Topology of Random Geometric Complexes in Thermodynamic Regime

アクシェイ, ゴエル

https://doi.org/10.15017/2534381

出版情報：Kyushu University, 2019, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	Akshay Goel
論　文　名	Topology of Random Geometric Complexes in Thermodynamic Regime (熱力学的レジームにおけるランダム幾何的複体のトポロジー)
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　白井朋之 副　査　　九州大学　　教授　長田博文 副　査　　九州大学　　教授　稲濱譲 副　査　　京都大学　　教授　平岡裕章

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ランダムネスをともなうデータや幾何的な対象の位相的性質を扱うランダムトポロジーは，近年の位相的データ解析の重要性の高まりとともに進歩が著しい分野である．統計学や機械学習で取り扱われるデータは，しばしばユークリッド空間内のベクトル，つまり点クラウドデータとして与えられることが多い．点クラウドデータの位相的解析は，基本的な統計ツールとしてコンピュータソフトウェアの開発も進み，諸科学分野において基礎的な役割を果している．点クラウドデータには二つの重要なクラスがあり，一つは空間的に一様なランダム点配置を表現する定常点過程であり，もう一つはある確率変数の独立同分布確率変数列，つまり，いわゆる i.i.d.サンプリングから得られる二項点過程とよばれるものである．例えば，未知の多様体の近傍からランダムに点が抽出されたデータが与えられたとき，そのデータから元の多様体を特定をする問題は，現実の問題を扱う際にしばしばあらわれる重要な課題で，多様体学習ともよばれ，後者の二項点過程の解析がきわめて重要である．本論文で取り扱う対象は，リーマン多様体上で定義される二項点過程から定義されるチェック複体のベッチ数もしくはパーシステントベッチ数である．チェック複体とは，各点を中心とする半径 r の球からなる集合族から定まる脈体とよばれる単体的複体である．多様体上の二項点過程は，この半径 r とサンプリングした点の個数に応じて，疎(sparse)，熱力学的(thermodynamic)，密(dense)の 3 つのレジームに分類される．大雑把にいうと，適当なスケーリングのもと，有限領域内の点の個数密度が漸近的に 0，有限，∞であることによって分類される．疎なレジームでは，各点がほぼ孤立集合のように振る舞い，確率論的には独立性が強い状況であるため，ベッチ数の漸近挙動の解析は比較的易しく，例えば，ユークリッド空間の場合は Kahle-Meckes によって，多様体の場合は Bobrowski-Mukherjee によって，ベッチ数に関するポアソンの少数法則が示されている．また，密のレジームでは，点の個数が充分に存在するので，多様体の情報をある程度復元可能であることが期待され，実際チェック複体のホモロジー群と多様体のホモロジー群が同型になる確率が，サンプルの漸近的個数密度が log n を閾値として，0 または 1 に収束するという相転移現象が Niyogi-Smale-Weinberger，Bobrowski-Oliveira らによって示されている．本論文で取り扱っている熱力学的レジームはこれら疎と密の中間に相当し，現象論的にはもっとも興味深いレジームであるが，大数の法則，中心極限定理などの理解はまだ完全とは言えない状況である．このレジームでは，二項点過程に対する幾何的グラフにおいてパーコレーションが起り始め，ちょうど巨大連結成分があらわれ始める状況となっている．そのため，ベッチ数が遠方の点配置にも依存するようにな

り，長距離の相関をもつため，解析には工夫が必要である．この状況で，Penrose-Yukich は連結成分の個数(0 次のベッチ数)に対する大数の法則を示し， その結果の高次元版に相当する高次のベッチ数に関する大数の法則を，最近 Yogeshwaran-Subag-Adler らが示した．その後，Trinh によって，この極限値が定常ポアソン過程のチェック複体に関するベッチ数の大数の法則にあらわれる極限値を用いて積分表示されることが示された．本論文では，リーマン多様体上の二項点過程のチェック複体を考え，熱力学的レジームにおいて，ベッチ数のみならず，その一般化であるパーシステントベッチ数に対する大数の強法則を証明した．また，その極限値が，定常ポアソン過程の場合の極限パーシステントベッチ数による積分で与えられることを証明した．この結果は，Journal of Statistical Physics(2019)に出版済みである．先行研究では二項点過程を定義する際の確率密度関数の有界性や，台がコンパクトであるなどの技術的な条件が仮定されていたため，正規分布などの標準的な確率密度関数が含まれていなかったが，本論文の証明の中で，それらの技術的な条件をモーメント条件，つまり確率密度関数の可積分性の条件に置きかえることに成功し，定理の応用の範囲は格段に拡がった．また，パーシステントベッチ数に対する大数の法則を応用して，二項点過程から定まるパーシステント図が漠位相のもと，あるランダム場に確率 1 で収束するという大数の強法則を証明した．

以上の結果は，位相的データ解析の分野で基本的な結果であると同時に，ランダムトポロジーの分野においても価値あるすぐれた業績と認められる．

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．