止軌道よりも外側にあると、ケーブルが宇宙の無限方向に向かって伸び続けてしまう。これは Fig. 1-2 のように、ケーブルにはたらく地球の重力と遠心力が、静止軌道の内側では地球の重力の方が大きくなり、外側では遠心力の方が大きくなることにより、静止軌道よりも内側にあるものは地球に落下し、静止軌道よりも外側にあるものは宇宙の無限遠方に飛んで行ってしまふことに関係する。ケーブルの動きを安定させるための宇宙エレベーター全体の重心の調整の役割を担うのがアンカーステーション（カウンターウェイト）で、宇宙エレベーター

ターの 1 番端に付けられる。

静止軌道の内側ではケーブル上の物体はその軌道を周回するよりも低いエネルギーを持っているので、静止軌道の内側でケーブル上の物体を切り離すと地上に落下する。一方で、静止軌道よりも外側の高度にあるケーブル上の物体ではその軌道を周回するのに必要なエネルギー以上のエネルギーを持っているため、静止軌道の外側にあるケーブル上の物体を切り離すと、速度を得て、これにより地球軌道を脱して月や他の惑星に物資を送り込むことができる。

このように宇宙エレベーターは地上と地球静止軌道内での輸送だけでなく、太陽系内の惑星や小惑星、衛星への物資輸送も容易になり、人類の宇宙の日常化と産業化を可能にし、人類の活動領域を拡大する革命的な宇宙輸送システムだといわれている。

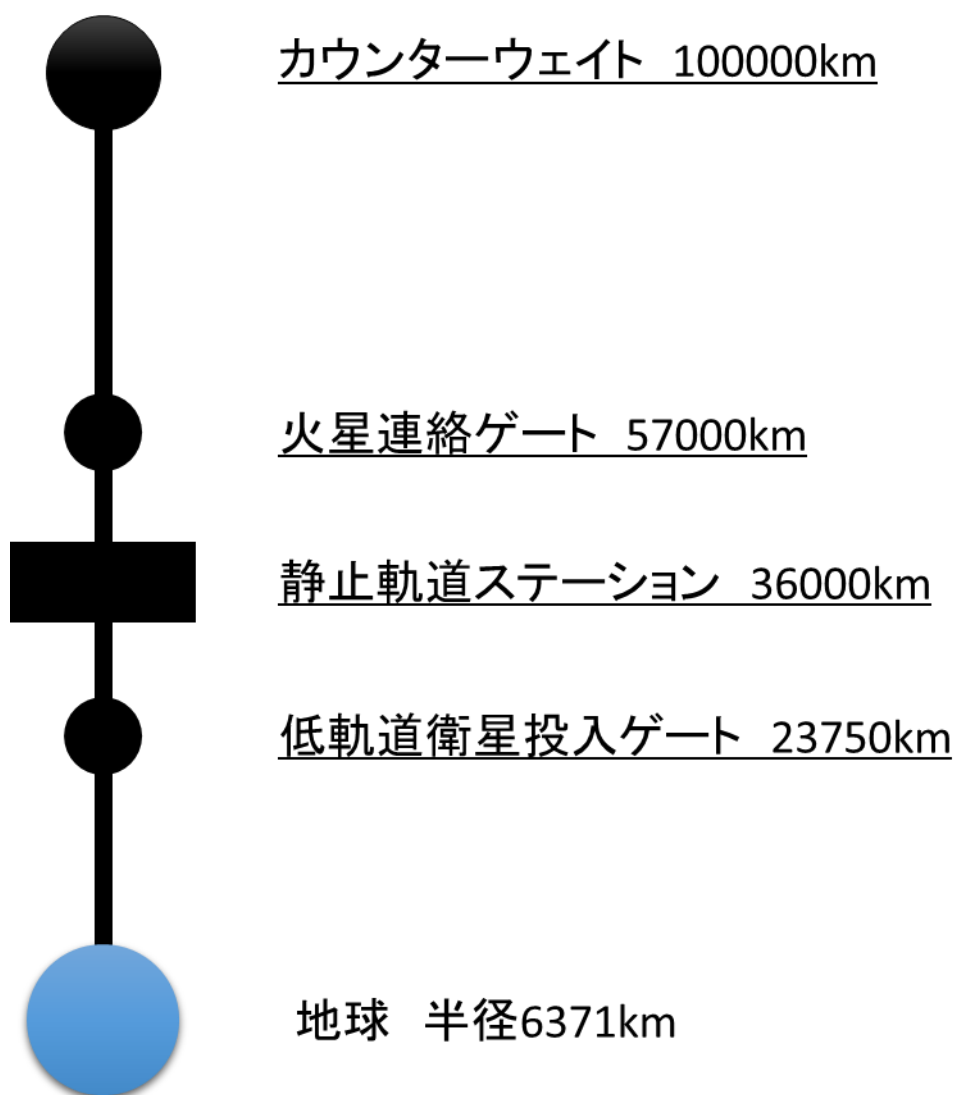


Fig. 1-1 宇宙エレベーターの概要図（距離は地上からの距離）

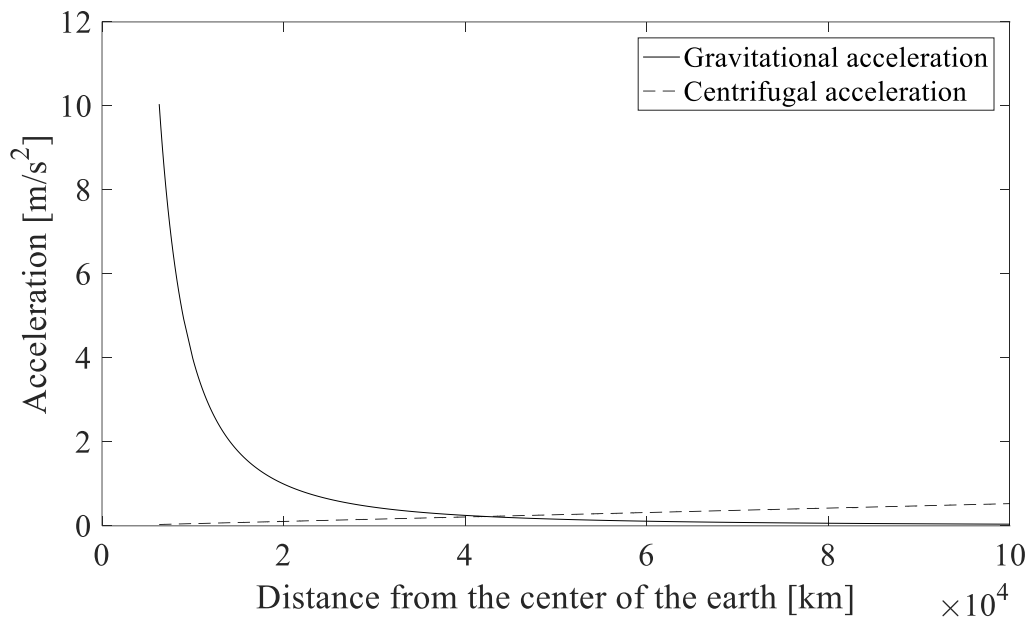


Fig. 1-2 重力加速度と遠心加速度の地球からの距離依存性

#### 1.1.4. ケーブルの材料に求められる条件

宇宙エレベーターは地上から約 36,000km という大きな距離から地球の重力場に吊り下げられる機構を持つため、ケーブルには極めて大きな張力がかかる。また、月や他の惑星に向けての発射基地（軌道カタパルトを行うための基地）として静止軌道よりも外側に約 60,000~70,000km のケーブルが付けられるため、遠心力によってやはりケーブル自体が大きな力で引っ張られる。よって、宇宙エレベーターを建設するには、引っ張られる力に対してとてつもなく強い材料が必要である。どのくらい引っ張っても切れずにすむかという力を単位断面積で表したものを引っ張り強さという。この単位は[N/m<sup>2</sup>]である。非常に大きな引っ張り強さを宇宙エレベーターのケーブル材料は持っていなければならない。

また、重量場による引力も、地球の自転による遠心力も、体積を一定とすると、密度が小さいほど小さく、大きいほど大きく作用する。よって、材料の質量密度が十分に小さいことも必要である。

このような引っ張り強さと質量密度を考慮した物理量を破断長といい、以下のように表される。

$$\text{破断長} = \frac{\text{引っ張り強さ}}{\text{地上での重力加速度} \times \text{質量密度}} \text{ [km]}$$

宇宙エレベーターのケーブルに必要な破断長は地球静止軌道半径の約 1/7 である 4,960km を超えればよいことが分かっている。破断長が静止軌道半径と同じではないのは、地球から遠ざかると重力が弱くなるためである。これを超えるような素材が長い間見つからなかったが、1991 年に発見されたカーボンナノチューブがこれを超えるだろうと言われている。理論上カーボンナノチューブの破断長は 10,000~100,000km と言われているが、現研究段階では 1m 程度のカーボンナノチューブしか作れていないため今後の研究に期待されている。

**Table 1-1 主な素材の破断長<sup>④</sup>**

素材	破断長[km]
コロソナル CNT	6066
ザイロン	384
炭素繊維	250
ガラス繊維	133
蜘蛛の糸	109
鋼鉄	50
チタン合金	30
ステンレス	26
ナイロン	7.04
ゴム	1.66

### 1.1.5. 宇宙エレベーターの建設方法

宇宙エレベーターの建設はまず、ケーブルを搭載したステーション（カウンターウェイト）をロケットで静止軌道まで打ち上げ、そこから搭載したケーブルを地球に投下する。同時に静止軌道から地球と反対方向にもケーブルを伸ばし、系全体の重心は常に静止軌道にあるようにする。赤道上の海上にプラットフォーム（出発駅）を建設し、落下してきたケーブルを接続する。このケーブルに、別のケーブルを搭載したクライマーに取り付け、再びクライマーをアンカーステーションに向かって上昇させる。これを繰り返すことでケーブルを十分に強度がある状態にでき、宇宙エレベーターが建設することができると考えられている。宇宙エレベーターの建設予算は 1~4 兆円とされ、建設期間は約 20 年とされている。ただ技術的にも安全性においても不十分な点が多いため、建設開始の時期は定かにされていない。

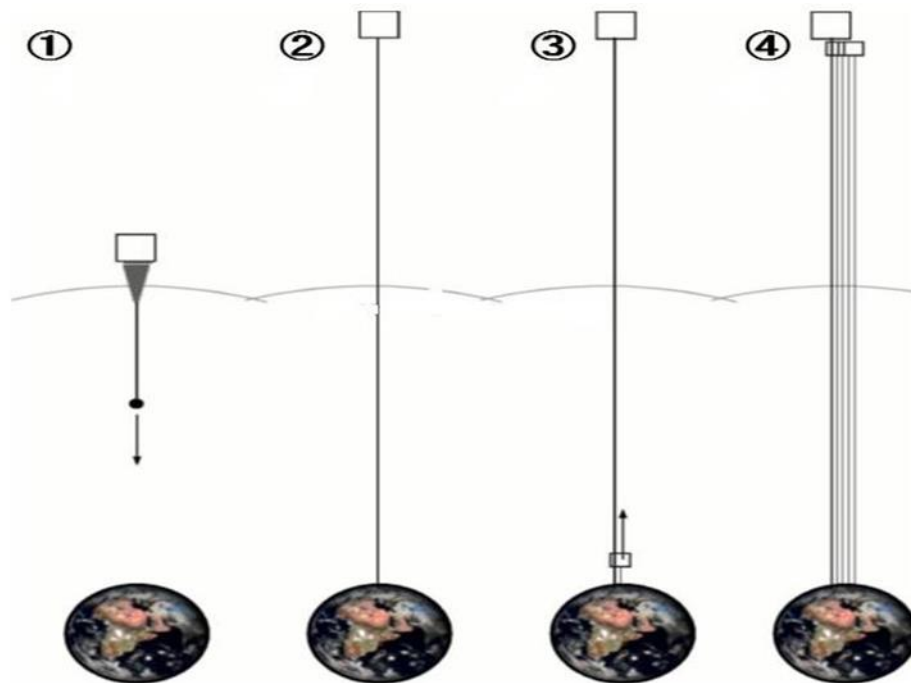


Fig. 1-3 宇宙エレベーターの建設手順<sup>9)</sup>



### 1.1.6. 宇宙エレベーターとロケットの輸送の比較

現在のロケットはその重量のほとんどが燃料である。打上げ前のスペースシャトル 29t の貨物を低軌道に打ち上げるのに用いる燃料は 1,900t で、輸送コストは1kg あたり約 170,000 円となる<sup>[10]</sup>。一方で、宇宙エレベーターでは、一度建設してしまえばロケットのように燃料を必要としない。建設費は 1.4 でも述べたように約 1~4 兆円とされていて、20t ほどの物資を頻繁に輸送することが可能になる。

これらをもとに計算すると、ロケットが 20t の物資を宇宙空間に輸送するのに 1 回につき約 340 億円の費用がかかり、これに対し宇宙エレベーターは 12 回ほど 20t の物資を運べばロケットの 1 回あたりの輸送費用より安くなる計算になる。宇宙エレベーターの輸送回数を増やせば増やすほど、宇宙エレベーター1 回あたりの輸送費用は安くなっていく。このように宇宙エレベーターが実現すれば、現行のロケットによる輸送よりも著しく低コストである。

### 1.1.7. 宇宙エレベーターの実現への課題

宇宙エレベーター実現に向けての課題として、大きな問題として宇宙エレベーター周辺の環境が挙げられる。以下に列挙すると、

- ・暴風雨への対策
- ・雷雨への対策
- ・酸性雨へのケーブルの耐性
- ・宇宙ゴミ（宇宙デブリ）との衝突への対策
- ・低軌道周回衛星（LEO-satellite）との衝突への対策
- ・隕石や小惑星との衝突への対策
- ・放射線へのケーブルの耐性

また技術的な問題としては、以下のようなものが挙げられる。

- ・軽量強強度のケーブルの開発
- ・ケーブルの動的安定
- ・摩耗の少ない高効率なクライマーの開発
- ・クライマーを安定制御
- ・エネルギーの供給方法
- ・静止軌道から地上へのケーブル展開方法

環境、技術的な問題以外にも、法律上の問題が挙げられる。例えば、航空法や領海法からして、宇宙エレベーターはどこに属することになるのかが問題になる。現在、宇宙空間でのしっかりとした法律がないので、宇宙空間で問題が発生した時どのように処理されるのかも問題になってくる。

また、安全保障の問題も重要である。宇宙エレベーターができると、軍事目的で宇宙空間を使

おうとする国が出てこないとは限らないし、宇宙エレベーターの開発と利用が進んでくると、宇宙エレベーターがテロの標的になる可能性もある。

以上のように、宇宙エレベーターの実現に向けては、さまざまな面での問題を克服する必要があり、国際的な協力が不可欠だといえる。

#### 1.1.8. 宇宙エレベーターのダイナミクスの研究の現状

宇宙エレベーターの実現には様々な課題があるが、その中でも、ケーブルのダイナミクスの把握は、ケーブルの強度設計のみならずクライマーの安定制御、エネルギー供給制御ほか、システム全体の設計に関わっている重要な課題であり、また、宇宙空間における長大なケーブルの運動は力学上の学術的な観点からも興味深いものといえる。

ケーブルの厳密な運動を把握するためには地球引力、遠心力に加えて、太陽や月の引力、太陽風やケーブル内に発生する誘導起電力による電流と地球磁場の干渉で生ずる電磁力、温度による伸び縮み等を考慮する必要がある。また、ケーブルの進展や伸び縮み等で地球半径方向の運動が生ずるとコリオリ力を受けることになる。さらに大気中では風力が働く。同様にクライマーにも重力、遠心力、昇降時のコリオリ力が働き、太陽や月の引力、太陽風、大気中の風、さらにはこのクライマーとケーブルはその接点において摩擦力を含めた相互力が作用する。どの作用力まで考慮するかはモデルによるが、これらの作用力によるケーブル運動をモデル化するアプローチとしては、ケーブルを剛体とみなす方法と、多質点系とみなす方法がある。剛体としてみなすモデルではケーブルの局所的な変形を再現できないが大きなスケールでのケーブルの動的挙動を様々なケースで解析するには適している。一方、多質点系によるモデルは、ケーブルの各部の挙動も、より詳細に再現することが可能であるが、精密なモデルほど解析に時間がかかってしまう。これらの手法を用いた宇宙エレベーターケーブルのダイナミクスの研究は学術的な宇宙エレベーター研究のきっかけとなった Edwards<sup>[5]</sup>の報告以降、各国で試みられており、ケーブルの基本的な挙動が次第に明らかになりつつある。

## 1.2. 研究目的

本研究では宇宙エレベーターに大きな衝撃が与えられたときのケーブルのダイナミクスの解析を行う。大きな衝撃を与えるものとして様々な要因が考えられるが、地球近傍には多くの宇宙デブリが存在し、長時間スケールではこれらと宇宙エレベーターの衝突事故を考慮する必要があるため、本研究では宇宙デブリを想定する。

具体的な研究項目は以下の3点である。

### (1) ケーブルの運動をシミュレートするための数値モデルを開発

ケーブルは **Lumped Mass** 法により多数の弾性ばね一質点系として近似し、これらの地球による重力、地球の自転に起因する遠心力とコリオリ力、ケーブルの伸縮による内部応力を考慮した。まず力学的平衡位置を求めた。

### (2) ケーブルに微小ゆらぎを与えた場合の運動を計算

ケーブルに微小な揺らぎを与えた場合の運動を、固有値解析の解として微小振動スペクトル計算すると (1) で開発した数値モデルの計算による方法で求め、両者が一致することを確認した。

### (3) ケーブルに有限の力積が加わる場合を想定し、ケーブル運動を計算

各質点に有限な力積の衝撃を与え、ケーブルの挙動を求めた。与える衝撃はケーブルが破壊されるまで大きくした。ケーブルの有限振幅振動と地球への落下について、またケーブルに加わる張力が限界値を超えた場合にケーブルが切断されることをとりいれて破壊条件を求めた結果を報告する。

## 2. 研究手法

### 2.1. Lumped mass 法

宇宙エレベーターの振動の様子を解析するために、Lumped mass 法を用いた。Lumped mass 法とは、剛体を多質点系で近似し、個々の質点に対して運動方程式を解くことで運動を解析する方法である。本研究では、地球の中心を原点とする3次元の回転座標系で、各質点間をバネ・ダッシュボード系で結合した。そのため、ケーブルのねじれは考慮していない。

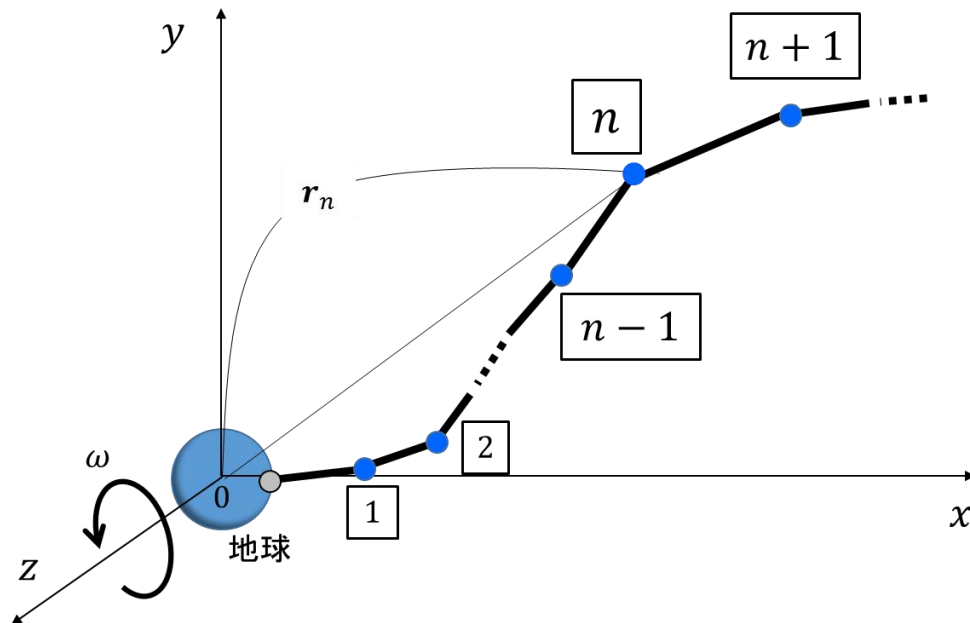


Fig. 2-1 本研究での宇宙エレベーターのケーブルのモデル図

### 2.2. 回転座標系での運動方程式

一定の角速度で回転する回転座標系における運動方程式を考える。慣性系 $S$ 系と原点を共有し、 $S$ 系に対して一定の角速度 $\omega$ で回転する $S'$ 系を考える。

$s$ 系

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.1)$$

$s'$ 系

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (2.3)$$

より

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (2.4)$$

つまり

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \\ &= \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \end{aligned} \quad (2.5)$$

このとき、 $S'$ 系に固定された点の、慣性系 $S$ 系から見た速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.6)$$

(2.6)より、 $\mathbf{r}$ を $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ で置き換えると、

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' \quad (2.7)$$

(2.5)と(2.7)から

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}') \\ &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.5)をさらに微分すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d^2 x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \mathbf{k}' + 2 \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right) \\ &\quad + x' \frac{d^2 \mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \mathbf{k}'}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9)より、(2.7)を用いて

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right) &= 2 \left( \frac{dx'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' \right) \\ &= 2 \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.7)を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{i}'}{dt^2} &= \boldsymbol{\omega}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i}' \\ \frac{d^2 \mathbf{j}'}{dt^2} &= \boldsymbol{\omega}' \times \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j}' \\ \frac{d^2 \mathbf{k}'}{dt^2} &= \boldsymbol{\omega}' \times \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k}'\end{aligned}\tag{2.11}$$

(2.9),(2.10),(2.11)より、

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'\tag{2.12}$$

よって、回転座標系S'系における運動方程式は、

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'\tag{2.13}$$

となる。回転座標系では、外力 $\mathbf{F}$ のほかに3つの見かけの力が生じる。 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ はコリオリ力で、運動しているとき進行方向に垂直に作用する。 $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ は遠心力で、回転軸に垂直で、外向きに作用する。 $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ は角加速度による力であり、角速度が一定の時には現われないため、本研究では扱わない。

## 2.3. 外力

### 2.3.1. 重力

外力は地球による重力とケーブルの伸縮による内部応力を考慮した。

質点 $n$ の地球による重力は、万有引力の法則より、

$$\mathbf{F}_n^G = -G M_E m_n \frac{\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\tag{2.14}$$

ここで、 $G$ は万有引力定数、 $M_E$ は地球の質量、 $m_n$ は質点の質量、 $\mathbf{r}_n$ は地球の中心からの質点の距離である。

### 2.3.2. 内部応力

ケーブルの伸縮による内部応力は、バネの張力 $\mathbf{F}_n^T$ とダッシュボードの減衰力 $\mathbf{F}_n^D$ とした。

$$\mathbf{F}_n^T = -k_n \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|} \Delta |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}| + k_{n+1} \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|} \Delta |\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n| \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}_n^D = -c_n \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|} \frac{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|}{dt} + c_{n+1} \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|} \frac{d|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|}{dt} \quad (2.16)$$

質点 $n-1$ ,  $n$ の間の弾性係数 $k_n$ はフックの法則より

$$k_n = \frac{EA_n}{l_0} \quad (2.17)$$

とした。 $E$ はカーボンナノチューブのヤング率、 $A_n$ は質点 $n-1$ ,  $n$ の間の断面積、 $l_0$ は質点間の自然長である。

次に減衰係数 $c$ を求める。系の減衰の大きさを代表する無次元パラメーターである減衰比 $\zeta$ は減衰係数と限界減衰率 $c_0$ を用いて

$$\zeta_n = \frac{c_n}{c_0} \quad (2.18)$$

限界減衰率は

$$c_0 = 2\sqrt{m_n k_n} \quad (2.19)$$

である。よって、減衰係数は、

$$c_n = 2\zeta_n \sqrt{m_n k_n} \quad (2.20)$$

減衰比は Table 2-1 を参照して 0.01 とした。

**Table 2-1 主な構造物や機械の減衰比<sup>[4]</sup>**

構造物や機械の減衰比	
鉄骨建物	0.003 ~ 0.04
中低層ビル (10 階以下)	0.005 ~ 0.12
高層ビル	0.02 ~ 0.1
鋼製タワー	0.002 ~ 0.03
コンクリート製タワー	0.01 ~ 0.02
道路橋	0.02 ~ 0.05
吊り橋	0.002 ~ 0.08
大型乗用車のサスペンション	0.1 ~ 0.3
小型乗用車のサスペンション	0.2 ~ 0.5
オートバイのサスペンション	0.35 ~ 0.45

## 2.4. ケーブルのモデル化

本研究で扱う宇宙エレベーターのケーブルのモデル化を行う。質点 $n$ の位置ベクトル $\mathbf{r}_n$ の運動方程式は以下ようになる。なお、Fig. 2-1のように $x$ 方向は高度方向、 $y$ 方向は東向き、 $z$ 方向は北向きで $z$ 軸周りに回転する座標系である。ケーブルの断面積は $2 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ で一定とした。自転角速度 ( $7.27 \times 10^{-5} \text{ 1/s}$ )と地球半径 ( $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ )を $\omega_E = 1$ 、 $R_E = 1$ と規格化した。この時、静止軌道は地球の中心から約 $4.20 \times 10^7 \text{ m}$ なので静止軌道半径 $R_s$ は 6.6 となる。また、静止軌道上では物体に働く遠心力と万有引力は等しくなるため、

$$R_s \omega_E^2 = G \frac{M_E}{R_s^2} \quad (2.21)$$

であり、ここで定数  $a$  を考えると、

$$a = GM_E = R_s^3 \omega_E^2 = 6.6^3 \quad (2.22)$$

となる。

境界条件として、地上の端点は固定、もう一方の端点は自由端とした。ケーブルの物性値はカーボンナノチューブを参考にした。宇宙エレベーターの全長は約 10 万 km となると考えられているため、本研究では、全長を  $20R_E = 12.7$  万 km として、質点は等間隔になるように設定し、その質点間距離を質点間の自然長とした。

$$\begin{aligned} m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = & -2m_n \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} - m_n \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) - am_n \frac{\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3} \\ & - k_n \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|} \Delta |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}| + k_{n+1} \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|} \Delta |\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n| \\ & - c_n \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|} \frac{d|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|}{dt} + c_{n+1} \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|} \frac{d|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n|}{dt} \end{aligned} \quad (2.23)$$

### パラメーター

$E = 100 \text{ GPa}$  : ヤング率

$\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$  : 密度

$A_n$  : 断面積 ( $2 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ )

$l_0$  : 質点間の自然長 (質点 20 個のとき  $l_0 = R_E$ )

$\mathbf{r}_n$  : 質点  $n$  の地球の中心に対する位置

$\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0 \ 1]$  : 自転角速度

$R_E = 1$  : 地球半径

$k_n = \frac{EA_n}{l_0}$  : バネ定数、

$c_n = 2\zeta_n \sqrt{m_n k_n}$  : 減衰係数

$m_n = \rho A_n l_0$  : 質点  $n$  の質量 (質点 20 個の時の実際の質量  $m_{nreal} = \rho A_n l_0 = 1656 \text{ kg}$ )



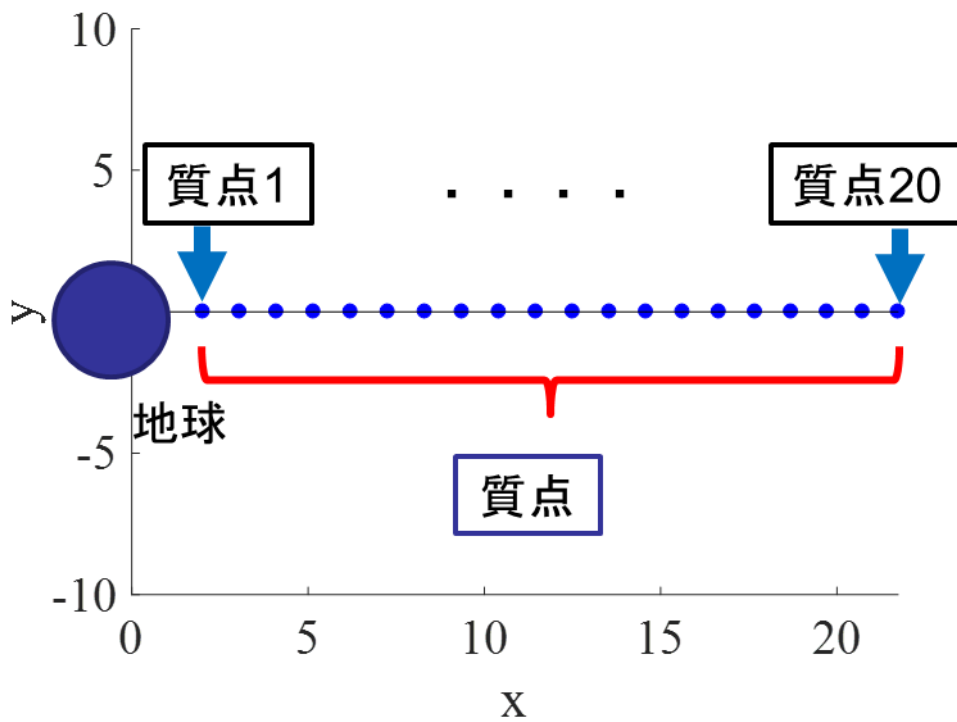


Fig. 2-2 ケーブルの初期状態

本研究では、ケーブルを 20 個の質点に分割した。その時の、初期の状態は Fig. 2-2 のようになる。ケーブルの運動方程式は、Matlab 上で常微分方程式を数値的に解くコマンド「ode45」を使用し、4 次のルンゲクッタ法で解いた。

### 3. 平衡位置での固有値解析

#### 3.1. ケーブルの平衡位置の決定

2章までの条件のもと静止した状態から数値計算を行うと、Fig. 3-1のように振動した。そこで、静止状態では宇宙エレベーターの振動がなくなるよう質点の平衡位置を求め、初期位置の再設定を行う。

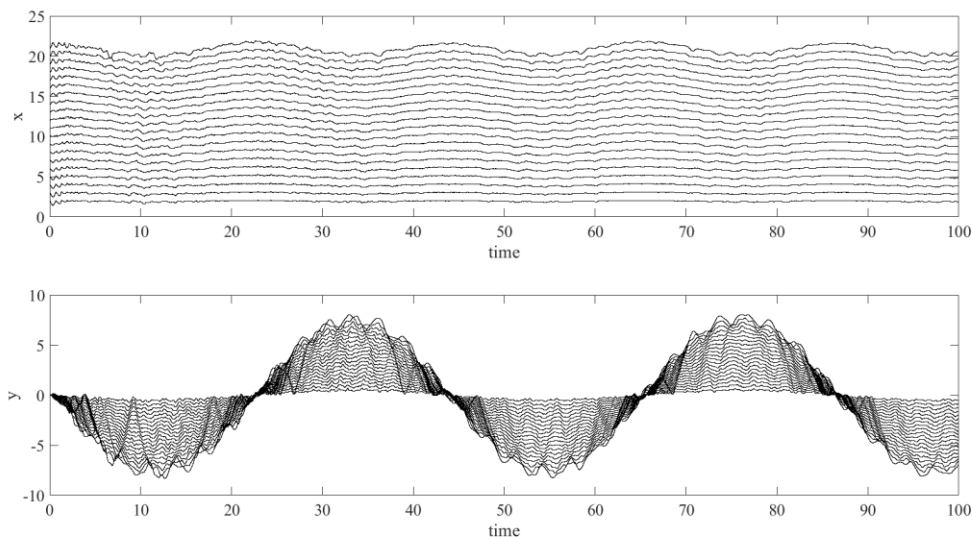


Fig. 3-1 平衡状態を求める前のケーブルの挙動

初期位置で平衡状態を求めるときx方向のみ考えればよいので、方程式は以下のようなになる

n=1~19

$$0 = -\frac{k}{m}(x_n - x_{n-1} - l_0) + \frac{k}{m}(x_{n+1} - x_n - l_0) + x_n - \frac{GM_E}{x_n^2} \quad (3.1)$$

n=20

$$0 = -\frac{k}{m}(x_{20} - x_{19} - l_0) + x_{20} - \frac{GM_E}{x_{20}^2}$$

$\mathbf{x}_0$ を初期位置、 $\boldsymbol{\delta}$ を微小距離として $\mathbf{x}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta} \quad (3.2)$$

(3.2)を用いて質点1の平衡状態の方程式を記述すると

$$0 = -\frac{k}{m}(x_1 + \delta_1 - x_0 - l_0) + \frac{k}{m}(x_2 + \delta_2 - x_1 - \delta_1 - l_0) + x_1 + \delta_1 - \frac{a}{(x_1 + \delta_1)^2} \quad (3.3)$$

となる。

ここで、テイラー展開を用いて

$$\frac{1}{(x_1 + \delta_1)^2} = \frac{1}{x_1^2 \left(1 + \frac{\delta_1}{x_1}\right)^2} = \frac{1}{x_1^2} \left(1 - \frac{2\delta_1}{x_1} + \dots\right) \cong \frac{1}{x_1^2} - \frac{2\delta_1}{x_1^3} \quad (3.4)$$

(3.3)、(3.4)より

$$0 = \left(1 - \frac{2k}{m} + \frac{2a}{x_1^3}\right)\delta_1 + \frac{k}{m}\delta_2 + \frac{k}{m}x_0 + \left(1 - \frac{2k}{m}\right)x_1 - \frac{a}{x_1^2} + \frac{k}{m}x_2 \quad (3.5)$$

となる。

ここで

$$\frac{k}{m}x_0 + \left(1 - \frac{2k}{m}\right)x_1 - \frac{a}{x_1^2} + \frac{k}{m}x_2 = \varepsilon_1 \quad (3.6)$$

とおくと

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_1^3} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

同様に、質点 2 について方程式を記述すると、

$$0 = -\frac{k}{m}(x_2 + \delta_2 - x_1 - \delta_1 - l_0) + \frac{k}{m}(x_3 + \delta_3 - x_2 - \delta_3 - l_0) + x_2 + \delta_2 - \frac{a}{(x_2 + \delta_2)^2}$$

$$0 = \frac{k}{m}\delta_1 + \left(1 - \frac{2k}{m} + \frac{2a}{x_2^3}\right)\delta_2 + \frac{k}{m}\delta_3 + \frac{k}{m}x_1 + \left(1 - \frac{2k}{m}\right)x_2 - \frac{a}{x_2^2} + \frac{k}{m}x_3 \quad (3.8)$$

ここで、

$$\frac{k}{m}x_1 + \left(1 - \frac{2k}{m}\right)x_2 - \frac{a}{x_2^2} + \frac{k}{m}x_3 = \varepsilon_2 \quad (3.9)$$

とおくと、

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_2^3} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

となる。

質点 3 から質点 19 は質点 2 と同様に

$$\varepsilon_n = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_n^3} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_n \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

となる。

質点 20 は

$$0 = -\frac{k}{m}(x_{20} + \delta_{20} - x_{19} - \delta_{19} - l_0) + x_{20} + \delta_{20} - \frac{a}{(x_{20} + \delta_{20})^2}$$

$$0 = \frac{k}{m}\delta_{19} + \left(1 - \frac{k}{m} + \frac{2a}{x_{20}^3}\right)\delta_{20} + \frac{k}{m}x_{19} + \left(1 - \frac{k}{m}\right)x_{20} - \frac{a}{x_{20}^2} + \frac{k}{m}l_0 \quad (3.12)$$

ここで

$$\frac{k}{m}x_{19} + \left(1 - \frac{k}{m}\right)x_{20} - \frac{a}{x_{20}^2} + \frac{k}{m}l_0 = \varepsilon_{20} \quad (3.13)$$

とおくと、

$$\varepsilon_{20} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_{20}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{19} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

となる。

以上をまとめると

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{19} \\ \varepsilon_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_1^3} & -\frac{k}{m} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_2^3} & \frac{k}{m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_{19}^3} & -\frac{k}{m} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - 1 - \frac{2a}{x_{20}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{19} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

(3.15)を書き換えると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta} &= \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\tag{3.16}$$

となり、 $\boldsymbol{\delta}$ が求まる。

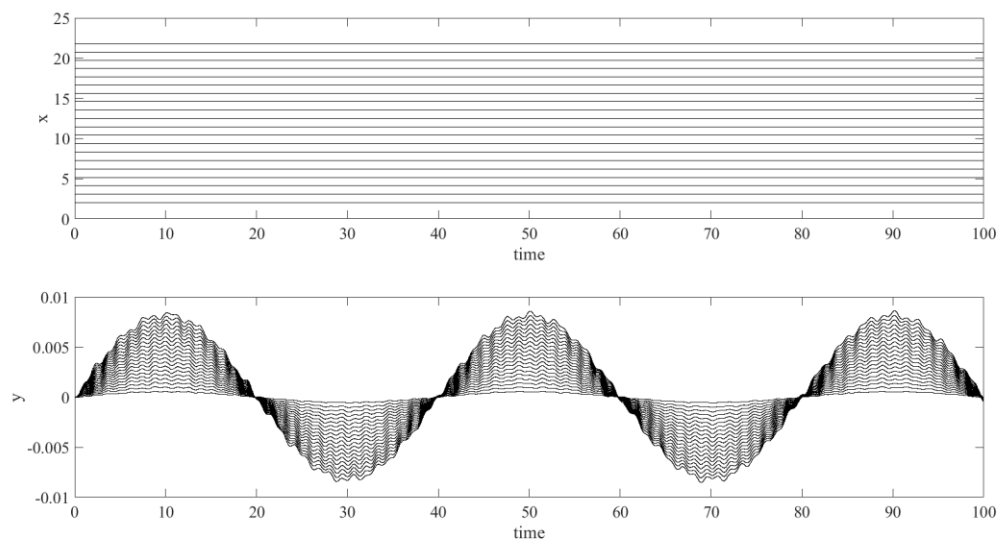
最後に、

$$\mathbf{x}_0' = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}\tag{3.17}$$

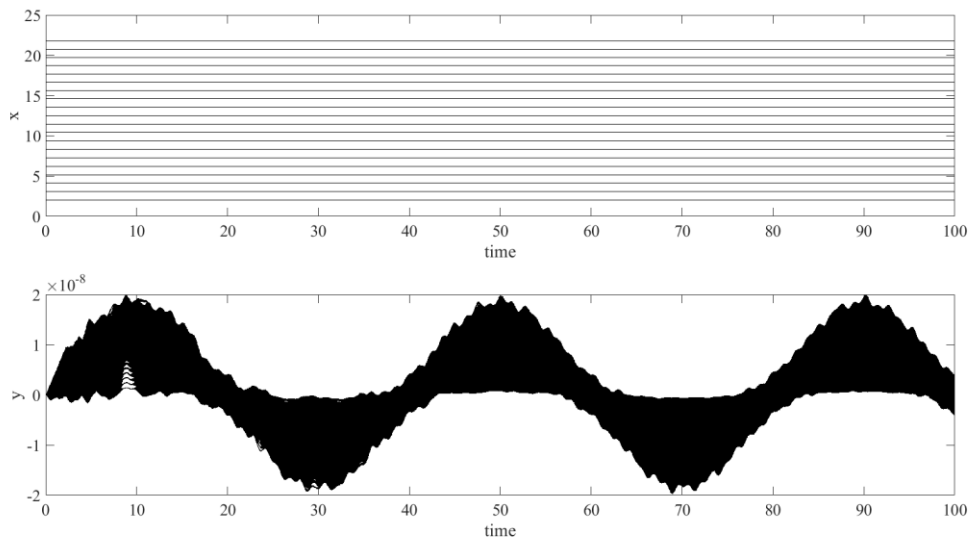
として新たに初期位置を $\mathbf{x}_0'$ と定義する。

以上の計算を繰り返すことで初期位置の平衡位置を求める。

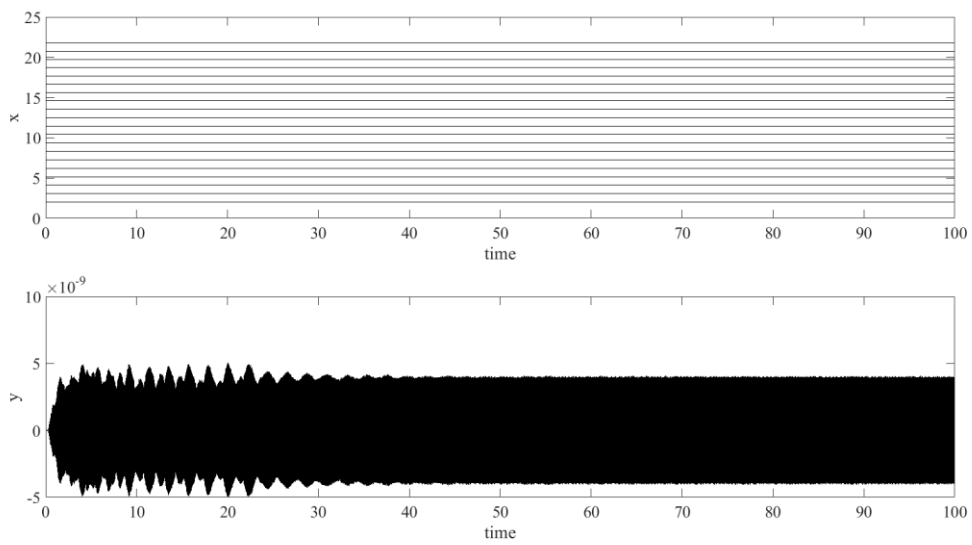
計算を、1回、2回、3回した時のケーブルの挙動を以下に示す。



**Fig. 3-2** 平衡補正を1回した時のケーブルの挙動



**Fig. 3-3** 平衡補正を2回した時のケーブルの挙動



**Fig. 3-4** 平衡補正を3回した時のケーブルの挙動

2回することで、y方向の変化が $10^{-8}$ のオーダーになり、3回すると振幅運動がなくなったため3回した時の値を初期位置とした。

Table 3-1 平衡補正したときの初期位置の変化

質点	初期位置			
	x	x'1	x'2	x'3
0(地球表面)	1	1	1	1
1	2	2.0208	2.0207	2.0207
2	3	3.0607	3.0605	3.0605
3	4	4.1083	4.1080	4.1080
4	5	5.1595	5.1591	5.1591
5	6	6.2122	6.2118	6.2118
6	7	7.2653	7.2649	7.2649
7	8	8.3179	8.3174	8.3174
8	9	9.3693	9.3688	9.3688
9	10	10.4190	10.4185	10.4185
10	11	11.4665	11.4660	11.4660
11	12	12.5115	12.5109	12.5109
12	13	13.5534	13.5529	13.5529
13	14	14.5920	14.5914	14.5914
14	15	15.6269	15.6263	15.6263
15	16	16.6578	16.6572	16.6572
16	17	17.6843	17.6837	17.6837
17	18	18.7061	18.7055	18.7055
18	19	19.7229	19.7223	19.7223
19	20	20.7344	20.7338	20.7338
20	21	21.7403	21.7397	21.7397



### 3.2. 微小振動の固有値解析

微小振動をするときの変位と速度を

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \delta x e^{i\Omega t} \\ y_0 + \delta y e^{i\Omega t} \\ z_0 + \delta z e^{i\Omega t} \\ u_0 + \delta u e^{i\Omega t} \\ v_0 + \delta v e^{i\Omega t} \\ w_0 + \delta w e^{i\Omega t} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

とおくと、

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} e^{i\Omega t} = K \begin{bmatrix} x_0 + \delta x e^{i\Omega t} \\ y_0 + \delta y e^{i\Omega t} \\ z_0 + \delta z e^{i\Omega t} \\ u_0 + \delta u e^{i\Omega t} \\ v_0 + \delta v e^{i\Omega t} \\ w_0 + \delta w e^{i\Omega t} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

と記述される。

$K$ は、単位行列  $I$  と空行列  $\mathbf{0}$  を用いて

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \\ -A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & -2I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

である。

初期位置は、平衡位置であるため

$$K \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

(3.20)より、

$$(i\Omega) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} e^{i\Omega t} = K \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (3.22)$$

$$(K - (i\Omega)I) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = 0$$

ここで

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3.23)$$

より、

$$\det(K - (i\Omega)I) = 0 \quad (3.24)$$

(3.23)を解くことで固有振動数 $\Omega$ が求まる。

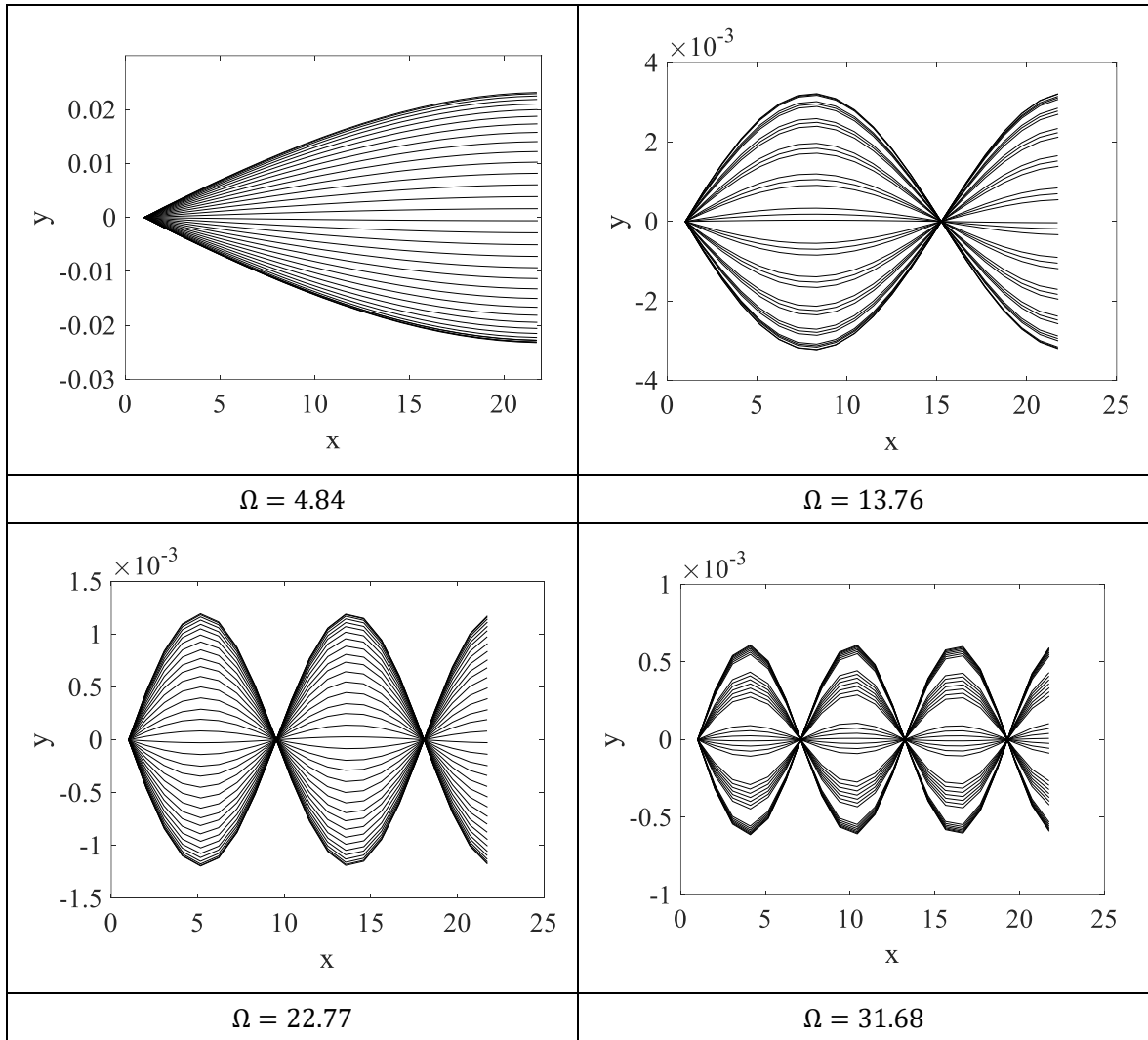


Fig. 3-5 固有モード図とそのときの振動数

Fig. 3-5 は固有モードとその時の固有振動数である。Lang<sup>[7]</sup>や Williams<sup>[8]</sup>により、エレベーター完成後のケーブルの挙動としては、コリオリ力と重力傾斜およびケーブルの張力による傾きを戻そうとする力により、ケーブルは東西方向の振動が卓越することが分かっている。東西方向の振動とは振動が赤道面内に含まれる機構のことである。本研究のモデルにおいても、固有値解析により東西方向の振動を確認できたため、このモデルを用いて数値計算を行う。

## 4. 衝撃を与えた時の宇宙エレベーターの挙動

### 4.1. 質点 20 に衝撃を与える

Lang<sup>[7]</sup>や Williams<sup>[8]</sup>の研究と固有値解析の結果からケーブルの先端の振幅が最も大きいことが分かった。そこで、質点 20 に初速度を与えてシミュレーションを行った。

#### 4.1.1. 初速度 1 を与えた場合

質点 20 に初速度 1 を x、y、z 方向それぞれに与えてそのときの変化の比較を行った。

x 方向に初速度 1 を与えた時の変化は Fig. 4-1 に示す。Fig. 4-1 よりケーブルは x、z 方向の変化はなく y 方向へ変化した。x 方向に初速度を与えることで、コリオリ力により y 方向へ変化したと考えられる。そのため、Fig. 4-1 からは確認できないが x 方向も小さな変化をしている。y 方向の変化は、初めに質点 20 が振幅 0.02 程度で細かく振動しその後細かい振動が収まり、振動が安定していることが分かる。

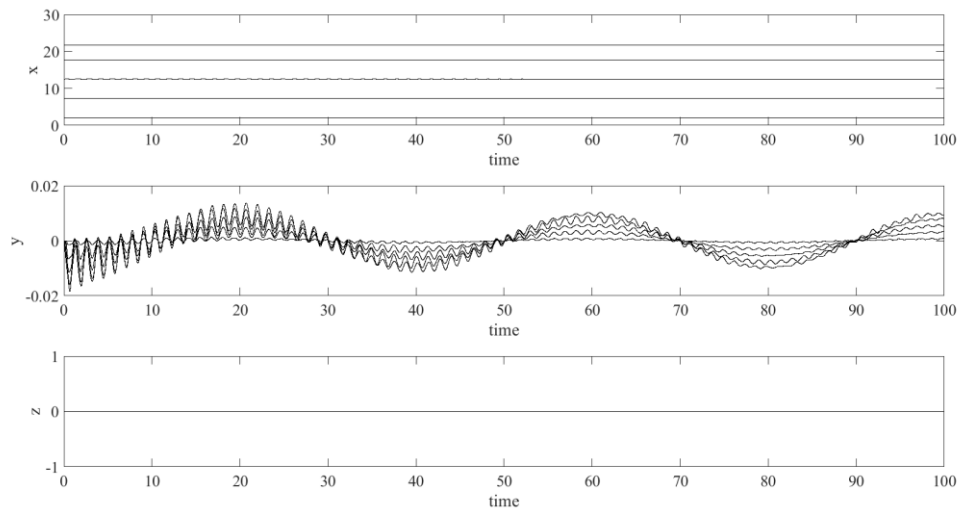
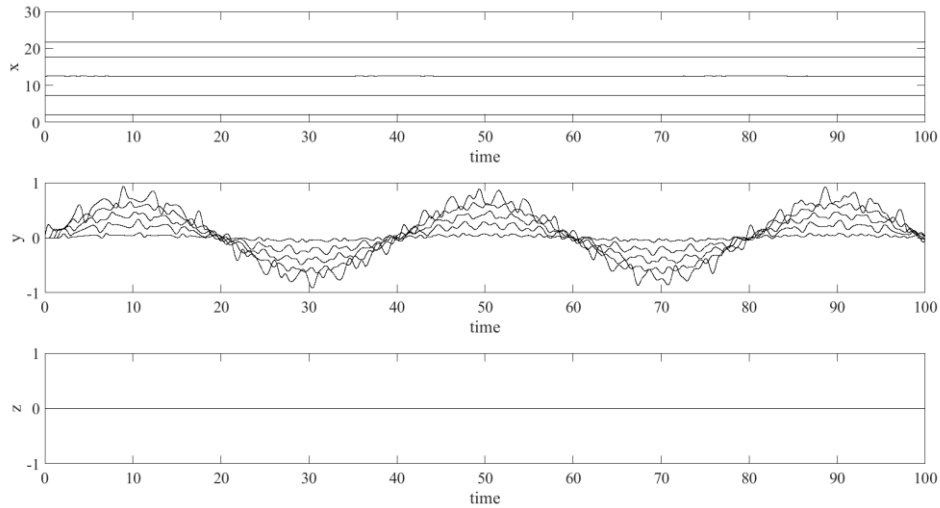


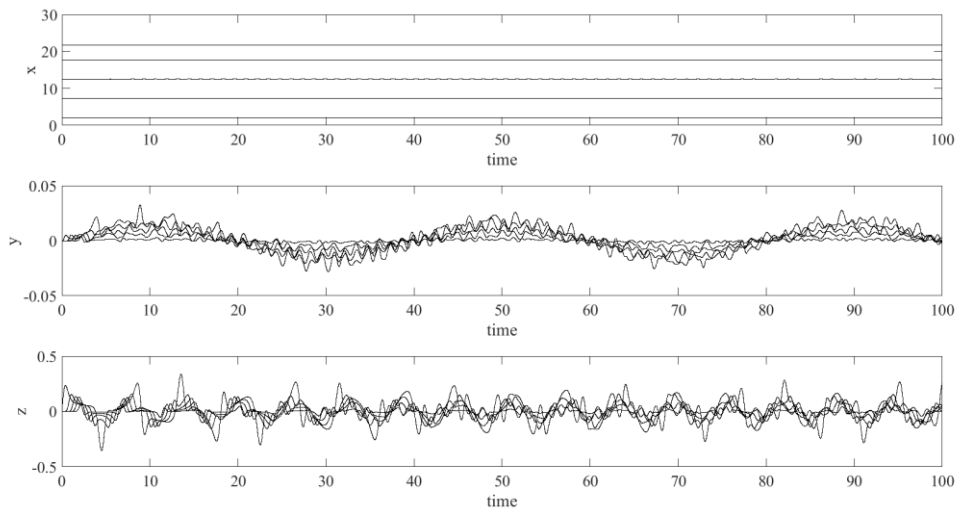
Fig. 4-1 質点 20 の x 方向に初速度 1 を与えたときのケーブルの挙動 (質点 1,6,11,16,20)

次に y 方向に初速度 1 を与えたときの変化を Fig. 4-2 に示す。Fig. 4-2 も Fig. 4-1 と同様に x 方向の変化はほとんどなく z 方向は全く変化がないことが分かる。y 方向の変化は、有限振幅運動をして安定しているが、振幅が 1 であり、x 方向に初速度を与えた時に比べ大きい。



**Fig. 4-2** 質点 20 の y 方向に初速度 1 を与えたときのケーブルの挙動 (質点 1,6,11,16,20)

最後に、z 方向に初速度 1 を与えたときの変化を Fig. 4-3 に示す。Fig. 4-3 から z 方向へ初速度を与えると 3 方向へ変化が起きた。z 方向に衝撃が与えられた時も周期的な運動をして安定しているといえる。



**Fig. 4-3** 質点 20 の z 方向に初速度 1 を与えたときのケーブルの挙動 (質点 1,6,11,16,20)

以上より、3 方向それぞれに同じ初速度を与えた場合、y 方向に与えたときが最も変化が大きいことが分かった。

#### 4.1.2. 初速度を大きくした場合

4.1.1 から、 $y$  方向に初速度与えた時に変化が大きいと仮定し、 $y$  方向に与える初速度を大きくしていった。その結果、初速度 10 までは振幅が大きくなりながら、有限振幅運動した。そのときの変化を Fig. 4-4 に示す。初速度 1 のときと比べて  $x$  方向にも変化していることが分かる。初速度 11 のときに、質点 1 が地球へ落下し、ケーブルが破壊された。そのときの変化を Fig. 4-5 に示す。ケーブルの変化が大きくなることで地球の重力とケーブルの張力のバランスが崩れ、重力の影響が大きくなり落下したと考えられる。

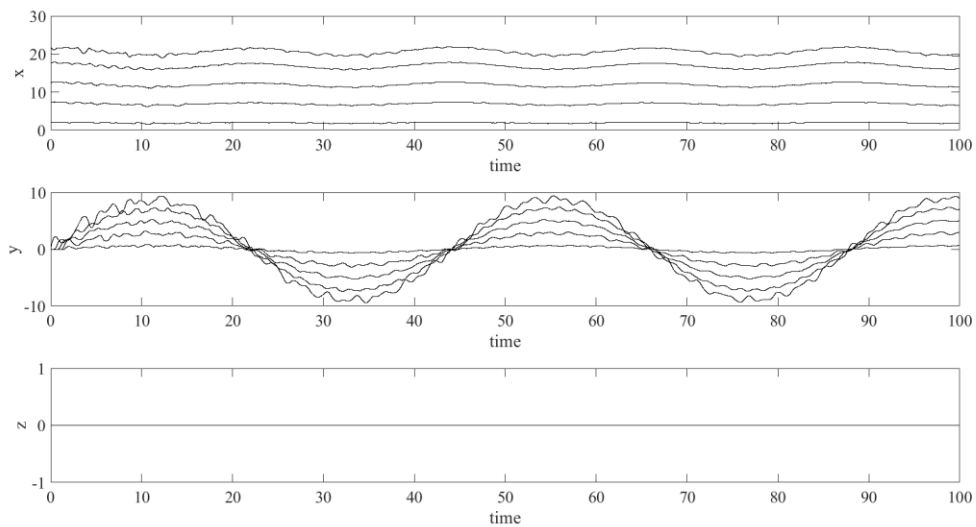


Fig. 4-4 質点 20 の  $x$  方向に初速度 10 を与えたときのケーブルの挙動 (質点 1,6,11,16,20)

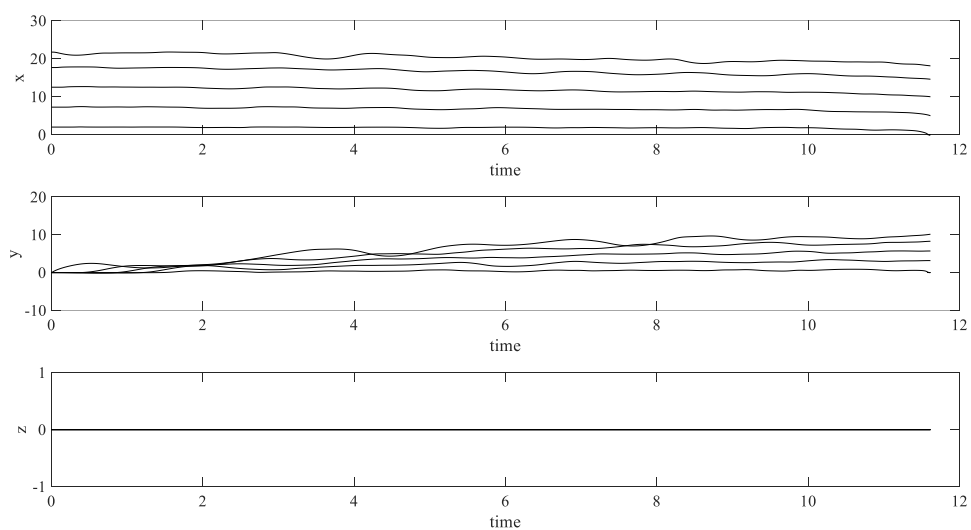


Fig. 4-5 質点 20 の  $x$  方向に初速度 11 を与えたときのケーブルの挙動 (質点 1,6,11,16,20)

### 4.1.3. 限界張力による破壊

4.1.2 より大きな衝撃が与えられると地球に落下し、ケーブルが破壊されることが分かった。ケーブルの破壊の要因としてほかに限界張力による破壊が考えられる。カーボンナノチューブの引張強度は理論的な値として 130GPa である。本研究では極限状態のケーブルを考えているため引張応力が 130GPa を超えたときを破壊とする。Fig. 4-6 に  $v=10$  で  $\text{time}=100$  と  $v=11$  で破壊直後 ( $\text{time}=11.51$ ) までと衝撃なしで初期位置 ( $v=0$ ,  $\text{time}=1$ ) でのそれぞれのばねでの最大引張応力を示した。 $v=10$  まではカーボンナノチューブの引張強度の 130GPa を超えなかったが  $v=11$  の時、特にばね番号 2 で大きく超えた。

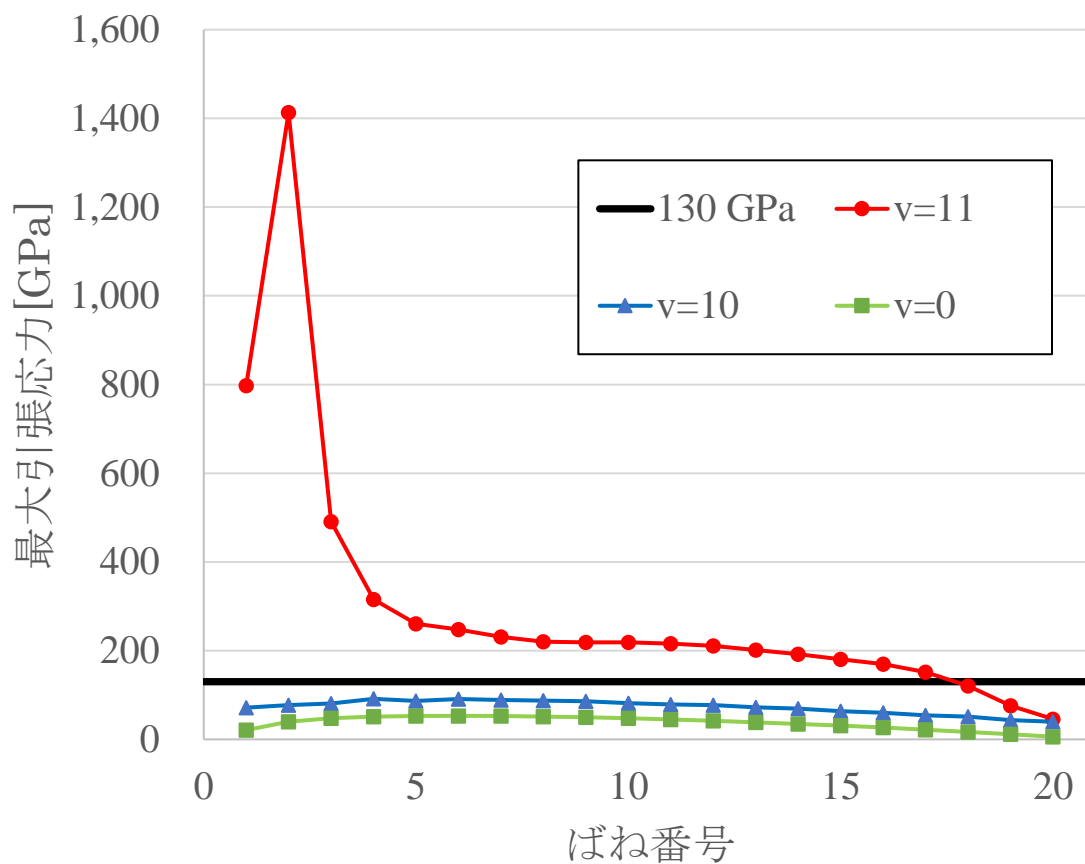


Fig. 4-6  $v=0, v=10, v=11$  での最大引張応力の分布

まず、限界張力を超えなかった  $v=10$  と  $v=0$  のときをみると Fig. 4-7 のようになった。 $v=10$  では全体的に最大引張応力が上昇し、ともにばね番号 5 付近で最大である。ばね番号 5 付近に静止軌道があるため、静止軌道周辺にかかる応力が大きいことが分かる。

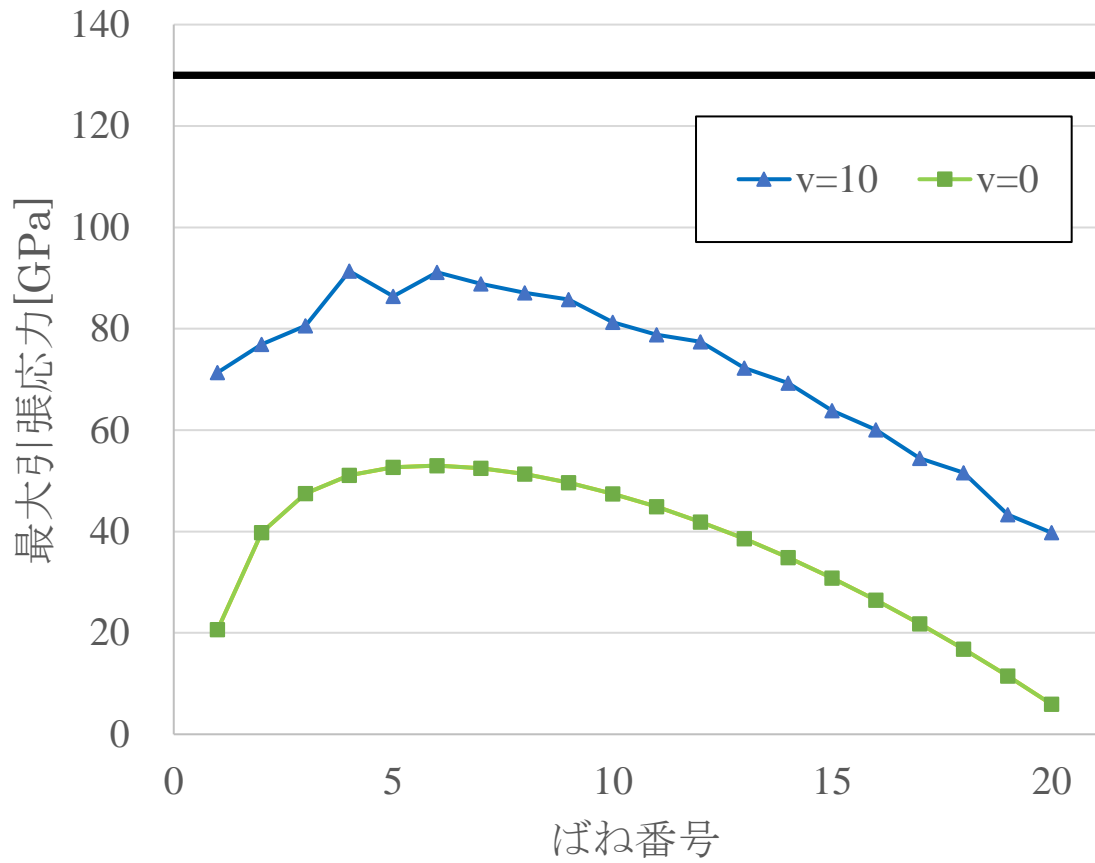


Fig. 4-7  $v=0, v=10$  での最大引張応力の分布



次に  $v=11$  の時のケーブルの破壊直前 ( $\text{time}=11$ )と直後 ( $\text{time}=11.51$ ) までの応力分布を Fig. 4-8 に示す。Fig. 4-8 より質点の落下直前までは限界張力を超えていないことが分かる。そのため、 $v=11$  のときのケーブルの破壊は、重力の影響による質点の落下であると考えられ、その際に限界応力を超える引張応力になったと考えられる。

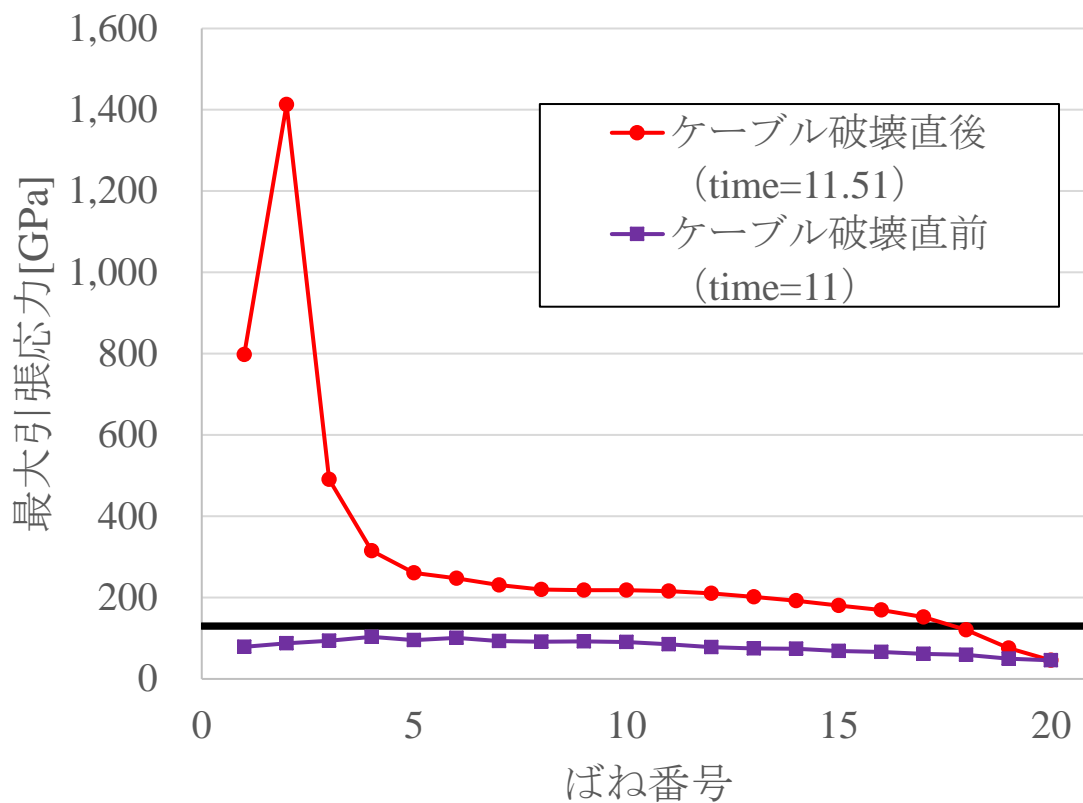


Fig. 4-8  $v=11$  のときの破壊直前までと直後の最大引張応力の分布

#### 4.2. 全質点に衝撃を与えた場合

質点 20 のときと同じように、質点が落下もしくは限界張力を超えるまで全質点の y 方向に初速度を与えた。ケーブルの破壊が起きるときの各質点の初速度と破壊状況を Table 4-1 に示す。限界張力による破壊は破壊時間 (t) と最初に限界張力を超えたばね番号を示した。

Table 4-1 全質点の破壊初速度と破壊状況

質点	破壊初速度	破壊状況	ばね	質点	破壊初速度	破壊状況	ばね
1	-15	限界張力 (t=0.04)	1	11	-18	限界張力 (t=0.03)	12
	14	限界張力 (t=0.04)	1		17	限界張力 (t=0.03)	11
2	-17	限界張力 (t=0.03)	3	12	-16	落下 (t=3.4)	
	15	限界張力 (t=0.06)	1		18	限界張力 (t=0.03)	12
3	-17	限界張力 (t=0.03)	4	13	-18	限界張力 (t=0.03)	14
	16	限界張力 (t=0.08)	1			落下 (t=1.5)	
4	-17	限界張力 (t=0.03)	5	14	16	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	4		-16	落下	
5	-17	限界張力 (t=0.03)	6	15	17	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	5		-15	落下	
6	-17	限界張力 (t=0.03)	7	16	16	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	6		-15	落下	
7	-17	限界張力 (t=0.03)	8	17	14	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	7		-14	落下	
8	-17	限界張力 (t=0.03)	9	18	14	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	8		-13	落下	
9	-17	限界張力 (t=0.03)	10	19	13	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	9		-13	落下	
10	-18	限界張力 (t=0.03)	11	20	13	落下	
	17	限界張力 (t=0.03)	10		-14	落下	
					11	落下	

Table 4-1 から、質点 1 から質点 11 までは限界張力による破壊が起き、質点 14 から質点 20 までは質点の落下による破壊が起き、質点 12 と質点 13 は限界張力と質点の落下による破壊が混在していることが分かった。限界張力による破壊は t=0.04 付近で起きているため、質点 11 付近よりも高度の低い場所は衝撃が与えられると直後にケーブルが切断され破壊される。質点 14 付近よりも高高度では衝撃直後に限界張力を超えて破壊されないが、ケーブルの振幅の増大により y 方向、x 方向の変化がともに大きくなることで地球に近い質点の重力の影響が大きくなり質点の落下が起きる。

破壊初速度の大きさを見ると、限界張力による破壊は質点 1 の速さ 14 が最も小さく質点 2

から質点 13 まで速さ 17 付近である。落下による破壊は質点 12 から質点 20 まで徐々に速さが小さくなっている。このことからケーブルの地球付近と先端付近がほかの場所に比べて衝撃に弱いことが分かった。

#### 4.3. 宇宙デブリや隕石の衝突

宇宙エレベーターは地球の自転角速度で回転しているため宇宙デブリや隕石の衝突を考える際、相対速度を考慮する必要がある。質点 20 個のときの実際の質点の質量は

$$m_{nreal} = \rho A_n l_0 = 1656 \text{ kg} \quad (4.1)$$

であり、質点と同じ質量のものが衝突したと仮定すると

$$\text{衝突物の速度} = \text{ケーブルの角速度} + \text{破壊初速度} \quad (4.2)$$

となる。また、距離は地球半径で時間は自転角速度で規格化しているため、速度 1 の実際の速度  $v_{1real}$  は

$$v_{1real} = R_E \omega = 6.37 \times 10^6 \times 7.27 \times 10^{-5} = 463.10 \text{ m/s} \quad (4.3)$$

である。このときの、衝突物の速度を Table 4-2 にまとめた。

Table 4-2 ケーブルの角速度を考慮した時の衝突物の速度

質点	角速度	衝突物の速度	実際の速度 (m/s)	質点	角速度	衝突物の速度	実際の速度 (m/s)
1	2.02	-12.98	-6010.70	11	12.51	-5.49	-2542.00
		16.02	7419.17			29.51	13666.47
2	3.06	-13.94	-6455.37	12	13.55	-2.45	-1133.25
		18.06	8363.80			31.55	14612.12
3	4.11	-12.89	-5970.27	13	14.59	-3.41	-1578.52
		20.11	9311.99			30.59	14166.85
4	5.16	-11.84	-5483.51	14	15.63	-0.37	-173.06
		22.16	10261.86			32.63	15109.21
5	6.21	-10.79	-4996.00	15	16.66	1.66	767.45
		23.21	10749.36			32.66	15123.52
6	7.26	-9.74	-4508.32	16	17.68	2.68	1242.82
		24.26	11237.05			31.68	14672.69
7	8.32	-8.68	-4020.90	17	18.71	4.71	2179.11
		25.32	11724.46			32.71	15145.88
8	9.37	-7.63	-3534.00	18	19.72	6.72	3113.09
		26.37	12211.36			32.72	15153.66
9	10.42	-6.58	-3047.89	19	20.73	7.73	3581.52
		27.42	12697.48			33.73	15622.09
10	11.47	-6.53	-3025.89	20	21.74	7.74	3584.25
		28.47	13182.58			32.74	15161.72

Fig. 4-9 は地上から高度 40000km までの軌道上の物体（運用中の衛星、ロケットの残骸、それらの破片）の分布状況を定性的に示す。高度 36000km 付近の静止衛星群、高度 20000km 付近の測位衛星群、高度 2000km 以下の低軌道衛星群が目立つが、定量的には高度 2000km 以下に圧倒的に多数の物体が集中している。

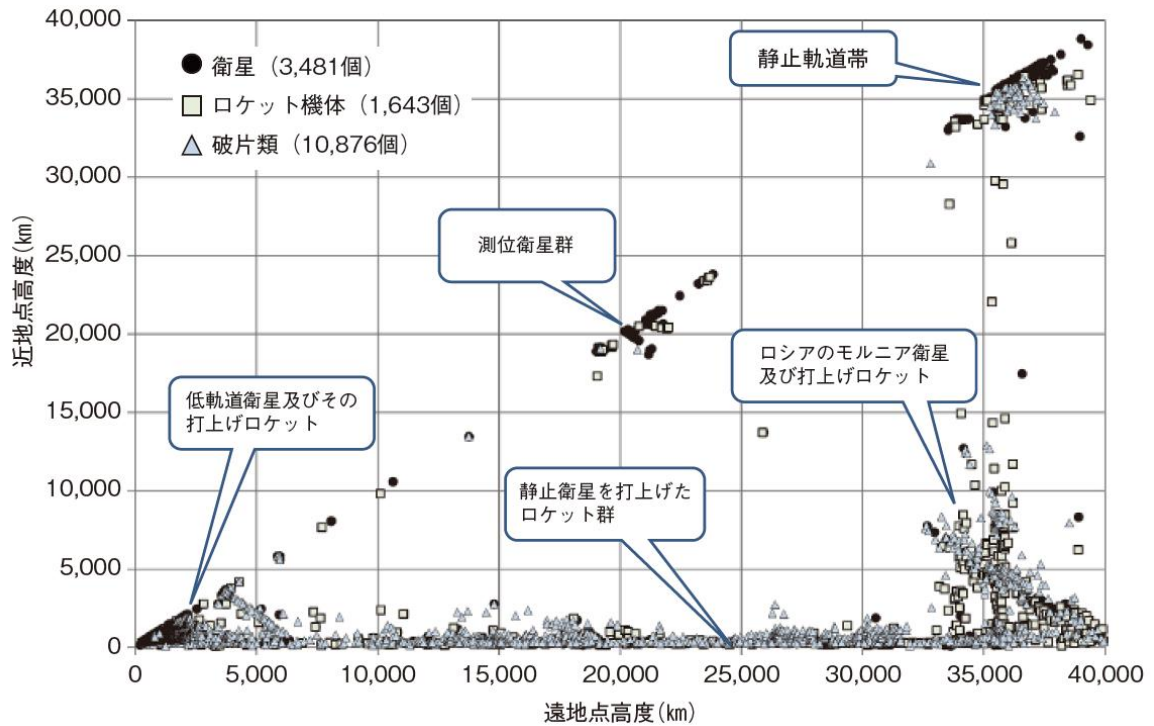


Fig. 4-9 軌道上物体の分布状況（遠地点高度 40000km 未満）<sup>[9]</sup>

破壊が起きるときの衝撃物の速度の絶対値と人工衛星の周回速度を Fig. 4-10 に示す。Fig. 4-10 から静止軌道以下では、質点と同じ質量で人工衛星の周回速度の宇宙デブリがケーブルに衝突しても破壊は起きないことが分かる。しかし、静止軌道より高高度では、宇宙デブリはほとんどないが、10 万 km 付近では破壊が起きる速度が人工衛星の周回速度を超えており宇宙デブリとの衝突に弱い部分であるといえる。以上より平常状態での宇宙エレベーターの運用はある程度安全であるといえるが、宇宙デブリの大きさや速度は一概には扱えないため破壊の危険がないとは言えない。そのため衝撃を回避する必要があることはもちろん、衝撃が加わり破壊された時の想定も重要になる。

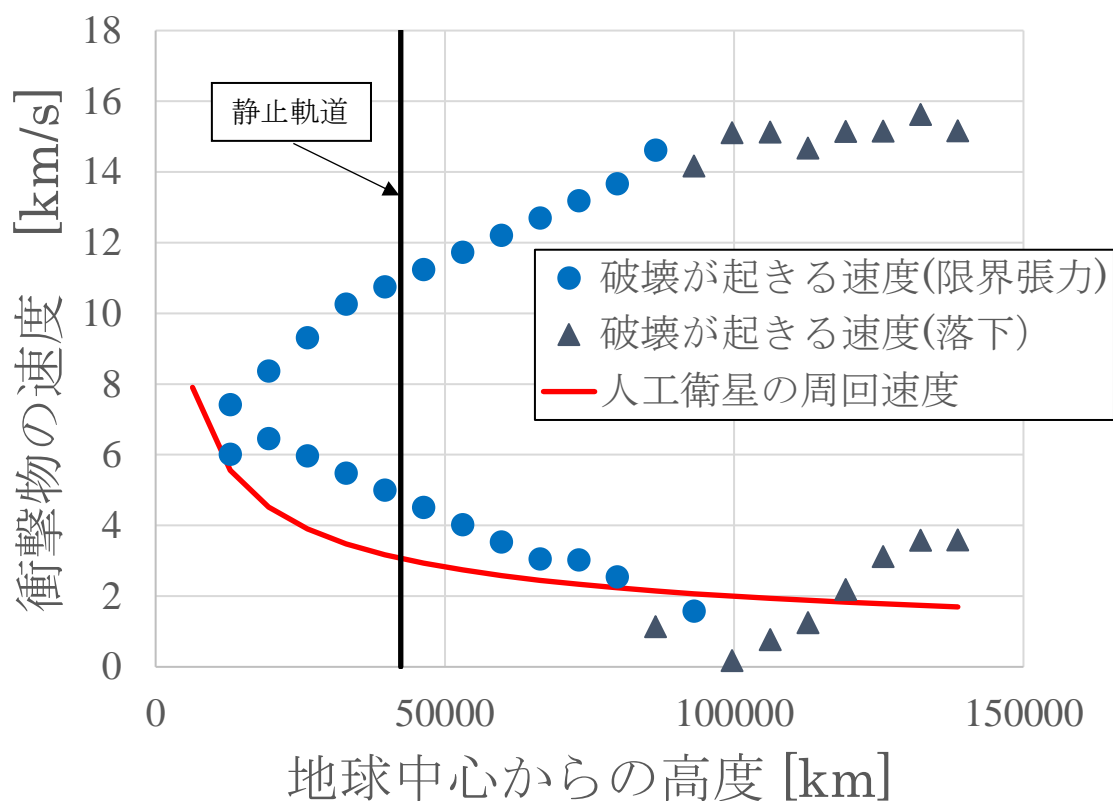


Fig. 4-10 破壊が起きるときの衝撃物の速度の絶対値と人工衛星の周回速度

## 5. 結論

本研究では宇宙エレベーターに大きな衝撃が与えられた時のケーブルのダイナミクスの解析を行った。

まず宇宙エレベーターのケーブルを **Lumped mass** 法によりばね—多質点系でモデル化した。ケーブルの平衡状態を求め、そのときの微小振動の固有値解析を行った。固有値解析により、ケーブルの振動は東西方向のものが卓越することが分かった。

次にモデル化したケーブルの質点に初速度を与え、衝撃が与えられた時のケーブルの挙動の解析を行った。地球から最も遠い質点 20 の 3 方向に衝撃を与えると多少衝撃があってもケーブルは振動しながらも安定しているが、大きな衝撃を与えると破壊されることが分かった。その際、 $y$  方向（東西方向）に初速度を与えたときに大きく振動し、他の 2 方向に比べて小さな初速度で質点が地球に落下し破壊された。またその時の引張応力分布を求めると、破壊される直前までは引張強度を超えないことが分かった。質点 20 と同じように他の質点でも同様の検証を行った。質点 13 以下では衝撃直後に引張強度を超え、質点 13 以上では質点の落下による破壊が起きることが分かった。ケーブルは地球の自転とともに回転しているため、宇宙デブリ等との衝突を考える際、ケーブルの速度を考慮する必要がある。ケーブルの速度を考慮し、ケーブルの破壊が起きるときの衝突物の速度を求めた。破壊が起きるときの衝突物の速度と人工衛星の周回速度や軌道上物体の分布状況から平常時の宇宙エレベーターの運用に大きな問題はないことが分かったが、破壊が起きるときの速度と周回速度の差が小さい場所や破壊が起きるときの衝突物の速度が 0 に近い場所もあり一概に安全とは言えない。そのため衝撃を回避する方法を取り入れる必要があることはもちろん、衝撃が加わり破壊された時の想定も重要になる。

## 6. 謝辞

常日頃から本研究に対し、多大なるご指導並びに素晴らしい研究環境を提供していただいた羽田教授に深厚なる謝意を表します。

常日頃から本研究に対し、多大なる御助言、また手厚くご指導くださいました松清准教授に深厚なる謝意を表します。

本研究並びに学業全般に際し、数々の助言をくださいました中野谷さんに深く感謝いたします。

学生生活全般において、共に2年間学んだ安東君、谷川君、下川君、菅さん、宇藤君、堀江さん、岸君に深く感謝いたします。

ケーブルの減衰比について御助言してくださいました吉田教授に深く感謝いたします。

最後に、これまでずっと支えてくれた家族、親族一同に心より感謝を申し上げます。

## 7. 参考文献

- [1]植月 良祐：“スペースエレベータの振動と安定性”（2017）
- [2] 日経テクノロジー感想  
<http://ginga-uchuu.cocolog-nifty.com/blog/2014/11/25-f5ce.html>
- [3] Bradley.C.Edwards.: The Space Elevator,pp.1.1-1.8 11.1-12.4.
- [5]Bradley C.Edwards:"Design and Deployment of a Space Elevator"(2007)
- [6]山極 芳樹：“宇宙エレベーター：そのダイナミックスの研究の現状と課題”（2014）
- [4]小野測器  
[https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c\\_support/newreport/dampingfactor/dampingfactor\\_3.htm](https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/c_support/newreport/dampingfactor/dampingfactor_3.htm)
- [5]土井 日向：“宇宙エレベーターにおけるケーブル変位抑制のためのクライマー運用方法の検討”（2013）
- [6]田尾 公希：“宇宙エレベーター建設における静止軌道からのケーブル同時展開の制御と挙動について”（2016）
- [7]David D.Lang:"Space Elevator Dynamic Response to In-Transit Climbers"(2006)
- [8]Paul Williams:"Dynamic multibody modeling for tethered space elevators"(2009)
- [9]加藤 明：“スペースデブリ問題の現状と世界の取り組みについて”（2014）
- [10] 一般社団法人 宇宙エレベーター協会  
<http://www.jsea.jp/>
- [11]橋本 正章、荒井 賢三：“力学の基礎”（裳華房、1996）
- [12] 石川憲二：“宇宙エレベーター 宇宙旅行を可能にする新技術”（オーム社,2010）