

諸恒常現象間の相関に関する研究（第4報告）：知覚恒常性とLuneburgの視空間理論

石井, 克巳

<https://doi.org/10.15017/2543255>

出版情報：哲學年報. 23, pp.39-57, 1961-09-20. 九州大学文学部
バージョン：
権利関係：

諸恒常現象間の相関に関する研究

(第 4 報告)

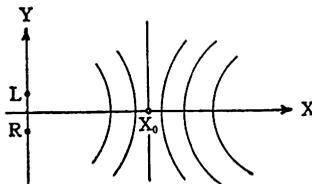
——知覚恒常性と Luneburg の視空間理論——

石 井 克 己

1. 序 言

これまでの報告 (5, 6) では、大きさや形の恒常現象が Luneburg の視空間理論で説明することができ、且これら両恒常現象間の相関が有意となる事実が Luneburg の定数 σ, k によって説明できることを理論的に考察した。そこで、一方では各観察者 O についてこれらの定数を測定し、他方大きさや形の恒常度を測定し、恒常度と定数との関係を実際に検討する問題が残る。今回は、この中 Luneburg の定数の測定について報告する。この測定法にも種々あるが、Blumenfeld の並木実験および Luneburg の VM 円の実験については既に述べたので(5)、ここでは Helmholtz (2) の実験 (three-rod experiment) をとり上げることにする。この実験は O にその頭部を固定して、垂直な糸で見かけ上の前額平行面を作らせるも

図〔1〕種々な位置における前額面ホロプター



ので、その結果は実際には同一平面上にはない。その形状は観察位置によって異り、水平面による切口は、図〔1〕に示すように、 O に近い位置では O に対して凹形 (concave) となり、遠い位置では凸形 (convex) となり、中間の特定の位置 X_0 においてのみ直線となる。このような曲線を前額面ホロプター (frontal plane horopter) と名づける。実験によって求められるホロプターと Luneburg の理論とによって2つの定数 σ, k を推定しようとするのである。

2. ホロプター曲線の理論

先ず Helmholtz の実験によって得られる曲線 (前額面ホロプター) の方程式を Luneburg の視空間理論 (7, 8) にしたがって求めることにする。この理論によれば、実験的ホロプターは、視空間における測地線 (geodesic line), すなわち2点を通る曲線中最短距離を有するものに外ならないとする。これを数学的に求めるには、線素 (line element) の距離微分 (metric differential) の積分を最小にする、いわゆる変分問題 (variation problem) を解くことになる。距離微分としては、直交座標系 ξ, η, ζ を用いて、次の Riemann の標準形 (Riemannian normal form) が仮定される。

$$ds = \frac{2\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{1 + k\rho^2} \quad (1)$$

ここで、 k は一定な Riemann 曲率 (Riemannian curvature), また $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ であって、 k の値は、それぞれの幾何学によって異なる。たとえば、Euclid 幾何学 (Euclidean geometry) では $k=0$, 楕円幾何学 (elliptic g.) では $k=+1$, また双曲幾何学 (hyperbolic g.) では $k=-1$ である。この距離微分を基にして、種々の幾何学的性質を解析的に論ずることができる。したがって、測地線も(1)の積分を最小にすることによって求められる。すなわち、

$$2 \int \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{1 + k\rho^2} = \text{最小} \quad (2)$$

を解いて得られる。ところで、この問題は、両極座標 r, φ, θ を導入した方が解き易いので、次の変換式を用いる。

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \eta = \rho \sin \varphi \\ \zeta = \rho \cos \varphi \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{ここで、さらに } \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = e^{-\sigma(r + \mu)} \quad (4)$$

と仮定する。ただし σ, μ は個人定数で、 μ は、また σ および k によって次のように表わされる。

$$\mu = \frac{\ln(1/-k)}{2\sigma}, \text{ 或は } k = -e^{-2\sigma\mu} \quad (5)$$

ここで、 σ はその個人の奥行知覚の正確度を表わし、また k はその視空間の曲率を表わす定数である。

さて(1)の標準形は、(3)、(4)によって次のように変換される。*

$$ds = M(r) \sqrt{\sigma^2 dr^2 + d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2} \quad (6)$$

ただし $M(r)$ は大きさの因子 (size factor) で、次の意味をもつ。

$$M(r) = \frac{2}{e^{\sigma(r + \mu)} + ke^{-\sigma(r + \mu)}} \quad (7)$$

したがって、(6)によれば、測地線を求める(2)式は次のように表わされる。

$$\int M(r) \sqrt{\sigma^2 dr^2 + d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2} = \text{最小} \quad (8)$$

さて、ここでは水平面の測地線を問題とするから $d\theta = 0$ となり、(8)は

* (3)の各式をそれぞれ ρ について微分して $d\xi, d\eta, d\zeta$ を求め、これらの微分を(1)の分子に適用すれば

$$ds = \frac{2\sqrt{d\rho^2 + \rho^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2)}}{1 + k\rho^2} \text{ を得る。この式に、さらに(4)を } r \text{ に}$$

ついて微分して得る $d\rho$ と共に(4)の ρ を代入して(6)を導くことができる。

いっそう簡単になる、すなわち、

$$\int M(r) \sqrt{\sigma^2 dr^2 + d\varphi^2} = \text{最小} \quad (9)$$

を解く問題となる。この問題を解くために、さらに次の変数 τ を導入する。

$$\tau = \sigma(r + \mu) \quad (10)$$

そうすれば、(7)は次のように表わされ、

$$M(\tau) = \frac{2}{e^\tau + ke^{-\tau}} \quad (11)$$

また φ を τ の函数であると考えれば、(9)は次のように表わされる。*

$$\int M(\tau) \sqrt{1 + \varphi'^2} d\tau = \text{最小} \quad (12)$$

この解、すなわち測地線は、Euler の微分方程式を満足しなければならないので、

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{M\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} \right) = 0 \quad (13)$$

となり、**

$$\frac{M\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} = C \quad (\text{一定}) \quad (14)$$

でなければならない。この式は、次のように表わすことができる。***

$$\varphi' = C \frac{\frac{1}{2}(e^\tau + ke^{-\tau})}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}C^2(e^\tau + ke^{-\tau})^2}} \quad (15)$$

* (10)より $\frac{d\tau}{dr} = \sigma$ であるから $d\tau^2 = \left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 dr^2$ 、また $\frac{d\varphi}{dr} = \varphi'$ とすれば、 $d\varphi^2 = (\varphi' dr)^2$ 、これらを(9)に代入して(12)を得る。

** (12)において $I = \int M(\tau) \sqrt{1 + \varphi'^2} d\tau = \int F(\tau, \varphi, \varphi') d\tau$ とおけば

Euler の微分方程式は $\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) = 0$ である。

ところが、 $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ であるから $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{M\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} \right) = 0$ となる。

*** (14)の両辺を2乗して $\frac{M^2\varphi'^2}{1 + \varphi'^2} = c^2$ 、 $\varphi'^2(M^2 - c^2) = c^2$

$\therefore \varphi' = \frac{c}{\sqrt{M^2 - c^2}}$ これに(11)を代入して(15)を得る。

また次の諸関係,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(e^\tau + ke^{-\tau})' = \frac{1}{2}(e^\tau - ke^{-\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^\tau - ke^{-\tau})' = \frac{1}{2}(e^\tau + ke^{-\tau}) \\ \frac{1}{4}(e^\tau + ke^{-\tau})^2 - \frac{1}{4}(e^\tau - ke^{-\tau})^2 = k \end{cases} \quad (16)$$

を用いて, (15)は次のように表わすことができる*

$$\varphi' = \frac{\frac{1}{2}(e^\tau - ke^{-\tau})'}{\sqrt{C^2 - \frac{1}{4}(e^\tau - ke^{-\tau})^2}} \quad (17)$$

ただし, ここで

$$\frac{1}{C} = -\frac{C}{\sqrt{1-kC^2}} \quad (18)$$

このCもまた定数である。(17)の条件では, 直接に積分が可能で, 次の方程式が導かれる.**

$$\varphi = \varphi_0 + \arccos \frac{1}{2C}(e^\tau - ke^{-\tau}) \quad (19a)$$

$$\text{すなわち} \quad 2C \cos(\varphi - \varphi_0) = e^\tau - ke^{-\tau} \quad (19b)$$

ここで C と φ_0 は積分定数である。再び $\tau = \sigma(\gamma + \mu)$ を用いて γ を導入し, パラメーターCと φ_0 に依存する測地線の方程式が得られる。

$$\text{すなわち} \quad 2C \cos(\varphi - \varphi_0) = e^{\sigma(\gamma + \mu)} - k e^{-\sigma(\gamma + \mu)} \quad (20)$$

* (16)の分子をcで割れば,

$$\varphi' = \frac{\frac{1}{2}(e^\tau + ke^{-\tau})}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4}(e^\tau + ke^{-\tau})^2}} \quad (i)$$

$$\text{また(16)の両辺を2乗して変形すれば,} \quad \frac{1}{c^2} = C^2 + k \quad (ii)$$

(i)の分子に(16)の第2式, 分母に(ii)と(16)の第3式を用いて(i)を得る。

** $\frac{d(\arccos X)}{dX} = -\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ によって (19a) を微分すれば(i)が導かれる。

したがって(i)の積分は(19a)である。

さて、この(20)の k に、 $-1, 0, +1$ の値を与えることによって、定曲率の3種の幾何学における測地線が求められる。*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{双曲幾何学}(k=-1) : \cosh\sigma(\gamma+\mu) = C\cos(\varphi-\varphi_0) \\ \text{ユークリッド幾何学}(k=0) : e^{\sigma(\gamma+\mu)} = 2C\cos(\varphi-\varphi_0) \\ \text{楕円幾何学}(k=+1) : \sinh\sigma(\gamma+\mu) = C\cos(\varphi-\varphi_0) \end{array} \right. \quad (21)$$

以上求めた(21)式は、水平面における一般の測地線であるが、これらの中特に関心をもたれるのは、 X 軸に関して対称である測地線である。なぜならばこのような測地線が、実験によって求められる前額面ホロプターを数学的に表現するものと考えられるからである。 X 軸に対称であることは、2つの値 $\pm\varphi$ が同一の値 γ をもつことを意味するから(21)式中のパラメーター φ_0 は、零でなければならないことになる。**

したがって、前額面ホロプターは、次の曲線で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{双曲幾何学} : \cosh\sigma(\gamma+\mu) = C\cos\varphi \\ \text{ユークリッド幾何学} : e^{\sigma(\gamma+\mu)} = 2C\cos\varphi \\ \text{楕円幾何学} : \sinh\sigma(\gamma+\mu) = C\cos\varphi \end{array} \right. \quad (22)$$

定数 C は、ホロプターが X 軸と交る点 X_0 の座標 $\varphi=0, \gamma=r_0$ によって決定され、3種の幾何学について、それぞれ次の3つの場合が考えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \cosh\sigma(\gamma_0 + \mu) \\ C = \frac{1}{2} e^{\sigma(\gamma_0 + \mu)} \\ C = \sinh\sigma(\gamma_0 + \mu) \end{array} \right. \quad (23)$$

この r_0 の値によって、上記の交点 X_0 が決定される。すなわち、

$$Y_0 = \cot \frac{\gamma_0}{2} \quad (24)$$

* $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ の関係を用う。

** もし $\varphi_0 \neq 0$ ならば、 $C\cos(\varphi - \varphi_0) \neq C\cos(-\varphi - \varphi_0)$ となり、 $\varphi, -\varphi$ に対応する γ は等しくないから、ホロプターは X 軸に関して対象とならない。

ただし、これは観察の中心をO、両眼の中心をR、Lとするととき $OR=OL=1$ として計算した場合である。

(23)の定数Cを用いれば、(22)は次のように表わされる。

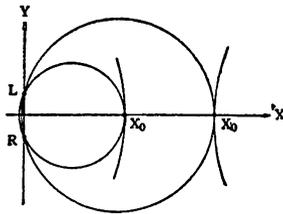
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{双曲幾何学} : \frac{\cosh\sigma(\gamma+\mu)}{\cosh\sigma(\gamma_0+\mu)} = \cos\varphi \\ \text{ユークリッド幾何学} : e^{\sigma(\gamma-\gamma_0)} = \cos\varphi \\ \text{楕円幾何学} : \frac{\sinh\sigma(\gamma+\mu)}{\sinh\sigma(\gamma_0+\mu)} = \cos\varphi \end{array} \right. \quad (25)$$

これらの式の右辺は1より大きいことはないし、左辺は r の単調増加函数であるから、これらのすべての曲線に対して、

$$r \leq r_0 \quad (26)$$

なる関係が成立する。すなわち、図〔2〕に示すように、前額面ホロプターは、このホロプターの中点 (median point) X_0 を通るVM円の外側に位置を占めると言える。

図〔2〕 前額面ホロプターとVM円との関係



以上水平面での測地線を、両極座標系 (r, φ) によって求めたが、直交座標系 (ξ, η) を導入すれば、著しく簡単な形式をとる。いま(20)に、(4)を適用すれば*

$$2C\rho\cos(\varphi-\varphi_0) = 1 - k\rho^2 \quad (27)$$

* (20)の両辺に $e^{-\sigma(\gamma+\mu)}$ を掛けて、(4)を代入すれば(27)を得る。

この式に、さらに(3)の第1, 第2式を($\theta=0$ として)適用して、次の式を得る*。

$$\varepsilon(\xi^2 + \eta^2) + 2(\xi \cdot \xi_0 + \eta \cdot \eta_0) = 1 \quad (28)$$

ただし、 $\xi_0 = C \cos \varphi_0$, $\eta_0 = C \sin \varphi_0$ とする。

この方程式は双曲幾何学 ($k=-1$) およびこの楕円幾何学 ($k=+1$) の場合は明らかに円を表わし、またユークリッド幾何学 ($k=0$) の場合は直線を表わす。

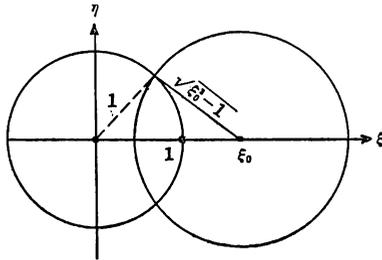
ここで、 $\eta_0=0$ (すなわち $\varphi_0=0$) とすれば、この測地線の方程式は ξ 軸に対称な前額面ホロプターを表わす.** 一般の測地線は、この特別な測地線をただ原点 $\xi=\eta=0$ の周りに回転することによって得られる。

双曲幾何学では、 $k=-1$ であるから、前額面ホロプターの方程式は、次のように与えられる***。

$$(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2 = \xi_0^2 - 1 \quad (29)$$

これは ξ 軸上の点 $\xi_0 > 1$ を中心とし、単位円と直交する****、半径 $\sqrt{\xi_0^2 - 1}$ の円であることがわかる (図〔3〕)。それ故、双曲等何学にお

図〔3〕 双曲空間におけるホロプター



* ⑦より $k\rho^2 + 2C\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$ これを展開して

$$k\rho^2 + 2(\rho\cos\varphi \cdot C\cos\varphi_0 + \rho\sin\varphi \cdot C\sin\varphi_0) = 1$$

これに $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\xi = \rho\cos\varphi$, $\xi_0 = C\cos\varphi_0$, $\eta = \rho\sin\varphi$, $\eta_0 = C\sin\varphi_0$ を代入して⑧を得る。

** ⑧で、 $\eta_0=0$ とすれば、2つの値 $\pm\eta$ に対して、同一の値 ξ をとる。したがってこの曲線は ξ 軸に関して対称である。

*** ⑧で、 $k=-1$, $\eta_0=0$ とすれば、 $-(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi_1\xi_0 = 1$, $\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\xi_0 = -1$, この両辺に ξ_0^2 を加えて⑨を得る。

**** 図〔3〕でも明らかであるが、 $1^2 + (\sqrt{\xi_0^2 - 1})^2 = \xi_0^2$ で、すなわち、両円の半径の2乗の和が、中心間の距離の2乗に等しいからである。

いては、 ξ 軸に対称な測地線は単位円と直交する円で表わされる。

次に楕円幾何学($k=+1$)では、

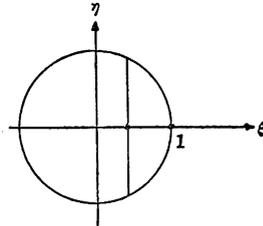
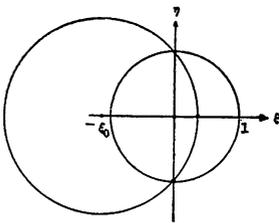
$$(\xi + \xi_0)^2 + \eta^2 = \xi_0^2 + 1 \quad (30)$$

これは ξ 軸上の点 $-\xi_0 < 0$ を中心とし、単位円上の点 $\eta = \pm 1$ を通る、* 半径 $\sqrt{\xi_0^2 + 1}$ の円である (図[4])。それ故、楕円幾何学においては、測地線は単位円とその直径の両端で交る円として与えられる。

最後に、ユークリッド幾何学 ($k=0$) の測地線は、簡単に ξ, η 平面上の直線である** (図[5])。

図[4] 楕円空間におけるホロプター

図[5] Euclid空間におけるホロプター



以上前額面ホロプターを数学的に表現するものとして、水平面上の X 軸に対称な測地線を考察してきた。しかし、いずれの幾何学においてもこれらの曲線 (25) は、 O の近傍では、 O に対して凹形であり、次第に遠去かるにつれて凸形となることがわかる。したがって O から適當の距離 X_0 において、前額面ホロプターは、実際に直線となる筈である。そこで3種の幾何学ついて、この特定な距離 X_0 を求める問題をとり扱うことにする。それには、一般に測地線が X 軸と交わる点 X_0 ($r=r_0, \varphi=0$) における、この曲線の曲率 K を求める必要がある。

先ず双曲幾何学の場合から始める。(25) の最初の方程式

* (30)において、 $\xi=0$ とすれば、 $\eta=\pm 1$ となるから、ホロプターを表わす円は、単位円と $(0, \pm 1)$ で交ることがわかる。

** (28)で、 $k=0, \eta_0=0$ とすれば、 $\xi = \frac{1}{2\xi_0}$ 、これは η 軸に平行な直線を表わす。

$$\frac{\cosh\sigma(\gamma+\mu)}{\cosh\sigma(\gamma_0+\mu)} = \cos\varphi \quad (31)$$

において、 $\varphi=0$ の近傍では

$$\cosh\sigma(\gamma+\mu) = \cosh\sigma(\gamma_0+\mu) + \sigma\sinh\sigma(\gamma_0+\mu)\Delta\gamma + \dots$$

が成立、*また

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots$$

であるら、 X 軸の近辺での曲線の形状に関心をもつならば(31)は、次のように書き換えられる。 **

$$\Delta\gamma = -\frac{1}{2\sigma}\coth\sigma(\gamma_0+\mu)\varphi^2 \quad (32)$$

次に、この(32)の γ, φ の関係を、直交座標を用いて X, Y の関係に直す必要がある。それには、これら両座標系間の次の変換式を用う。

$$\begin{cases} X = \frac{\cos 2\varphi + \cos \gamma}{\sin \gamma} \\ Y = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \gamma} \end{cases} \quad (33)$$

(33)の初の式から、 φ の小さな値に対しては、 X は次のように表わされる ***.

$$\begin{aligned} X &= \frac{1 - 2\varphi^2 + \cos \gamma_0 - \sin \gamma_0 \Delta\gamma}{\sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \Delta\gamma} + \dots \\ &= \frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin \gamma_0} \left\{ 1 - \frac{2\varphi^2}{1 + \cos \gamma_0} - \frac{\Delta\gamma}{\sin \gamma_0} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

(32)の $\Delta\gamma$ は φ の 2 次式で、その値は小さいから、(34)式において、 $(\Delta\gamma)^2$

以上の項は省略する。またこの式で $\frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin \gamma_0} = X_0$, $X - X_0 = \Delta X$ とおけ

* Maclaurin の定理 $f(X) = f(X_0) + f'(X_0)\Delta X + \frac{f''(X_0)}{2!}\Delta X^2 + \dots$
による ($X = X_0 + \Delta X$).

** (31)式の左辺の分子 $\cosh \sigma(\gamma + \mu)$ と右辺の $\cos \varphi$ に、それぞれ上の値を代入すれば、 $1 + \sigma \tanh \sigma(\gamma_0 + \mu)\Delta\gamma = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ 、これより直ちに(32)が導かれる。

*** 上の注*参照。

ば、 ΔX は次のように表わされる。

$$\Delta X = -\frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin \gamma_0} \left\{ \frac{2\varphi^2}{1 + \cos \gamma_0} + \frac{\Delta \gamma}{\sin \gamma_0} \right\} \quad (35)$$

さて、ここで(32)を用いるならば、

$$\Delta \gamma = c\varphi^2 \quad (36)$$

ただし、

$$c = -\frac{1}{2\sigma} \coth \sigma (\gamma_0 + \mu) \quad (37)$$

次の ΔX を得る.*

$$\Delta X = -\frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin^2 \gamma_0} (2 \tan \frac{1}{2} \gamma_0 + c) \varphi^2 \quad (38)$$

(33)の第2式は、 φ の小さな値に対しては次の近似式で与えられる.**

$$\varphi = \frac{1}{2} \sin \gamma_0 Y \quad (39)$$

この値を、(38)に代入して、

$$\Delta X = -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\gamma_0}{2} (2 \tan \frac{1}{2} \gamma_0 + c) Y^2 \quad (40)$$

これは、明らかにもとの曲線(32)或は(36)と等しい曲率 K をもつ抛物線 (parabola) であるから、次の定理が立てられる。もしも X 軸に対称である曲線が、 φ の小さな値に対して、

$$\Delta \gamma = c\varphi^2 + \dots$$

のように展開されるならば、 X 軸におけるこの曲線の曲率は、次の式で与

* $1 + \cos \gamma_0 = 2 \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}$ であるから、これを(38)に代入して

$$\Delta X = -\frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin \gamma_0} \left\{ \frac{2\varphi^2}{2 \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}} + \frac{c\varphi^2}{\sin \gamma_0} \right\} = -\frac{1 + \cos \gamma_0}{\sin^2 \gamma_0} \left\{ \frac{\sin \gamma_0 \varphi^2}{\cos^2 \frac{\gamma_0}{2}} + c\varphi^2 \right\}$$

ところで $\sin \gamma_0 = 2 \sin \frac{\gamma_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2}$ であるから、これを上式に代入して(38)を得る。

** $\varphi = 0$ であれば $\gamma = \gamma_0$ であるから、 φ が小ならば、 $Y = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \gamma} = \frac{2\varphi}{\sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \Delta \gamma}$

ここで、 $\cos \gamma_0 \Delta \gamma$ を省略して整頓すれば(39)を得る。

えられる。*

$$K = -\cos^2 \frac{1}{2} \gamma_0 (2 \tan \frac{1}{2} \gamma_0 + c) \quad (41)$$

そこで、この結果に(37)の c の値を代入して、ホロプター曲線(31)の曲率が得られる。すなわち、

$$K = +\cos^2 \frac{1}{2} \gamma_0 \left\{ -2 \tan \frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{2\sigma} \operatorname{coth} \sigma (\gamma_0 + \mu) \right\} \quad (42)$$

ここで、 γ_0 は一般にホロプターが X 軸と交る点の座標 $X_0 = \cot \frac{1}{2} \gamma_0$ を決定する。**

K の符号は、(42)の右辺の括弧 $\{ \}$ 内の値によって決定される。この値は、もしも $X_0 \rightarrow 0$ 、すなわち $\gamma_0 \rightarrow \pi$ であれば $-\infty$ に近づく、また $X_0 \rightarrow \infty$ すなわち $\gamma_0 \rightarrow 0$ であれば、正の値 $\frac{1}{2\sigma} \operatorname{coth} \sigma \mu$ に漸近的に近づく。したがって、前述のようにホロプターは O の近くでは凹形であり、遠くでは凸形となる。これらの間のある特定の点 X_0 において、 $K = 0$ とならねばならない。この特別な X_0 の値を求めるために (42) において $K = 0$ とおく。そうすれば、

$$\tan \frac{\gamma_0}{2} \tanh \sigma (\gamma_0 + \mu) = \frac{1}{4\sigma} \quad (43)$$

前述のように一般に $X_0 = \cot \frac{\gamma_0}{2}$ であるから、この特別な X_0 の値は、

$$X_0 = 4\sigma \tanh \sigma (\gamma_0 + \mu) \quad (44)$$

$$\text{そこで直ちに } X_0 < 4\sigma \quad (45)$$

* 曲率を求める公式は $K = \frac{|X''|}{(1+X'^2)^{\frac{3}{2}}}$ であるから、 $X = aY^2$ なる拋物線では、

$$X' = 2aY, \quad X'' = 2a, \quad \therefore K = \frac{2a}{(1+4a^2Y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Y=0 \text{ では } K=2a$$

したがって、(4)の K は、(40)の Y^2 の係数の 2 倍になっている。

** 両眼の中心 L, R を結ぶ線分の midpoint を O として $OL = OR = 1$ とすれば、

$$\frac{X_0}{OL} = \cot \frac{\gamma_0}{2} \text{ であるから } X_0 = \cot \frac{\gamma_0}{2}$$

と結論できる.* 以上の(31)および(43)を用いて、個人定数 σ および μ を決定することができる。また別の方法で、 σ 、 μ が求められれば、これを用いて $K=0$ となるようなホロプターの位置を、(43)および(44)によって予測することができる.**

以上で、双曲空間のホロプターの曲率に関する考察を終ったので、次に Euclid 空間および、楕円空間におけるホロプターについて考察しよう。

(25)の第2, 第3の方程式に、以上と全く同様な方法を適用して $\varphi=0$ の近傍でのホロプター曲線の方程式を導くことができる。

$$\begin{cases} \text{ユークリッド幾何学} : \Delta r = -\frac{1}{2\sigma}\varphi^2 \\ \text{楕円幾何学} : \Delta r = -\frac{1}{2\sigma}\tanh\sigma(r_0+\mu)\varphi^2 \end{cases} \quad (46)$$

そこで、前述の定理(41)に、(46)から得られる定数 c を代入して、これらのホロプターの曲率 K を求める公式を得る。

$$\begin{cases} \text{ユークリッド幾何学} : K = \cos^2\frac{1}{2}r_0\left(\frac{1}{2\sigma} - 2\tan\frac{1}{2}r_0\right) \\ \text{楕円幾何学} : K = \cos^2\frac{1}{2}r_0\left(\frac{\tanh\sigma(r_0+\mu)}{2\sigma} - 2\tan\frac{1}{2}r_0\right) \end{cases} \quad (47)$$

このいずれの場合においても、双曲幾何学の場合と同様に、 $X_0 \rightarrow 0$ すなわち $r_0 \rightarrow \pi$ 、では、 $K \rightarrow -\infty$ となり、また、 $X_0 \rightarrow \infty$ 、すなわち $r_0 \rightarrow 0$ では、 K は一定の正の値に近づく。したがって、どの数何学においてもホロプターは O の近くでは凹形、遠くでは凸形となる。これらの間にある特定の X_0 の値では、 $K=0$ とならねばならない。そのときの r_0 の値は、(47)で $K=0$ とした方程式、

$$\begin{cases} \tan\frac{1}{2}r_0 = \frac{1}{4\sigma} \\ \tan\frac{r_0}{2}\coth\sigma(r_0+\mu) = \frac{1}{4\sigma} \end{cases} \quad (48)$$

* $\tanh\sigma(r_0+\mu) < 1$ だからである。

** Zajaczkowska (10)は、この予測が実測とよく一致することから、視空間が双曲的空間であるこの結論を支持する。

から、またその時の X_0 の値は、 $X_0 = \cot \frac{1}{2} r_0$ の関係を用いて求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ユークリッド幾何学} : X_0 = 4\sigma \\ \text{楕円幾何学} : X_0 = 4\sigma \coth \sigma (r_0 + \mu) \end{array} \right. \quad (49)$$

この第2の式では、 $X_0 > 4\sigma$ となることは、明らかである。* (45)と(49)とを比較考察すれば、3種の幾何学の相違は、個人定数 σ と前額面ホロプターが実際に直線となる位置 X_0 との関係に反映する。すなわち、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_0 < 4\sigma & (\text{双曲幾何学}) \\ X_0 = 4\sigma & (\text{ユークリッド幾何学}) \\ X_0 > 4\sigma & (\text{楕円幾何学}) \end{array} \right. \quad (50)$$

3. 前額面ホロプターに関する実験

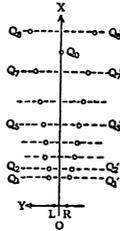
前節の註で述べたように、Zajaczkowska(10)は、Luneburg の VM 円の実験 (3点および4点テスト) によって測定した個人定数 σ , k を用いて、前額面ホロプターの性質を予測し、これが実験結果と近似的に一致することを確かめた。したがって、逆にこの種の実験結果を用いて個人定数 σ , k を推定する可能性が考えられる。ここに報告する実験は、この予想のもとに行われた。

実験装置 図(6)に示すように、8対の光点 Q_i, Q'_i ($i=1, 2, \dots, 8$) が、正中線に対称に O からの距離が、それぞれ $X=50, 65, 83, 108, 139, 180, 232, 300\text{cm}$ であるようにテーブル上に固定される。初の3対 ($i=1\sim 3$) については、それぞれ $\varphi = \pm 5.71^\circ, \pm 7.37^\circ, \pm 9.46^\circ$ であり、その後の5対 ($i=4\sim 8$) については等しく、 $\varphi = \pm 10^\circ$ とした。

* $\coth \sigma (r_0 + \mu) > 1$ だからである。

また正中線上には可動光点 Q_0 があって、 O は Q_0 に連結した紐を操作することによって、 Q_0 を OX 上で自由に前後に動かすことができるようになっている。これらの光点は、すべて O の眼の高さに提示した。

図〔6〕前額面ホロプター実験の装置



実験手続き 観察は暗室で、両眼によって行われ、 O は心理学専攻者 12名 (男子) であった。 O の頭部は、顔面固定器によって、運動を妨げられるが、両眼は自由に動かすことができる、 O に求められる操作は、可動光点 Q_0 を調整して、 Q_0 が1対の光点 Q_i 、 Q'_i と一直線をなすように見える位置を求めることで、「中央の光点を、2つの固定光点を通る直線上に丁度くるようになさい」と教示する。もちろん、特定の1対、たとえば Q_3 、 Q'_3 について観察するときは、他の光点は消す。 O は暗順応が十分できるまで、いくつかの対について予備的訓練を行った。

光点の各対について6回の測定を行った。3回は Q_0 の初の位置 X_0 を、 Q_i 、 Q'_i の位置 X_i ($i=1, 2, \dots, 8$) よりも遠くして ($X_0 > X_i$)、また3回は $X_0 < X_i$ として、 $X = X_i$ に見えるような位置 X を求めさせた。したがって、前者では、 Q_0 を近づけ、後者では遠ざけることになるが、もし行き過ぎたと O が思う場合は、戻すことも自由とした。これら6回の測定はランダムな順序で行った。測定結果は、調整された可動光点の位置 X と固定光点の位置 X_i とのずれ、 $X - X_i = d$ で表わされた。したがって、 $d > 0$ なる場合は、調整の結果が、 O に対して凹形となり、また $d < 0$

の場合は、凸形となる。

予備的試行での O の内省報告によると、近い対 ($i=1,2$)、あるいは遠い対 ($i=7,8$) が調整に困難を感じたというので、測定は大体中央の対 ($i=5,6$) から開始し、それより遠方あるは手前に移ることにした。

実験結果 12名の O についての実験結果が表〔1〕に示してある。この表は、固定光点の各位置 (i) についての d の値〔6回の測定値の平均(cm)〕を示す。

表〔1〕前額面ホロプターの実験結果： $d=X-X_i$

Dist. i	50 (cm)	65	83	108	139	180	232	300
	1	2	3	4	5	6	7	8
Obs. A	-.08	-1.15	+.67	+.88	+.52	-2.23	-.53	+11.13
B	-.27	-2.13	-.58	+1.35	+2.20	+5.63	+6.13	+9.08
C	-.15	-1.00	-.18	+.82	+.95	+2.87	+5.48	+11.05
D	-.12	-1.90	-.98	-.07	-1.02	-3.17	-3.88	-3.20
E	-.27	-.58	+.62	+.90	+1.72	+1.43	+2.58	+3.28
F	-.25	-.98	-.25	-.67	-.17	-1.43	+1.42	-.30
G	-.22	-1.23	-.20	-.13	-.93	+2.10	+.77	+1.43
H	-.03	-1.70	-.23	-.38	+1.63	+4.33	-3.47	+3.52
I	-.13	-2.90	-1.28	-2.28	-4.07	-2.60	+1.33	+7.22
J	-.22	-.30	.00	-1.25	-.25	+.67	+1.40	+1.38
K	-.13	-.63	-.60	-.78	+1.58	+1.30	+1.08	+4.28
L	-1.00	-2.00	-1.98	-2.35	-3.25	-7.33	-18.18	+1.00

この表について見ると、大体において、 $i=1\sim4$ の位置では、 $d<0$ であり、 $i=5\sim8$ の位置では、 $d>0$ となっている。前節で考察したように Luneburg の理論によれば、視空間がいずれの幾何学的性質をもつにせよ、 O に近い位置では、 $d>0$ となり、遠い位置では $d<0$ となる筈である。表〔2〕には Zajaczkowska (10) のデータの一部を示すが、この事実を支持している。したがって、本実験の結果は著しく異ると云わなければならない。*

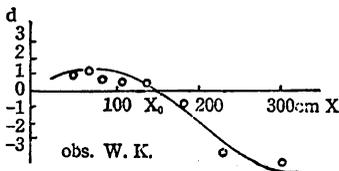
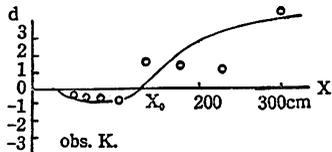
* (0) について考察すれば、楕円空間の場合に、このような結果の起る可能性が考えられる。

表〔2〕 Z氏 data の一部： $d=X-X_i$

Dist. i	50 cm	65	83	108	139	180	232	300
	1	2	3	4	5	6	7	8
S. V. S	-.15	-.25	-.45	-2.00	-2.73	-4.53	-5.59	-6.82
T. K	+.18	+.14	+.26	-.64	-.37	-1.09	-2.10	-2.55
W. K	+1.05	+1.20	+.78	+.56	+.50	-.78	-3.85	-4.50

なお各Oの結果について少しく注意してみれば、dの傾向について2つの型が見られる。それは、 $i=1\sim n$ では $d<0$ で、 $i=(n+1)\sim 8$ では $d>0$ となる負—正型 (Obs. B, C, E, G, H, I, J, K), $i=1\sim 8$ の殆どすべての位置で $d<0$ を示す全負型 (Obs. D, F, L) で、僅に1名が不定型 (Obs. A) であった。いずれにしても Luneburg の理論にしたがうような正—負型は、1名も見当らなかった。なお図〔7〕は本実験 (上方) および Z氏の実験 (下方) 結果の典型的なものを選んで比較したもので、反対の傾向を示している。

図〔7〕 実験結果の例



本実験の装置ならびに手続きは、大体において Zajaczowska に倣ったもので、著しく異なる点は、ここでは観察者調整法を用いたのに対し、Z氏は

実験者調整法によつたことである。この点の相違が、実験の結果を、このように著しく変化させたのであろうか、この点については、大いに検討する必要があると思う。

4. 結 語

Luneburg(7) は、その結論で、視空間について定曲率の仮設は立てるが、その特性が双曲的か、Euclid 的かそれとも楕円的であるかは、実験結果に徴して決定すべきものであると述べ、自身は Blumenfeld の実験結果を用いて視空間の双曲幾何学的性質を明らかにした。その後 Hardy 等(1) は並木実験を行い15名のO中9名についてこの事実を確かめた。Zajaczkowska (9,10) は、VM円の実験、ホロプローおよび並木実験を行い、30名のO全部について視空間の双曲的性質を証明した。また最近印東、井上両氏(3,4)もVM円および並木実験によつて7名のO全部について同様の結論に達した。しかし、上述のように本研究では、12名のO全部について著しく異なる結果を得た。初めに述べたように、この研究の意図は、ホロプター実験を通じて Luneburg 定数を推定することにあつたが、この実験のみでは、視空間がいずれの幾何学に従うかを決定することが困難で、したがつて前節の(25)および(44)あるいは(49)を用いて定数 σ および μ (あるいは k)を決定することも困難であることが明らかとなつた。そこで上記の結果を検討すると共に、別の方法を用いて σ および k の値を決定し本来の目的である恒常度との関係を考究しようと計画をすすめている。

(未完)

文献：

- (1) Hardy, L. H., et al., Investigation of visual space. The Blumenfeld alleys. *A. M. A. Archives of Ophthalmology*. 1951, 45, 53-63
- (2) Helmholtz, H. L. F., *Physiological optics*. Edited by J. P. C. Southall, Opt. Soc. Amer., Rochester, N. Y., 1925.
- (3) 印東太郎, ルネバアグの理論に関する実験的検討1. 2つの常数の推定につ

いて。

日本心理学会第24回会発表論文集, 1960.

- (4) 井上恵美子, 同上2. 平行線の知覚に対する常数の適用.
日本心理学会第24回会発表論文集, 1960.
- (5) 石井克己, 諸恒常現象間の相関に関する研究 (第3報告), 哲学年報, 1960,
22, 347-378.
- (6) —, 同上(4), 日本心理学会第24回大会発表論文集, 1960.
- (7) Luneburg, R. K., *Mathematical analysis of binocular vision*. Princeton
University Press, Princeton, 1947.
- (8) —, The metric of binocular visual space. *J. Opt. Soc. Amer.*,
1950, 40, 627-642.
- (9) Zajaczkowska, A., Experimental determination of Luneburg's
constant σ and K . *Q.J. Exptl. Psychol.*, 1956, 8, 66,-78.
- (10) —, Experimental test of Luneburg's, theory. Horopter and alley
experiments. *J. Opt. Soc. Amer.*, 1956, 46, 514-527.