

## Certain rigidity theorem for compact manifolds with almost nonpositive Ricci curvature

中村, 拓也

<https://doi.org/10.15017/2534379>

---

出版情報 : Kyushu University, 2019, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名	中村拓也			
論 文 名	Certain rigidity theorem for compact manifolds with almost nonpositive Ricci curvature (ほとんど非正のリッチ曲率を持つコンパクト多様体に関する剛性定理)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	勝田 篤
	副 査	九州大学	教授	小磯深幸
	副 査	九州大学	准教授	大津幸男
	副 査	東北大学大学院理学研究科	教授	本多正平

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

リーマン幾何学の主要課題は空間の曲率等局所的量と位相構造等の大域的情報の関連を探ることである。このような問題意識は前世紀前半に遡るが、その研究の歴史の初期に **Bochner** は次の二つの結果

1.  $n$  次元コンパクト向き付け可能リーマン多様体  $M$  のリッチ曲率が非負であればその第 1 ベッチ数は  $n$  以下であり、もしそれが  $n$  と等しければ  $M$  は平坦トーラスと等長である。

2.  $n$  次元コンパクトリーマン多様体  $M$  のリッチ曲率が非正であれば、その等長変換群の次元は  $n$  以下で、もしそれが  $n$  に等しければ  $M$  は平坦トーラスと等長である。

を示した。この結果はその証明方法が当時としては画期的で、それは **Bochner** 技法とよばれ、その後の多くの研究の礎となった。

その後、80 年代に **Gromov** と **Gallot** により、前者の結果の前半部が、 $M$  のリッチ曲率がほぼ非負の場合まで仮定が弱められた、すなわち次元  $n$  と直径に依存するある負の定数が存在して、リッチ曲率がその定数よりも大きければ第 1 ベッチ数は  $n$  以下であることが示された。**Gromov** の証明は幾何的なものであったが、**Gallot** による証明は、解析的で **Sobolev** 不等式等の幾何学的不等式をそこにあらわれる種々の定数の明示形を含めて与えており、これもその後の研究に多大なる影響を与えた。

さらにその当時 **Gromov** による予想であった前者の後半部の緩和、「リッチ曲率がほぼ非負かつ、第 1 ベッチ数が  $n$  に等しければ  $M$  はトーラスと微分同相であろう」という主張はその後 90 年代になって **Cheeger** および **Colding** により示された。この結果は彼らが発展させつつあったリッチ曲率が下に有界であるような多様体の列の収束理論の応用により証明され、この手法もその後のリーマン幾何の主要な話題となった。以上が前者の結果の発展の歴史であるが、これらはリーマン幾何の発展の中心的話題の一つであった。

本論文は、**Bochner** の後者の結果に焦点を当てたものである。まず、後者の結果の前半部の仮定をリッチ曲率がほぼ非正、すなわちリッチ曲率が、多様体の次元  $n$ 、直径、リッチ曲率の下限に依存するある正の定数以下であれば、等長変換群の次元が  $n$  以下であることを示している。しかし、この結果が明示的に書かれた他の文献は見当たらないが、この部分は **Gallot** の上記結果の証明のちょっとした変形で得られ、専門家にはある程度知られていたように思われる。

次に後者の結果の後半部の条件の緩和、すなわち「リッチ曲率が、多様体の次元  $n$ 、直径、リッチ曲率の下限に依存するある正の定数以下で、等長変換群の次元が  $n$  に等しければ平坦トーラス

に等長である。」を示している.

これは Cheeger および Colding の上記結果の対応物とはいえが、その特徴として

1. 結論がトーラスと微分同相という位相的結果のみでなく、平坦トーラスと等長的であるという計量構造まで決定している,
2. Cheeger および Colding の結果においては、証明に背理法を用いているため、その中にあらわれるほぼ非負ということを表す定数は、その存在だけは示されているが、その大きさの明示的評価はできない. これに反して、本論文ではほぼ非正を表す定数の明示的評価が可能である、というものがあ、リッチ曲率の下限の仮定が付加されているとはいえ、彼らの結果の単なる対応物よりは、強い結果を示している. そのため証明方法も類似ではなく、独自に考案されたものである.

以上により、本論文はリーマン幾何学の分野において価値ある業績と認められる. よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。