

合理的バブルの検定の検出力について

片山, 直也
九州大学大学院経済学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/25181>

出版情報：経済学研究院ディスカッション・ペーパー, 2009-07. Faculty of Economics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

合理的バブルの検定の検出力について*

BY NAOYA KATAYAMA

Faculty of Economics, Kyushu University, 6-19-1, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-8581, Japan.
kata@kyudai.jp

概要. 国内株価指数 (TOPIX) において 1990 年前後に合理的バブルが生起していたかどうかの検定を行う. この検定は自己回帰 (Auto-regressive, AR) モデルによる単位根検定に帰着される. ただし対立仮説は定常 AR(1) モデルによる左片側検定ではなく, explosive AR(1) モデルによる右片側検定である. この右片側検定ならびにモデルに構造変化を加味した検定は未整備である. そのため, この検定における主要な検定統計量である Augmented Dickey-Fuller (ADF) 検定統計量とその改良型 (recursive, rolling) の検出力を理論とシミュレーションの両面から検証した. これら検定統計量は, TOPIX の合理的バブルを検出した. 検出された期間は 1986 年から 1990 年にかけてで景気循環との整合性も確認された.

Keywords. explosive AR(1) モデル; ADF test; 合理的バブル; TOPIX; 構造変化.

1 はじめに

バブルの歴史は古く, Chancellor (2000) によると知られている 1 つは 1630 年代のオランダでのチューリップ・バブルである. それから 400 年近くたった今日でも, バブルの歴史は繰り返されるばかりか, 規模と頻度は大きくなるばかりである. 本邦では 1990 年初頭に崩壊したの株・土地のバブル, 国際的には, 近年アメリカをはじめとする IT バブル, サブプライムローン問題は記憶に新しい.

一般的な市場におけるバブルとはファンダメンタルズから著しく乖離した部分を指すが, 経済学ではこの乖離をより厳密に定義している. 合理的バブルの概念は Blanchard and Watson (1982) により提唱され, バブルを合理的バブルと非合理的バブルとに分離した. 合理的バブルとは, 合理的期待仮説に基づいており, 現在の価格がファンダメンタルズを上回っていてもそれが上昇されると期待されるならばその資産はさらに需要されるという人々の合理的な期待形成によるものである. 一方, 非合理的バブルとは, 一時的な非合理的行動 (ファズ・ニュースなど) によるものである.

1990 年初頭にかけて, 非合理的バブルが存在しないと仮定して, 合理的バブルが存在するの可否か, 計量経済学上での検証が行われた. 海外では S&P500, Dow Jones, NASDAQ のバブルの検証がさかんに行われた. 詳しくは Gurkaynak (2005) のサーベイを参照されたい. 本邦では計量経済学上の検証は少なく, 東京三菱銀行資金証券部 (2004) が直近の TOPIX について検証を行っている. しかしながら, いずれのケースでも合理的バブルが存在するかどうかの結論は収束していない. 問題点は大きくわけて 2 つあり, (1) バブル経済モデルの問題: 非合理的バブルが存在しないと仮定している. (2) 計量経済学上の問題: 想定される時系列モデルと検定手法が未熟であること. の 2 点があげられる. 非合理的バブルは短期的に影響するノイズ (異常値) と解釈しモデルを再構築し, 時系列モデルでは異常値を加味したモデルを考えればよい. ゆえに主な難点は計量経済学上の問題によるところが大きい. そして, 昨今では合理的バブルの検証に議論が集中している. 現状では, 合理的バブルのモデルは 1 次の自己回帰 (First order auto-regressive, AR(1)) モデル:

$$b_t = (1 + g)b_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

*Discussion paper, Revision Date: 平成 21 年 7 月 17 日.

に帰着する。ここで、 $\{b_t\}$ は観測不能な合理的バブル、 g は非負のパラメータ、 $\{\varepsilon_t\}$ は平均 0 の誤差項である。もし $g > 0$ ならば、バブル b_t は t の増加と共に増大しバブルの状態を引き起こす。 $g = 0$ ならば増大しない。よって、

$$H_0 : g = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : g > 0 \quad (2)$$

の片側検定が合理的バブルの検定となる。しかしながら Evans (1991) らにより augmented Dicky-Fuller (ADF) 検定など、既存の検定の検出力は著しく低いことが報告されている。

まとめると検出力が高く、非合理的バブルや構造変化にロバストな検定統計量の開発が主要な課題である。

この問題に対して、近年、Phillips et al. (2006) は、従来の ADF 検定統計量を改良した supADF 検定統計量を提案した。この検定統計量は、再帰的回帰を用いて標本の大きさ n を変えながら逐一 ADF 検定統計量を計算し、その中で最大のもので検定を行おうというものである。そして数値実験から supADF は ADF 検定統計量より検出力が高いことを示している。また配当を除いた NASDAQ 総合指数の検証した結果、合理的バブルの存在を確認し、合理的バブルの 3 つの時点「生起・ピーク・終結」を検出できることを主張した。

本稿の研究内容は、この検定における主要な検定統計量である ADF 検定統計量とその改良型 (recursive, rolling) の検出力を理論とシミュレーションの両面から検証し、TOPIX の実証分析に反映させたものである。この実証分析は、Phillips et al. (2006) の手法の TOPIX へ適用も含まれる。結果として、検出力のみならず構造変化に対するロバストネスを考慮しても、Phillips et al. (2006) の提唱する recursive 型の supADF 検定統計量と rolling 型の supADF 検定統計量が有効であることが示された。そして、1986 年 3 月から 1990 年 2 月の間、TOPIX には合理的バブルが発生していたと結論付けられた。株価指数が景気循環の先行指標であることを勘案すると、この期間は国の発表する景気循環の期間と一致する。本邦では、1990 年前後に合理的バブルが生起していたことを示す実証分析例がなく、その意味でこの実証結果は真新しいものである。

2 節でモデルと検定問題について整理し、3 節では、Banerjee et al. (1992) によるいくつか ADF 検定統計量を改良型を提案した。4 節ではこれらの検定統計量の有限標本分布のパーセント点と検出力をシミュレーションにより調べた。これら提案した検定統計量を用いた TOPIX の検証結果は 5 節と 6 節で述べている。検証に使ったデータは「日経 NEEDS CD-ROM 日経マクロ経済データ」と「日経 Financial Quest」より入手した。推計のため、統計ソフトウェアは、S-PLUS とアドオンモジュール FinMetrics を用いた。また統計理論上の説明が必要な部分は APPENDIX で述べた。

2 合理的バブルの検証の枠組み

2.1 合理的バブルのモデル

まず最初に、Phillips et al. (2006) による合理的バブルの定式化を行う。仮定として、

- 市場は効率的 (投資家は合理的に行動し、平均を上回る利益を上げることができない)。
- 投資は株式 (P_t) と利子率 (R) 一定の債券の 2 種類のみとする¹。
- 取引コスト・税金のコストを無視する。

とする。任意の t 期において、これらの仮定が成立するものとする、

$$P_t = \frac{1}{1+R} E_t(P_{t+1} + D_{t+1})$$

¹ R が一定である仮定は、 t 期の利子率を R_t とするとき、 $E_t[\log(1+R_{t+1})]$ を定数とする仮定に置き換えても後の議論に影響を与えない。

と表すことができる。ここで、 P_t は t 期の株価、 D_{t+1} は $t+1$ 期の配当、 R は債権利子率である。均衡式 $P_t = E_t(P_{t+1} + D_{t+1})/(1+R)$ は、Campbell and Shiller (1988) と Phillips et al. (2006) より次のように近似表現される。

$$p_t = p_t^f + b_t = (\text{マーケットファンダメンタルズ}) + (\text{合理的バブル}) \quad (3)$$

ここで $p_t = \log P_t$

$$p_t^f = \mu + (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_t(d_{t+1+i}), \quad (4)$$

$$b_t = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho^i E_t(p_{t+i}) \quad (5)$$

$$\rho = 1/\{1 + \exp(\overline{d-p})\}, \quad \overline{d-p} = E\{\log(D_t/P_t)\} \quad (6)$$

$$E_t(b_{t+1}) = \frac{1}{\rho} b_t = \{1 + \exp(\overline{d-p})\} b_t \quad (7)$$

であらわされる。ここで μ は定数である。最後の式 (7) を満たす $\{b_t\}$ のモデルは無数に考えられるが、1 つは、explosive AR(1) モデルである。

$$b_t = (1 + g)b_{t-1} + \varepsilon_t^b, \quad E_{t-1}(\varepsilon_t^b) = 0 \quad (8)$$

ここで、 $g = \exp(\overline{d-p}) > 0$ で $1 + g = 1/\rho$ である。このモデルは式 (5) で定義される b_t が 0 とならないことが条件である。

2.2 従来の合理的バブルのモデルの解釈

これらモデルから次のような解釈が Diba and Grossman (1988a) や Phillips et al. (2006) よりもたらされた。式 (3) と式 (8) より次のように書ける。

$$p_t = p_t^f + b_t, \quad b_t = (1 + g)b_{t-1} + \varepsilon_t^b \quad (9)$$

これより、

- まず、 $b_t = 0$ 、つまり合理的バブルが存在しないときは

$$p_t = p_t^f = \mu + (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_t(d_{t+1+i}), \quad 0 < \rho < 1$$

となり d_t の性質が p_t を決める。また、

$$d_t - p_t = \mu + (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_t(\nabla d_{t+1+i})$$

と書けるので、 ∇d_t が $I(0)$ ならば、 p_t と d_t は共和分ベクトル $(1, -1)$ で共和分関係にある。ここで、 $\nabla = 1 - L$ 、 L はラグオペレータである。

- また $b_t \neq 0$ 、合理的バブルが存在するときは、
 - p_t, b_t は explosive で非定常となる。
 - ∇p_t も explosive となる。両辺差をとっても gb_{t-1} という発散系列が残るためである。
 - d_t が $I(1)$ つまり ∇d_t が $I(0)$ であったとしても、 p_t と d_t は共和分関係とならない。

注意として、観測可能なのは、 $\{p_t\}$ と $\{d_t\}$ で、 $\{p_t^f\}$ と $\{b_t\}$ は観測不可能である。それゆえ、配当系列 $\{d_t\}$ の $I(1)$ 性の検証を行い、 $I(1)$ と結論付けられれば、株価系列 $\{p_t\}$ が explosive かどうか単位根検定「 $I(1)$ vs explosive」は合理的バブルが存在しているかどうかの検定になる。

2.3 株価と配当系列の $I(1)$ 性の検証のサーベイ

このような観点から、株価と配当系列の性質を調べた論文は、1980年代後半に多く現れた。S&P500とDow Jonesの修正指数は最も多く、West (1987)やDiba and Grossman (1988a)で検証された。Diba and Grossman (1988a)ではこれらデータを解析した他の文献も引用している。また、Campbell and Shiller (1989)ではS&P500とValue-weighted NYSE index, Phillips et al. (2006)では、NASDAQ総合指数を検証している。本邦では東京三菱銀行資金証券部 (2004)が2000年以降のTOPIXを日次データで検証している。また、河合ら (1990)は崩壊を確率的に記述したモデル(後述のモデル式(24))を考へて、1970年1月から1988年12月までのTOPIXの月次データに当てはめてモデルを推定している。

2.4 仮説検定にもとづく合理的バブルモデルの整理

2.2節で述べたように、配当系列 $\{d_t\}$ と株価系列 $\{p_t\}$ の単位根検定を行えばよいが、配当系列が $I(1)$ の場合とそうでない場合、バブル系列 $\{b_t\}$ が0かそうでないかでモデルが異なり、モデルの解釈が複雑となる。これは、複合仮説による逐次検定を行っているためである。2.3節の文献でも、

- 逐次検定のため確率的な結論が不明瞭である。
- p_t が explosive かどうかの検定か、 $b_t = 0$ の検定かどうかはつきりしない。
- 検定統計量の検出力が低いため、帰無仮説の単位根モデルが採択されたとき、検出力が低いために採択されたのか、帰無仮説が正しいから採択されたのか判断がつかない。

という点があいまいなため、統計的に強い結果が導かれていない。

そこでこの節では、モデルを整理し、モデルの解釈のあいまいさをなくすことにする。

まず、ファンダメンタルズ系列 $\{p_t^f\}$ をAR(1)モデルで表現する。配当系列 $\{d_t\}$ に次のAR(1)モデルを仮定する。

$$(1 - \delta^f L)d_t = (1 - \delta^f)\mu^d + \varepsilon_t^d \quad (10)$$

ここで $\{\varepsilon_t^d\}$ は平均0の $I(0)$ 過程で $\{E_t(\varepsilon_{t+i}^d)\} \sim I(0), i \geq 0$ とする²。 μ^d と δ^f は定数で、 μ^d は配当過程の平均、 δ^f はAR(1)パラメータに相当する。そして定常AR(1) : $|\delta^f| < 1$, $I(1)$: $\delta^f = 1$, explosive AR(1) : $\delta^f > 1$ のいずれかであるものとする。式(4)と式(10)より、

$$\begin{aligned} (1 - \delta^f L)(p_t^f - \mu) &= (1 - \varrho) \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i E_t(d_{t+1+i} - \delta^f d_{t+i}) \\ &= (1 - \delta^f)\mu^d + (1 - \varrho) \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i E_t(\varepsilon_{t+1+i}^d) \end{aligned}$$

であるから、 $\{p_t^f\}$ は次のAR(1)モデル表現を得る。

$$(1 - \delta^f L)(p_t^f - \mu^f) = \varepsilon_t^f \quad (11)$$

ここで $\mu^f = \mu + \mu^d$ で、 $\{\varepsilon_t^f\} \sim I(0)$ で

$$\varepsilon_t^f = (1 - \varrho) \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i E_t(\varepsilon_{t+1+i}^d)$$

で定義される。

²例えば、平均0で弱定常の、無限次数の移動平均過程がこの条件を満たす。Brockwell and Davis (1991, (5.5.4)) 参照。

式 (9) と式 (11) まとめると、株価モデル・ファンダメンタルズモデル・バブルモデルの3本の構造方程式モデルとなる。

$$p_t = p_t^f + b_t \quad (12)$$

$$(1 - \delta^f L)(p_t^f - \mu^f) = \varepsilon_t^f$$

$$b_t = \delta^b b_{t-1} + \varepsilon_t^b$$

ここで $\delta^b = 1 + g = 1/\rho > 1$ である。2.3 節で紹介した論文でも仮定しているように、 $\{\varepsilon_t^b\} \sim I(0)$ と仮定する。

次のような仮説を定義する。

$$H_0: \delta^f = 1, b_t = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \delta^f \neq 1 \text{ or } b_t \neq 0 \quad (13)$$

$$H_0^f: \delta^f = 1 \quad \text{vs} \quad H_1^f: \delta^f \neq 1 \quad (14)$$

$$H_0^b: b_t = 0 \quad \text{vs} \quad H_1^b: b_t \neq 0 \quad (15)$$

定義より直ちに、

$$H_0 = H_0^f \cap H_0^b, \quad H_1 = H_1^f \cup H_1^b$$

であることがわかる。このとき、実行可能な単位根検定は、検定 (13) と検定 (14) の逐次検定で、これら検定結果の解釈のためにはモデルの整理が必要である。

まず、検定 (13) のモデルを整理する。

$$H_0: \delta^f = 1, b_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t^f \quad (16)$$

ゆえに帰無仮説 H_0 のモデルは平均 0 の単位根モデルである。一方、対立仮説 H_1 のモデルは次のように分類される。

$$H_1 = H_1^f \cup H_1^b = (H_0^f \cap H_1^b) \cup (H_1^f \cap H_0^b) \cup (H_1^f \cap H_1^b) \quad (17)$$

右辺の3つの仮説はそれぞれ排反である。それぞれの仮説でモデルは次のよう表される。

$$H_0^f \cap H_1^b: \delta^f = 1, b_t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_t = \delta^b p_{t-1} + (1 - \delta^b L)p_t^f + \varepsilon_t^b \quad (18)$$

$$H_1^f \cap H_0^b: \delta^f \neq 1, b_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_t = (1 - \delta^f)\mu^f + \delta^f p_{t-1} + \varepsilon_t^f \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_1^f \cap H_1^b: \delta^f \neq 1, b_t \neq 0 &\quad \Leftrightarrow \quad (1 - \delta^b L)(1 - \delta^f L)(p_t - \mu^f) = (1 - \delta^b L)\varepsilon_t^f + (1 - \delta^f L)\varepsilon_t^b \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1 - \delta^b L)(p_t - \mu^f) = (1 - \delta^b L)(1 - \delta^f L)^{-1}\varepsilon_t^f, & |\delta^f| < 1, \\ (1 - \delta^f L)(p_t - \mu^f) = \varepsilon_t^f + (1 - \delta^f L)b_t, & \delta^f > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$\delta^f = 1$ のとき p_t^f は平均 0 の単位根モデルである。ゆえに式 (18) のモデルは、平均 0 の explosive AR(1) モデルで誤差項が $I(1)$ 過程である。ただし、 $\delta^b > 1$ であるが、きわめて 1 に近い値をとるので

$$(1 - \delta^b L)p_t^f = (1 - L)p_t^f + (1 - \delta^b)Lp_t^f = \varepsilon_t^f + (1 - \delta^b)p_{t-1}^f \rightarrow \varepsilon_t^f \quad \text{as } \delta^b \rightarrow 1 \quad (21)$$

となり、誤差項は δ^b の値が 1 に近ければほぼ $I(0)$ といえる。式 (19) のモデルは、 $|\delta^f| < 1$ のとき、平均 μ^f 、誤差項が $I(0)$ 過程の定常 AR(1) モデルである。また $\delta^f > 1$ であれば、定常ではなく explosive AR(1) モデルとなる。式 (20) のモデルは $|\delta^f| < 1$ 、 $\delta^f > 1$ いずれの場合でも平均 μ^f の explosive AR(1) モデルとなる。

従来行われてきた explosive 過程を対立仮説とする単位根検定は $\delta^f \leq 1$ のときに、 $b_t = 0$ か $b_t \neq 0$ かの検定で、具体的にモデルで対立仮説のモデルを表現すると、式 (18) か式 (20) の $|\delta^f| < 1$ の場合に対応する。しかし、上記で分かるように、考えられるモデルはいくつかあり、 δ^f の値により検定結果の解釈が変わることが分かるであろう。そのため、事前に δ^f の検定を行うことが求められる。

そこで、検定 (14) のモデルを整理する。配当モデル $\{d_t\}$ は式 (10) による。 H_0^f の下では、 $\{d_t\}$ は平均 0 の $I(1)$ 過程であるが、 H_1^f の下では、 $\{d_t\}$ は平均 μ^d の定常または explosive AR(1) 過程である。

3 ADF 検定統計量とその改良

この節では、 $I(1)$ 性の検定で用いる ADF 検定統計量とその改良型について紹介する。

3.1 ADF 検定統計量と $\sup ADF$ 検定統計量

まず、ADF 検定統計量を紹介する。AR(p) モデル：

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

は次の式で書き換えられる：

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \psi_1 \nabla y_{t-1} + \cdots + \psi_{p-1} \nabla y_{t-p+1} + u_t$$

$I(1)$ 過程であれば $\rho = 1$, $I(0)$ 過程であれば $\rho < 1$, explosive AR 過程であれば $\rho > 1$ となる。よって回帰を行い、 ρ の t 値を用いた検定統計量 (ADF 検定統計量) で検定する。

$$ADF_n = t_{\rho=1} = (\hat{\rho} - 1) / SE(\hat{\rho})$$

ここで p の決め方は、(i) ある $p = p_{\max}$ から下降して回帰を繰り返し、 ψ_{p-1} が有意になった最初のモデルで行う方法 (下降法) と、(ii) 情報量基準を用いる方法とがある。(i) は Ng and Perron (1995) で提唱された方法で、本稿の研究成果はこの手法を用いている。具体的な設定は $p_{\max} = 12$, 有意性の検定の有意水準は 5% である。 $p_{\max} = 12$ は月次データを扱っていることと、 p_{\max} をいたずらに大きくすると、回帰可能な部分標本の範囲が狭くなり、回帰の精度が落ちることからトレードオフを考慮しての設定である。Phillips et al. (2006) でも $p_{\max} = 12$ が採用されている。

しかし Evans (1991) らにより ADF_n による検定は検出力が低いことが指摘されていた。そのため、これまでも合理的バブルの検証結果で有意となる結果は出なかった。この問題に対し、Phillips et al. (2006) は、構造変化の検定統計量のアイデアを利用して

$$\sup ADF = \sup_{r \in [r_0, 1]} ADF_{[nr]} \quad (22)$$

を提案した。ここで $[\cdot]$ はガウス記号、 $ADF_{[nr]}$ は時点 1 から時点 $[nr]$ の標本での ADF 検定統計量である。Phillips et al. (2006) はこの検定統計量による単位根検定を NASDAQ へ適用し、その有用性を主張した。

$\sup ADF$ 検定統計量の計算例は次のようになる。式 (22) において、 $n = 200$, $r_0 = 0.2$ とすると、 $[nr_0] = 40$ なので

$$\sup_{r \in [r_0, 1]} ADF_{[nr]} = \max\{ADF_{40}, ADF_{41}, \dots, ADF_{200}\}$$

となる。つまり部分標本の範囲を未来へ 1 時点づつ増やして検定統計量を求め、その最大値を計算している。

$\sup ADF$ 検定の有効性は直感的に次のように解釈できる。実際のバブルは崩壊し、 $b_t = 0$ となるので株価はファンダメンタルズ前後の系列へ収束していく。それゆえ、あたかも $I(1)$ 系列のように、長期のサイクルでファンダメンタルズの地点へ収束しているようにみえてしまう。結果的に、 ADF_n は、バブルの間では explosive であるのにも関わらず、収束後の系列まで見て $I(1)$ であると判断してしまう。一方、 $\sup ADF$ 検定統計量は、最大値を測るので、崩壊する前の爆発的振る舞いを検出する。それゆえ、 $\sup ADF$ 検定統計量の検出力はバブルの実証分析に有効となるのである。

図 1 は、 $\sup ADF$ 検定統計量の有限標本分布である。

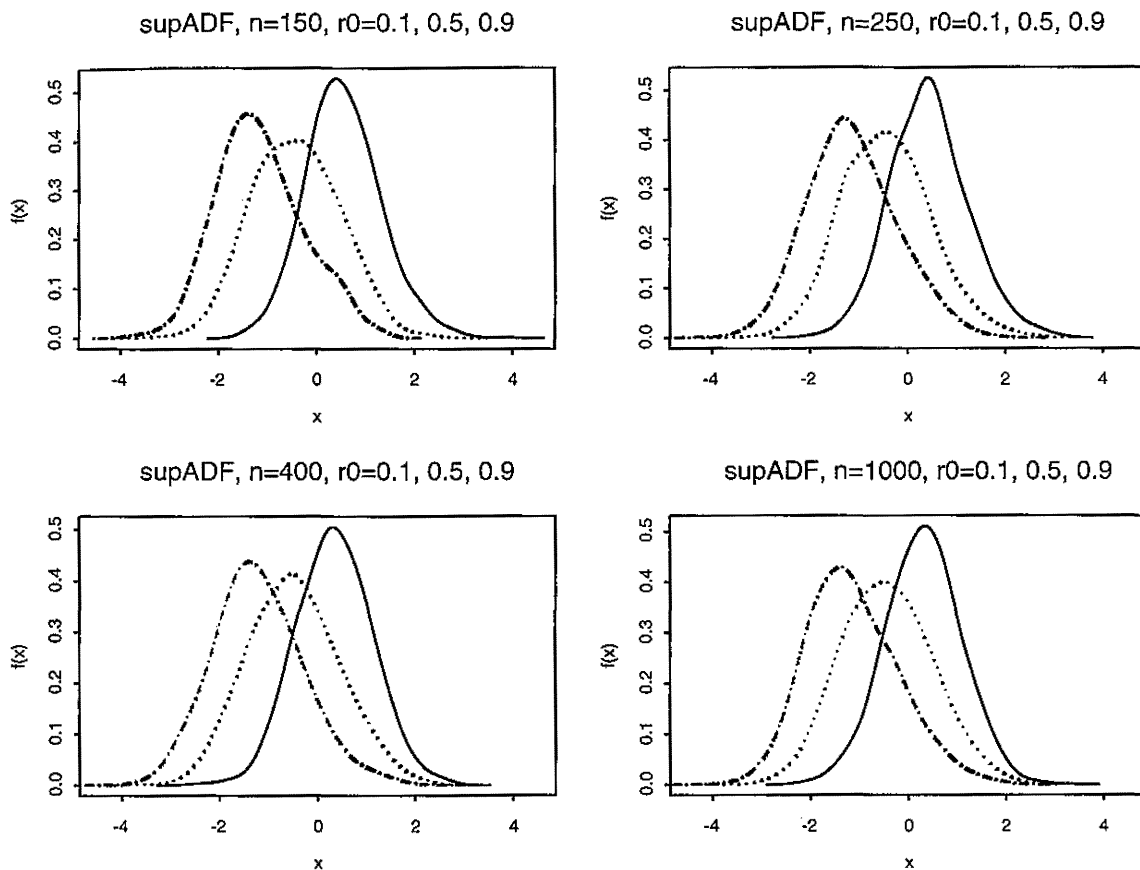


図 1: supADF 検定統計量の有限標本分布. $n = 150, 250, 400, 1000$, 実線: $r_0 = 0.1$, 点の破線: $r_0 = 0.5$, 線と点の破線: $r_0 = 0.9$.

3.2 改良 ADF 検定統計量のまとめ

同様のアイデアで、左片側検定の場合は最小値を考える ADF 検定統計量が構造変化のロバストネスの点で有効かもしれないし、範囲 (range) をとる統計量も有効であろう。また、あるバブル発生が景気循環の拡張期間にあたる数 10 カ月に対応するのであれば、ある標本内だけでバブルが発生していたかどうかを調べる検定統計量も有効であろう。このように部分標本による単位根検定の理論展開と実証分析を行った論文に Banerjee et al. (1992) がある。ただし、Banerjee et al. (1992) はモデルの平均とトレンドの変化に注目しており、単位根検定も左片側検定について議論している。そのため、我々が興味を持つ検定とは異なる。

まとめると、改良型の検定統計量に次があげられる。標本の期間を n_0, \dots, n_1 として計算した ADF 検定統計量を $ADF(n_0, n_1)$ と書くことにする。ただし、 $1 \leq n_0 < n_1 \leq n$ である。

- recursive 型 ADF 検定統計量

$$\inf ADF_{re}(r) = \min_{k \in [nr], \dots, n} ADF(1, k)$$

$$\sup ADF_{re}(r) = \max_{k \in [nr], \dots, n} ADF(1, k)$$

$$\text{range} ADF_{re}(r) = \sup ADF_{re}(r) - \inf ADF_{re}(r)$$

- rolling 型 ADF 検定統計量

$$\inf ADF_{ro}(r) = \min_{k \in [nr], \dots, n} ADF(k - [nr] + 1, k)$$

$$\max ADF_{ro}(r) = \max_{k \in [nr], \dots, n} ADF(k - [nr] + 1, k)$$

$$\text{range} ADF_{ro}(r) = \sup ADF_{ro}(r) - \inf ADF_{ro}(r)$$

これら検定統計量は Banerjee et al. (1992) でも議論されたものである。A.3 節でまとめてあるように、改良型の ADF 検定統計量の漸近分布も既存の漸近理論から求められる。

4 シミュレーション

4.1 構造変化を加味したモデルのデータ生成

以下実験的に構造変化を加味したモデルが、実際の合理的バブルを記述しうるか調べた結果を挙げる。

図 2 は構造変化を入れた AR(1) モデルの系列の例である。最初の 100 系列は I(1) でそこから AR(1) パラメータを変えて系列の振る舞いを調べている。

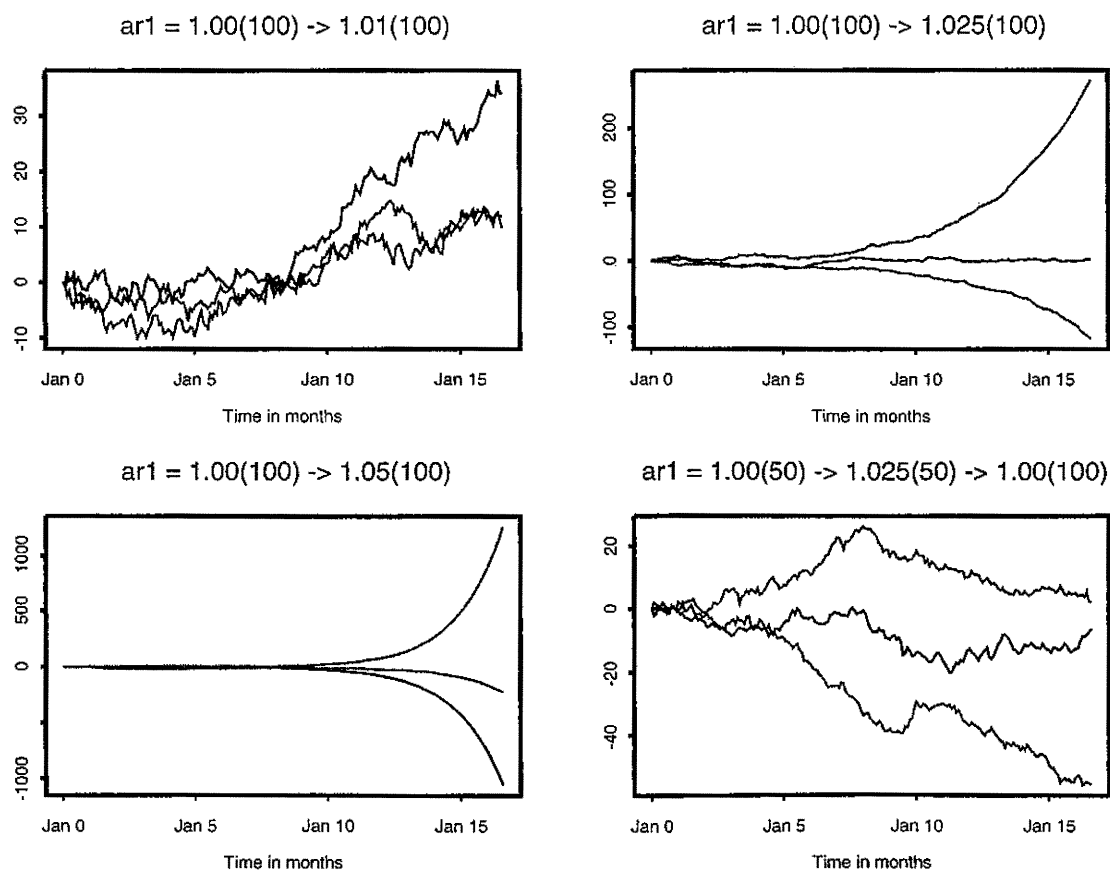


図 2: AR パラメータを変化させた系列を発生させた例。各図は標本の大きさ $n = 200$ の系列を 3 系列ずつ発生させている。左上, 右上, 左下は, それぞれ $t = 100$ で AR(1) パラメータを 1.00 から 1.01 へ (左上), 1.00 から 1.01 へ (右上), 1.00 から 1.05 へ (左下) へ変化させている。右下のモデルは $t = 50, 100$ でパラメータを 1.00, 1.025, 1.00 と変化させている。

図2右下のモデル (AR(1): 1.00 → 1.025 → 1.00) は AR(1) の MA 表現:

$$b_t = \rho b_{t-1} + \varepsilon_t = \rho^{t-1} b_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{t-j} \varepsilon_j \quad (23)$$

の系列において, $\rho = 1 \rightarrow \rho = 1.025 \rightarrow \rho = 1$ と変化させている. このモデルは崩壊時を表現することを意図している. しかし, 景気循環の後退期間は拡張期間よりも短くなるのが一般的であるし, バブルも拡張スピードより速く崩壊する傾向がある. そのためこのモデル表現は適切ではないかもしれない. そこで図3では, 崩壊時にあたる時点 $t = 100$ において, 初期値を外して $y_{101} = \varepsilon_{101}$ としている.

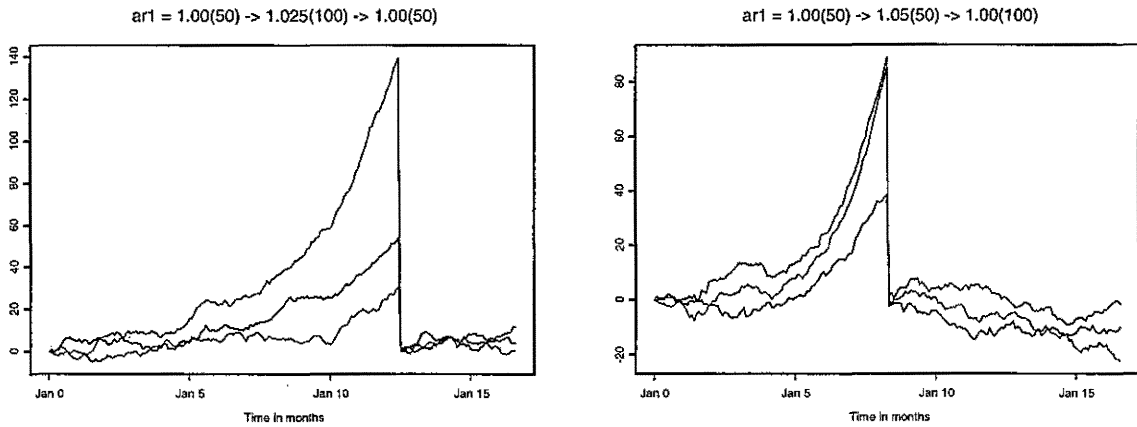


図3: AR パラメータを変化させた系列を発生させた例. 各図は標本の大きさ $n = 200$ の系列を3系列ずつ発生させている. 左図のモデルは $t = 50, 150$ でパラメータを 1.00, 1.025, 1.00 と変化させている. 右図のモデルは $t = 50, 100$ でパラメータを 1.00, 1.05, 1.00 と変化させている.

バブルの定義式 $E_t(b_{t+1}) = (1+g)b_t$ を満たす構造変化する他のモデルの実行例を紹介しよう.

- 崩壊を確率 π で記述するモデル (浅子ら, 1990; 河合, 1994)

$$b_{t+1} = \begin{cases} \frac{1+g}{\pi_t} b_t + \varepsilon_{t+1}^b & \text{with prob. } \pi_t \\ \varepsilon_{t+1}^b & \text{with prob. } 1 - \pi_t \end{cases} \quad (24)$$

ただし π_t のモデルについては明記されていない. $\{b_j, j < t\}$ の情報に依存するモデルだと尤もらしいが難解である. 図4は, $\pi_t = \pi$ と固定して $\pi = 0.3, 0.6, 0.9$, $g = 0.01, 0.03, 0.05$ としたモデルの例である.

- 閾値 α で場合わけするモデル (Evans, 1991; Phillips et al., 2006)

$$b_{t+1} = \begin{cases} (1+g)b_t \varepsilon_{b,t+1} & \text{if } b_t \leq \alpha \\ \left[\zeta + \frac{1+g}{\pi} \theta_{t-1} \left\{ b_t - \frac{\zeta}{1+g} \right\} \right] \varepsilon_{b,t+1} & \text{if } b_t > \alpha \end{cases} \quad (25)$$

ここで $g > 0$, $\varepsilon_{b,t} = \exp(y_t - \tau^2/2)$, $y_t \sim i.i.d.N(0, \tau^2)$, $\theta_t \sim i.i.d. \text{Bernoulli dist. with } \pi$. 図5は $(\alpha, \zeta, b_0, \tau) = (1.0, 0.5, 0.1, 0.05)$, $\pi = 0.3, 0.6, 0.9$, $g = 0.01, 0.03, 0.05$ としたモデルの例である.

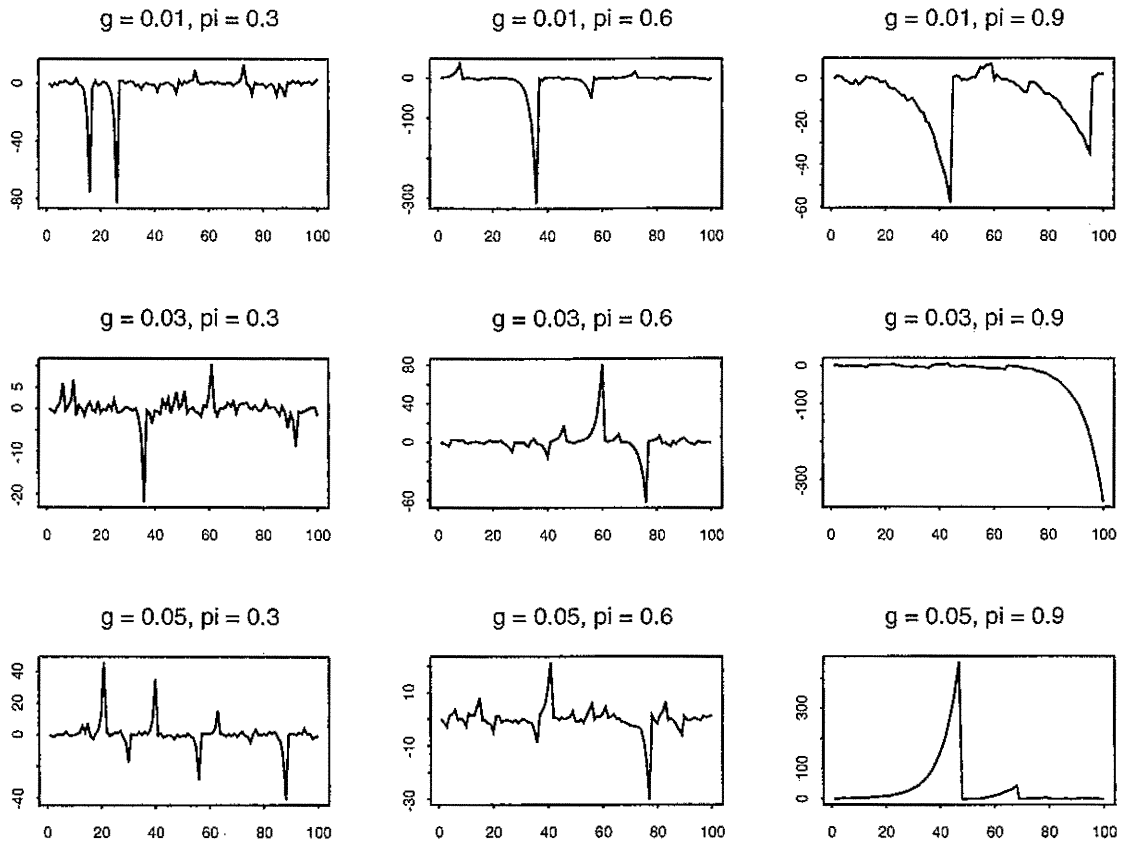


図 4: 崩壊を確率 $\pi = \text{pi}$ で記述するモデルの系列の発生例。モデルは式 (24) による。

4.2 有限標本の (改良) ADF 検定統計量のパーセント点

ここでは 3.2 節で導入した改良 ADF 検定統計量の有限標本分布のパーセント点を紹介する。表 1 と表 2 は、平均 0、誤差項が $i.i.d.N(0, 1)$ の単位根系列を生成し、その系列において、AR(1) モデルの回帰を用いて (改良) ADF 検定統計量を求め、パーセント点を求めたものである。反復回数は 10000 回で、 $n = 50, 100, 200, 400$ のデータを生成している。ADF_n のパーセント点は Fuller (1996, Table 10.A.2) などの文献から入手可能であるが、1%, 99% 点など端のパーセント点にいくにつれ誤差が大きくなっているようである。これは反復回数が少ないことが原因と思われる、今後の研究で反復回数を増やす必要があるだろう。またここで求められたパーセント点は検定の棄却点として以降の節で使われている。

4.3 構造変化を加味したモデルでの検出力のシミュレーション

以下の検出力を調べるシミュレーション実験では次の標本の大きさ n のデータをそれぞれ 1000 回発生させて調べた。

$$\text{Model 1: } y_t = \rho y_{t-1} + (1 - \rho L)u_t + \varepsilon_t$$

$$\text{Model 2: } y_t = \mu + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Model 3: } y_t = u_t + I(t)b_t \quad (\{b_t\} \text{ は式 (23) で定義})$$

$$\text{Model 4: } y_t = u_t + b_t \quad (\{b_t\} \text{ は式 (24) で定義})$$

$$\text{Model 5: } y_t = u_t + b_t \quad (\{b_t\} \text{ は式 (25) で定義})$$

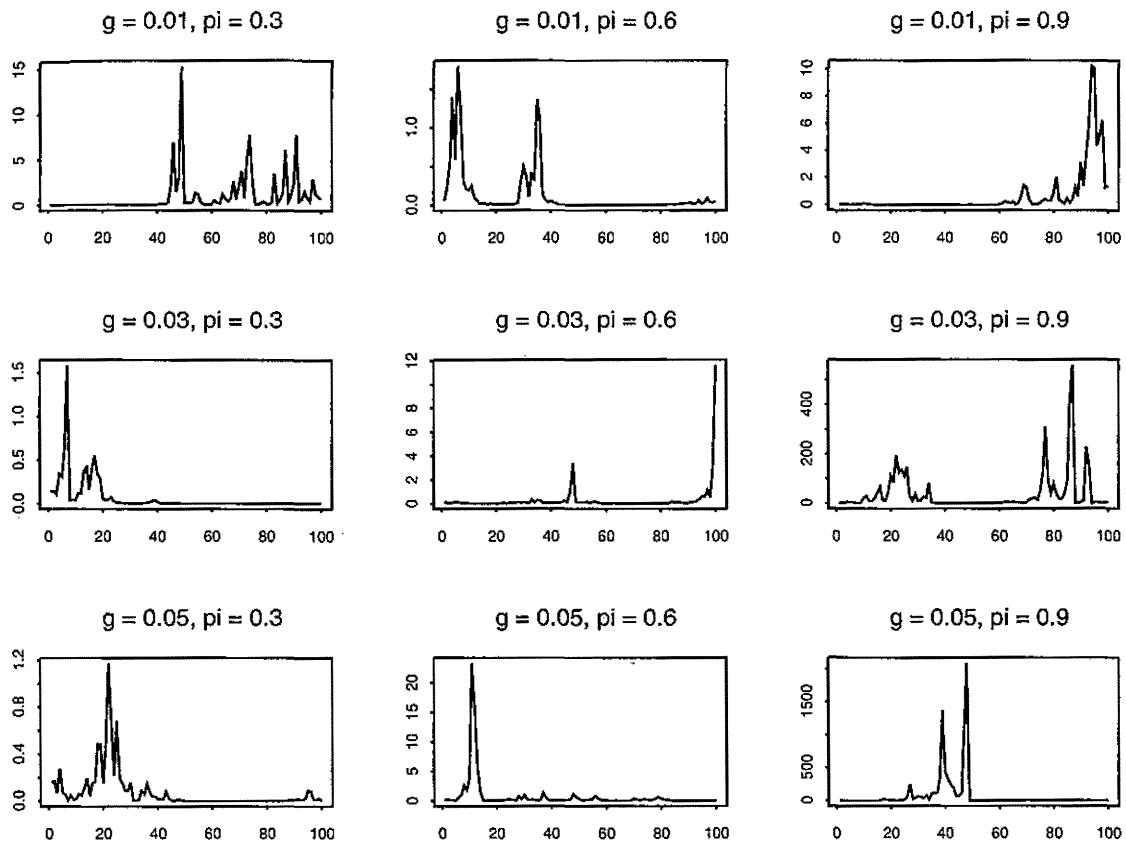


図 5: 閾値 α で場合わけするモデルの系列の発生例。モデルは式 (25) による。

ここで $\{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.N(0, 1)$, $u_t = u_{t-1} + e_t$, $\{e_t\} \sim i.i.d.N(0, 1)$, $\{\varepsilon_t\}$ と $\{e_t\}$ は独立である。 $I(t)$ はある区間 I に t が入っていれば 1 それ以外では 0 となる関数である。 Model 1 は (18) 式に相当する。 Model 2 は (11) 式, (19) 式, (20) 式の $|\delta^f| < 1$ の場合に相当する。 Model 3 は Model 1 に構造変化を加味したモデルである。 Model 4 と Model 5 は確率的にバブルが発生するモデルである。 A.4 節では Models 1-3 の検出力の詳細な結果 ($n = 50, 100, 200$, 有意水準 1% と 5% の場合) を報告している。 また, 棄却点の導出は, 4.2 節で行ったのと同じ方法で有限標本の棄却点を計算している。 本節では有意水準 5% の結果を紹介する。

図 6 は, Model 1 の検出力を示しており, 次のようなことが分かった。

- $rangeADF$ は検出力が低い。
- 一番いい検出力は ADF_n である。
- $supADF$ と $rangeADF$ を比較するとやや $supADF$ のほうが良い。

図 7 は, Model 2 ($\mu = 0, \rho > 0$) の検出力を示している。 Model 1 の検出力の結果と同様の結論が言える。

図 8 は, Model 2 ($\mu = 5, \rho > 0$) の検出力を示しており, 次のようなことが分かった。

- $rangeADF$ の検出力が相対的に低い。
- 他の検定統計量は極めて高い検出力を示している。 Model 2 ($\mu = 0, \rho > 0$) と比較すると, μ の値が影響していると思われる。 A.2 節の CASE II より理論上は検出力は μ の値に影響を受けず, ρ^n のオーダーであるが, 有限標本下では何かしらの影響が推察される。

		inf $ADF_{re}(r)$		sup $ADF_{re}(r)$		range $ADF_{re}(r)$		ADF_n
		$r = 1/10$	$r = 1/4$	$r = 1/10$	$r = 1/4$	$r = 1/10$	$r = 1/4$	
$n = 50$	1%	-11.11	-4.82	-1.65	-2.24	1.48	1.03	-3.59
	2.5%	-7.81	-4.34	-1.33	-1.77	1.64	1.18	-3.21
	5%	-5.67	-3.87	-1.07	-1.57	1.78	1.28	-2.92
	10%	-4.49	-3.51	-0.77	-1.23	1.98	1.46	-2.61
	50%	-2.72	-2.41	0.15	-0.17	2.94	2.20	-1.55
	90%	-1.91	-1.65	1.25	0.90	4.91	3.48	-0.40
	95%	-1.73	-1.48	1.64	1.21	5.97	3.88	-0.06
	97.5%	-1.61	-1.37	2.04	1.55	8.12	4.41	0.27
	99%	-1.47	-1.21	2.78	1.90	11.28	4.86	0.58
$n = 100$	1%	-5.10	-4.35	-1.56	-2.08	1.48	1.07	-3.43
	2.5%	-4.47	-3.94	-1.29	-1.74	1.62	1.18	-3.11
	5%	-4.04	-3.65	-1.06	-1.52	1.76	1.31	-2.86
	10%	-3.66	-3.32	-0.78	-1.23	1.93	1.45	-2.56
	50%	-2.63	-2.37	0.15	-0.17	2.77	2.14	-1.56
	90%	-1.93	-1.65	1.12	0.89	4.03	3.30	-0.43
	95%	-1.77	-1.50	1.42	1.20	4.50	3.76	-0.06
	97.5%	-1.64	-1.35	1.70	1.46	4.99	4.11	0.25
	99%	-1.53	-1.20	2.09	1.80	5.56	4.54	0.65
$n = 200$	1%	-4.46	-4.24	-1.61	-2.11	1.51	1.11	-3.49
	2.5%	-4.18	-3.89	-1.32	-1.76	1.63	1.22	-3.14
	5%	-3.85	-3.58	-1.06	-1.53	1.77	1.33	-2.88
	10%	-3.51	-3.28	-0.78	-1.22	1.94	1.47	-2.59
	50%	-2.60	-2.37	0.16	-0.16	2.73	2.16	-1.58
	90%	-1.92	-1.66	1.13	0.92	3.89	3.27	-0.45
	95%	-1.76	-1.49	1.42	1.24	4.27	3.67	-0.09
	97.5%	-1.63	-1.36	1.67	1.51	4.65	4.04	0.21
	99%	-1.49	-1.24	1.97	1.84	5.15	4.50	0.59
$n = 400$	1%	-4.31	-4.08	-1.48	-1.97	1.54	1.14	-3.41
	2.5%	-4.00	-3.81	-1.23	-1.70	1.67	1.25	-3.11
	5%	-3.74	-3.55	-0.99	-1.44	1.80	1.37	-2.87
	10%	-3.46	-3.27	-0.75	-1.15	1.97	1.52	-2.55
	50%	-2.58	-2.38	0.20	-0.10	2.76	2.20	-1.55
	90%	-1.94	-1.67	1.16	0.97	3.86	3.33	-0.42
	95%	-1.77	-1.50	1.44	1.28	4.24	3.74	-0.09
	97.5%	-1.64	-1.38	1.65	1.52	4.61	4.11	0.23
	99%	-1.49	-1.23	1.97	1.82	5.04	4.58	0.57

表 1: recursive 型 ADF 検定統計量と ADF 検定統計量の分布のパーセント点

図 9 は, Model 2 ($\mu = 0, \rho < 0$) の検出力を示しており, 次のようなことが分かった.

- inf ADF と range ADF の検出力が低い.
- ADF_n と sup $ADF_{ro}(r)$ の検出力が最も良い.
- $\mu = 0, \rho > 0$ の場合と比較すると全体的に検出力が低い. これは, A.2 節の CASE II と CASE III から分かるように, $\rho > 0$ の場合は, 指数関数のオーダーで一致検定となるのに対し, $\rho < 0$ の場合は, \sqrt{n} のオーダーで一致検定となることも合致する,

図 10 は, Model 2 ($\mu = 5, \rho < 0$) の検出力を示しており, 次のようなことが分かった.

- range ADF の検出力が極めて低い.
- 他の検出力は非常に高い. これは右片側検定の場合と同様, Model 2 ($\mu = 0, \rho < 0$) と比較すると, μ の値が影響していると思われる. A.2 節の CASE III より理論上は検出力は μ の値に影響を受けず, \sqrt{n} のオーダーであるが, 有限標本下では何かしらの影響が推察される.

		infADF _{ro} (r)			supADF _{ro} (r)			rangeADF _{ro} (r)		
		r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4
n = 50	1%	-4.97	-5.88	-6.90	-1.84	-1.16	-0.83	1.11	1.83	2.32
	2.5%	-4.56	-5.32	-6.19	-1.60	-0.96	-0.65	1.28	2.07	2.54
	5%	-4.25	-4.85	-5.55	-1.38	-0.79	-0.48	1.43	2.27	2.76
	10%	-3.89	-4.46	-5.01	-1.15	-0.59	-0.29	1.66	2.51	3.03
	50%	-2.86	-3.32	-3.67	-0.23	0.20	0.43	2.64	3.58	4.17
	90%	-2.10	-2.55	-2.83	0.81	1.14	1.35	3.97	5.00	5.76
	95%	-1.92	-2.37	-2.63	1.15	1.46	1.69	4.43	5.51	6.39
	97.5%	-1.77	-2.23	-2.49	1.41	1.78	2.05	4.85	5.98	7.10
	99%	-1.59	-2.09	-2.35	1.80	2.19	2.57	5.33	6.60	7.85
n = 100	1%	-4.68	-5.21	-5.44	-1.83	-1.20	-0.90	1.18	1.86	2.29
	2.5%	-4.35	-4.75	-5.07	-1.59	-1.02	-0.72	1.33	2.06	2.47
	5%	-4.07	-4.43	-4.73	-1.38	-0.84	-0.54	1.49	2.25	2.66
	10%	-3.79	-4.13	-4.39	-1.14	-0.61	-0.34	1.72	2.47	2.90
	50%	-2.88	-3.24	-3.45	-0.19	0.20	0.40	2.66	3.45	3.88
	90%	-2.14	-2.58	-2.78	0.86	1.13	1.27	3.95	4.74	5.17
	95%	-1.95	-2.42	-2.63	1.16	1.41	1.56	4.36	5.16	5.60
	97.5%	-1.80	-2.29	-2.51	1.42	1.68	1.84	4.73	5.55	6.00
	99%	-1.64	-2.15	-2.38	1.83	2.03	2.15	5.23	6.04	6.43
n = 200	1%	-4.64	-4.87	-5.04	-1.81	-1.23	-0.89	1.23	1.90	2.33
	2.5%	-4.31	-4.57	-4.77	-1.56	-1.01	-0.68	1.40	2.14	2.53
	5%	-4.04	-4.35	-4.51	-1.36	-0.81	-0.51	1.57	2.31	2.72
	10%	-3.77	-4.07	-4.24	-1.13	-0.60	-0.32	1.78	2.54	2.94
	50%	-2.92	-3.25	-3.43	-0.17	0.23	0.42	2.72	3.48	3.87
	90%	-2.19	-2.63	-2.82	0.85	1.13	1.28	3.92	4.68	5.06
	95%	-2.02	-2.48	-2.68	1.15	1.39	1.54	4.31	5.09	5.40
	97.5%	-1.89	-2.35	-2.56	1.44	1.64	1.78	4.71	5.40	5.75
	99%	-1.71	-2.21	-2.43	1.75	1.99	2.10	5.15	5.78	6.15
n = 400	1%	-4.56	-4.76	-4.92	-1.80	-1.21	-0.88	1.27	1.92	2.38
	2.5%	-4.27	-4.44	-4.63	-1.54	-1.00	-0.69	1.45	2.14	2.55
	5%	-4.04	-4.25	-4.40	-1.34	-0.80	-0.50	1.61	2.32	2.76
	10%	-3.77	-4.01	-4.17	-1.10	-0.58	-0.28	1.82	2.56	2.99
	50%	-2.93	-3.26	-3.43	-0.15	0.26	0.46	2.77	3.52	3.91
	90%	-2.21	-2.64	-2.86	0.88	1.16	1.30	4.00	4.67	5.04
	95%	-2.03	-2.50	-2.72	1.20	1.44	1.57	4.36	5.02	5.37
	97.5%	-1.89	-2.37	-2.60	1.49	1.68	1.83	4.72	5.40	5.70
	99%	-1.72	-2.24	-2.48	1.82	1.95	2.07	5.21	5.81	6.08

表 2: rolling 型 ADF 検定統計量の分布のパーセント点

表 3 は, Model 3 の検出力の結果である. モデルは 6 種類あり,

$$y_t = \begin{cases} u_t & t = 1, \dots, n_1, \\ u_t + b_t & t = n_1 + 1, \dots, n_2, \quad (\{b_t\} \text{ は式 (23) で定義}) \\ u_t & t = n_2 + 1, \dots, n, \quad (n = 200) \end{cases}$$

なるモデルにおいて, 模式的に「ファンダメンタルズ → バブル → ファンダメンタルズ」を表す次の 6 つのモデルについて検証した:

model 3.1: $n_1 = 50, n_2 = 150, \rho = 1.025$

model 3.2: $n_1 = 75, n_2 = 125, \rho = 1.025$

model 3.3: $n_1 = 90, n_2 = 110, \rho = 1.025$

model 3.4: $n_1 = 50, n_2 = 150, \rho = 1.050$

model 3.5: $n_1 = 75, n_2 = 125, \rho = 1.050$

model 3.6: $n_1 = 90, n_2 = 110, \rho = 1.050$

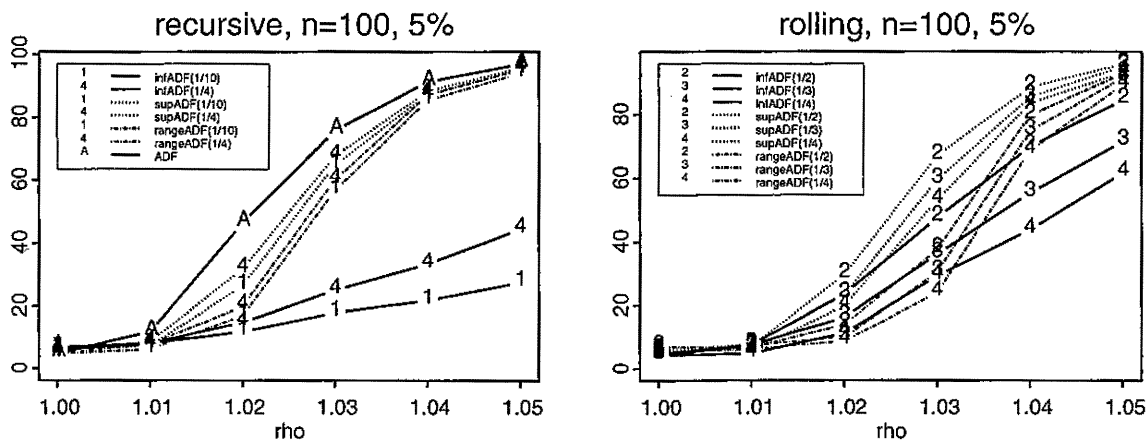


図 6: Model 1 における検出力

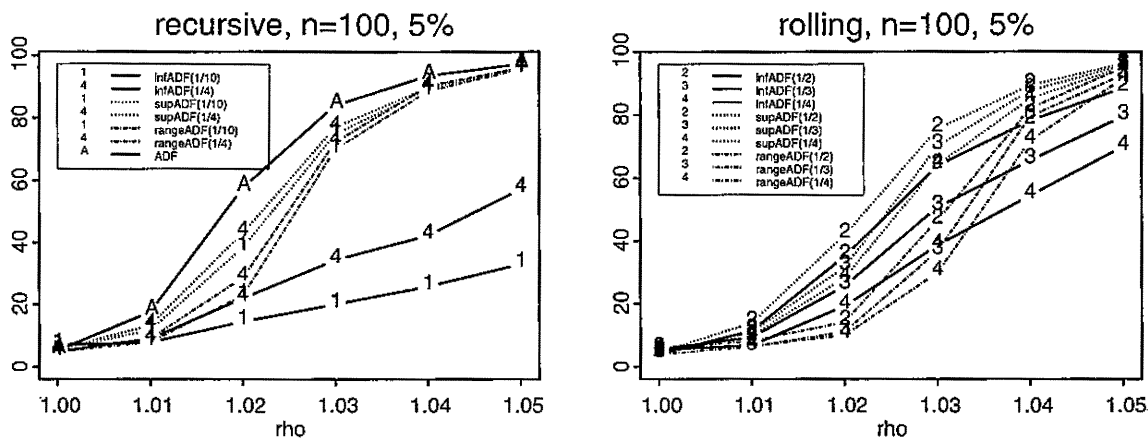


図 7: Model 2 における検出力 (右片側検定, $\mu = 0$)

model 3.1 と 3.4 のバブル発生期間は 100, model 3.2 と 3.5 のバブル発生期間は 50, model 3.3 と 3.6 のバブル発生期間は 20 である。表 3 より次のようなことが分かった。

- ADF_n , $\text{inf}ADF$ は検出力が低く、有意水準以下の検出力をところどころ示している。 ADF_n については、バブル収束後にあたる標本までを使っているため、 $I(1)$ 系列と勘違いする現象が起っており、Phillips et al (2006) が指摘した通りの結果である。また、 $\text{inf}ADF$ は、バブル期を除いたファンダメンタルズ期間の値を検定統計量の値としているため、このような現象が起こったと思われる。
- $\text{sup}ADF_{\text{re}}(r)$ の検出力は高く、model 3.3 を除いて $r = 1/10$ の場合より $r = 1/4$ の検出力のほうが高い。これは、バブルの開始時刻が少なくとも $t = 50$ 以降から始まること。そして $r = 1/10$ の場合、 $[nr] = 20, \dots, 200$ の間で計測しているのに対し、 $r = 1/4$ の場合、 $[nr] = 50, \dots, 200$ の間で計測していることが影響しているであろう。しかし、大差ではない。
- $\text{sup}ADF_{\text{ro}}(r)$ の検出力も高く、 r について、検出力の大小関係が、model 3.3 と model 3.6 との場合だけ異なっていることがわかる。計算した部分標本の範囲は、 $r = 1/2$ のとき、 $[nr] = 100$, $r = 1/3$ のとき、 $[nr] = 67$, $r = 1/4$ のとき、 $[nr] = 50$ である。また、model 3.3 と model 3.6 との場合のバブル期間は 20 で他のモデルより短くなっている。これから、バブル期間を大幅に超える部分標本で $\text{sup}ADF_{\text{ro}}(r)$ を計算すると検出力がやや下がるのが想定される。しかし、その減少の割合は、 $\text{sup}ADF_{\text{re}}(r)$ の場合と同様、さほど深刻な問題を与えない。
- $\text{range}ADF$ の検出力は $\text{sup}ADF$ に匹敵してよい結果を示しているが、素直に喜べない結果である。

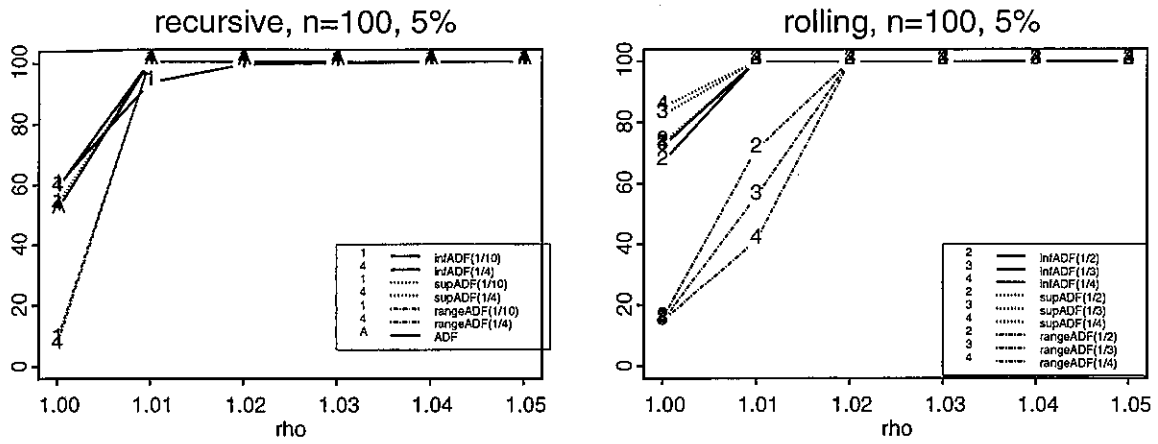


図 8: Model 2 における検出力 (右片側検定, $\mu = 5$)

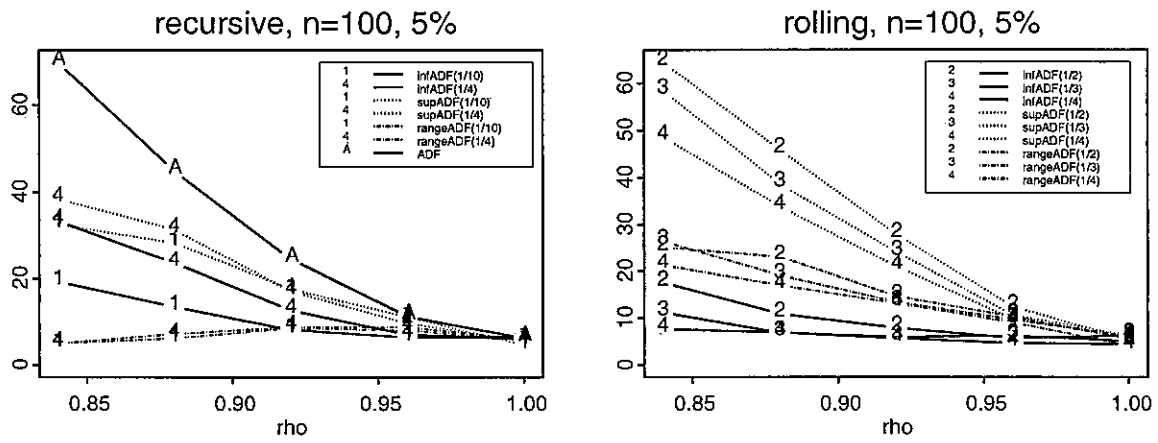


図 9: Model 2 における検出力 (左片側検定, $\mu = 0$)

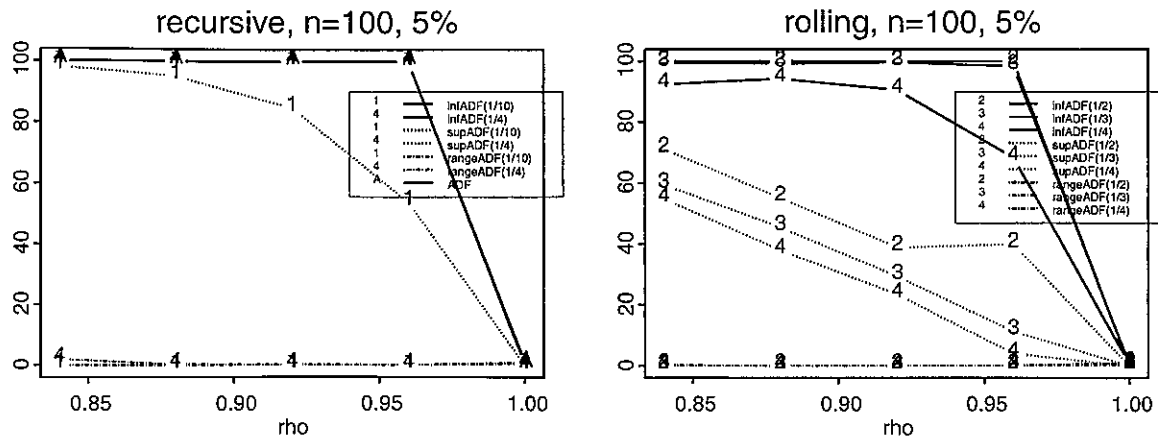


図 10: Model 2 における検出力 (左片側検定, $\mu = 5$)

統計量	infADF _{re} (r)		supADF _{re} (r)		rangeADF _{re} (r)		ADF _n
	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	
model 3.1: 50(100)50, $\rho = 1.025$	1.5	1.1	53.6	56.5	50.4	54.5	0.2
model 3.2: 75(50)75, $\rho = 1.025$	4.0	2.6	20.3	22.9	19.0	22.2	1.6
model 3.3: 90(20)90, $\rho = 1.025$	4.1	2.9	7.5	6.1	6.7	7.1	4.4
model 3.4: 50(100)50, $\rho = 1.05$	0.1	0.1	95.6	95.6	94.5	95.6	0.1
model 3.5: 75(50)75, $\rho = 1.05$	2.5	1.3	51.9	54.4	50.7	54.3	1.1
model 3.6: 90(20)90, $\rho = 1.05$	2.6	2.5	8.7	9.0	7.8	9.4	1.9

統計量	infADF _{ro} (r)			supADF _{ro} (r)			rangeADF _{ro} (r)		
	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4
model 3.1	37.6	46.3	1.0	52.4	45.2	39.0	30.5	18.4	80.3
model 3.2	18.3	3.8	1.8	20.6	18.6	13.3	10.4	43.2	46.6
model 3.3	4.0	5.0	3.1	5.8	8.8	8.6	5.5	11.5	14.6
model 3.4	47.8	71.6	0.0	94.9	94.2	93.8	93.9	91.9	97.2
model 3.5	18.0	1.1	1.5	54.6	52.1	46.5	46.1	73.6	75.5
model 3.6	5.7	4.0	3.0	9.1	11.7	12.2	6.7	20.4	25.5

表 3: Model 3 における ADF 検定統計量の検出力 (%)

なぜなら, $\text{rangeADF} = \text{supADF} - \text{infADF}$ であり, 誤った infADF の情報が検定結果に影響を与えるからである. そのため, 実際の検定で rangeADF を使う際には注意が必要である.

表 4 は Model 4 の検出力の結果である. モデルは 4 種類あり, 式 (24) において, $\pi_t = \pi, \rho = (1 + g)/\pi$ とすると,

model 4.1: $g = 0.01, \pi = 0.99, \rho = 1.0202$	model 4.2: $g = 0.04, \pi = 0.99, \rho = 1.0505$
model 4.3: $g = 0.01, \pi = 0.95, \rho = 1.0632$	model 4.4: $g = 0.04, \pi = 0.95, \rho = 1.0947$

である. これらは, 確率 π で AR(1) パラメータが ρ の explosive AR(1) 系列, 確率 $1 - \pi$ で $I(1)$ 系列に変動する系列である. また, 表 5 は, model 5 の結果である. $(\alpha, \zeta, b_0, \tau) = (1.0, 0.5, 0.5, 0.05)$ として, 表 5 にあるように, g と π を変えて, 4 つのモデルを考えている.

これら model 4 と model 5 の検出力の結果も model 3 と同じ $n = 200$ で実行し次の結論が得られた.

- ADF_n, infADF は検出力が低い. これは, model 3 と同じ現象が起きていると思われる.
- supADF の検出力は, rangeADF の検出力に次いで良い結果となっている. しかし, model 3 で論じたように, rangeADF は infADF の影響を受けているため, 素直に受け入れられない.

以上のシミュレーション結果をまとめると,

- 一様に良い検出力を示す検定統計量はないものの, まずまずの結果を示したのは supADF 検定統計量である. 構造変化 (バブルの発生期間の認識違い) に対してもある程度ロバストである.
- 平均が入ると検出力が著しく変わる現象は理論結果と照らし合わせて整備する必要がある.
- infADF 検定統計量の検出力はよくない場合が多く, アンダーサイズの検出力もある. 構造変化に対しロバストではなく, rangeADF 検定統計量にも影響している.

次節では, これらの検定統計量を用いて TOPIX における合理的バブルの検証を行う.

統計量	infADF _{re} (r)		supADF _{re} (r)		rangeADF _{re} (r)		ADF _n
	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	
model 4.1: g = 0.01, π = 0.99	7.0	7.8	47.0	49.1	44.1	47.6	32.0
model 4.2: g = 0.04, π = 0.99	10.0	14.6	97.3	96.9	97.0	97.1	41.0
model 4.3: g = 0.01, π = 0.95	0.1	0.1	66.8	60.5	66.8	63.9	6.1
model 4.4: g = 0.04, π = 0.95	0.0	0.0	90.1	80.2	91.9	83.4	8.4

統計量	infADF _{ro} (r)			supADF _{ro} (r)			rangeADF _{ro} (r)		
	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4
model 4.1	36.3	26.2	18.1	48.8	47.0	45.1	44.5	51.8	58.0
model 4.2	50.8	45.0	30.5	88.9	96.9	97.9	94.3	98.5	99.6
model 4.3	1.4	6.2	2.1	43.8	59.9	68.6	63.7	78.5	84.5
model 4.4	0.4	6.0	1.8	59.1	81.6	88.7	85.1	93.2	97.0

表 4: Model 4 における ADF 検定統計量の検出力 (%)

統計量	infADF _{re} (r)		supADF _{re} (r)		rangeADF _{re} (r)		ADF _n
	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	r = 1/10	r = 1/4	
model 5.1: g = 0.01, π = 0.60	1.7	1.4	33.6	23.6	50.3	40.6	2.1
model 5.2: g = 0.03, π = 0.60	1.0	1.3	38.1	26.3	54.6	45.0	1.8
model 5.3: g = 0.01, π = 0.90	1.1	1.0	53.1	39.0	64.1	53.4	1.9
model 5.4: g = 0.03, π = 0.90	0.4	0.6	62.0	46.6	72.2	60.9	2.7

統計量	infADF _{ro} (r)			supADF _{ro} (r)			rangeADF _{ro} (r)		
	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4	r = 1/2	r = 1/3	r = 1/4
model 5.1	1.5	2.4	1.7	17.2	26.0	31.0	54.5	56.0	57.5
model 5.2	1.3	1.4	1.4	21.3	28.7	34.0	58.7	61.7	63.4
model 5.3	0.4	1.1	1.2	25.3	38.1	45.6	66.6	68.1	70.2
model 5.4	0.4	1.3	1.1	34.3	49.0	55.8	76.0	77.0	78.0

表 5: Model 5 における ADF 検定統計量の検出力 (%)

5 TOPIX 配当指数の I(1) 性の検証

5.1 TOPIX 配当指数の定義

配当系列の I(1) 性の検証には, Diba and Grossman (1988) や West (1987) において, S&P500 と Dow Jones の修正指数を分析した結果, Phillips et al. (2006) の NASDAQ の分析結果がある. 本邦では東京三菱銀行資金証券部 (2004) の TOPIX の分析結果がある.

我が国の株価指数の多くは配当データを公表してない. TOPIX においても, 配当を指数化した適当な系列はなく, 作成を要する. TOPIX 関連の配当を用いた指数に単純平均利回りと加重平均利回りの 2 つがある. これらの定義は次のようになる.

- 単純平均利回り = (1 株当たり平均配当金 ÷ 単純株価平均) × 100

$$= \frac{\{1 \text{ 株当たり配当} \times (\text{売買単位株式数} \div 1000)\} \text{ の東証 1 部全銘柄合計}}{\{\text{基準値} \times (\text{売買単位株式数} \div 1000)\} \text{ の東証 1 部全銘柄合計}} \times 100$$
- 加重平均利回り = (配当金総額 ÷ 時価総額) × 100

$$= \frac{\{1 \text{ 株当たり配当} \times \text{普通株式数}\} \text{ の東証 1 部全銘柄合計}}{\text{東証 1 部時価総額合計}} \times 100$$

一方, TOPIX は次で定義される.

$$\text{TOPIX} = (\text{時価総額}^* \div \text{基準時価総額}) \times 100 \quad (26)$$

ただし, 加重平均利回りの計算に使用される分母の「時価総額」と TOPIX 算出に使用される「時価総額*」はイコールではない. 加重平均の方は, 発行済み株式総数全てを対象にしている. TOPIX の方は TOPIX

算出用の時価総額として、浮動株のみを対象としたものを東証が決定している³。また、単純平均利回りは、単位株数ごとの指数であり、実際に市場に流通した配当金総額を計算した指数ではない。それゆえ、TOPIXの配当指数として、加重平均利回り・時価総額・基準時価総額のデータを用いて次のように加工した。まず、加重平均利回り・時価総額のデータから配当額（加重平均利回りの定義式の分子）を求めた。そして、TOPIXの分母の基準時価総額データを用いて

$$\text{配当指数} = (\text{配当額} \div \text{基準時価総額}) \times 100 \quad (27)$$

を計算した。本稿ではこの定義を TOPIX に対応する配当指数として分析している。これらは日次データで入手できる。しかし、TOPIX に組み込まれる各社は、配当を日々行うわけではなく、数日に1度行われる。つまり、日次データは数日おきにしか変動しないデータとなり想定されるモデルの確率過程とみなしづらい⁴。それゆえ、月次によるデータを前節で考える確率過程と考えて検証する。この配当指数を消費者物価指数（全国 CPI 総合、2005 年=100）で割って実質化した。そして対数をとった系列を $d_t = \log D_t$ とした。ここで t は 1989 年 1 月から 2003 年 4 月までで標本の大きさは 172 である。図 11 はこの TOPIX 配当指数 $\{d_t\}$ とその差分系列のプロットである。

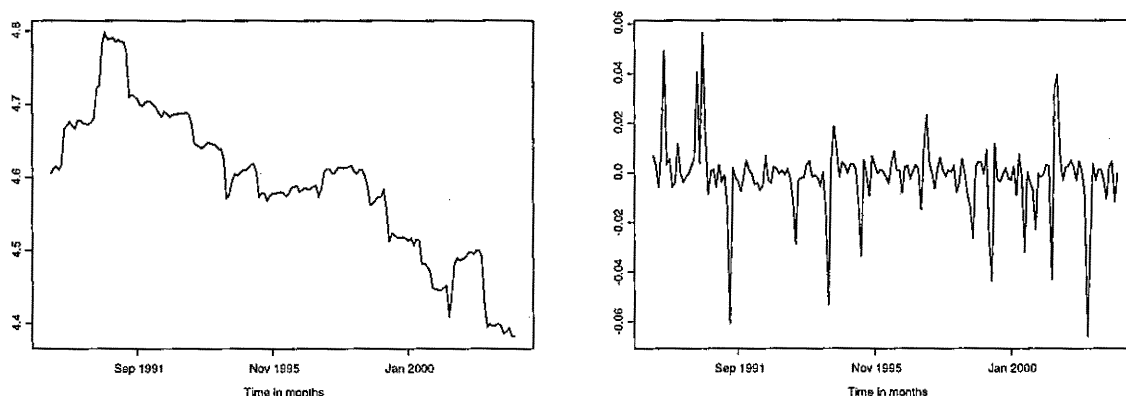


図 11: TOPIX 配当指数 $\{d_t\}$ (左) とその 1 階差分系列 (右) (t は 1989 年 1 月から 2003 年 4 月までで標本の大きさは 172)。

5.2 TOPIX 配当指数の $I(1)$ 性の検証

5.2.1 ACF プロットによる検証

図 12 はこの配当指数の自己相関関数 (ACF) のプロットである。ACF プロットを見る限り $I(1)$ 性の傾向が強い。

5.2.2 ADF 検定統計量と改良 ADF 検定統計量による $I(1)$ の検証

表 6 は (改良) ADF 検定統計量による検定 (14) の単位根検定の結果である。「 $I(1)$ vs $I(0)$ 」の左片側検定ではいずれの検定結果も有意水準 5% で帰無仮説を棄却できなかった。一方、「 $I(1)$ vs explosive AR(1)」の右片側検定でもほとんどの場合で帰無仮説を棄却できない。棄却されたのは 3 例で、 $\text{supADF}_{\text{To}}(1/3)$

³なお、海外主要国の株式利回りの多くが加重平均型であるため、国際比較を行う際には加重平均利回りを用いることが一般的である。

⁴東京三菱銀行資金証券部 (2004) の所有者利回りの単位根検定の結果は、日次データの分析結果である。それゆえこの論文の検定結果は受け入れがたい。

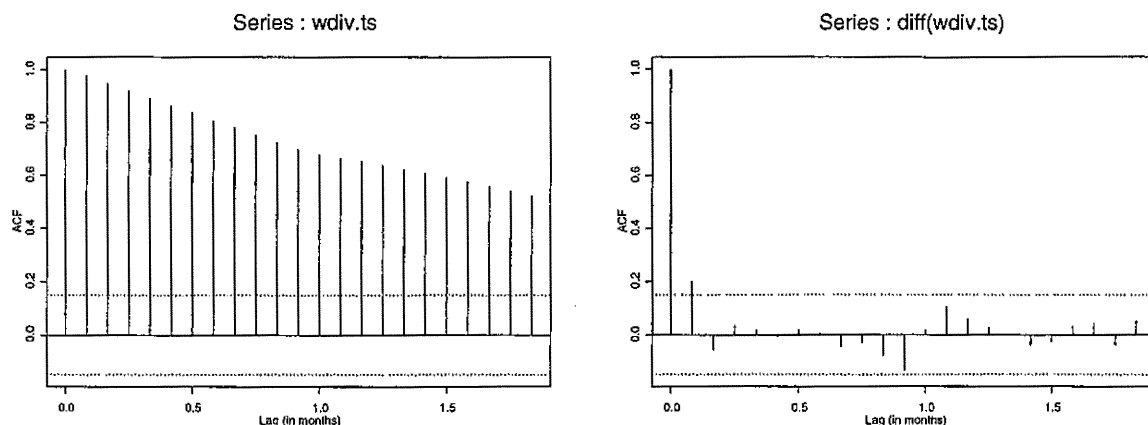


図 12: TOPIX 配当指数の自己相関関数 (左) と 1 階差分をとった TOPIX 配当指数の自己相関関数 (右)

と $\text{range}ADF_{\text{ro}}(r)$, $r = 1/2, 1/3$ は 5% で棄却されたが, 1% では棄却されなかった. これより, 部分系列で explosive AR(1) の傾向があると想定される. この explosive が実際に起こっているのであれば, $n = 172$, $n/2 = 86$, $n/3 = 57.3$, $n/4 = 43$ であるから, この期間が 5 年前後の範囲で起こっているのではないかと想定される.

そこで図 13 のように部分系列で ADF 検定統計量を計算したものをプロットした. 図からわかるように, 検定統計量の値は 1994 年以降の値が影響しており, 1990 年代初頭のバブルの分析という観点では, 配当系列は $I(1)$ 性の帰無仮説は棄却されていない. また, 4.3 節で述べたように, $\text{range}ADF$ の検出力は, 不自然な (アンダーサイズの) 検出力の $\text{inf}ADF$ に影響を受けるので, 無条件には受け入れられない.

また, 図 13 には $ADF(1, k)$, $k = [nr], \dots, n$ も右下にプロットした. 図からわかるように, $I(1)$ 性は, recursive 型の ADF 検定統計量ではほぼ棄却されないことがわかる.

統計量	$\text{inf}ADF_{\text{re}}(1/4)$	$\text{sup}ADF_{\text{re}}(1/4)$	$\text{range}ADF_{\text{re}}(1/4)$	ADF_n	
値	-1.9760	0.2933	2.2693	-0.1938	
統計量	$\text{inf}ADF_{\text{ro}}(1/2)$	$\text{inf}ADF_{\text{ro}}(1/3)$	$\text{inf}ADF_{\text{ro}}(1/4)$	$\text{sup}ADF_{\text{ro}}(1/2)$	$\text{sup}ADF_{\text{ro}}(1/3)$
値	-3.8301	-3.6671	-4.0536	1.0253	+1.4768
統計量	$\text{sup}ADF_{\text{ro}}(1/4)$	$\text{range}ADF_{\text{ro}}(1/2)$	$\text{range}ADF_{\text{ro}}(1/3)$	$\text{range}ADF_{\text{ro}}(1/4)$	
値	1.1446	+4.8555	+5.1440	5.1982	

(左片側検定) * : significant at 5% level, ** : significant at 1% level

(右片側検定) + : significant at 5% level, ++ : significant at 1% level

表 6: (改良) ADF 検定統計量による検定結果

5.2.3 KPSS 検定統計量による $I(0)$ の検証

KPSS 検定とは, Kwiatkowski et al. (1992) による検定で, $I(0)$ 系列を帰無仮説のモデルとし, $I(1)$ 系列を対立仮説とする検定である. 配当指数において, トrend成分を定数項のみとした KPSS 検定「 $I(0)$ vs $I(1)$ 」を行ったところ, 有意であった. つまり配当指数は $I(1)$ であることが支持された. 表 7 では期間を変えて検定を行っているが 1% で有意である.

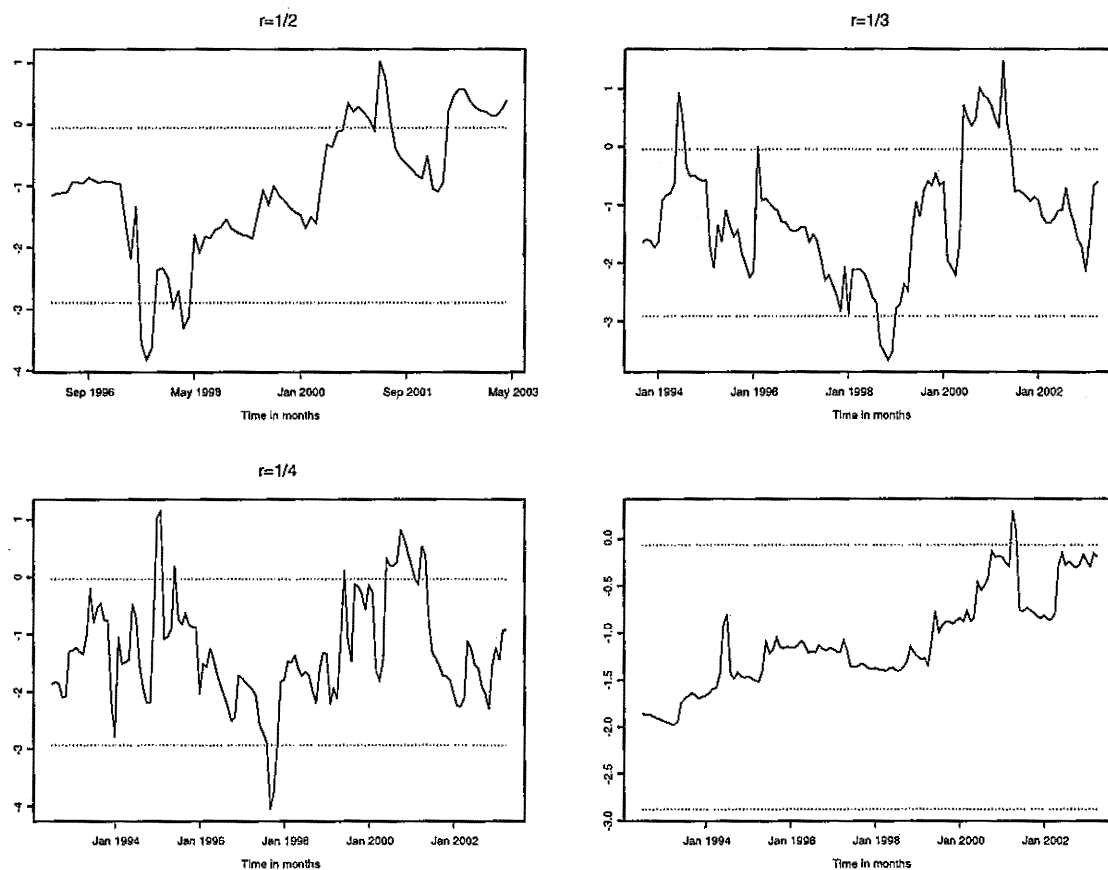


図 13: TOPIX 配当指数 $\{d_t\}$ の部分系列の ADF プロット. 上の 2 枚の図と左下の図は $ADF(k - [nr] + 1, k)$, $k = [nr], \dots, n = 172$ のプロット. 左上は $r = 1/2$, 右上は $r = 1/3$, 左下は $r = 1/4$. 破線は標本の大きさ $[nr]$ で通常の有意水準 10% の両側検定を行ったときの棄却点である. 右下の図は $ADF(1, k)$, $k = [nr], \dots, n$, $r = 0.25$ のプロット. 破線は標本の大きさ n で通常の有意水準 10% の両側検定を行ったときの棄却点である.

5.2.4 長期記憶モデルの観点からの検証

$I(1)$ 系列は 1 階差分をとり $I(0)$ 系列となることで定義されるが, これを実数値の d 階差分をとることで, $I(0)$ 系列となる系列が長期記憶過程とよばれるもので $I(d)$ と表される. 包括的な解説書に Beran (1994) がある. ここで d は実数値で 1 を含むから, 真のモデルが $I(1)$ 過程ならば「 $I(0)$ vs $I(d)$, $d > 0$ 」の検定で帰無仮説は棄却されるだろうし, 差分をとった系列は帰無仮説は棄却されないであろう. この観点より, 「 $I(0)$ vs $I(d)$, $d > 0$ 」の検定を Lo (1991) の修正 R/S 検定統計量と Geweke and Porter-Hudak (1983) の GPH 検定統計量を用いて行った. 表 8 の結果はこれらの推論を支持するものとなっている. ただし, 修正 R/S 検定統計量は範囲 (range) により定義されているため, 4.3 節で述べたように構造変化に脆弱であると推察される. よってこの結果は証左とならないだろう.

また, d の Whittle 推定量を推計した (詳しくは Beran, 1994 を参照). 表 9 は 1 階差分をとった配当系列の d を推計したものである. もし $\{d_t\} \sim I(1)$ ならば, 差分系列は $I(0)$ なので, d の推定値はほぼ 0 の値をとるはずである. 表 9 の推計結果は d の推定値はほぼ 0 の値をとっており, これも配当系列の $I(1)$ 性を支持しているといえよう.

期間	1989 - 1995	1996 - 2003	1989 - 2003
KPSS	**1.0654	**1.9636	**2.9083

* : significant at 5% level , ** : significant at 1% level

表 7: 配当指数の KPSS 検定の検定結果

期間	1989 - 1995	1996 - 2003	1989 - 2003
R/S	**1.8877	*2.087	**2.2368
GPH	**3.2506	**3.3982	**4.5415
R/S (1 階差分)	1.3152	0.9591	1.0448
GPH (1 階差分)	0.8149	0.5801	-1.3202

* : significant at 5% level , ** : significant at 1% level

表 8: 配当指数の長期性の検定結果. 1 行目と 2 行目は原系列の修正 R/S 検定と GPH 検定. 3 行目と 4 行目は 1 階差分の修正 R/S 検定と GPH 検定.

5.2.5 配当系列の $I(1)$ 性の検証のまとめと逐次検定のモデルの整理

結果をまとめると, 配当系列の $I(1)$ 性は, 少なくとも 1990 年初頭までは棄却されないという結論となった.

この結果から, 次節では, 合理的バブルの検定を, (18) 式の検定と考えて行う. 帰無仮説 H_0 のモデルは, $p_t = p_t^f$ かつ, $\delta^f = 1$ なので, (11) 式より,

$$H_0 : p_t = p_t^f, \quad p_t^f = p_{t-1}^f + \varepsilon_t^f \quad (28)$$

である.

もちろん, 検出力がないために $I(1)$ 性が棄却されていなかったり, 構造変化を起こして, 期間的に $I(0)$ である可能性がある. その場合の帰無仮説のモデルは, (19) 式の平均つきの $I(0)$ 系列となり, 検定を再構築する必要があるが, これは将来の研究に残すことにする.

検出力の一致性については A.2 節の Case I からわかるように, 指数オーダーで一致検定となる. そして検出力の有限標本の性質は, 4.3 節で検証している.

6 合理的バブルの検証

配当系列が $I(1)$ であるとした上で, 検定用に加工されたデータの検証を行う. 図 14 は配当系列と同様に物価指数で割って実質化し, 対数をとった TOPIX のプロットである.

6.1 ADF 検定統計量と supADF 検定統計量の結果

表 10 は, ADF 検定と supADF 検定の合理的バブルの検定結果である. ADF_n と $\inf ADF$ 検定統計量では棄却されていない. しかし, 4.3 節のシミュレーションから, もっとも信頼できる supADF 検定統計量で棄却されているため, 合理的バブルが発生していたことを示唆していると結論付けられる.

ADF 検定統計量 $ADF(1, k)$ を k の時点を変えて時系列でプロットしたのが図 15 の左である. y 軸の 0 付近で引かれている破線は, 有意水準 5% の ADF_n の右片側検定の棄却点である. 最初にこの棄却点を越えた時点は, 1986 年 8 月, 最大値をとったのが, 1987 年 6 月, そして, 再び棄却点を下回る直前の 1990 年 2 月を表示している. 注意として, 図 14 からわかるように, $ADF(1, k)$ の最大値は TOPIX の最大値

期間	1989 - 1995	1996 - 2003	1989 - 2003
推定値	0.1591	0.0522	0.0950

表 9: 1 階差分をとった配当系列の Whittle 推定量

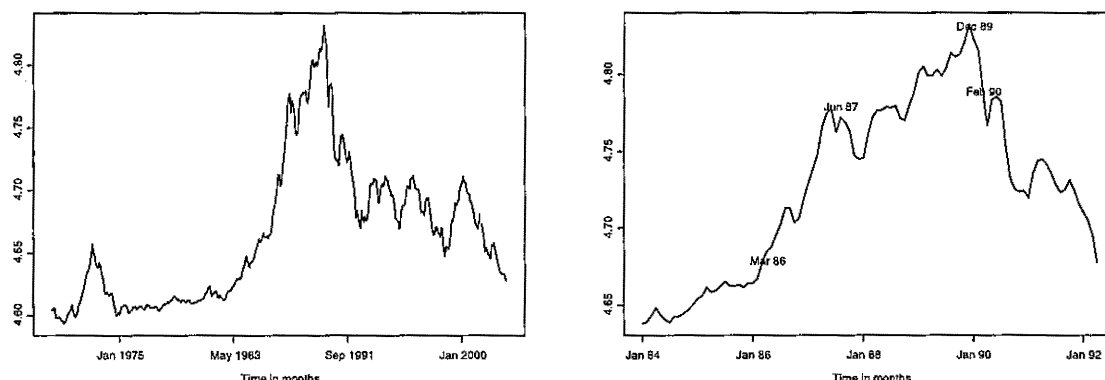


図 14: TOPIX 系列のプロット. 左は 1970 年 1 月から 2003 年 4 月までのプロット ($n = 400$), 右は 1984 年 1 月から 1992 年 4 月までのプロット ($n = 100$).

(1989 年 12 月) というわけではない. なお, 合理的バブルを事後的に判断し, 6.3 節で議論する景気循環との整合性をみるために, 一時的な $ADF(1, k)$ の落ち込みを議論から割愛した⁵.

期間を変えた AR(1) パラメータ δ^b の推定値は図 15 の右と表 11 のようになる. $ADF(1, k)$ の値に対応して, AR(1) パラメータの推計値も変わっていることがわかる. また, バブル期とみられる時期に推定値は 1 を超えて最大 1.02 となっていることがわかる.

統計量	$\inf ADF_{re}(r)$		$\sup ADF_{re}(r)$		$\text{range} ADF_{re}(r)$		ADF_n
	$r = 1/10$	$r = 1/4$	$r = 1/10$	$r = 1/4$	$r = 1/10$	$r = 1/4$	
値	-3.7048	-3.7048	++3.8139	++3.8139	++7.5187	++7.5187	-1.8142

表 10: recursive 型 ADF 検定統計量の検定結果

6.2 構造変化に対応した検定統計量 (rolling 型 ADF 検定統計量) の結果

合理的バブルを構造変化と考えた場合, 合理的バブルの発生期間はどの程度と考えればよいであろうか?

中村ら (1992, 第 8 章) によると, 景気循環の期間はどの循環でも 40 カ月前後でいわゆるキチンの波 (約 40 カ月周期) と同程度であることが知られている⁶. また拡張期は 20-50 ケ月である. これらの整合性を考えても, TOPIX の月次データでは, 合理的バブルの発生期間は 20-50 (カ月) するのが適当であろう. ただし, Phillips et al. (2006) によると, NASDAQ の IT バブルの発生期間は 1995 年 6 月から 2001 年 7 月の 73 カ月となっており, 国ごとに景気循環のサイクルが異なる.

⁵1987 年 10 月 19 日のブラックマンデーの影響と思われるが定かではない.

⁶ただし最近の景気循環の期間は長くなる傾向にある. 内閣府の発表によると, 1990 年以降では, 第 11 景気循環は 83 カ月, 第 12 景気循環は 63 カ月, 第 13 景気循環は 36 カ月, そして最近の 2002 年 1 月からの第 14 景気循環は拡張期だけで暫定で 69 カ月となっており, 現在は後退期である.

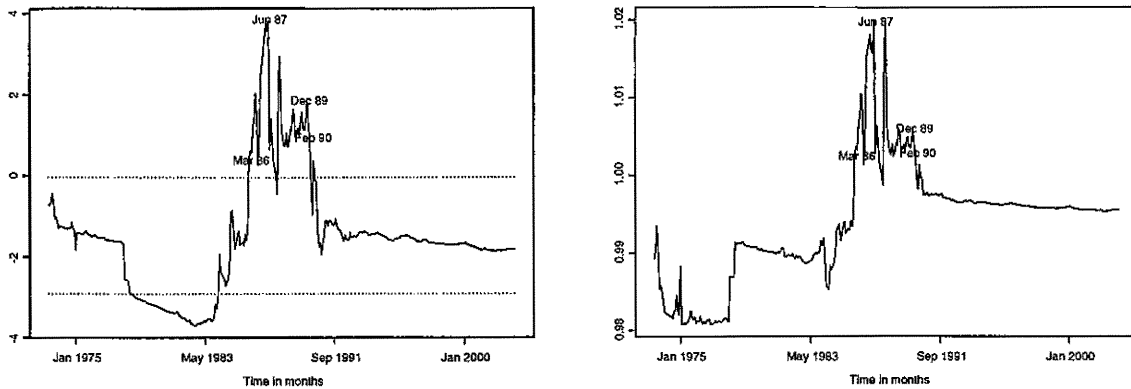


図 15: 左の図は TOPIX の recursive 型 ADF プロット。破線は標本の大きさ n で通常の有意水準 10% の両側検定を行ったときの棄却点である。右の図はそのときの AR(1) パラメータの推定値である。

期間 1970.1 -	1985.12	1986.8	1987.6	1989.12	1990.5
推定値	0.99400	1.01053	1.01999	1.00622	1.00138

表 11: AR(1) パラメータ δ^b の推定値。1970 年 1 月から期間を変えて推計している。

景気循環の拡張期に構造変化が生じて、部分的に explosive AR(1) 過程となっていた場合、部分系列の ADF 検定を行えば有用であろう。表 12 は rolling ADF 検定統計量による検定結果である。 $n = 400$ では 1970 年 1 月から 2003 年 4 月まで、 $n = 200$ では 1980 年 1 月から 1996 年 8 月まで、 $n = 100$ では 1984 年 1 月から 1992 年 4 月までのデータを使っている。4.3 節のシミュレーション結果より、 $\sup ADF_{ro}$ に注目すると、有意となっていることがわかる。

統計量	$\inf ADF_{ro}(r)$			$\sup ADF_{ro}(r)$			$\text{range} ADF_{ro}(r)$		
	$r = 1/2$	$r = 1/3$	$r = 1/4$	$r = 1/2$	$r = 1/3$	$r = 1/4$	$r = 1/2$	$r = 1/3$	$r = 1/4$
$n = 400$	-2.1650	-6.2345	-6.5877	++3.5823	++5.4368	++4.8858	++5.7473	++11.6713	++11.4735
$n = 200$	-2.1768	-4.1756	-3.7580	++2.3382	++3.6822	++3.2972	+4.5151	++7.8577	++7.0553
$n = 100$	-2.9248	-2.7689	-18.5554	+1.3057	++4.2212	++6.2943	4.2305	++6.9901	++24.8497

+ : significant at 5% level, ++ : significant at 1% level

表 12: rolling 型 ADF 検定統計量の検定結果

図 16 は rolling 型 ADF 検定統計量のプロットである。 $n = 100$ の場合の rolling 型 ADF 検定統計量の値は 1990 年初頭のバブル期と想定される時期で一樣に大きい統計量の値をとっていない。逆に、合理的バブルの期間を超える区間で計算しているであろう、 $n = 400, 200$ の場合のほうがバブル期と想定される時期を捕らえているように見える。これは、A.4 節のシミュレーション結果より、標本の大きさに比例して検出力が低下していることが原因であろうと思われる。また、4.3 節によると、検出力はバブル期間の取り方の誤りに対してロバストであるから、標本の大きさを大きくした場合の検出力を信頼してよいであろう。

6.3 景気循環との整合性

過去、1990 年代に起こったバブルは政府により正式に景気循環として発表されている。その結果と検定結果を照らし合わせてみよう。

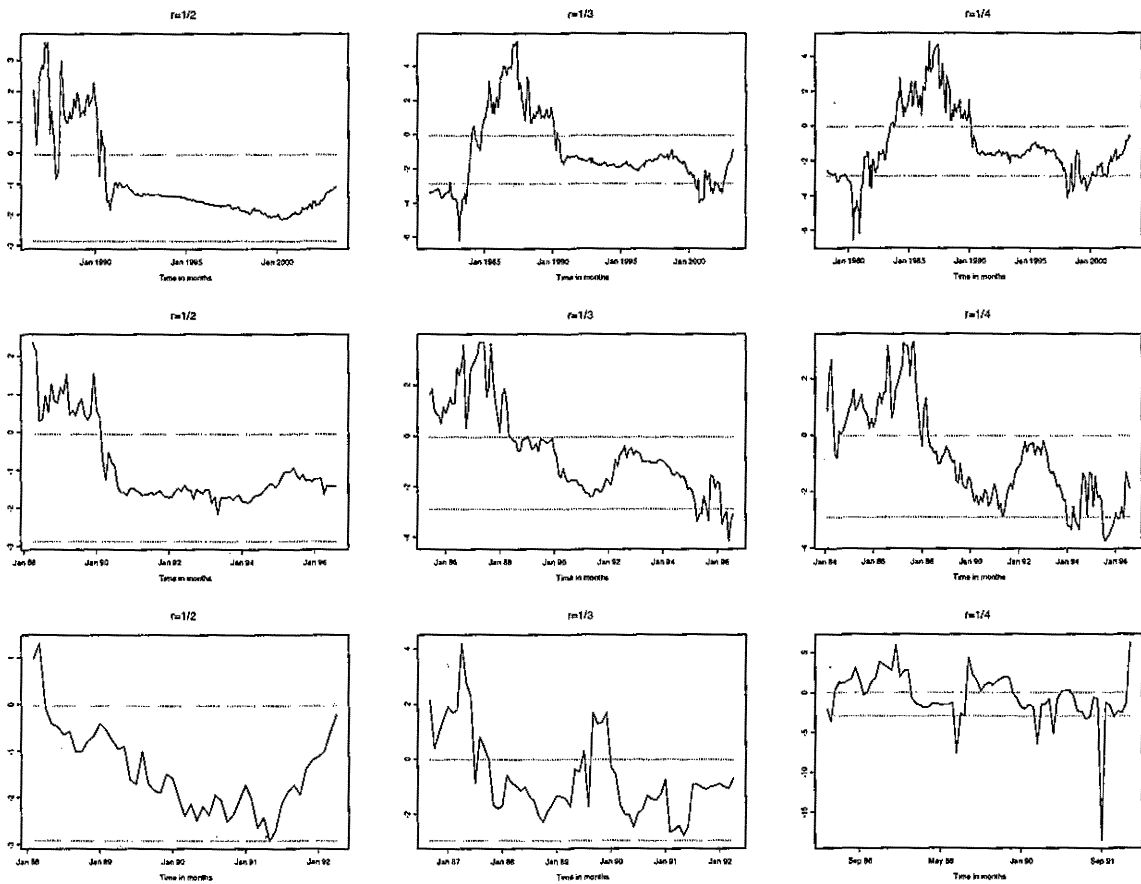


図 16: TOPIX の rolling 型 ADF プロット. 上の 3 つの図は $n = 400$, $r = 1/2, 1/3, 1/4$, 中の 3 つの図は $n = 200$, $r = 1/2, 1/3, 1/4$, 下の 3 つの図は $n = 100$, $r = 1/2, 1/3, 1/4$ である. 破線は標本の大きさ $[nr]$ で通常の有意水準 10% の両側検定を行ったときの棄却点である

- 1993 年経済企画庁の発表 (衣川, 2002, 第 8 章) :

「平成景気は 1986 年 12 月に始まり, 1991 年 4 月に終わって, 景気後退に転じた」

- 内閣府経済社会総合研究所の発表 (Bry-Boschan 法による結果)⁷ :

「第 11 景気循環は 1986 年 11 月が谷, 1991 年 2 月が山」

- 図 15 の ADF 検定統計量のプロットから判断される, TOPIX に合理的バブルが発生していた (上側 5% 点を超えていた) 期間 :

「1986 年 3 月から 1990 年 2 月」

検定により検出した時点は実際の景気循環よりやや先行している. しかし, 株価指数は景気指数の先行指標であることを考えると, この結果は実際の景気循環の拡張期を株価指数の側面から合理的バブルとして捕らえた結果といえよう.

⁷内閣府 HP の景気統計ページ <http://www.esri.cao.go.jp/jp/stat/> の景気基準日付による. なお, TOPIX は景気動向指数の先行指標に採用されている.

6.4 内挿結果

図 15 の ADF 検定統計量のプロットと、景気循環との整合性から判断して、TOPIX における合理的バブルの発生期間を 1986 年 3 月から 1990 年 2 月としよう。このとき、どのような知見が内挿から得られるかを議論する。

1970 年 1 月から、1986 年 2 月まで $p_t = p_t^f$ で、5 節の検証結果から、(28) 式の $I(1)$ 過程であると仮定する。

バブル発生開始時点である 1986 年 3 月を $t = 0$ とおく。この時点 0 でバブルが発生し、 $p_0 = p_0^f + b_0$ である。 p_t^f は $I(1)$ 過程であるから、 p_0^f を 1986 年 2 月の $p_{-1} = p_{-1}^f$ の予測値で代用すると、

$$\hat{b}_0 = p_0 - p_{-1} = 0.01035$$

となる⁸。また、表 11 より、合理的バブルの $AR(1)$ パラメータ δ^b の推定値を (1987 年 6 月の) $\hat{\delta}^b = 1.01999$ としよう。つまり、1986 年 3 月から 15 カ月後の 1987 年 6 月まで、 b_t は前月比で 2% 上昇しているとする。これにより、 $\hat{b}_{15} = \hat{b}_0(\hat{\delta}^b)^{15} = 0.013933$ となる。よって、株価 (TOPIX の実質値) とそのファンダメンタルズの比 P_{15}/P_{15}^f は、 $\log P_{15} = p_{15}$, $\log P_{15}^f = p_{15}^f$, $p_{15} - p_{15}^f = b_{15}$ より、

$$P_{15}/P_{15}^f \text{ の推定値 1: } \exp(\hat{b}_{15}) = 1.01403 \quad (29)$$

と推計される。つまり、15 ヶ月でバブルによる増分はファンダメンタルズの 1.4% でしかない。

仮に、1987 年 6 月のファンダメンタルズを、1986 年 2 月の株価 (P_{-1}) とする⁹。すると、 P_{15}/P_{15}^f の推定値は

$$P_{15}/P_{15}^f \text{ の推定値 2: } P_{15}/P_{-1} = \exp(p_{15} - p_{-1}) = 1.10359 \quad (30)$$

となり、15 ヶ月でバブルによる増分はファンダメンタルズの 10% あまりとなる。これは式 (29) の推定値とかなり違う。

このように P_{15}/P_{15}^f の推定結果に乖離が生じたのは、観測不能な b_0 を予測値に頼っているからで、式 (29) は \hat{b}_0 の値次第で変動する。たとえば、あるショックにより、 $P_0/P_0^f = 1.1$ と 10% 分の乖離が生まれたとする¹⁰。このとき、 P_{15}/P_{15}^f の推計を (29) と同様に行うと、 $\log(1.1) = 0.09531$ で、

$$P_{15}/P_{15}^f \text{ の推定値 3: } \exp\{\log(1.1) \times (1.01999)^{15}\} = 1.13684 \quad (31)$$

となる。つまり、15 か月で株価とファンダメンタルズとの乖離は 13.7% に広がっていることとなり、(30) 式と整合的となる。

7 さいごに

本稿では、想定される対立仮説の時系列モデルを整理した上で、(改良) ADF 検定統計量による単位根検定の検出力を理論とシミュレーションの両面から評価した。その結果に基づき、TOPIX に 1990 年代初頭に崩壊したバブルが合理的バブルであったかどうかの検定を行った。そして改良 ADF 検定統計量の 1 つが、合理的バブルを検出した。また検定統計量の値より、合理的バブルの発生期間を推計し、景気循環と適合していることを確かめた。

本稿でも議論しているように、実際の市場では、モデルが均一であるわけではなく、構造変化 (時間に依存してモデルの形が変化すること) が考えられる。本稿のように、簡単なモデルのままで、構造変化に対するロバストネスを検証するのも 1 つの方法であるが、別アプローチとして時間に依存して確率的に変化するモデルの研究も必要であろう。しかし、4.1 節で紹介したように、そのようなモデルは複雑になりがちで解釈しづらい傾向にあることも否めない。その点で自己回帰モデルは有効であると思われる。

⁸ p_{-1}^f は 1986 年 2 月までのデータを所与として、 $\{p_t^f, t < 0\}$ を $I(1)$ 過程としたときの最良線形予測値にあたる。

⁹予測の平均 2 乗誤差が大きいが、脚注 8 と同様に $\log P_{-1} = p_{-1}$ は $\log P_{15}^f = p_{15}^f$ の最良線形予測値である。

¹⁰このような議論は Phillips et al (2006) でも行われている。彼らも NASDAQ の分析において、ショックを 10% としている。

参考文献

- Banerjee, A., R.L. Lumsdaine & J.H. Stock (1992) Recursive and sequential tests of the unit root and trend break hypothesis: theory and international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics* 10(3), 271–288.
- Beran. J. (1994) *Statistics for Long Memory Processes*. Chapman and Hall, New-York.
- Blanchard, O.J. & M.W. Watson (1982) Bubbles, rational expectations, and financial markets. in P. Wachtel, ed., *Crises in the economic and financial structure* (Lexington Books, Lexington), 295–315.
- Brockwell, P.J. & R.A. Davis (1991) *Time Series: Theory and Methods*, 2nd edn. Springer: New York.
- Campbell, J.Y. & R.J. Shiller (1989) The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors. *The Review of Financial Studies* 1, 195–228.
- Diba, B. & H. Grossman (1988a) Explosive rational bubbles in stock prices?. *American Economic Review* 78, 520–530.
- Diba, B. & H. Grossman (1988b) Rational inflationary bubbles. *Journal of Monetary Economics* 21, 35–46.
- Edward, C. (2000) *Devil Take the Hindmost: A History of Financial Speculation*. Farrar Straus & Giroux.
- Evans, G.W. (1991) Pitfalls in testing for explosive bubbles in asset prices. *Economic Review* 81, 922–930.
- Fuller, W. (1996) *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley, New York.
- Geweke, J. & S. Porter-Hudak (1983) The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis* 4, 221–237.
- Gurkaynak, R.S. (2005) Econometric tests of asset price bubbles: taking stock. *Finance and Economics Discussion Series*. Federal Reserve Board
- Hamilton, J.D. (1994) *Time Series Analysis*. Princeton Univ Press.
- Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt & Y. Shin (1992) Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54, 159–178.
- Lo, A.W. (1991) TLong term memory in stock market prices. *Econometrica* 59, 1279–1313.
- Ng, S. & P. Perron (1995) Unit root tests in ARMA models with data-dependent methods for the selection of the truncation lag. *Journal of the American Statistical Association* 90, 268–281.
- Phillips, P.C.B., Y. Wu, & J. Yu (2006) Explosive behavior and the Nasdaq bubble in the 1990s: When did irrational exuberance escalate asset values?. *Working paper*. Available from <http://hd7005040.ourhost.cn/english/web/04-01-11.htm>.
- Chancellor, E. (2000) 「バブルの歴史—チューリップ恐慌からインターネット投機へ」(山岡 訳). 日経 BP 社
- 浅子, 加納, 佐野 (1990) 「株価とバブル」(西村・三輪編「日本の株価・地価」第3章. 東京大学出版会
- 河合 (1994) 「国際金融論」東京大学出版会

衣川 (2002) 「日本のバブル」. 日本経済評論社.

東京三菱銀行資金証券部 (2004) 「直近の株価上昇時における合理的バブルの検証」 *Focus on the Markets* 74, 1-11.

中村, 新家, 美添, 豊田 (1992) 「経済統計入門」第2版. 東京大学出版会.

APPENDIX

A.1 explosive AR(1) モデルについて

よく知られている AR(1) モデルは, 定常 AR(1) モデルもしくは非定常の単位根モデルである. explosive (爆発的) AR(1) モデルとはどのようなモデルかを対比して紹介する.

- 定常 AR(1) モデルの MA 表現 ($|\rho| < 1$):

$$\begin{aligned} y_t &= \rho y_{t-1} + \varepsilon_t = \rho(\rho y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \rho^2 y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots \\ &= \rho^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \rho^j \varepsilon_{t-j} = \rho^t y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{t-j} \varepsilon_j \end{aligned}$$

- 単位根モデルの MA 表現 ($\rho = 1$):

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j} = y_0 + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$$

- explosive AR(1) モデルの MA 表現 ($\rho > 1$):

$$\begin{aligned} y_t &= \rho y_{t-1} + \varepsilon_t = \rho^t y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{t-j} \varepsilon_j \\ &= \rho^t \left(y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{-j} \varepsilon_j \right) \end{aligned}$$

両辺を ρ^t で割ると, $\rho^{-t} y_t = \rho^{-1} y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{-j} \varepsilon_j$ このように, explosive AR(1) モデルは急速に正か負の方向に発散し, その発散スピードは ρ に依存する.

図 17 は, いくつかの AR(1) モデルの系列をプロットしている. 下の図からわかるように, AR(1) パラメータが 1 より大きくなるとわずかな増加で発散のスピードが相当速まる.

A.2 ADF 検定統計量の一致性について

この節では, 「 H_0^f vs H_1^f 」の検定ならびに 「 H_0 vs H_1 」の ADF 検定統計量による検定が一致検定となることの概要を示す. また, それぞれの対立仮説のモデル下で AR(1) パラメータ ρ の推定量が一致推定量となることを示す.

帰無モデルを

$$(1 - \rho L)(y_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad \rho = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

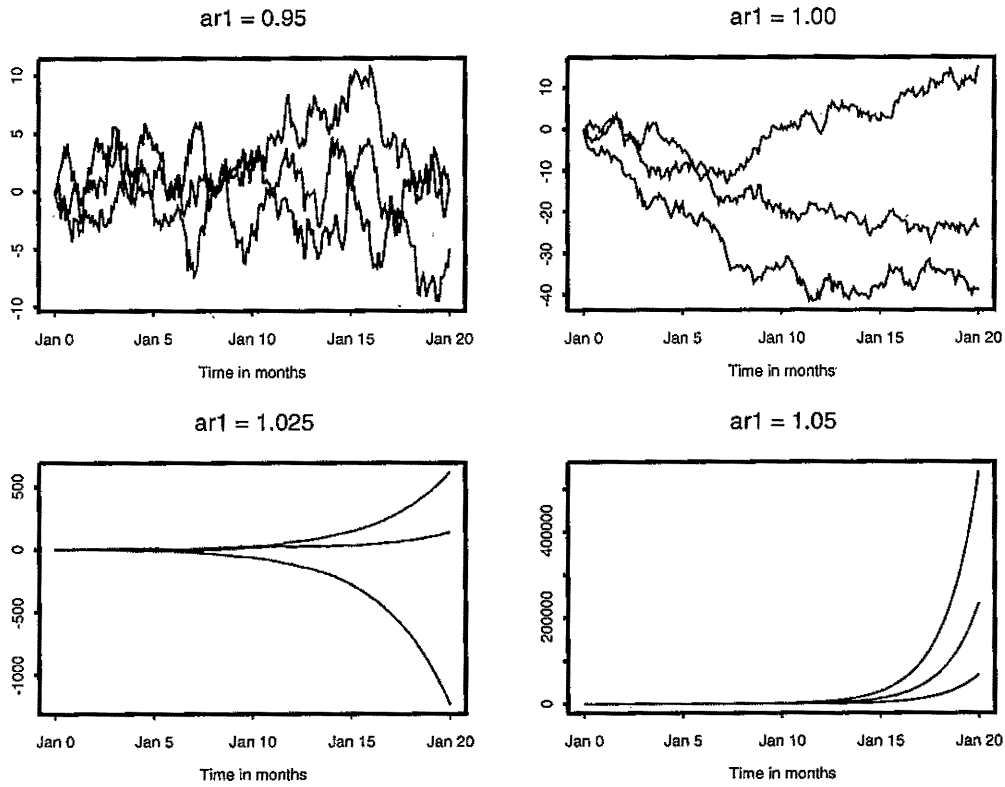


図 17: AR(1) モデルの例：左上は $\rho = 0.95$ ，右上は $\rho = 1$ ，左下は $\rho = 1.025$ ，右下は $\rho = 1.05$ をそれぞれ 3 系列ずつ発生させている。

とする。ここで $\{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ であるとする¹¹。予式は，

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \alpha = (1 - \rho)\mu = 0 \quad (\text{A.2})$$

となるため帰無モデルでは平均 0 の I(1) 系列である。Fuller (1996, Theorem 10.2.1) と同様に，

$$\bar{y}_{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{t+i}, \quad i = 0, -1, \quad \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t$$

とおくと，最小二乗推定量と t 検定統計量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{y}_{(0)} - \hat{\rho} \bar{y}_{(-1)} \\ \hat{\rho} - \rho &= \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n \bar{y}_{(-1)}^2 \right\}^{-1} \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t - n \bar{y}_{(-1)} \bar{u} \right\} \\ t_{\rho=1} &= \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_\rho} \\ \hat{\sigma}_\rho^2 &= \frac{s_n^2}{\sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n \bar{y}_{(-1)}^2} \\ s_n^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\rho} y_{t-1})^2 \end{aligned}$$

¹¹この仮定は定常な平均 0 の ARMA 過程を含む定常な線形過程のモデルで置き換えられる。例えば Hamilton (1994) の 17.5 節 参照。

帰無モデルが正しいとき,

$$t_{\rho=1} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W_* dW}{\sqrt{\int_0^1 W_*^2 dr}} \quad (\text{A.3})$$

ここで, $W = W(r)$ は標準ブラウン運動で, $W_* = W_*(r) = W(r) - \int_0^1 W(r) dr$ は平均を引いたブラウン運動 (demeaned Brownian motion) である (たとえば, Hamilton, 1994, (17.4.36) 式). $t_{\rho=1}$ は ADF 検定統計量とよばれ, 本文では ADF_n と記されている.

Case I

真のモデルが次であったとする.

$$\begin{aligned} y_t &= \rho y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \\ u_t &= u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.(0, \sigma^2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここで $\rho > 1$, y_0, y_1 はある確率変数で $\nabla y_0 = O_p(1)$ とする. また $E(n\rho^{-n}y_0)^2 = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), $u_0 = 0$ とする. このとき, α と ρ の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\rho}$ は次の漸近分布が成立する.

Theorem 1 モデル (A.4) において, $n \rightarrow \infty$ で次が成立する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{1/2}} \hat{\alpha} &\xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr \\ \frac{\rho^n}{n^{1/2}(\rho^2 - 1)} (\hat{\rho} - \rho) &\xrightarrow{d} \frac{\sigma}{x} \left(W(1) - \int_0^1 W(r) dr \right) \end{aligned}$$

ここで x は次で定義される.

$$x = \nabla y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j} \varepsilon_j$$

以下の証明における確率的オーダーはすべて 2 次モーメントを評価することで確認することができる. 2 次モーメントの評価のために, 次の不等式をしばしば使う: $\{a_j\}$ を非負の数値, $\{X_j\}$ を 2 次モーメント有界な確率変数列とすると, Cauchy-Schwarz の不等式を用いて次が成り立つ.

$$E \left(\sum_{j=1}^n a_j X_j \right)^2 \leq \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \{E(X_j^2)\}^{1/2} \right\}^2 \quad (\text{A.5})$$

Theorem 1 の証明. Fuller (1996, Theorem 10.2.1) の証明と同様の方針で行う.

$$\begin{aligned} \nabla y_t &= \rho \nabla y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \rho^t \left(\nabla y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{-j} \varepsilon_j \right) \\ &= \rho^t x_t \end{aligned}$$

ここで $x_t = \nabla y_0 + \sum_{j=1}^t \rho^{-j} \varepsilon_j$ である. Fuller (1996, Theorem 10.2.1) にあるように, $x_t \xrightarrow{a.s.} x$, as $t \rightarrow \infty$ で

$$x_t - x = \sum_{j=t+1}^{\infty} \rho^{-j} \varepsilon_j = O_p(\rho^{-t}), \quad E(x_t - x)^2 = O(\rho^{-2t}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

である。さて、

$$\sum_{j=1}^t \nabla y_j = y_t - y_0, \quad y_t = \sum_{j=1}^t \nabla y_j + y_0 = \sum_{j=1}^t \rho^j x_j + y_0$$

と書けることから、

$$\begin{aligned} \rho^{-t} y_t &= \sum_{j=1}^t \rho^{-(t-j)} x_j + \rho^{-t} y_0 \\ &= \sum_{j=1}^t \rho^{-(t-j)} (x_j - x) + x \sum_{j=0}^{t-1} \rho^{-j} + \rho^{-t} y_0 \\ &= \sum_{j=1}^t \rho^{-(t-j)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \rho^{-k} \varepsilon_k + x \sum_{j=0}^{t-1} \rho^{-j} + \rho^{-t} y_0 \end{aligned}$$

よって、

$$\rho^{-t} y_t = O_p(t\rho^{-t}) + \frac{\rho x}{\rho - 1} + \rho^{-t} y_0, \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.6})$$

また、

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} &= \sum_{t=1}^n \rho^{t-n-1} \rho^{-(t-1)} y_{t-1} \\ &= \sum_{t=1}^n \rho^{t-n-1} \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} \rho^{-(t-j-1)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \rho^{-k} \varepsilon_k + x \sum_{j=0}^{t-2} \rho^{-j} + \rho^{-(t-1)} y_0 \right\} \\ &= n\rho^{-n} y_0 + \frac{\rho x}{(\rho - 1)^2} + o_p(1) \end{aligned}$$

ここで $\sum_{t=1}^n \rho^{t-n} = \sum_{t=1}^n \rho^{-(n-t)} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} \rightarrow 1/(1-\rho^{-1}) = \rho/(\rho-1)$ を使った。 $E(n\rho^{-n}y_0)^2 = o(1)$ の仮定から

$$\rho^{-n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} \xrightarrow{d} \frac{\rho x}{(\rho - 1)^2} \quad (\text{A.7})$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} \rho^{-2n} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 &= \sum_{t=1}^n \rho^{2(t-n-1)} \rho^{-2(t-1)} y_{t-1}^2 \\ &= \sum_{t=1}^n \rho^{2(t-n)} \rho^{-2} \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} \rho^{-(t-j-1)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \rho^{-k} \varepsilon_k + x \sum_{j=0}^{t-2} \rho^{-j} + \rho^{-(t-1)} y_0 \right\}^2 \\ &= \frac{x^2}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1)^2} + o_p(1) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Hamilton (1994, Proposition 17.1 (d)) より

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{t=1}^n u_t \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{1/2} \rho^n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t &= \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{t=1}^n \rho^{t-1-n} \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} \rho^{-(t-j-1)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \rho^{-k} \varepsilon_k + x \sum_{j=0}^{t-2} \rho^{-j} + \rho^{-(t-1)} y_0 \right\} u_t \\ &= n\rho^{-n} y_0 \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{t=1}^n u_t + \frac{\rho x}{\rho - 1} \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{t=1}^n \rho^{t-1-n} u_t + o_p(1) \\ &= \frac{x}{\rho - 1} \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} u_{n-j} + o_p(1) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

右辺の第1項は、式 (A.5) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} u_n - \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} u_{n-j} &= \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} \sum_{k=n-j+1}^n \varepsilon_k \\ &= O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{1/2} \rho^n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t &= \frac{x}{\rho-1} \frac{1}{n^{1/2}} u_n \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{-j} + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \frac{\rho x}{(\rho-1)^2} W(1) \sigma \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ここで最後の収束は Hamilton (1994, Proposition 17.1 (a)) を使った。式 (A.7), (A.8), (A.9), (A.11) より最小二乗推定量は次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\rho} - \rho &= \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n \bar{y}_{(-1)}^2 \right\}^{-1} \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t - n \bar{y}_{(-1)} \bar{u} \right\} \\ &= \{O_p(\rho^{2n}) - O_p(n^{-1} \rho^{2n})\}^{-1} \{O_p(n^{1/2} \rho^n) - O_p(n^{1/2} \rho^n)\} \end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \rho^n (\hat{\rho} - \rho) &= \left\{ \rho^{-2n} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \right\}^{-1} \left\{ n^{-1/2} \rho^{-n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} u_t - n^{1/2} \rho^{-n} \bar{y}_{(-1)} \bar{u} \right\} + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \left\{ \frac{x^2}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1)^2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\rho x}{(\rho - 1)^2} W(1) \sigma - \frac{\rho x}{(\rho - 1)^2} \sigma \int_0^1 W(r) dr \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{\rho^2 - 1} \right\}^{-1} \rho \sigma \left\{ W(1) - \int_0^1 W(r) dr \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

また $\hat{\alpha}$ についても、

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{y}_{(0)} - \hat{\rho} \bar{y}_{(-1)} = \bar{u} - (\hat{\rho} - \rho) \bar{y}_{(-1)} = O_p(n^{1/2}) - O_p(n^{-1/2}) \\ \frac{1}{n^{1/2}} \hat{\alpha} &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{t=1}^n u_t + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d} \sigma \int_0^1 W(r) dr \end{aligned}$$

□

t 検定が一致検定となることも直ちに求められる。

Corollary 1 モデル (A.4) において、 $n \rightarrow \infty$ で $t_{\rho=1} \rightarrow \infty$.

証明. Theorem 1 の証明より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} s_n^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \{u_t - \hat{\alpha} - (\hat{\rho} - \rho) y_{t-1}\}^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n (u_t - \hat{\alpha})^2 + o_p(1) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n (u_t - \bar{u})^2 + o_p(1) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n u_t^2 - \left(\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{t=1}^n u_t \right)^2 + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \sigma^2 \left[\int_0^1 W(r)^2 dr - \left\{ \int_0^1 W(r) dr \right\}^2 \right] \end{aligned}$$

また,

$$\frac{1}{\rho^{2n}} \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n\bar{y}_{(-1)}^2 \right\} = \frac{1}{\rho^{2n}} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho^n} \sum_{t=1}^n y_{t-1} \right)^2$$

$$\xrightarrow{d} \frac{x^2}{(\rho^2 - 1)(\rho - 1)^2}$$

よって

$$\frac{\rho^{2n}}{n} \hat{\sigma}_\rho^2 = \frac{n^{-1} s_n^2}{\rho^{-2n} \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n\bar{y}_{(-1)}^2 \right\}} = O_p(1)$$

$$t_{\rho=1} = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\hat{\sigma}_\rho} + \frac{\rho - 1}{\hat{\sigma}_\rho} = O_p(1) + O_p(n^{-1/2} \rho^n (\rho - 1)) \rightarrow \infty$$

□

Case II

真のモデルが次であったとする.

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.13})$$

ここで $\{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$, $\rho > 1$, y_0 はある確率変数で $y_0 = O_p(1)$ とする. このとき, Fuller (1996, Theorem 10.2.1) より α と ρ の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\rho}$ は次の漸近分布が成立する.

$$n^{1/2}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$$\frac{\rho^n}{(\rho^2 - 1)}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} \frac{W_1}{W_2}$$

ここで W_1, W_2 は独立な確立変数で

$$(W_1, W_2) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{-i} \varepsilon_{-i}, y_0 + \frac{\alpha}{\rho - 1} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j} \varepsilon_j \right)$$

また, Fuller (1996, Corollary 10.2.1.1 と Corollary 10.2.1.2) から

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\varepsilon_t - \{\hat{\alpha} - \alpha + (\hat{\rho} - \rho)y_{t-1}\}]^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 + O_p\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{p} \sigma^2$$

$$\frac{1}{\rho^{2n}} \left\{ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - n\bar{y}_{(-1)}^2 \right\} = \frac{W_2^2}{\rho^2 - 1} + O_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$t_{\rho=1} = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\hat{\sigma}_\rho} + \frac{\rho - 1}{\hat{\sigma}_\rho} = O_p(1) + O_p(\rho^n (\rho - 1)) \rightarrow \infty$$

Case III

$\{y_t\}$ が定常 AR(p) モデルの場合, $\rho < 1$ で, 検定統計量 $t_{\rho=1}$ は $O_p(\sqrt{n}(\rho - 1))$ のオーダーで負の無限大に発散する. 例えば, Hamilton (1994, p.216) を参照.

A.3 改良 ADF 検定統計量について

A.2 節で定義された ADF 検定統計量は、全標本を用いたときの回帰係数の t 統計量で定義されていた。これを $ADF(1, n)$ と書くことにし、標本 n_0, \dots, n_1 までで計算した ADF 検定統計量を $ADF(n_0, n_1)$ と書くことにする。ただし、 $1 \leq n_0 < n_1 \leq n$ である。さて、 $n_0 = [nr_0], n_1 = [nr_1], 0 \leq r_0 < r_1 \leq 1$ とおくことにすると、汎関数中心極限定理より、

$$ADF([nr_0], [nr_1]) \xrightarrow{d} Q(r_0, r_1) = \frac{\int_{r_0}^{r_1} W_* dW}{\sqrt{\int_{r_0}^{r_1} W_*^2 dr}} \quad (\text{A.14})$$

そして、次のような改良 ADF 検定統計量の漸近結果が得られる。証明は、Banerjee et al. (1992, Section 1) と同様に連続写像定理 (continuous mapping theorem) を用いればよい。

- recursive 型 ADF 検定統計量

$$\min_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(1, k) \xrightarrow{d} \inf_{r \in [r_0, 1]} Q(0, r) \quad (\text{A.15})$$

$$\max_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(1, k) \xrightarrow{d} \sup_{r \in [r_0, 1]} Q(0, r) \quad (\text{A.16})$$

$$\max_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(1, k) - \min_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(1, k) \xrightarrow{d} \sup_{r \in [r_0, 1]} Q(0, r) - \inf_{r \in [r_0, 1]} Q(0, r) \quad (\text{A.17})$$

- rolling 型 ADF 検定統計量

$$\min_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(k - [nr_0] + 1, k) \xrightarrow{d} \inf_{r \in [r_0, 1]} Q(r - r_0, r) \quad (\text{A.18})$$

$$\max_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(k - [nr_0] + 1, k) \xrightarrow{d} \sup_{r \in [r_0, 1]} Q(r - r_0, r) \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \max_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(k - [nr_0] + 1, k) - \min_{k \in [nr_0], \dots, n} ADF(k - [nr_0] + 1, k) \\ \xrightarrow{d} \sup_{r \in [r_0, 1]} Q(r - r_0, r) - \inf_{r \in [r_0, 1]} Q(r - r_0, r) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

検定統計量の漸近分布は同じオーダーで収束するので対立仮説の下で ADF 検定統計量による検定が一致検定となるならば、これら改良 ADF 検定統計量も一致検定となる。

A.4 Models 1–3 の検出力の詳細

図 18–図 22 は、4.3 節のシミュレーションの Models 1–3 の検出力の詳細結果である。 $n = 50, 100, 200$, 検定は有意水準 1% と 5% で行っている。他のモデルやパラメータの定義は 4.3 節で議論したモデルと同様である。

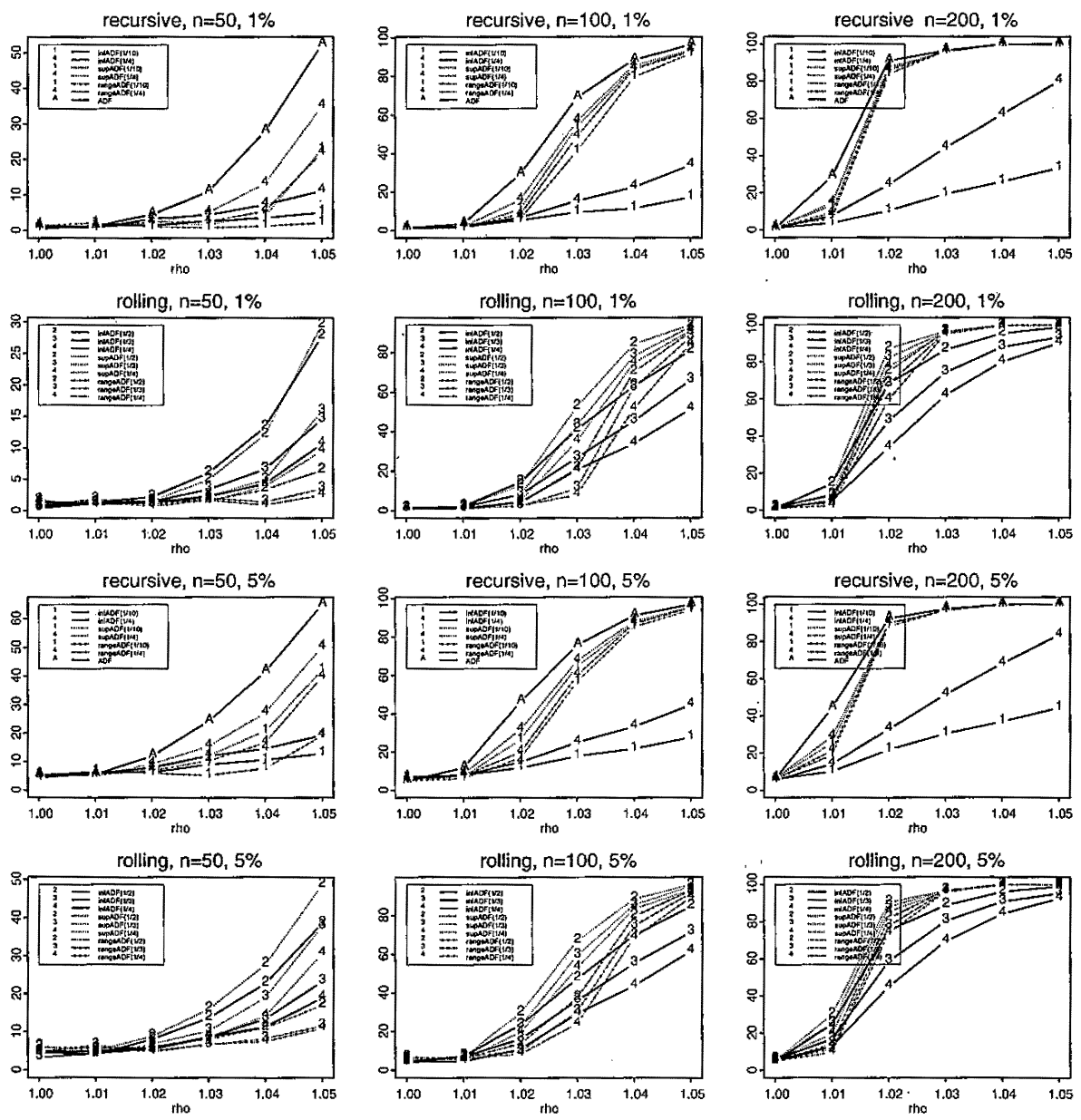


図 18: Model 1 における検出力

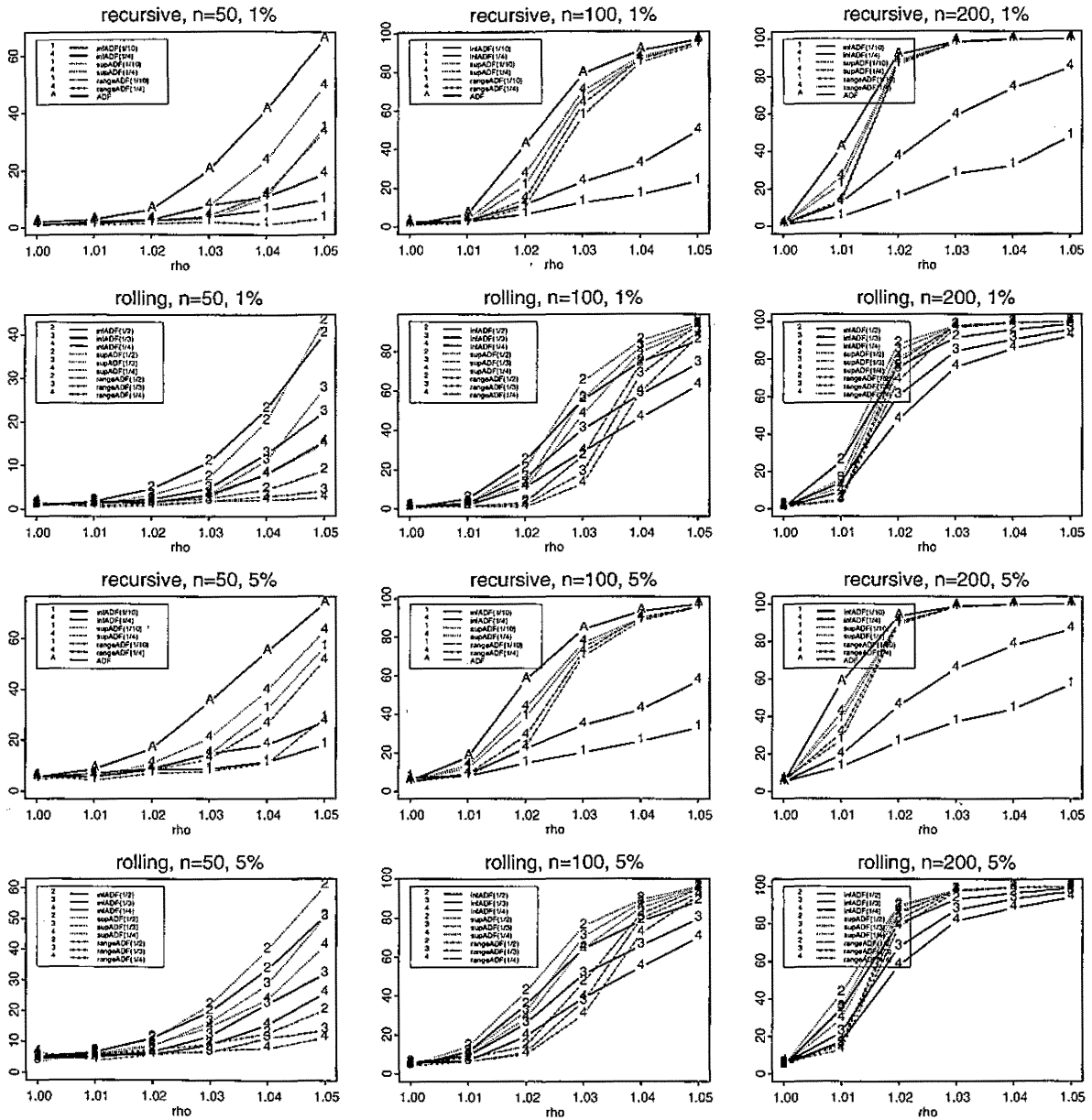


図 19: Model 2 における検出力 (右片側検定, $\mu = 0$)

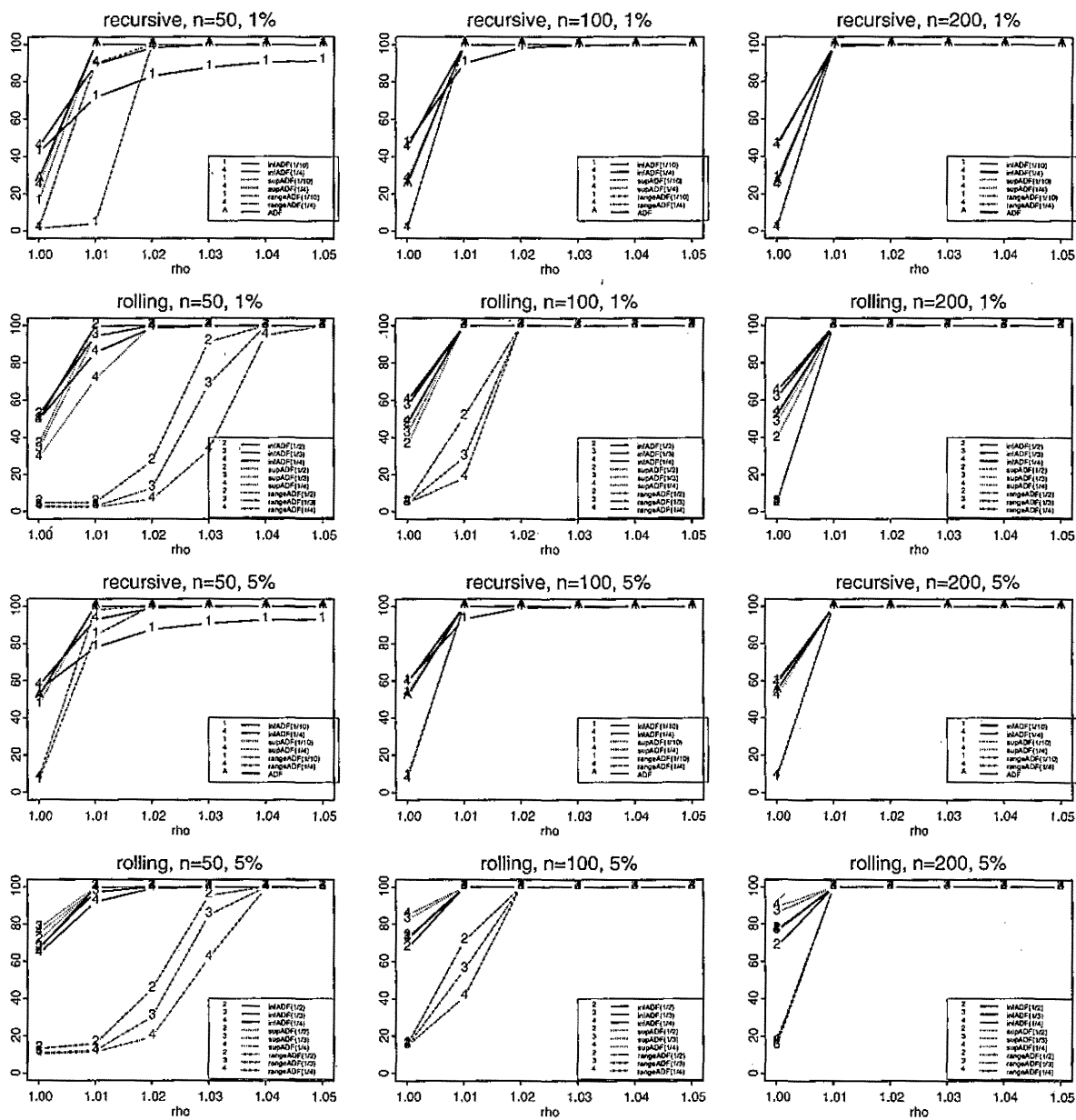


図 20: Model 2 における検出力 (右片側検定, $\mu = 5$)

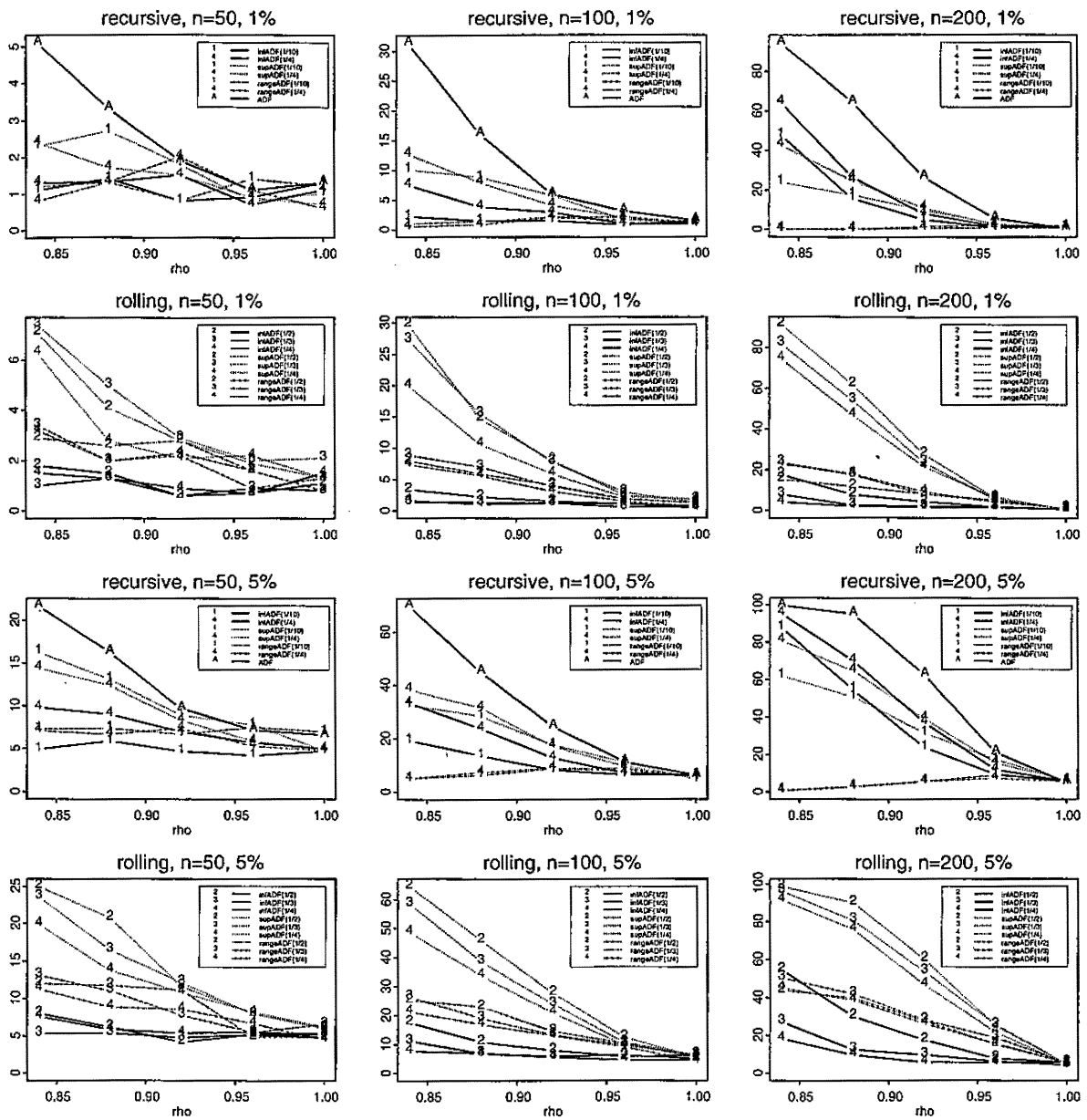


図 21: Model 2 における検出力 (左片側検定, $\mu = 0$)

