

磁気流体プラズマの新しい数値シミュレーション法 について

谷川, 弘晃
九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻

<https://hdl.handle.net/2324/2558964>

出版情報：九州大学, 2018, 修士, 修士
バージョン：
権利関係：



平成 30 年度
九州大学総合理工学府
大気海洋環境システム学専攻

磁気流体プラズマの新しい
数値シミュレーション法について

氏名 谷川 弘晃

指導教員 羽田 亨 教授

松清 修一 准教授

目次

第 1 章 序論	2
1.1 はじめに	2
1.2 研究目的	2
第 2 章 研究方法	3
2.1 MHD 方程式系	3
2.2 計算スキーム	5
2.1 TVD 化	14
第 3 章 結果	23
2.1 Riemann 問題	23
2.2 分散関係	32
第 4 章 まとめ・今後の課題	43
参考文献	44
謝辞	45

第1章 序論

1.1 はじめに

宇宙の無衝突プラズマの計算機シミュレーションには、プラズマ中の多数のイオンと電子の運動方程式を解く粒子法、プラズマを流体とみなして計算する流体法、イオンを運動論的に、電子を流体として扱うハイブリッド法、プラズマ分布関数の時間発展を計算するヴラソフ法などがある。それぞれに長所欠点があるため、対象とする問題と利用できる計算機資源の大きさに応じて最も適切な方法が選ばれている。

イオンと電子の運動論的な振る舞い、例えば磁力線周りのジャイロ運動や波動との共鳴などは扱えないが、大きな空間スケールでプラズマの長時間発展が計算できることから、流体方程式にもとづくシミュレーションは多く行われている。流体法にも非常に多くの種類が存在し、限られた計算機資源のもとで、元の発展方程式系の時間発展を忠実かつ高精度に効率よく計算できるスキームの開発を目指して、現在も研究が進められている。

1.2 研究目的

本研究では中でも、簡易なアルゴリズムでありながらも 2 次精度で計算できるスキーム **MacCormack** 法に注目した。これは保存形の方程式を解くスキームで、この方法では、計算結果が不連続面付近で数値振動が起きてしまう。しかし、これに流束制限関数(TVD=Total Variation Diminishing)を組み込むことで数値振動は抑えられる。この TVD 化は決して複雑な手順は踏まない。つまり TVD 化された **MacCormack** 法(TVD-**MacCormack** 法)はシンプルかつ、比較的精度よく解けるスキームであるので、方程式の数が多く、計算時間を必要とする MHD 方程式の数値計算には適したスキームであると著者は考えた。しかし、TVD-**MacCormack** 法で中性流体のシミュレーションを行ったという文献は多くみられるが、この方法で磁気流体系(MHD=Magnetohydrodynamics)の現象かつ、Brio and Wu の Riemann 問題(文献[1])を解いたという文献は著者の知る限りでは見られない。

そこで、本研究は TVD が込みこまれた **MacCormack** 法で理想 MHD がどの程度の精度で解けるのか検証をする事をモチベーションに行う。特に、比較的世の中で良く使用されている Roe 法との比較を行う。結果としては、TVD-**MacCormack** 法は 1 次 Roe 法よりも数値粘性が抑えられ、波形がより正確に再現できることが分かった。

第2章 研究方法

TVD-MacCormack 法、1次 Roe 法、2次 Roe 法で Brio and Wu の Riemann 問題(文献[1])を解いた結果の比較を行った。TVD-MacCormack 法と、1次 Roe 法の2つを自作でプログラミングを行い、2次 Roe 法の結果は Brio and Wu によって得られた結果(文献[1])を用いた。TVD-MacCormack 法のプログラムの作成は(文献[2])を参考に、1次 Roe 法のプログラムの作成は(文献[1])を参考に行った。ただし、TVD-MacCormack 法のプログラム作成にあたり、(文献[2])内の Minmod 関数を本文と同じ様に設定した時に数値振動が抑えられなかったため、その部分を変更し、プログラムを作成し、計算を行った。

2種類の数値実験を行い、TVD-MacCormack 法と Roe 法の計算結果の比較を行った。数値実験の方法は Brio and Wu の Riemann 問題 (衝撃波管問題) の計算と分散関係のプロット、の2種類である。Brio and Wu の Riemann 問題では、初期条件として計算領域の右半分と左半分に異なる初期値を与え、波形の時間発展の確認を行った。分散関係のプロットでは、初期値として速度の擾乱を与え、時間発展を求め、時間方向、空間方向の2方向にフーリエ変換を行い、スペクトルの波数方向と、周波数方向の2次元カラーマッピングを行った。

2.1 MHD 方程式系

<一般的な MHD 方程式系>

これから、解くべき方程式<理想 MHD 方程式>を説明する前に、3D の一般的な MHD 方程式系を説明する。Maxwell 方程式と圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式からなる。(電荷密度×流体速度)=(電流密度)であり、これが Maxwell 方程式と電磁気力による流体加速を含む Navier-Stokes 方程式をカップリングさせている。磁場、電場の係数が1となるように、磁場、電場の大きさが規格化されている。方程式系をいかに示す。

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{j} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_s + \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_s) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$m_s n_s \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s \right\} = -\vec{\nabla} p_s + q_s n_s (\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}) - \vec{R}_s \dots\dots\dots (4)$$

+ (エネルギー方程式 or 圧力密度の関係式 など) \dots\dots\dots (*)

$$\vec{j} = -\sum_s q_s n_s \vec{u}_s$$

(*)の中には、電荷の種類 s が複数であれば、エネルギー方程式では MHD 方程式系を閉じることが出来ないため、例えば、圧力密度の関係式(*)を(*) に与えて方程式を閉じる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_s}{\rho_s \gamma_s} \right) = 0 \dots\dots\dots (*1)$$

もしも、電荷の種類 s が 1 つであれば、エネルギー方程式(*2)を(*)に与えて MHD 方程式系を閉じることが出来る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_s + \vec{\nabla} \cdot [(\varepsilon_s + p_s^*) \vec{u}_s - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_s)] = \vec{0} \dots\dots\dots (*2)$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \rho_s |\vec{u}_s|^2 + \frac{1}{\gamma_s - 1} p_s + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2$$

$$p_s^* = p_s + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2$$

s : 電荷の種類

q : 電荷

n : 数密度

m : 質量

p : 圧力

γ : 比熱比

\vec{u} : 流体速度

\vec{R} : 他種類の電荷の流体から受けとる運動量

\vec{B} : 磁場

\vec{E} : 電場, \vec{j} : 電流密度

<理想 MHD 方程式系>

一般的な MHD 方程式からいくつかの近似を行い、理想 MHD 方程式が導出される。

まず電荷の大きさが同じ 2 種類の荷電粒子 (電子、イオン) が同数 ($n_e \sim n_i$) 混合している 2 流体を想定する。ゆらぎの無い状態ではイオン密度と電子密度のゼロ次量は等しい ($n_{e0} = n_{i0}$)。なので、流体同士に起こる電場 = 0 となる。

電子の運動量保存の方程式はオームの法則の式に変形される。電子の質量がイオンの質量より十分に小さいので、 $\rho \sim \rho_i$ と定義する。Maxwell 方程式では、電場の時間的変動の大きさは磁場の時間的変動の大きさに比べてはるかに小さいので、(電場の時間的変動) = 0、という近似を行う。電場の項が完全に方程式系に組み込まれないようにして、流体と磁場のみが影響しあう方程式系にする。これを理想 MHD 方程式系と呼ぶ。

保存形は以下の形で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \{ \rho \vec{u} \vec{u} + \vec{I} p^* - \overline{B B} \} = \vec{0} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \{\overleftarrow{uB} + \overrightarrow{Bu}\} = \vec{0} \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \vec{\nabla} \cdot [(\varepsilon + p^*)\vec{u} - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u})] = \vec{0} \dots\dots\dots(8)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + \frac{1}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2$$

$$p^* = p + \frac{1}{2} |\vec{B}|^2$$

< 1D-理想 MHD 方程式系 >

1D-理想 MHD 方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P^* \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uw - B_x B_z \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ H \rho u - B_x (B_x u + B_y v + B_z w) \end{bmatrix}$$

$$P^* = P + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$$

$$H = (P^* + \varepsilon) / \rho$$

- ρ : 密度
- p : 圧力
- u : 流体速度の x 方向成分
- v : 流体速度の y 方向成分
- w : 流体速度の z 方向成分
- B_y : 磁場の y 方向成分
- B_z : 磁場の z 方向成分

2.2 計算スキーム

<MacCormack 法>

MacCormack 法は、簡易なアルゴリズムでありながらも、保存形の方程式を 2 次精度で解くことができる。波の形を 2 次精度で再現できるものの、波の尖った部分だけは数値振動が起きてしまい上手く再現できない。そこで MacCormack 法のアルゴリズムの簡易性、2 次の計算精度に加えて、数値振動を抑える TVD 化を行えば、簡易的かつ高精度で計算できるスキームが出来上がり、MHD のシミュレーションには適しているのではないかと著者は考えた。

まずは本研究で用いるスキーム<TVD-MacCormack 法>を説明する前に TVD-MacCormack 法の基盤となっている MacCormack 法の説明を行う
以下、MacCormack 法のアルゴリズムを説明していく。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\overline{u_i^{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) \dots\dots\dots (10)$$

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(u_i^n + \overline{u_i^{n+1}})}{2} \dots\dots\dots (11)$$

$$\overline{F_i^{n+1}} = F(\overline{u_i^{n+1}}) \dots\dots\dots (12)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{(u_i^n + \overline{u_i^{n+1}})}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\overline{F_i^{n+1}} - \overline{F_{i-1}^{n+1}}) \dots\dots\dots (13)$$

この時、MacCormack 法の数値流束 式(14) の様に表される。

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_{i+1}^n + \overline{F_i^{n+1}}) \dots\dots\dots (14)$$

$F = u$ の時、線形の Lax-Wendroff 法と同じになる。

この数値流束では Ideal MHD を安定的に解くことが出来ないことが数値実験によって分かった。

続いて、TVD-MacCormack 法を分かりやすく説明するために、前もって Roe 法と、非粘性の Burgers 方程式の TVD-LaxWendroff 法を説明しておく。

< Roe 法 >

～速度行列の固有値、固有ベクトル～

Roe 法は保存形の方程式を非保存形の形に変形して解いていくスキームである。非保存形に変形された時の行列 A の固有値、固有ベクトルが数値流束に組み込まれる。

以下、1次 Roe 法のアルゴリズムを説明していく。

本研究で解く方程式 1D-Ideal-MHD 方程式は、以下の保存形、非保存形で書き表すことができる。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \quad (\text{保存形}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{非保存形}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

1D-Ideal-MHD 方程式の場合、非保存形の時の速度行列 A は 式(15) の様になる。

A=

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + w^2) & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & (2-\gamma)B_y & (2-\gamma)B_z & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 & -B_x & 0 \\ \frac{-B_y}{\rho}u + \frac{B_x}{\rho}v & \frac{B_y}{\rho} & \frac{-B_x}{\rho} & 0 & u & 0 & 0 \\ \frac{-B_z}{\rho}u + \frac{B_x}{\rho}w & \frac{B_z}{\rho} & 0 & \frac{-B_x}{\rho} & 0 & u & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\alpha_1 = -u \left(H \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{B_x}{\rho} (B_x u + B_y v + B_z w) \right)$$

$$\alpha_2 = H - \frac{B_x^2}{\rho} - (\gamma-1)u^2$$

$$\alpha_3 = (1-\gamma)uv - \frac{B_x B_y}{\rho}$$

$$\alpha_4 = (1-\gamma)uw - \frac{B_x B_z}{\rho}$$

$$\alpha_5 = (2-\gamma)B_y u - B_x v$$

$$\alpha_6 = (2-\gamma)B_z u - B_x w$$

$$\alpha_7 = \gamma u$$

速度行列Aの固有ベクトルは 式(18),(19),(20) の様に表される。式(18)の c には、 C_f, C_s の 2種類がある。つまり、正負の符号も区別すれば合計 7つの固有ベクトルが存在することになる。

$$R_{u\pm c} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \pm c \\ v \mp \frac{B_x B_y c}{\rho(c^2 - b_x^2)} \\ w \mp \frac{B_x B_z c}{\rho(c^2 - b_x^2)} \\ \frac{B_y c^2}{\rho(c^2 - b_x^2)} \\ \frac{B_z c^2}{\rho(c^2 - b_x^2)} \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + h \end{bmatrix} \quad \text{---(18)} \quad R_{u\pm c_a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp B_z \text{sgn}(B_x) \\ \mp B_y \text{sgn}(B_x) \\ \frac{B_z}{\rho^{\frac{1}{2}}} \\ -\frac{B_y}{\rho^{\frac{1}{2}}} \\ g \end{bmatrix} \quad \text{---(19)} \quad R_u = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ 0 \\ 0 \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \end{bmatrix} \quad \text{---(20)}$$

C_a : アルフヴェン速度 C_f : fast 波速度 C_s : slow 波速度

$$C_a^2 = b_x^2$$

$$c^2 = C_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left((a^*)^2 \pm \sqrt{(a^*)^4 - 4a^2 b_x^2} \right)$$

$$(a^*)^2 = (\gamma p + B^2) / \rho$$

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$h = \frac{c^2}{\gamma - 1} \pm cu \mp \frac{B_x c (B_y v + B_z w)}{\rho(c^2 - b_x^2)} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} (c^2 - a^2)$$

$$g = \mp (B_z v \mp B_y w) \text{sgn}(B_x)$$

速度行列Aの固有値 λ_k は 式(21)~(27) の様に表される。

$$\lambda_1 = u + C_f \quad \text{---(21)}$$

$$\lambda_2 = u - C_f \quad \text{---(22)}$$

$$\lambda_3 = u + C_s \quad \text{---(23)}$$

$$\lambda_4 = u - C_s \quad \text{---(24)}$$

$$\lambda_5 = u + C_a \quad \text{---(25)}$$

$$\lambda_6 = u - C_a \quad \text{---(26)}$$

$$\lambda_7 = u \quad \text{---(27)}$$

7つの固有ベクトル 式(21)~(27) を並べてできた 7×7 行列をRとし、その逆行列をLとする。

$$R = [R_{u+C_f} \quad R_{u-C_f} \quad R_{u+C_s} \quad R_{u-C_s} \quad R_{u+C_a} \quad R_{u-C_a} \quad R_u] \quad \text{---(28)}$$

$$= [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7] \quad \text{---(29)}$$

$$L = R^{-1} \quad \text{---(30)}$$

～Roe 平均～

u, v, \dots, ρ の Roe 平均, $u_{i+1/2}, v_{i+1/2}, \dots, \rho_{i+1/2}$ は 式(31)~(37) の様に定義される。

$$u_{i+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_i}u_i + \sqrt{\rho_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (31)$$

$$v_{i+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_i}v_i + \sqrt{\rho_{i+1}}v_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (32)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_i}w_i + \sqrt{\rho_{i+1}}w_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (33)$$

$$B_{y_{i+1/2}} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}}B_{y_i} + \sqrt{\rho_i}B_{y_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (34)$$

$$B_{z_{i+1/2}} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}}B_{z_i} + \sqrt{\rho_i}B_{z_{i+1}}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (35)$$

$$p_{i+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_i}p_i + \sqrt{\rho_{i+1}}p_{i+1}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_{i+1}}} \dots\dots\dots (36)$$

$$\rho_{i+1/2} = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}} \dots\dots\dots (37)$$

～Roe 法の数値流束～

Roe 平均値を用いたときの行列 R, L , 固有値 λ_k を 式(38)~(40) の様に表す。

$$\tilde{R}^n = R(u_{i+\frac{1}{2}}^n, v_{i+\frac{1}{2}}^n, \dots, \rho_{i+\frac{1}{2}}^n) \dots\dots\dots (38)$$

$$\tilde{L}^n = L(u_{i+\frac{1}{2}}^n, v_{i+\frac{1}{2}}^n, \dots, \rho_{i+\frac{1}{2}}^n) \dots\dots\dots (39)$$

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n, v_{i+\frac{1}{2}}^n, \dots, \rho_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (k = 1, 2, \dots, 7) \dots\dots\dots (40)$$

Roe 法の数値流束は、式(18)~(40) を用いて 式(41) の様に表される。

$$\overrightarrow{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (\overrightarrow{F}_i^n + \overrightarrow{F}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \tilde{R}^n \overline{|B|^n} \tilde{L}^n (\overrightarrow{u}_{i+1}^n - \overrightarrow{u}_i^n) \dots\dots\dots (41)$$

$\overline{|B|^n}$ 式(42) の様になり、 7×7 の対角行列となる。

$$\overline{|B|^n} = \begin{bmatrix} |\tilde{\lambda}_1^n| & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2^n| & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & |\tilde{\lambda}_7^n| \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

ここからは、Roe法の数値流束の詳細を説明していく。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

行列A(式(17))の固有値(式(21)~(27))、固有ベクトルの行列(式(29))を用いてAの対角化を行う。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + RBL \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$L \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B(L \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}) = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

B(式(45))は7×7の対角行列である。

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_7 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここで、式(44)の右辺のLを区間Δx内で要素が定数の行列に近似するとして、式(46)の様にすると、式(47)が成り立つ。

$$\tilde{L}(\vec{u}_R - \vec{u}_L) = \vec{w}_R - \vec{w}_L \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$L \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} + \frac{\tilde{B}(\vec{w}_R - \vec{w}_L)}{\Delta x} \sim 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

この時、式(30)より \vec{u}_R, \vec{u}_L は、式(48),(49)の様に表せる。

$$\vec{u}_L = \vec{u}_i = \sum_{i=1}^7 \vec{w}_{L_i} \tilde{R}_i = \sum_{i=1}^7 \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$\vec{u}_R = \vec{u}_{i+1} = \sum_{i=1}^7 \vec{w}_{R_i} \tilde{R}_i = \sum_{i=1}^7 \tilde{b}_i \tilde{R}_i \quad \dots\dots\dots (49)$$

1からI番目までの波が左に、Iから7番目の波が右に伝播する時、

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \sum_{i=1}^I \tilde{b}_i \tilde{R}_i + \sum_{i=I+1}^7 \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \quad \dots\dots\dots (50)$$

と書ける。式(50)は、式(51),(52)のように書き直せる。

$$= \vec{u}_L + \sum_{i=1}^I (\tilde{b}_i - \tilde{\alpha}_i) \tilde{R}_i = \vec{u}_L + \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i < 0}^7 \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$= \vec{u}_R - \sum_{i=I+1}^7 (\tilde{b}_i - \tilde{\alpha}_i) \tilde{R}_i = \vec{u}_R - \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i > 0}^7 \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \quad \dots\dots\dots (52)$$

$\tilde{\alpha}_i$ は、 $\tilde{\alpha}_i = \tilde{b}_i - \tilde{\alpha}_i$ である。

式(51),(52) の両辺に \tilde{A} を掛けると、

$$\tilde{A}\vec{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \tilde{A}\vec{u}_L + \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i < 0}^7 \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \\ \tilde{A}\vec{u}_R - \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i > 0}^7 \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \end{cases}$$

と表されるので、Roe 法の数値流束は

$$\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} F(\vec{u}_L) + \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i < 0}^7 \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \\ F(\vec{u}_R) - \sum_{i=1, \tilde{\lambda}_i > 0}^7 \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \end{cases} \dots\dots\dots (53)$$

の 2 種類に書くことが出来る。式(52) の上段と下段を足して 2 で割ると、式(53) の様に見える。

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(F(\vec{u}_L) + F(\vec{u}_R)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^7 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \\ &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^7 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

式(53)の右辺第 2 項の $\sum_{i=1}^7 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i$ は 式(54) の様に表される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i &= [\tilde{R}_1 \quad \tilde{R}_2 \quad \dots \quad \tilde{R}_7] \begin{bmatrix} |\tilde{\lambda}_1| \tilde{\alpha}_1 \\ |\tilde{\lambda}_2| \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ |\tilde{\lambda}_7| \tilde{\alpha}_7 \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{R}_1 \quad \tilde{R}_2 \quad \dots \quad \tilde{R}_7] \begin{bmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & |\tilde{\lambda}_7| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_7 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{R} \begin{bmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & |\tilde{\lambda}_7| \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \tilde{R} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_7 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{R} \begin{bmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & |\tilde{\lambda}_7| \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} [\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i] \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

なので、式(53) は、式(55) の様に変えられる。

$$\overrightarrow{F_{i+\frac{1}{2}}^n} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{F_i^n} + \overrightarrow{F_{i+1}^n}) - \frac{1}{2}\widetilde{R}^n|\widetilde{B}|^n\widetilde{L}^n(\overrightarrow{u_{i+1}^n} - \overrightarrow{u_i^n}) \dots\dots\dots (55)$$

$$|\widetilde{B}| = \begin{bmatrix} |\widetilde{\lambda}_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\widetilde{\lambda}_2| & 0 & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & |\widetilde{\lambda}_7| \end{bmatrix}$$

n : 時間ステップの番号

i : 空間ステップの番号

右下添え字番号 1~7: モードの番号

～Roe 法の数値流束の解釈～

前節 4.2.3 で述べたとおり、元の解くべき方程式 式(16) は、

$$L \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B(L \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}) = 0 \dots\dots\dots (44)$$

と書き換えることが出来て、 $L \rightarrow \tilde{L}$ と出来るとき、式(46) の様に出来るのと同様に、

$$\frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t} + \tilde{B} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta x} \sim 0 \dots\dots\dots (56)$$

の、移流方程式の形に Δt 秒間だけなることが出来る。 \vec{w} の 7 つの成分 は B の中身 (各モードの固有値) を移流速度として移流する。

Roe 法の数値流束は以下の様に変えられる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{i+\frac{1}{2}}^n} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{F_i^n} + \overrightarrow{F_{i+1}^n}) - \frac{1}{2}\widetilde{R}^n\widetilde{B}^n\widetilde{L}^n(\overrightarrow{u_{i+1}^n} - \overrightarrow{u_i^n}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{F_i^n} + \overrightarrow{F_{i+1}^n}) - \frac{1}{2}\widetilde{R}^n\widetilde{B}^n(\overrightarrow{w_{i+1}^n} - \overrightarrow{w_i^n}) \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

式(57) の右辺第 2 項は修正子と捉えることが出来ることが分かる。

\vec{w} の移流方程式(7つの移流方程式)に基づいて、修正の大きさが、ある時刻での各モードでの移流方程式、各点にて調節される。図を用いた説明 (図 1) を次ページに示した。図の説明は以下のとおりである。

右下添え字 k をモードの番号とすると、 w_k の Δt 秒間の変化量(青から緑への変化量)を、その時刻での移流方程式($w_{k,1}$ の移流方程式)を解いて求めた後に、修正子を計算して、 Δt 秒後の $u, v, w, \rho, p, B_y, B_z$ を得る。その $u, v, w, \rho, p, B_y, B_z$ を使って新たな移流方程式($w_{k,2}$ の移流方程式)を得る。それを解いて修

正子を計算して新たな $u, v, w, \rho, p, B_y, B_z$ を得る。それを使ってまた新たな移流方程式($w_{k,3}$ の移流方程式)を得る、の繰り返しが行われている。ここで、右下添え字 k_t ($k=1\sim 7, t=1,2,3,\dots$) は、 k がモードの番号で、 t が時間の番号である。

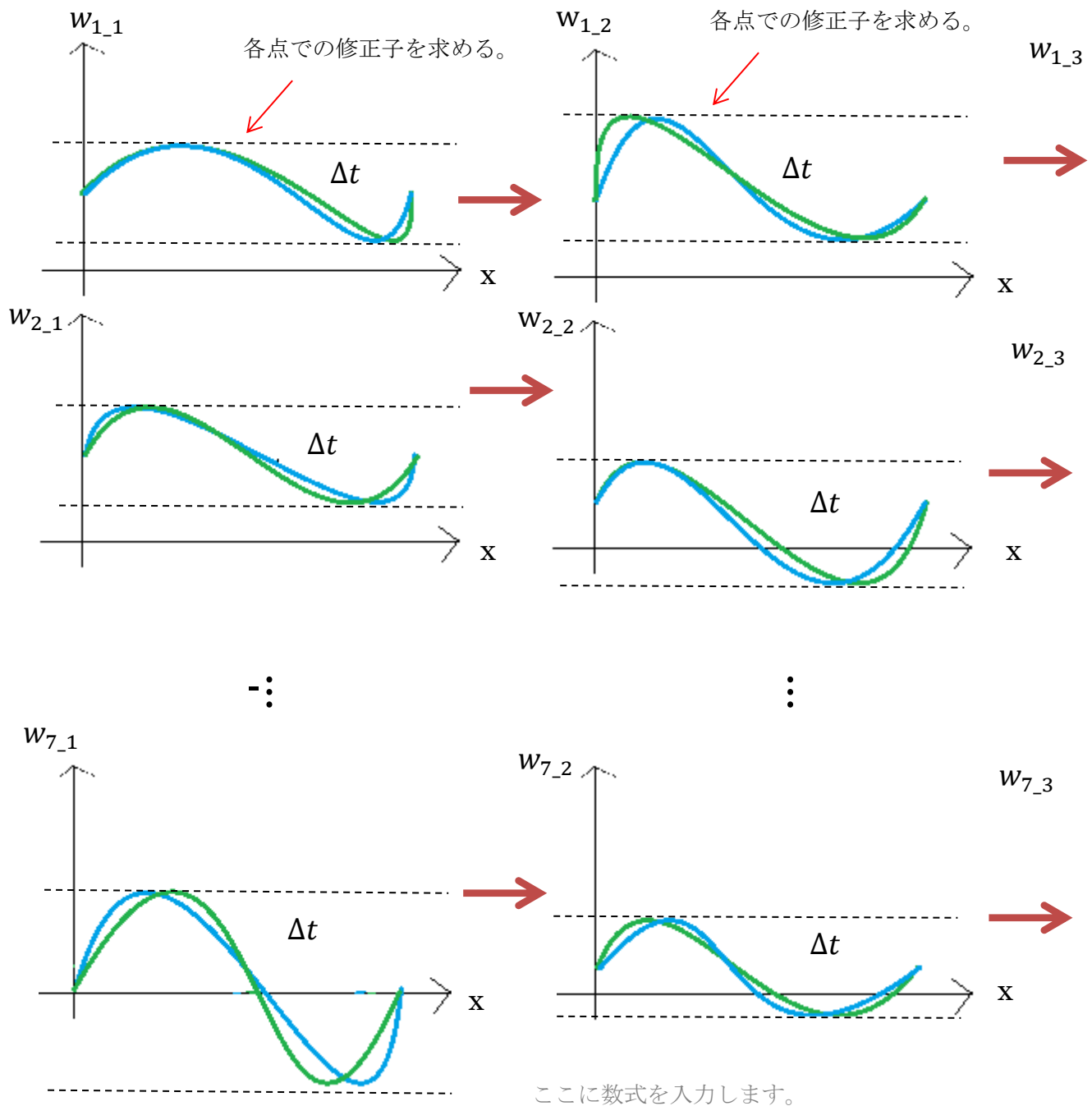


図 1 : 各モードの各時刻での Δt 秒間の w の移流方程式の時間発展の様子
あるモード(モード 1~7 のどれか)の移流方程式が、 Δt 秒間の時間発展 (青から緑への変化) を終えた後に、波形ががらりと変わる ($w_{k,1} \rightarrow w_{k,2}$ の変化)。これは Riemann 不変量 $w_{k,1}$ と $w_{k,2}$ が別物になるからである。

2.1 TVD 化

< TVD 化の一般論 >

以下のスカラー方程式の TVD 化の一般的な説明をする。対象とする方程式は、式(58) の様に速度 A が u のみの関数となっているものである。式(58)は、ある点 x での u の値 $u(x)$ が 速度 $A(u(x))$ で左右どちらかにずれるという方程式である。つまり、 u_{max}, u_{min} が変化しない。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (58)$$

TV(Total Variation)を、以下の様に定義する。

$$TV = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

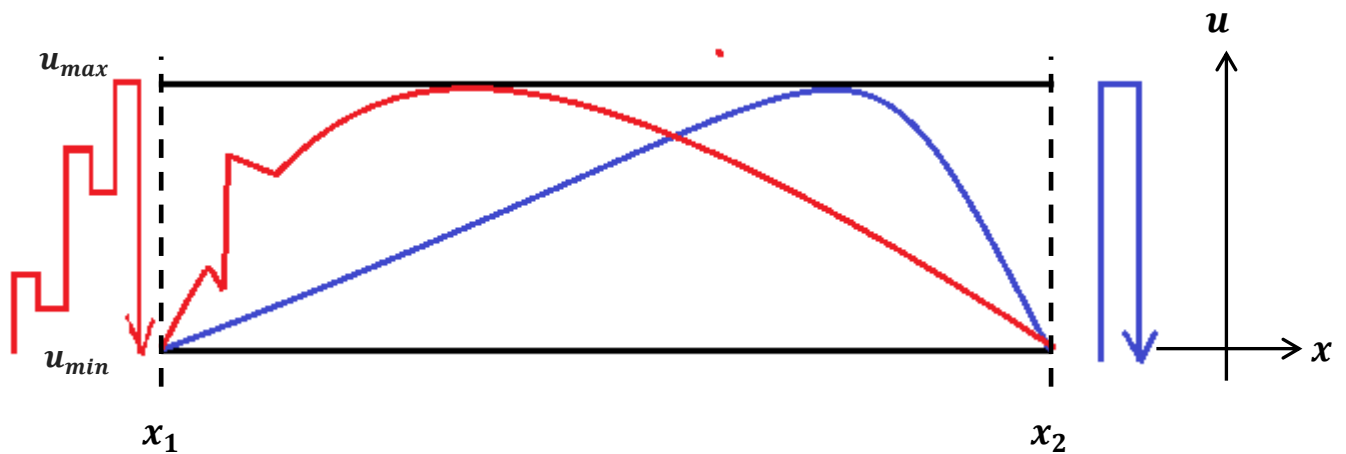


図 2 : TV の大きさの比較の図

矢印の軌道の長さが TV の大きさを表す。青から赤に変化した場合、TV は増加する。

TV は、 u のグラフに沿って移動した時の縦方向の移動距離の総和となる。なので数値振動が起きると、TV は増加する。

TV の数値解は 式(59) となる。

$$TV(u_i^n) = \sum_{i=1}^{i=i_{max}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad \dots\dots\dots (59)$$

この時、数値振動を起こさないために TV が満たすべき条件は 式(60) となる。

$$TV(u_i^{n+1}) \leq TV(u_i^n) \quad \dots\dots\dots (60)$$

～Lax-Wendroff 法の TVD 化～

非粘性の Burgers 方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (C = \text{移流速度}) \dots\dots\dots (61)$$

Lax-Wendroff 法の数値流束は以下のようにになる。

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} c\{u_i^n + \frac{1}{2}(1-\alpha)[u_{i+1}^n - u_i^n]\} & (c > 0) \\ c\{u_{i+1}^n - \frac{1}{2}(1+\alpha)[u_{i+1}^n - u_i^n]\} & (c < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (62)$$

この数値粘性の形から Lax-Wendroff 法は、(風上差分+数値粘性) という解釈が出来る事が分かる。(文献[3])で 式(62)の $c > 0$ の場合の数値流束の TVD化の手法が紹介されていたので、それを参考に筆者が $c < 0$ の場合の数値流束の TVD化を行った。

式(62) の右辺に流束制限関数 $\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n$ を掛け、修正後の数値流束は 式(63) となる。

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} c\{u_i^n + \frac{1}{2}(1-\alpha)\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n[u_{i+1}^n - u_i^n]\} & (c > 0) \\ c\{u_{i+1}^n - \frac{1}{2}(1+\alpha)\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n[u_{i+1}^n - u_i^n]\} & (c < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (63)$$

数値振動が起きない条件は 式(64) かつ 式(65) となる。

$$0 \leq |c|\Delta t \leq \Delta x \dots\dots\dots (64)$$

$$0 \leq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq 1 \dots\dots\dots (65)$$

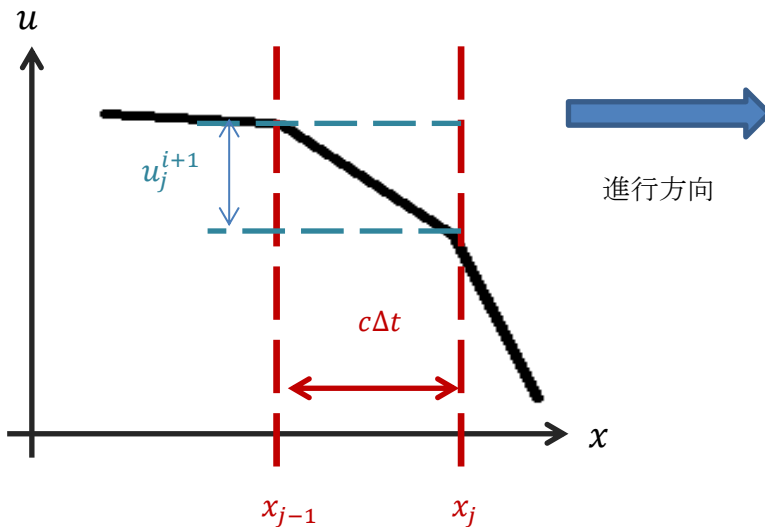


図 3 : x_j での u, u_j が Δt 秒後になれる領域 (青矢印)を表した図 ($C > 0$ の場合)

式(63),(64),(65)から、条件式(66) が得られる。

$$-\frac{2}{\nu} \leq \varphi_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{\varphi_{i+\frac{1}{2}}^n}{r_j^n} \leq \frac{2}{1-\nu} \dots\dots\dots (66)$$

式(66) は式(67) のように書き換えられる。

$$0 \leq \frac{\varphi_{i+1/2}^n}{r_j^n} \leq 2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \varphi_{i-1/2}^n \leq 2 \dots\dots\dots (67)$$

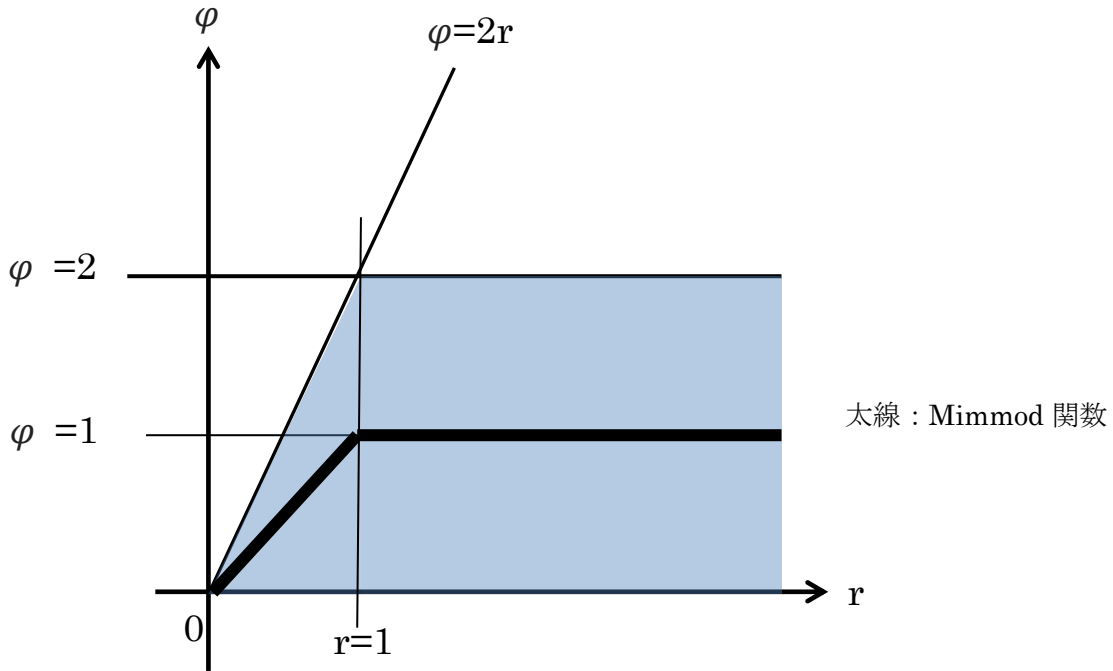


図 4 : 条件式(67) を満たす φ の範囲を表す図 (青色の領域)

特に、太線を Mimmod 関数 と呼ぶ。本研究での TVD 化は、(文献[2],[3])に則り、Minmod 関数を採用する。ここで、r は 式(67) を意味する。

$$r_{k,i}^n = \begin{cases} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} & (c > 0) \\ \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{u_i^n - u_{i-1}^n} & (c < 0) \\ 1 & (u_{i+1}^n - u_i^n = 0, u_i^n - u_{i-1}^n = 0) \end{cases} \dots\dots\dots (67)$$

である。

φ は図 4 の太線 (minmod 関数) に設定される。形式的に書くと 式(68) のように書き表される。

$$\varphi_{k,i}^n = \begin{cases} \min(1, r_{k,i}^n) & (r_{k,i}^n \geq 0) \\ 1 & (r_{k,i}^n < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (68)$$

<MacCormack 法の TVD 化>

(文献[2])の TVD-MacCormack 法の数値流束は、Roe 法で用いた Roe 平均が行われた物理量を用いて表された速度行列の固有値、固有ベクトルを使って表される。式(69)の通りとなる。1次 Roe の数値流束式(55)との類似性がある。1次の Roe 法と異なっている点は、TVD-MacCormack 法の数値流束には、MacCormack 法の予測子 ($\overline{F_i^{n+1}}$) が含まれている点と、流速制限関数が組み込まれている点である。これらの違いによって、若干 TVD-MacCormack 法の方が、計算時間が多く必要になることが分かる。式(14)は MacCormack 法の数値流束である。

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^n} = \frac{1}{2}(\overline{F_{i+1}^n} + \overline{F_i^{n+1}}) - \frac{1}{2}\widetilde{R}^n|\widetilde{BB}|^n\widetilde{C}^n\{\widetilde{L}^n(\overline{u_{i+1}^n} - \overline{u_i^n})\} \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^n} = \frac{1}{2}(\overline{F_{i+1}^n} + \overline{F_i^{n+1}}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$|\widetilde{BB}|^n, \widetilde{C}^n$ は 7×7 の対角行列である。

$$\widetilde{C}^n = \begin{bmatrix} 1 - \varphi_{k,i+1/2}^n & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 - \varphi_{k,i+1/2}^n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 - \varphi_{k,i+1/2}^n \end{bmatrix}$$

$$|\widetilde{BB}|^n = \begin{bmatrix} 1 - |\widetilde{\lambda}_1^n| & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 - |\widetilde{\lambda}_2^n| & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 - |\widetilde{\lambda}_7^n| \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \min(1, r_{k,i+1/2}^n) & (r_{k,i+1/2}^n \geq 0) \\ 1 & (r_{k,i+1/2}^n < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (70)$$

minmod 関数(式(70))の $r_{k,i+1/2}^n$ は、(文献[2])では式(71)の様に場合分けされていた。

$$r_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{u_{k,i}^n - u_{k,i-1}^n}{u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n} (\widetilde{\alpha}_k^n > 0) \\ \frac{u_{k,i+2}^n - u_{k,i+1}^n}{u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n} (\widetilde{\alpha}_k^n < 0) \\ 1 & (u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n = 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$\widetilde{\alpha}_k^n = \left[\widetilde{L}^n(\overline{u_{k,i+1}^n} - \overline{u_{k,i}^n}) \right]_k$$

しかし、この方法では不連続面付近の数値振動が抑えられなかった（計算結果 その 2）。

ここで、 $r_{k,i+1/2}^n$ を TVD-LaxWendroff 法の時と同様に風の方向で場合分けするのが自然であると考え、変更を行った（計算結果 その 3）。TVD-LaxWendroff 法と TVD-MacCormack 法の数値流束の形が同じになることに注目し、TVD-MacCormack 法の数値流束の詳細を見ていく。

～TVD-MacCormack 法と TVD-LaxWendroff 法の数値流束の比較～

TVD-MacCormack 法の数値流束 式(69) の第 2 項の $(\overline{R^n \theta^n})_k$ は、式(72)のように書ける。

$$F_{k,i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(F_{k,i+1}^n + \overline{F_{k,i}^{n+1}}) - \frac{1}{2}(\overline{R^n \theta^n})_k \dots\dots\dots (69)$$

$$\begin{aligned} (\overline{R^n \theta^n}) &= |\tilde{B}| \overline{R^n T^n} \overline{L^n} (\vec{u}_{i+1}^n - \vec{u}_i^n) \\ &= |\tilde{B}| \overline{R^n T^n} (w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n) \dots\dots\dots (72) \end{aligned}$$

$$\overline{T^n} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_1|\right) \left(1 - \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n\right) & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_2|\right) \left(1 - \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n\right) & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_7|\right) \left(1 - \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n\right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (73)$$

式(73) の中をさらに変形すると、

$$\overline{T^n}(k, k) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_k| - \varphi_{k,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_1| \varphi_{k,i+\frac{1}{2}}^n\right) \dots\dots\dots (74)$$

式(72)~(74) より、式(72) の k 番目の成分は 式(75) の様に表される。

$$(\overline{R^n \theta^n})_k = |\tilde{\lambda}_k| (\overline{R^n A^n})_k \dots\dots\dots (75)$$

$$\overline{A^n} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_1| - \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_1| \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_2| - \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_2| \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_7| - \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_7| \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{bmatrix}$$

MacCormack法の予測子 $\overline{F_{k,l}^{n+1}}$ は、式(76)の様に表される。

$$\begin{aligned} \overline{F_{k,l}^{n+1}} - F_i^n &\sim \widetilde{\lambda}_k (\overline{u_{k,l}^{n+1}} - u_i^n) \\ &= -\frac{1}{2} \widetilde{\lambda}_k^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n) \\ \overline{F_{k,l}^{n+1}} &= F_{k,i}^n - \frac{1}{2} \widetilde{\lambda}_k \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{k,i+1}^n - F_{k,i}^n) \dots\dots\dots (76) \end{aligned}$$

式(75),(76) を 式(69) に代入して 式(77) が得られる。

$$\begin{aligned} F_{k,i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} (F_{k,i+1}^n + \overline{F_{k,l}^{n+1}}) - \frac{1}{2} (\overline{R^n \theta^n})_k \\ &= \\ &\frac{1}{2} (F_{k,i+1}^n + F_{k,i}^n) - \frac{1}{2} \widetilde{\lambda}_k \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{k,i+1}^n - F_{k,i}^n) - \\ &\frac{1}{2} |\widetilde{\lambda}_k| \left\{ \overline{R^n} \left[\begin{array}{l} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_1| - \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_1| \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_2| - \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_2| \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_7| - \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_7| \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{array} \right] \right\}_k \\ &= \frac{1}{2} (F_{k,i+1}^n + F_{k,i}^n) - \frac{1}{2} |\widetilde{\lambda}_k| \left\{ \overline{R^n} \left[\begin{array}{l} \left(1 - \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_1| \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \left(1 - \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_2| \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \left(1 - \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} |\widetilde{\lambda}_7| \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{array} \right] \right\}_k \dots\dots (77) \end{aligned}$$

$\widetilde{\lambda}_k > 0$ のとき、式(77)は 式(78) となる。

$$= \frac{1}{2} (F_{k,i+1}^n + F_{k,i}^n) - \frac{1}{2} \widetilde{\lambda}_k \left\{ \overline{R^n} \left[\begin{array}{l} \left(1 - \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_1 \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \left(1 - \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_2 \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \left(1 - \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_7 \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n\right) (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{array} \right] \right\}_k$$

$$= F_{k,i}^n + \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{R}^n \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_1\right) \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \widetilde{\lambda}_2 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_2\right) \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \widetilde{\lambda}_7 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_7\right) \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{bmatrix} \right\}_k \dots\dots\dots (78)$$

$\widetilde{\lambda}_k < 0$ のとき、式(77)は 式(79) となる。

$$F_{k,i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (F_{k,i+1}^n + \overline{F_{k,i}^{n+1}}) - \frac{1}{2} (\widetilde{R}^n \overline{\theta}^n)_k$$

$$= F_{k,i+1}^n - \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{R}^n \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_1\right) \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \widetilde{\lambda}_2 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_2\right) \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \widetilde{\lambda}_7 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_7\right) \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{bmatrix} \right\}_k \dots\dots\dots (79)$$

式(78)、式(79)をまとめると、TVD-MacCormack 法の数値流束は、

$$F_{k,i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} F_{k,i}^n + \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{R}^n \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_1\right) \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \widetilde{\lambda}_2 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_2\right) \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \widetilde{\lambda}_7 \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_7\right) \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{bmatrix} \right\}_k & (\widetilde{\lambda}_k > 0) \\ F_{k,i+1}^n - \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{R}^n \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_1\right) \varphi_{1,i+\frac{1}{2}}^n (w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n) \\ \widetilde{\lambda}_2 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_2\right) \varphi_{2,i+\frac{1}{2}}^n (w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n) \\ \vdots \\ \widetilde{\lambda}_7 \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \widetilde{\lambda}_7\right) \varphi_{7,i+\frac{1}{2}}^n (w_{7,i+1}^n - w_{7,i}^n) \end{bmatrix} \right\}_k & (\widetilde{\lambda}_k < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (80)$$

ここで、TVD-LaxWendroff 法の数値流束 式(63) を振り返ってみると、

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} c \{ u_i^n + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n [u_{i+1}^n - u_i^n] \} & (c > 0) \\ c \{ u_{i+1}^n - \frac{1}{2} (1 + \alpha) \varphi_{i+\frac{1}{2}}^n [u_{i+1}^n - u_i^n] \} & (c < 0) \end{cases} \dots\dots\dots (63)$$

$$\alpha = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

となり、TVD-LaxWendroff 法と TVD-MacCormack 法の数値流束が類似していることが分かる。即ち、流束制限関数 $\varphi_{i+1/2}^n$ の $r_{k,i+1/2}^n$ の場合分けは、TVD-LaxWendroff 法の時と全く同じように、風の方向で行うべきであると想像がつく。つまり、固有値 $\widetilde{\lambda}_k^n$ の正負で行えば良い。

しかし、 $r_{k,i+1/2}^n$ の中身と、場合分けの方法を TVD-LaxWendroff 法と全く同じにすると、TVD-MacCormack 法では数値振動が起きてしまうことが分かった。そこで、 $r_{k,i+1/2}^n$ の場合分けは固有値の正負で行い、 $r_{k,i+1/2}^n$ の中身は TVD-MacCormack 法の文献(文献[2])と同じ条件に設定してみたところ、完全に数値振動が抑えられることが分かった。(6.1.4 その 4)

TVD 変更前(TVD-LaxWendroff 法と同じ。(6.1.4 その 3))

$$r_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n > 0) \\ \frac{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n}{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n < 0) \\ 1 \quad (w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n = 0, w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n = 0) \end{cases}$$

変更後($r_{k,i+1/2}^n$ の中身は文献[2]と同じで、場合分けのみ TVD-LaxWendroff 法と同じ。(6.1.4 その 4))

$$r_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n > 0) \\ \frac{w_{k,i+2}^n - w_{k,i+1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n < 0) \\ 1 \quad (w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n = 0) \end{cases}$$

$\widetilde{\lambda}_k^n < 0$ の時の、 $r_{k,i+1/2}^n$ の用いるグリッドを変更前の 1 つ右隣にした。

4.2.4の 図1 をそのまま用いて TVD-MacCormack 法モードごとの波形の時間発展のを行う。TVD-MacCormack 法は先ほどの Roe 法とは少し考え方が違うように思える。TVD-MacCormack 法の場合、 w_k の移流方程式を TVD-LaxWendroff 法に類似した方法で Δt 秒間時間発展させる。その Δt 秒間に、数値振動が起きない条件(TVD 条件)が数値流束に課せられる。

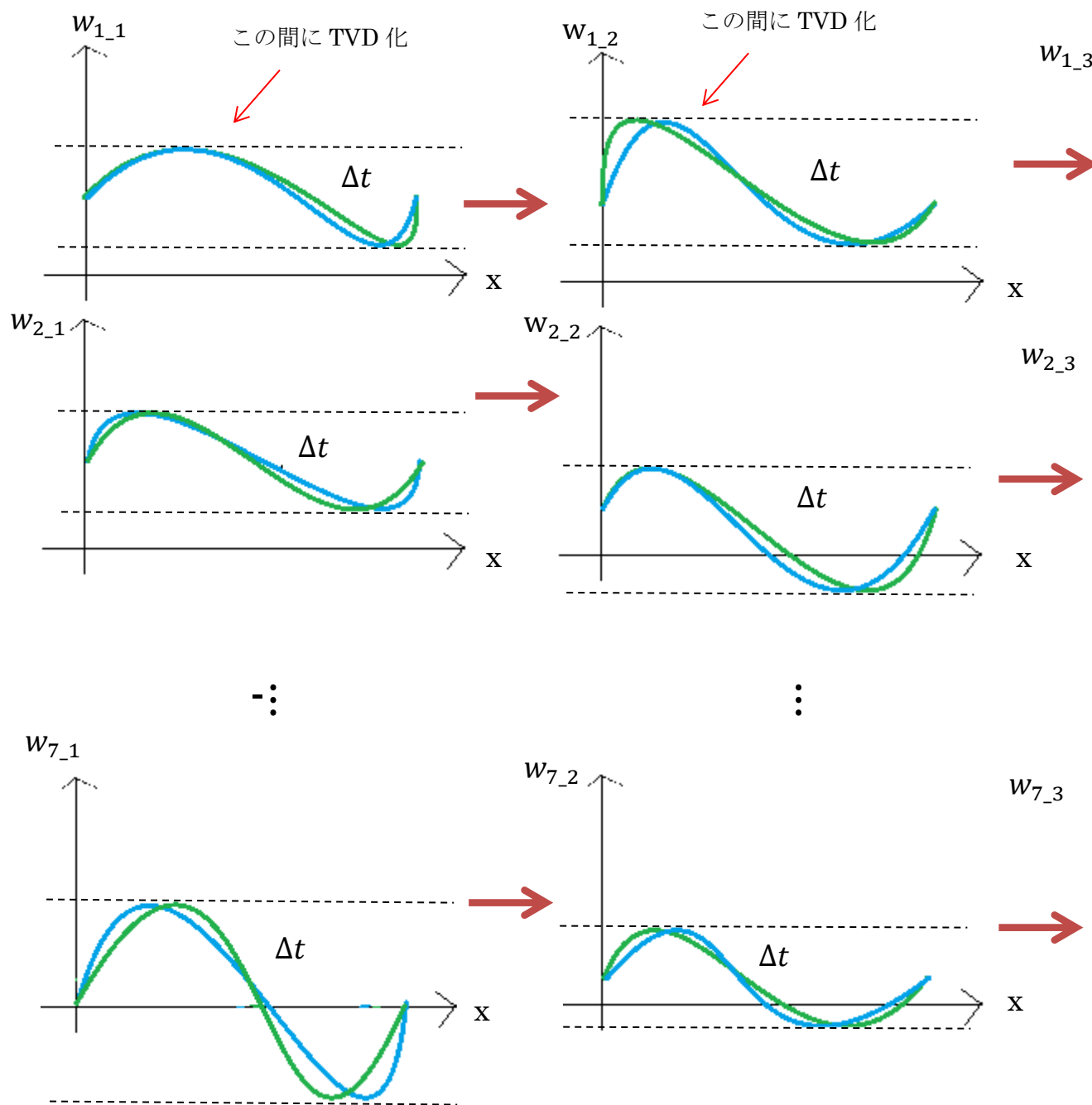


図 1 : 各モードの各時刻での Δt 秒間の w の移流方程式の時間発展の様子

第3章 数値実験結果

Riemann 問題（衝撃波管問題）を Roe 法、TVD-MacCormack 法を用いて解いた。また、初速として適当な擾乱を与え、擾乱の時間発展を計算しフーリエ変換を行い、分散関係のプロットを行った。

3.1 Riemann 問題

（文献[1]）で行われている Riemann 問題のシミュレーションを行った。初期条件、境界条件、パラメータの各種設定をそのまま（文献[1]）の通りにした。

$$\rho_R = 0.125, \quad p_R = 0.1, \quad u_R = 0, \quad v_R = 0, \quad w_R = 0, \quad B_{y_R} = -1, \quad B_{z_R} = 0$$

$$\rho_L = 1, \quad p_L = 1, \quad u_L = 0, \quad v_L = 0, \quad w_L = 0, \quad B_{y_L} = 1, \quad B_{z_L} = 0$$

<初期条件>

$$\rho\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = \rho_R, \quad p\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = p_R, \quad u\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = u_R, \quad v\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = v_R,$$

$$w\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right)w_R = 0, \quad B_y\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = B_{y_R}, \quad B_z\left(x \geq \frac{x_{max}}{2}\right) = B_{z_R}$$

$$\rho\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = \rho_L, \quad p\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = p_L, \quad u\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = u_L, \quad v\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = v_L,$$

$$w\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = w_L, \quad B_y\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = B_{y_L}, \quad B_z\left(x < \frac{x_{max}}{2}\right) = B_{z_L}$$

<境界条件>

$$\rho(x = x_{max}) = \rho(x = x_{max} + \Delta x) = \rho_R, \quad p(x = x_{max}) = p(x = x_{max} + \Delta x) = p_R,$$

$$u(x = x_{max}) = u(x = x_{max} + \Delta x) = u_R, \quad v(x = x_{max}) = v(x = x_{max} + \Delta x) = v_R,$$

$$w(x = x_{max}) = w(x = x_{max} + \Delta x) = w_R,$$

$$B_y(x = x_{max}) = B_y(x = x_{max} + \Delta x) = B_{y_R}, \quad B_z(x = x_{max}) = B_z(x = x_{max} + \Delta x) = B_{z_R}$$

$$\rho(x = x_{min}) = \rho(x = x_{min} - \Delta x) = \rho_L, \quad p(x = x_{min}) = p(x = x_{min} - \Delta x) = p_L,$$

$$u(x = x_{min}) = u(x = x_{min} - \Delta x) = u_L, \quad v(x = x_{min}) = v(x = x_{min} - \Delta x) = v_L,$$

$$w(x = x_{min}) = w(x = x_{min} - \Delta x) = w_L,$$

$$B_y(x = x_{min}) = B_y(x = x_{min} - \Delta x) = B_{y_L}, \quad B_z(x = x_{min}) = B_z(x = x_{min} - \Delta x) = B_{z_L}$$

<パラメータ>

$$\gamma = 2$$

$$\Delta x = 1$$

$$\Delta t = 0.2$$

$$x_{min} = 0$$

$$x_{max} = 800$$

$$\text{time step} = 400$$

2次 Roe 法 (Brio & Wu (1988))

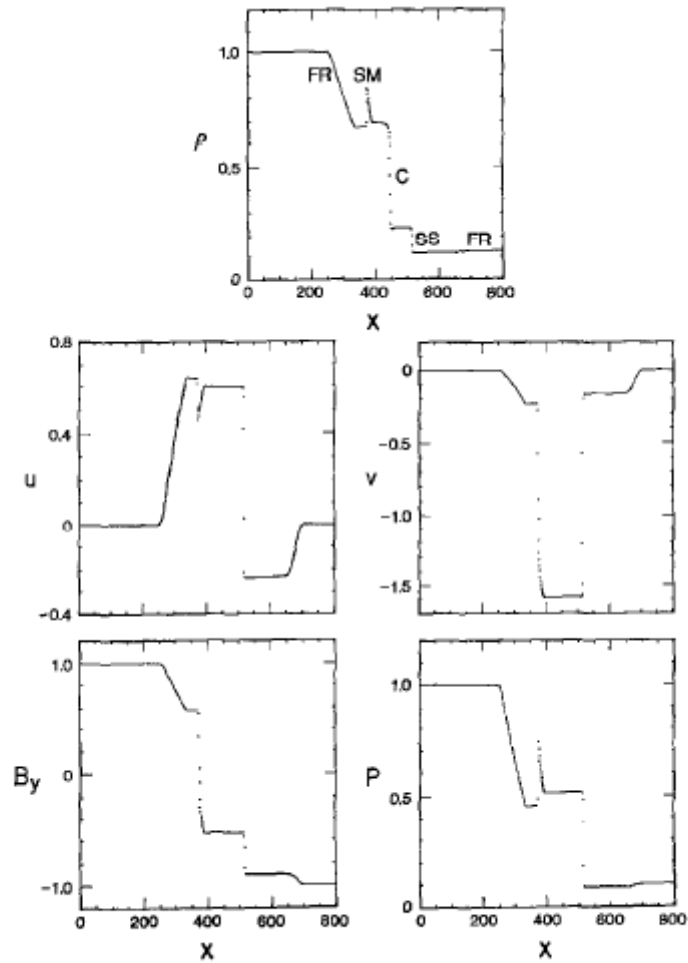


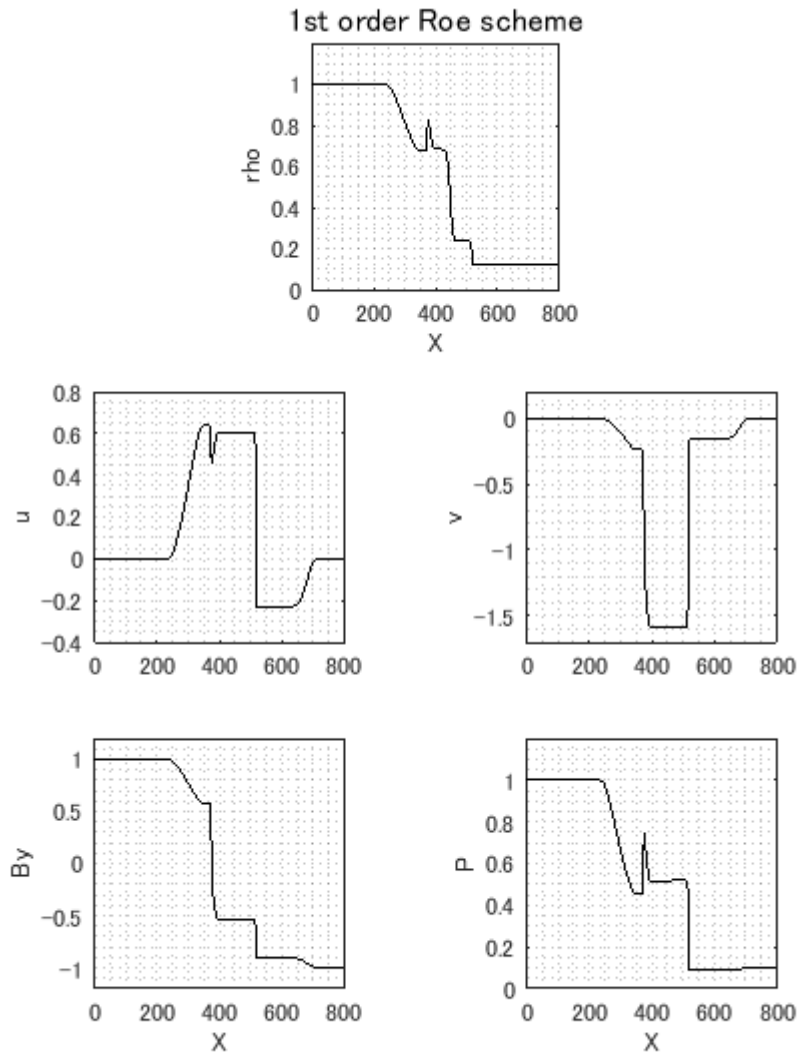
FIG. 2. Second-order upwind scheme.

Brio and Wu によって得られた計算結果である(文献[1])。2次精度になるようにアレンジされた Roe 法である。数値振動を起こすことなく解かれている。次ページに示す 1次 Roe 法よりもはるかに数値粘性が小さい事が分かる。

ρ のグラフに書かれている SM,FR,SS,C はそれぞれ、SM: slow compound(混合)波、FR: fast 膨張波、SS: slow 圧縮波、C: 不連続面 を意味する。つまりこの数値実験では、正方向、負方向共に、slow 波、fast 波のみが伝播している。SM:slow 混合波は、slow 圧縮波と slow 膨張波がともに伝播している波である。(文献[2]) この数値実験では z 方向の変数の初期値はすべて 0 であるから、z 方向の変数の変化はない。x,y 方向の疎密波の伝播のみが起こっている。これが、alfven 波が見られない理由である。

<計算結果>

その1 1次 Roe 法

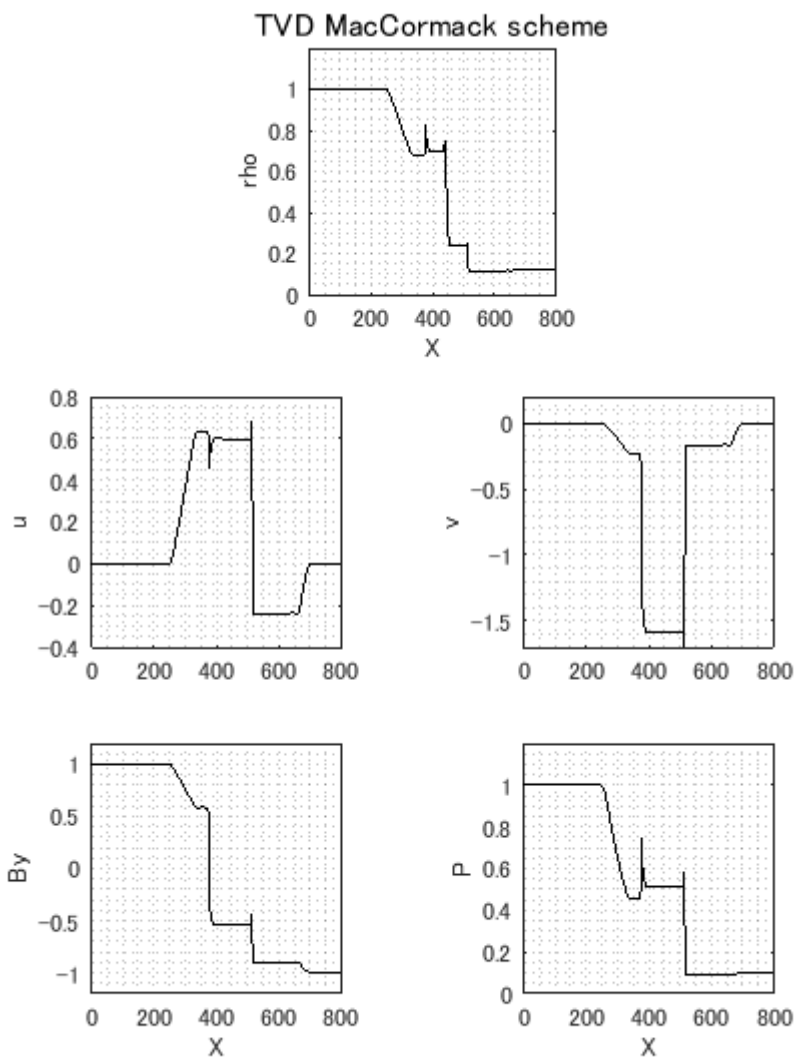


1次 Roe 法の計算結果である。

(文献[1]) を参考にしてコードの作成を行った。不連続面付近で波形が丸みを帯びており、前ページの Brio and Wu による 2 次 Roe 法よりも数値粘性が大きいことが分かる。全体的に大まかな波形は再現できていると思う。しかし、 $x=800$ 付近の密度の FR が現れていない。おそらく数値粘性によってなくなってしまったものと考えられる。

TVD-MacCormack 法

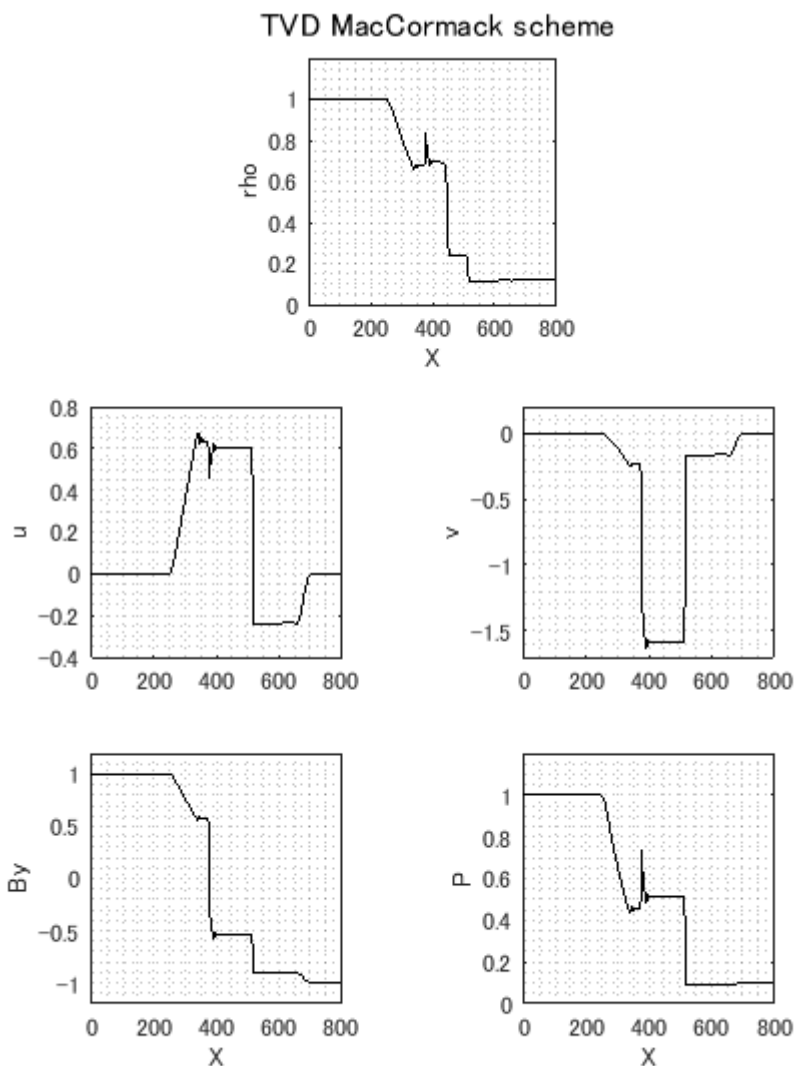
その 2 (文献[2])と同じ設定



(文献[2])を参考にしてコード作成を行った TVD-MacCormack 法の計算結果である。すべての条件を(文献[2])の通りにした。不連続面で数値振動が抑えられていない。しかし、1次 Roe では再現できなかった密度の FR はこの方法では再現できている。不連続面の数値粘性を除けば、1次 Roe 法よりもはるかに精度は上がっている。(Brio and Wu による 2次 Roe 法に近づいている。)

TVD-MacCormack 法

その3 minmod 関数の r の場合分け変更 & r を TVD-LaxWendroff 法と同じに設定

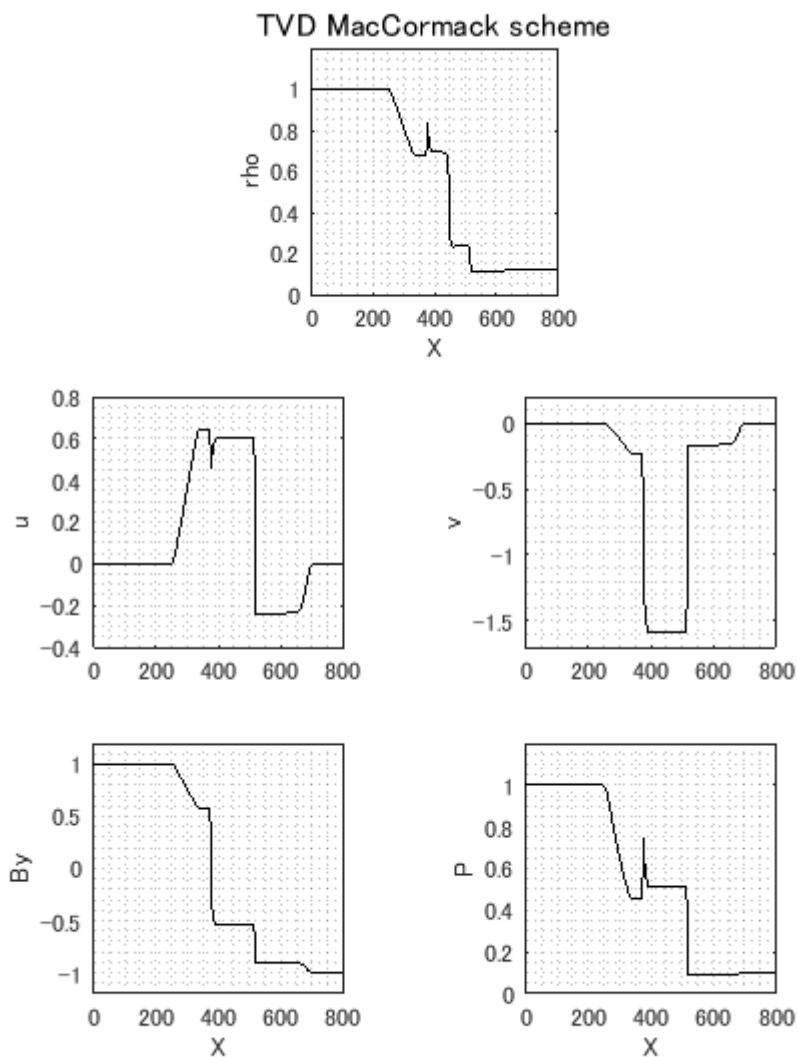


Minmod 関数を除く部分は文献[2]を参考にした TVD-MacCormack 法で計算した結果である。

Minmod 関数は、文献[3] を参考にした TVD-LaxWendroff 法と同じにした。前ページの時よりも数値振動の振幅は小さくなったように思える。波形もよく再現されている。しかし、まだ数値振動が抑えられていない。

TVD-MacCormack 法(完成版)

その4 minmod 関数の r の場合分け変更



Minmod 関数の場合分けの方法を除く部分を、文献[2]を参考にした TVD-MacCormack 法で計算した結果である。ここでは Minmod 関数の場合分けの方法のみを文献[3]を参考にした TVD-LaxWendroff 法と同じように設定した。完全に数値振動が抑えられている。Brio and Wu による 2 次 Roe 法の結果ともほとんど変わらず、例えば B_y の $x=600$ 付近をみると、TVD-MacCormack 法の方が数値粘性が抑えられているように見える。

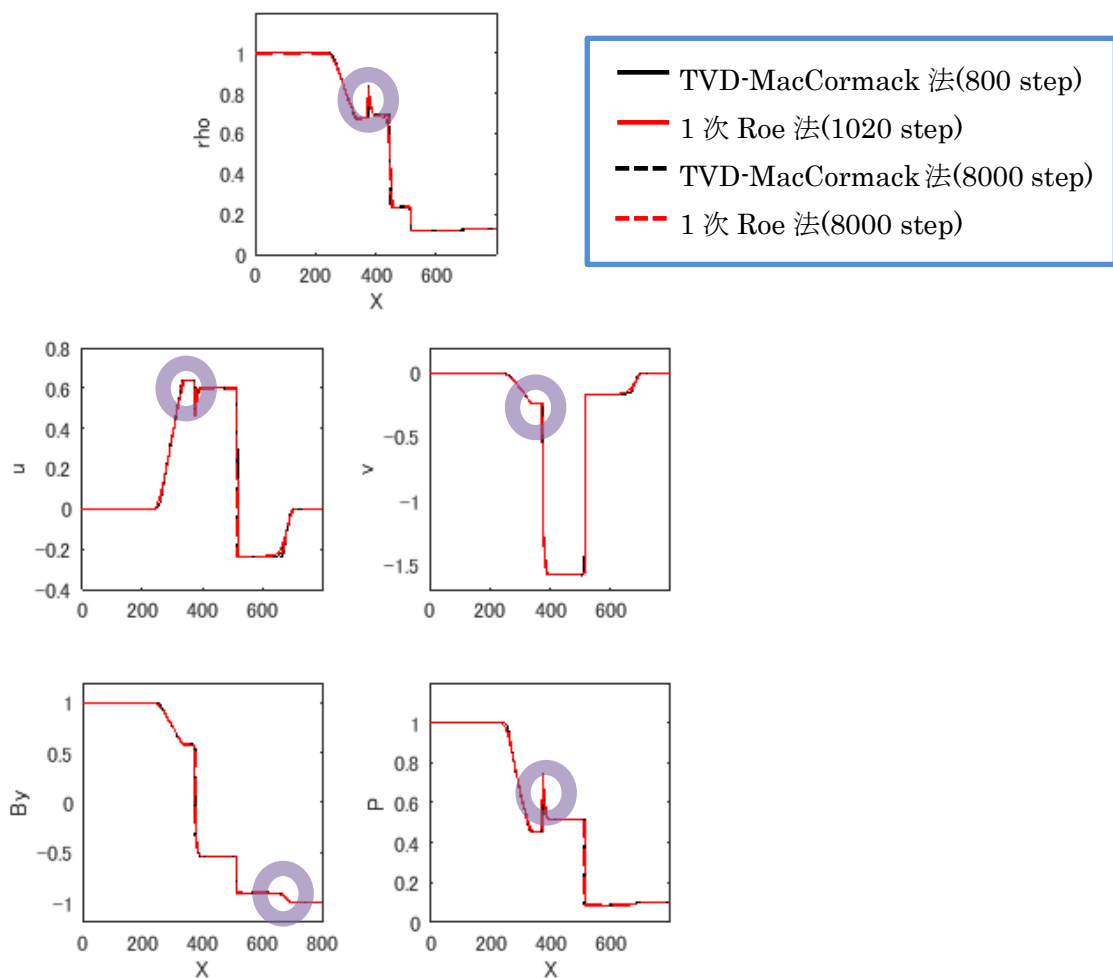
< TVD-MacCormack 法と 1 次 Roe 法の比較 >

アルゴリズムが類似している TVD-MacCormack 法と、1 次 Roe 法との比較を行った。

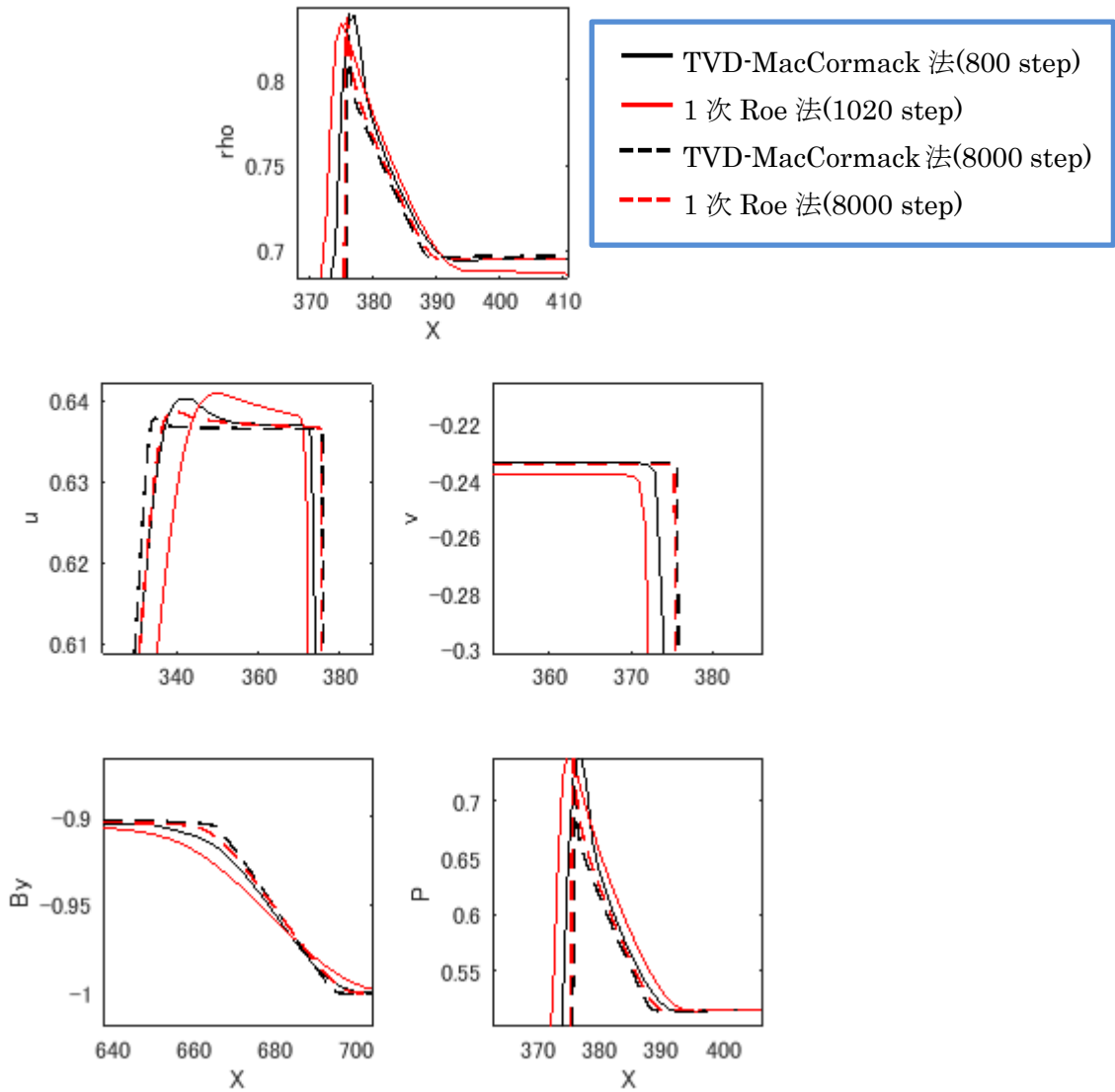
計算時間の測定結果から、空間の刻み数が 800 の時の TVD-MacCormack 法は、空間の刻み数が 1020 の時(時間の刻み数も $\Delta t/\Delta x$ が一定になるように変化させる)の 1 次 Roe 法と計算時間がほぼ同じになることが分かった。

計算スキーム	計算時間 (s)
TVD-MacCormack 法 (800step)	36.625
1 次 Roe (1020step)	36.9558

それら 2 つの結果と空間の刻み数 8000 の TVD-MacCormack 法と、1 次 Roe 法の計 4 通りの結果を重ねてプロットした。紫色の円で囲った部分の拡大図を次ページに示す。



前ページの拡大図 (紫色の円領域付近)



空間刻み数 8000 の場合、両スキームが近い値を取っている。つまり、刻み数を増加させた時に、両スキームがある値に収束しており、刻み数 8000 の両スキームの数値解の近くに厳密解が存在している。同じ計算時間で、これらに近い値を取っているのは刻み数 800 の TVD-MacCormack 法である。なので、TVD-MacCormack 法の方が 1 次の Roe 法よりも計算コストに対するパフォーマンスが高いことが分かる。不連続解の再現具合から、TVD-MacCormack 法の方が数値粘性を抑えられていることが分かる。

また、2 次精度化された Roe 法は 1 次 Roe 法よりも精度は上がるが、計算コストがさらに高くなるため、TVD-MacCormack 法の方が 2 次 Roe 法よりも計算コストに対するパフォーマンスが高いことが期待される。

<考察>

Ideal MHD 方程式を TVD-MacCormack 法で解くことが出来ることが分かった。TVD-MacCormack 法で解いた結果が Brio & Wu の文献[1]の結果(2nd order にアレンジされた Roe scheme)とよく一致している。

完成版の TVD-MacCormack 法は、アルゴリズムが類似している 1st order Roe 法よりも計算コストに対するパフォーマンスが高いことが分かった。2次精度化された Roe 法よりも短時間で同程度の精度で計算できていることが期待される。

Minmod 関数の r の場合分けに関して、TVD-LaxWendroff 法の時と TVD-MacCormack 法が同じにできない理由は、定常な速度 C の代わりに非定常な速度 $\widehat{\lambda}_k$ を用いているためだと考えられる。

結果の波形を見ると、いくつもの段になっていることが分かる。初期の波形は左半分、右半分の 2 つの段であるが、時間発展後に波形がばらけてしまう。これは複数のモードが存在することによる。

1D Ideal MHD には 7 つのモードがあり、7 種類の波の伝播速度が存在する。7 種類の内訳は流体の流れから見て正方向に 3 種類、負方向に 3 種類、止まったままの 1 種類である。

正方向、負方向の 3 種類は、fast 波、slow 波、アルフヴェン波である。

プラズマには磁場のローレンツ力がかかるが、このローレンツ力は圧力的な力と、張力的な力に分解できる。圧力的な力は音波に影響を与える。また、張力的な力によって磁場のゆらぎが伝播する現象も起こる。

Fast 波は流体の圧力と磁場の圧力が強めあい、流体にかかる勾配力が流体の圧力勾配以上に大きくなることが原因で音速が早くなる波である。また、slow 波は流体の圧力と磁場の圧力が弱めあい、流体にかかる勾配力が流体の圧力勾配以上に小さくなることが原因で音速が遅くなる波である。また、理想 MHD 方程式系では、磁場の動きは流体の動きと連動しており、流体の疎密波の伝播に合わせて磁場にも疎密波が起こる。

アルフヴェン波は磁場の張力的な力で磁場の揺らぎが伝播し、それに伴って流体の揺らぎも伝播する非圧縮の波である。文献[1]によると、この Riemann 問題の数値実験では、fast 波、slow 波のみの伝播が行われている。これは、初期値として z 方向の変数が 0 に設定されていることが理由である。(x 方向 1D 問題で、 z 方向の擾乱が 0 であつ、 z 方向に磁場が傾いていないため、 z 方向には何も起きない。) x, y 方向の変数および圧力、密度のみに疎密波(fast, slow 波)のみが起こっている。

3.2 分散関係

初速として、 x, y, z 方向に適当な擾乱を与えたときの変数の時間発展を時間方向、空間方向にフーリエ変換を行い、分散関係をプロットした。

<初期条件>

$$u = \text{rand}(-0.005, 0.005)$$

$$v = \text{rand}(-0.005, 0.005)$$

$$w = \text{rand}(-0.005, 0.005)$$

$$B_x = 1, B_y = 1, B_z = 0$$

$$\rho = 1 \quad p = 1$$

<境界条件>

周期境界条件を用いた。

$$f(x_{\min} - \Delta x) = f(x_{\max})$$

ここで、 f は計算で用いるすべての物理量。

<パラメータ>

$$\gamma = 2$$

$$\Delta x = 1/400$$

$$\Delta t = 1/2000$$

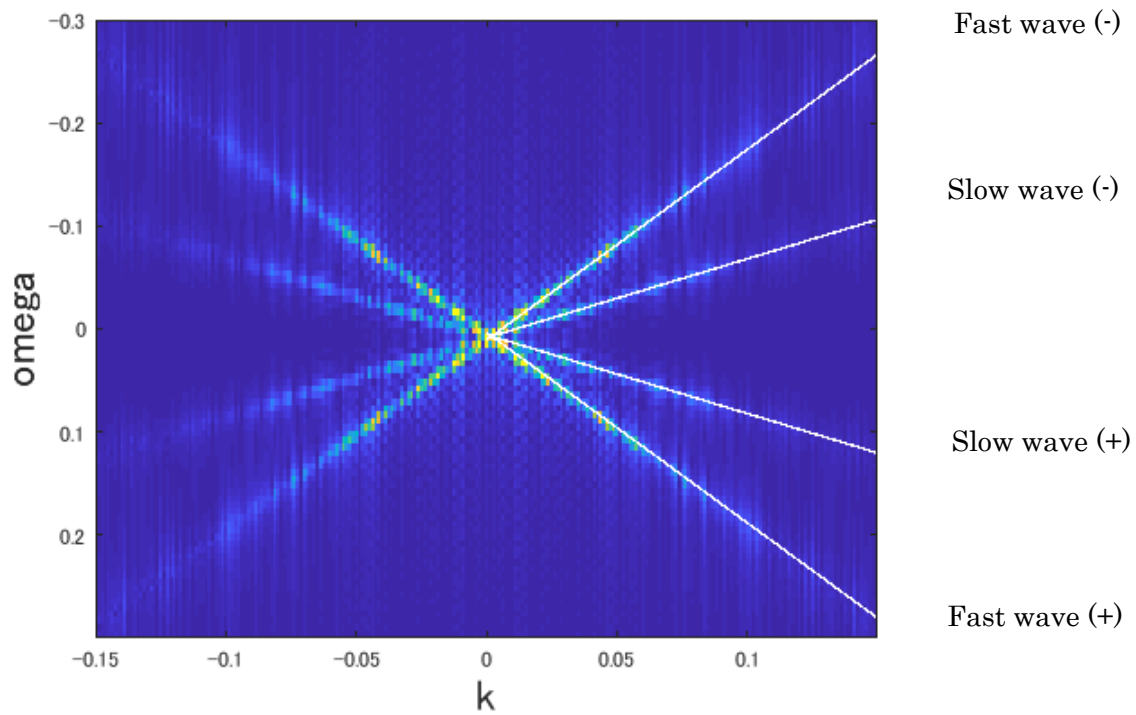
$$x_{\min} = 0$$

$$x_{\max} = 1$$

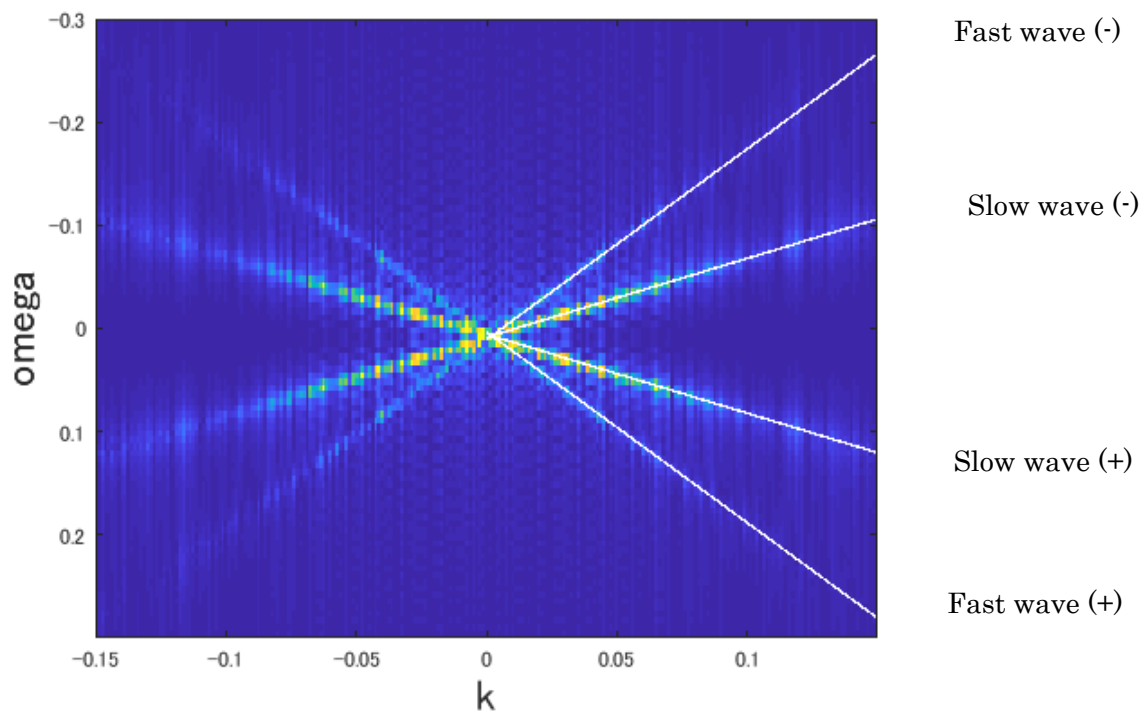
$$\text{time step} = 500$$

<計算結果>

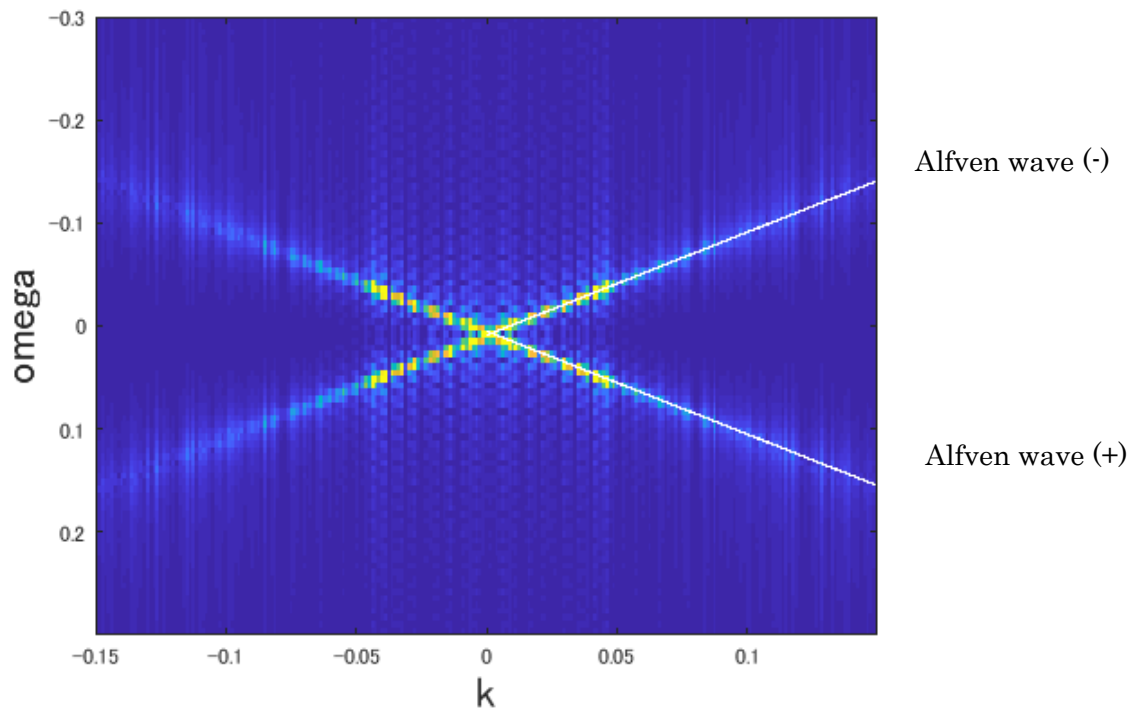
u の分散関係



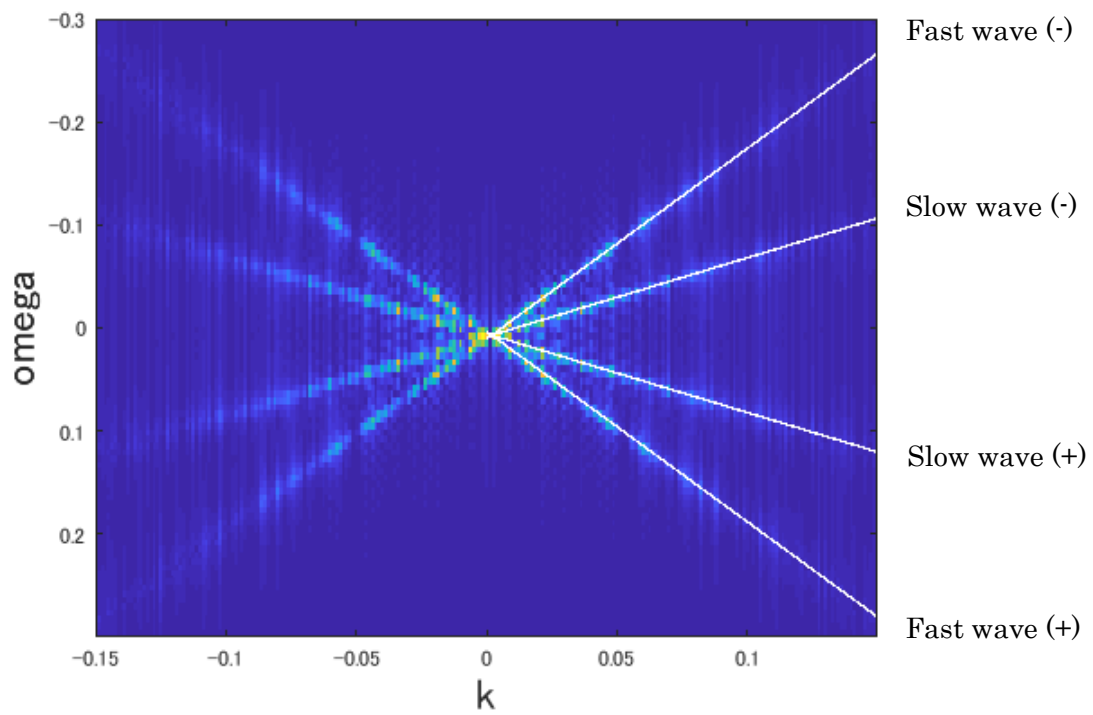
v の分散関係



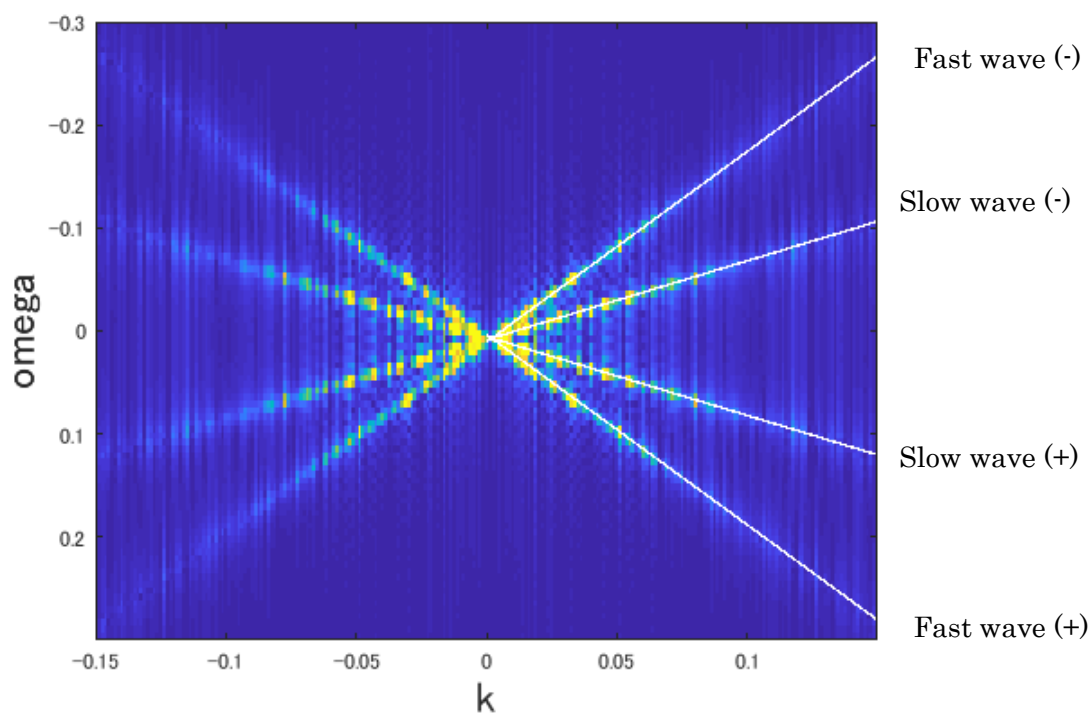
w の分散関係



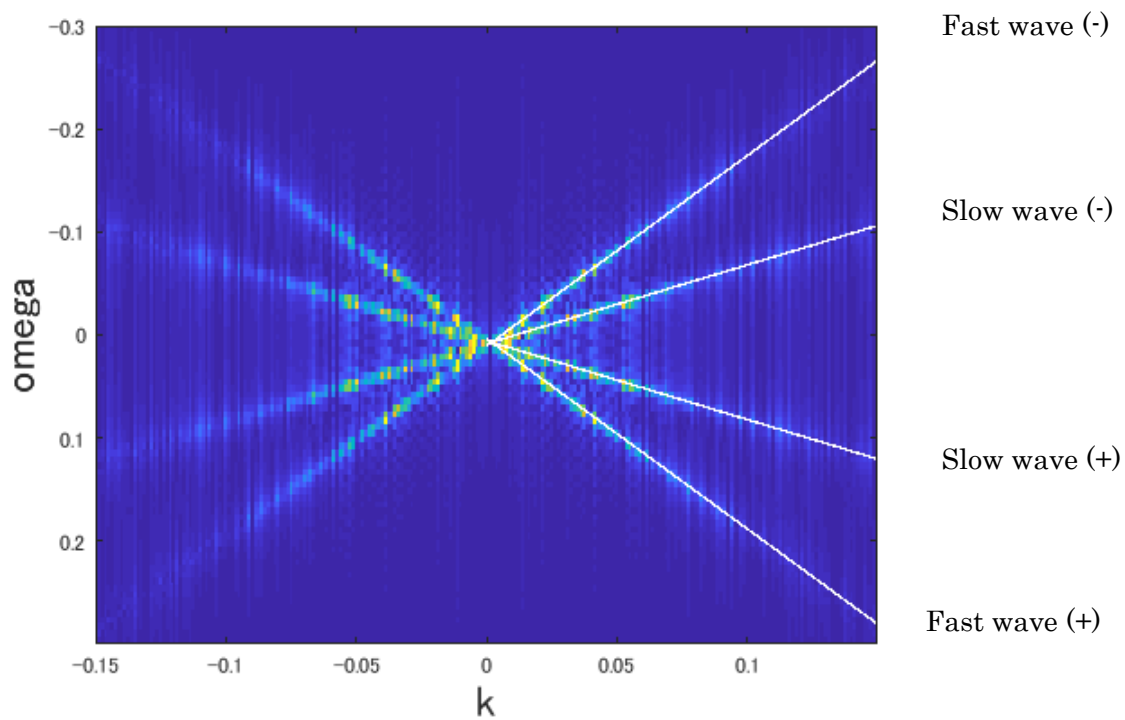
rho の分散関係



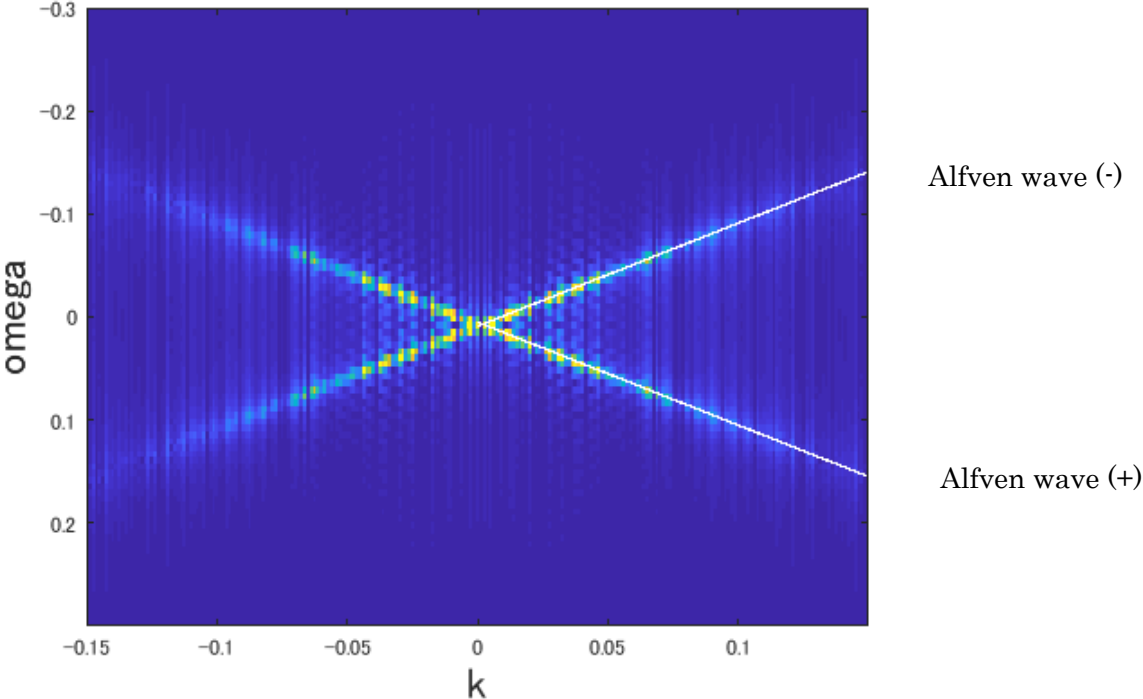
p の分散関係



B_y の分散関係



Bz の分散関係



<考察>

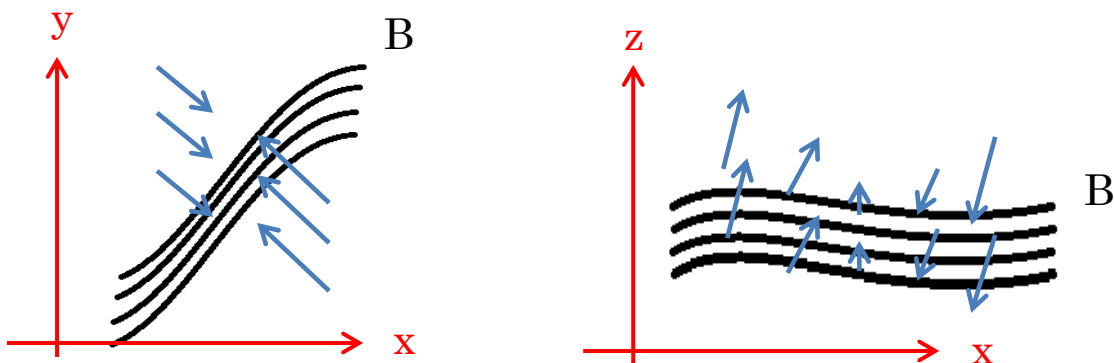
白い直線が、線形の分散関係の理論値である。良く重なっており、位相速度も問題なく再現できていることが分かった。

初期の磁力線は $B_x=1$ 、 $B_y=1$ 、 $B_z=0$ である。変化の方向は x 方向のみで y や z 方向には一様である。線形な擾乱を与えると、 x,y 平面方向にしか磁場の疎密は起きない。 x,z 平面方向の磁場の疎密は無視されるほど小さい。(下図)

速度の疎密波は B_z と相互作用せず、非圧縮な波(Alfven 波)が流れ場の疎密とは独立に起きる。 x,y 平面方向には、Alfven 波は起こらない。なぜなら、Alfven 波は、流れ場が磁場に対して垂直方向に一様なモードであり、 y 方向に速度が一様で、かつ初期の磁場が x, y 軸から傾いている、今回の設定ではそれが起こらない。

結局、磁力線の疎密によって起こる磁場の勾配と、流体自体の圧力勾配が重なって流体の圧力勾配以上に勾配力が大きくなる、また小さくなることによって起こる、速い疎密波、遅い疎密波である fast 波、slow 波が x,y 方向の磁場、速度と、密度、圧力に起こる。なので、 x,y 方向の磁場、速度と、密度、圧力の分散関係の線分の本数は正負方向の fast, slow 波の、4 本分現れる。

z 方向の磁場、速度には疎密波が起きないので、疎密派とは独立な磁場の張力的な力によって起きる磁場の波と、その磁場の波に励起されて起こる速度の波(アルフヴェン波)のみが起きる。正負方向のアルフヴェン波の 2 本分のみが z 方向の磁場、速度に表れる。

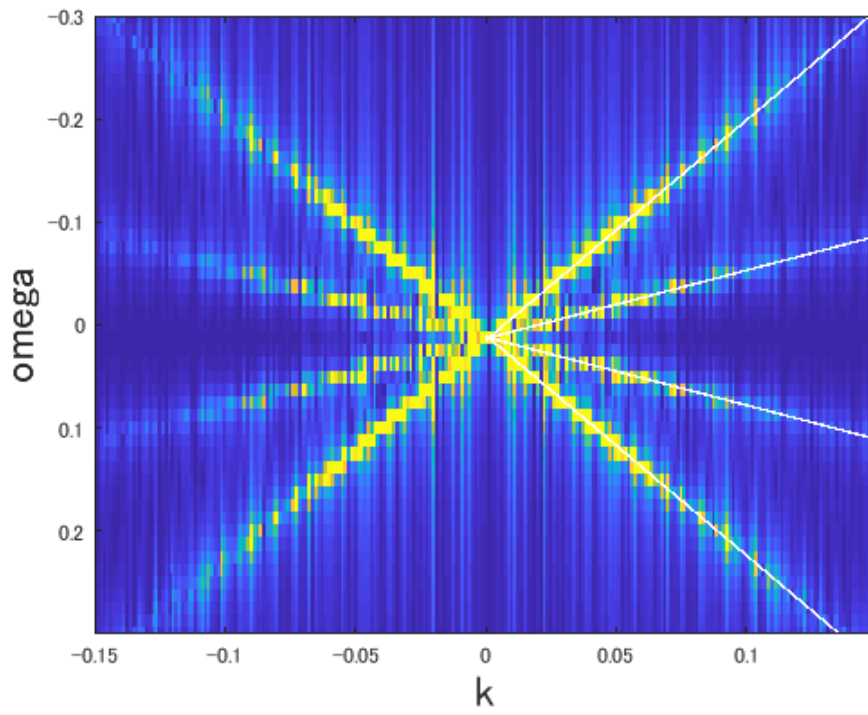


(左図) : z 方向から見た初期状態からの磁場、速度の擾乱の図

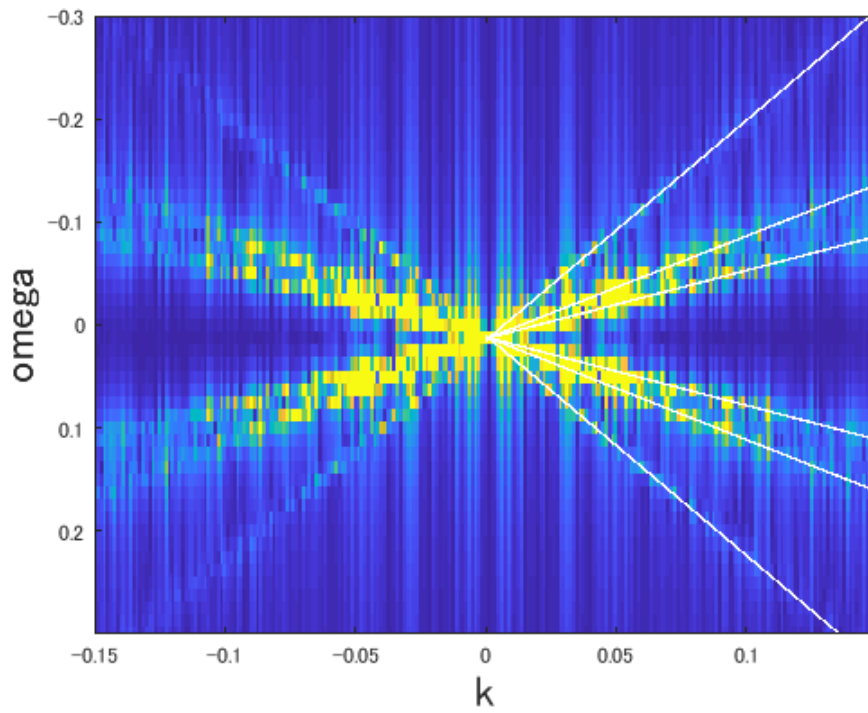
(右図) : y 方向から見た初期状態からの磁場、速度の擾乱の図

磁場の設定を変更してみた。($B_x = 1$, $B_y = 1$, $B_z = 1$)

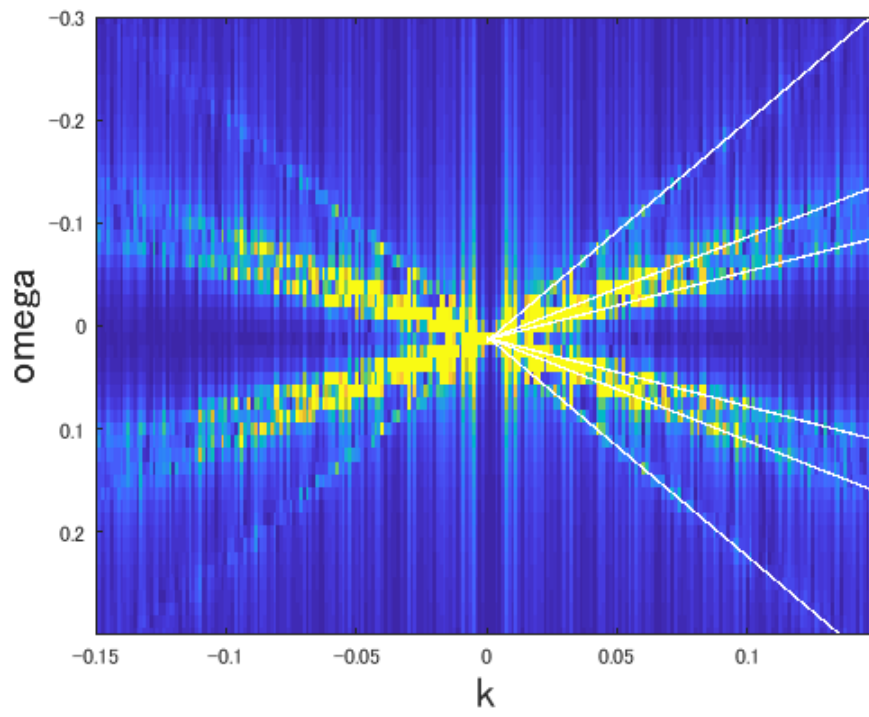
u の分散関係



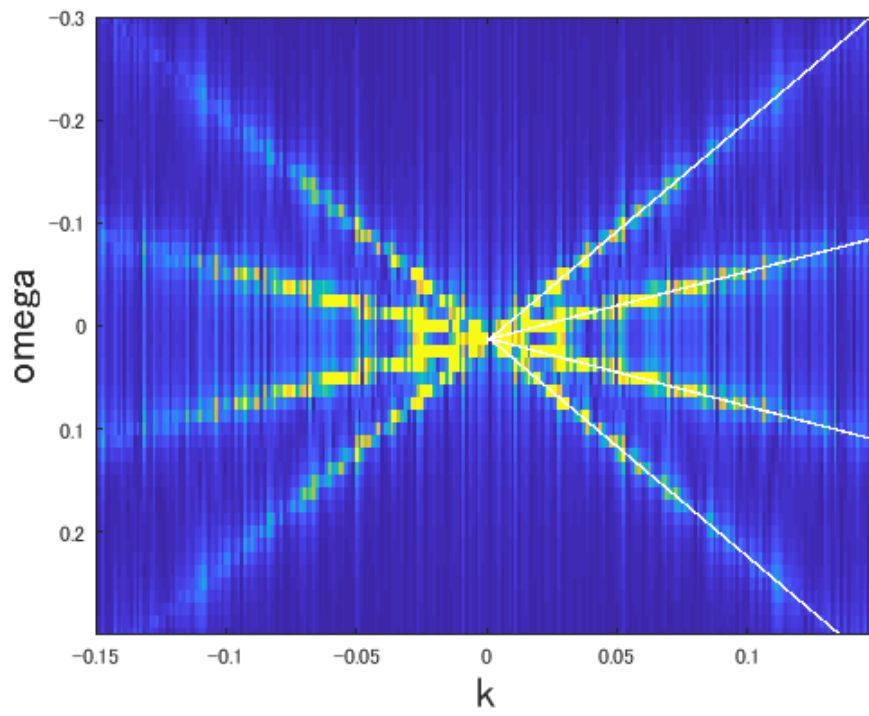
v の分散関係



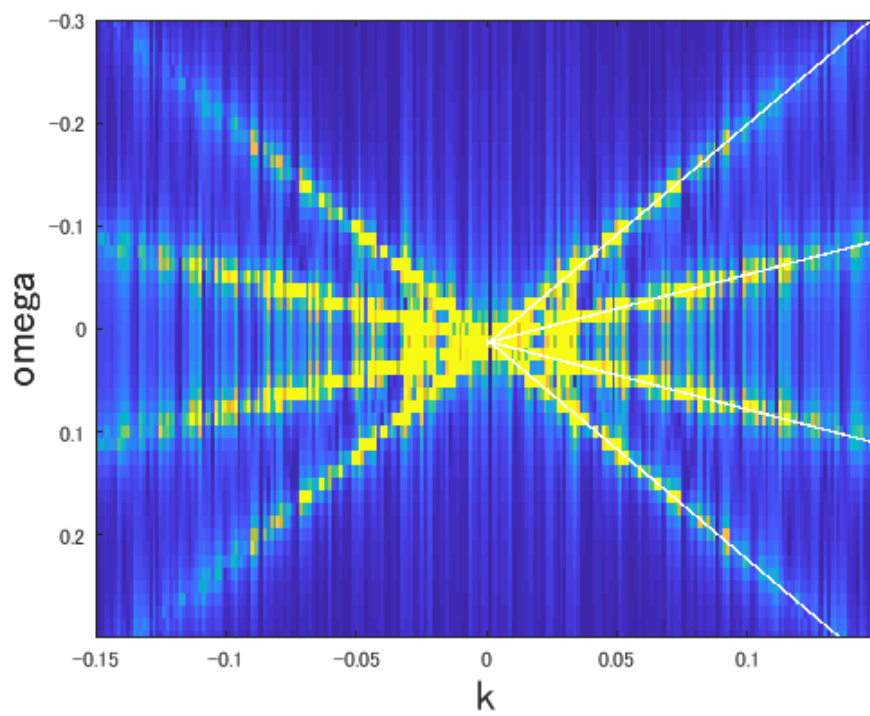
w の分散関係



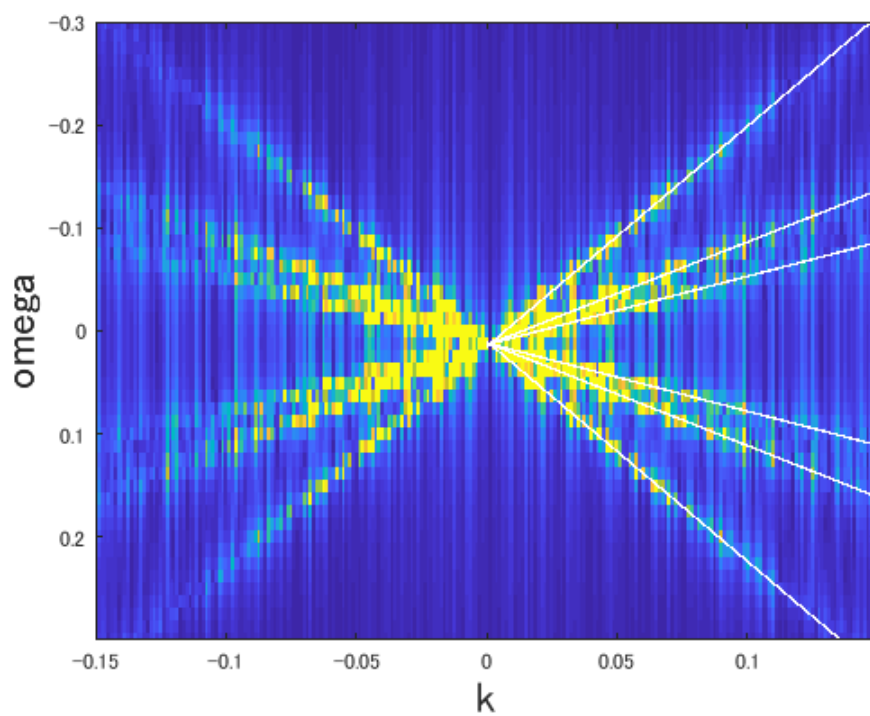
rho の分散関係



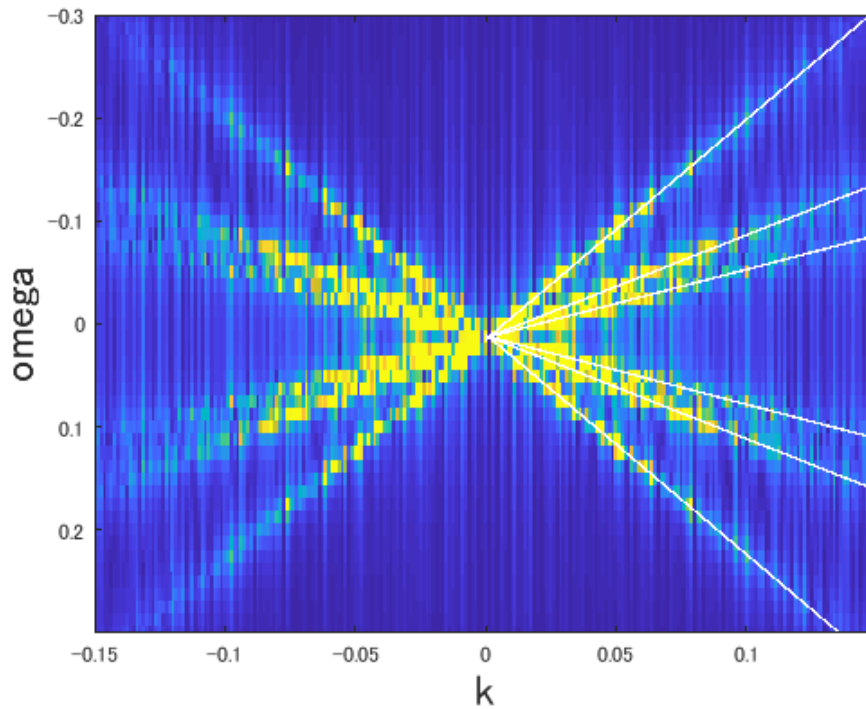
p の分散関係



By の分散関係



Bz の分散関係



z 方向にも磁場を傾けてやると、 v , w , B_y , B_z に fast, slow, alfvén 波 が現れることが分かる。

u , ρ , p には圧縮波 fast, slow 波のみが現れる。変化の方向は x 軸方向なので、速度 u には疎密波のみが現れ、alfvén 波は、 u の x 軸への垂直成分が 0 であるから起きない。 ρ , p には非圧縮な波が起きないため、alfvén 波は見られない。

B_y , B_z には磁場の疎密のモード(fast,slow)、弦の張力のようなモード(alfvén)の両方が現れる。

v , w には疎密による情報の伝播と、磁場の張力的な力で起こる揺れに伴って起こる情報の伝播両方が起こり fast, slow, alfvén 波のすべてが現れる。

第4章 まとめ、今後の展望

文献[2]で、中性流体の流体方程式に適応できることが示されていた TVD-MacCormack 法は、7つのモードを持った Ideal MHD 方程式の計算にも適応可能なスキームであることが分かった。ただし、Minmod 関数の場合分けの方法のみ、文献[2]から訂正を行うことで完全に MacCormack 法を TVD 化できることが確認できた。

文献[2]の MacCormack 法の TVD 化の方法は、文献[3] の LaxWendroff 法の TVD 化と、ほぼ同じであることが分かった。ただし、Minmod 関数の場合分けの方法が異なっている。具体的には、 $\widetilde{\lambda}_k^n < 0$ のときの Minmod 関数で用いられる r のグリッドが異なる。

TVD-LaxWendroff 法 の minmod 関数の r (計算結果 その 3))

$$r_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n > 0) \\ \frac{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n}{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n < 0) \\ 1 \quad (w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n = 0, w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n = 0) \end{cases}$$

完成版 TVD-MacCormack 法の minmod 関数の r (計算結果 その 4))

$$r_{k,i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n > 0) \\ \frac{w_{k,i+2}^n - w_{k,i+1}^n}{w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n} (\widetilde{\lambda}_k^n < 0) \\ 1 \quad (w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n = 0) \end{cases}$$

TVD-LaxWendroff 法と、TVD-MacCormack 法に違いが生じるのは、文献[3] の LaxWendroff 法の TVD 化の場合と違って、速度がグリッドによって異なることが原因であると考えられる。

また、TVD-MacCormack 法を、アルゴリズムが類似している 1st order Roe 法と比較すると、より小さな数値粘性で解くことが出来ることが確認できた。多くのメッシュ数で計算した場合との比較を行うことで、TVD-MacCormack 法の方が 1st order Roe 法よりも不連続な波形を正確に再現できていることが確認できた。

今後の展望としては、高次のスキーム（高次の Roe 法を含む）との比較を行い、TVD-MacCormack 法がそれらの中でどのくらいの位置にくるのかの検証が求められる。計算時間、計算精度のバランスを考慮した総合的にどうであるかを評価するべきである。

また、本研究で紹介した、TVD-MacCormack 法、Roe 法はいずれも、解く方程式を非保存形の形に直して、速度行列の固有値、固有ベクトルを得ることが求められた。時間ステップが進むたびに各グリッド上での固有値、固有ベクトルを求めるのは計算時間のロスになると思われる。これを必要としない、方程式を保存形のまま解けるスキームの開発、発展が求められる。現存する方程式を保存形のまま解けて、かつ TVD-MacCormack 法と同程度の精度で解けるスキームの探索、考察は時間の都合上出来な

った。仮にそのようなスキームがあったとしても、おそらく多くの計算時間を要するのではないかと予想される。何故ならば、固有値、固有ベクトルを使用するスキームは、これらを毎時、各グリッド上で求める計算時間ロスはあるものの、モードごとにリーマン不変量の移流方程式を解くという時間発展の方法は非常にシンプルで、高次精度化も容易いと予想される。時間とともに波の波形がモードの数に応じて複雑になっていく磁気流体プラズマ方程式を、保存形のまま高次精度で解くには多くの手間が要されると予想される。しかし、保存形のまま高次精度でかつ短時間で計算できるスキーム、プログラムが出来上がれば、このプログラムを他分野に応用するのが非常に容易になる。単に、数値流束の中の方程式を書き換えればよい。

参考文献

- [1] M.Brio, and C.C.Wu, An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics, Phys, 1988

- [2] Justyna Machalinska- Murawska, and Michal Szydowski, Lax-Wendroff and MacCormack Schemes for Numerical Simulation of Unsteady Gradually and Rapidly Varied Open Channel Flow, Hydro-Engineering and Environmental Mechanics, 2013

- [3] 松元亮治, 富阪幸治, 花輪知幸, 流体・磁気流体方程式の差分解法, 2003

- [4] 富阪幸治, Roe 法の理解のために, 2004

- [5] 横井喜充, 電磁流体力学とアルヴェーン効果, 生産研究, 2006

謝辞

本研究を遂行するに当たり、羽田教授、松清准教授には多くのことを指導していただきました。また、個性を尊重し、好きな題材、スタイルで研究させていただきました。深く感謝いたします。また、羽田教授には就職活動においても企業への推薦状の作成などをして下さいました。貴重なお時間を割いていただいたこと、感謝いたします。また、羽田研究室の友人、先輩方、後輩の皆様には、研究面だけでなく、これからの社会生活で必要なことなど多くのアドバイスをしていただきました。おかげさまでこの2年間、人として立派に成長することが出来ました。深く感謝いたします。

また、大学時代の先生方、藤村先生、大信田先生には必要不可欠な数学、物理の基礎を1から教えていただき大変お世話になりました。感謝いたします。

大学時代の友人達、故郷山口県防府市の友人達にも人生の分岐点にて助言、励ましの言葉をたくさんかけていただきました。特に、杉本さんには大変お世話になりました。おかげさまで、ここまで道を踏み外すことなく歩みを進めることが出来ました。大変感謝いたします。

そして、これまで経済面、精神面を支えていただいた家族の皆様、ありがとうございました。