

## 個体面に沿う噴流型境界流の安定性に関する研究

山下, 巖

<https://doi.org/10.11501/3150981>

---

出版情報 : 九州大学, 1998, 博士 (理学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

### 第3章 側壁に沿う非対称 Jet 流の順圧不安定

#### § 3. 1 まえがき

大気循環流（風系）や海流といった自然界の大規模な流れは一般に3次元構造をもち、水平シアーと鉛直シアーを伴う。水平シアー（即ち、鉛直渦度分布）はその空間的非一様性により、いわゆるシアー流不安定 (Shear flow instability) を誘起する。このように水平シアーに起因する不安定は順圧不安定と呼ばれている。一方、流れの鉛直シアーは、地球自転の回転効果により、常に水平密度勾配（温度風の関係）を伴っている。そして、この水平密度勾配は微小攪乱に対して不安定となり、その位置のエネルギーを放出して攪乱を成長させることがある。このように、鉛直シアーに付随する傾圧性（等密度面と等圧面の不一致）に起因する不安定を傾圧不安定と呼ぶ。自然界の大規模循環流（回転成層流）に内在するこの2種類の不安定は、大気や海洋に見られる複雑な変動流を理解するための重要な素過程として、Eady<sup>19)</sup>、Kuo<sup>5)</sup>、Lipps<sup>6)</sup> 以来、幾多の論文で論じられてきた。しかし、第1章にも述べたように、従来の地球流体力学的安定解析においては、固体境界のあるなしに関係なく、流体の散逸効果は無視されて来た。そうした非粘性近似は、固体境界を伴わない大気の流れに対しては妥当であろうが、陸岸に沿って発達する海流の場合には、特にその順圧不安定に対しては、一考を要する。固体境界に接する流れの場合、第2章で示した様に、流体粘性は基本流と攪乱との間の運動エネルギーの受け渡しに大きな影響を及ぼすからである。

以上の見地から、本章では、陸岸に沿う海流の順圧不安定問題を粘性を考慮して解析する。ただし、ここで問題にする”粘性”は、次章で扱う実験室モデルに対しては流体の分子粘性そのものであるが、実際の海流に対しては渦動粘性を意味する。渦動粘性に対する適切な表現はまだ不明であるが、ここでは、従来の海流理論と同様、単純な定値渦動粘性を仮定する。

### § 3. 2 問題の記述

海流の順圧不安定モデル (Lipps<sup>6)</sup> 等) に従って、鉛直軸のまわりに回転する平面内の水平運動を考え、運動は鉛直方向に一様であるとする。この場合、回転座標系で表現された運動方程式から圧力を消去すると、次の渦度方程式が得られる (例えば、Pedlosky<sup>20)</sup> 参照) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_a + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \omega_a = \nu \Delta \omega_a, \quad (3.2.1)$$

ここで、 $\omega_a$  は絶対渦度で、回転座標系から見た相対運動の鉛直渦度 ( $\omega$ ) と座標系の鉛直回転角速度の2倍 ( $f$ ; コリオリパラメータ) の和で

$$\omega_a = \omega + f$$

と書かれる。 $\mathbf{v}$  は相対水平速度で、 $\Delta$  は2次元ラプラシアンである。この回転平面上に定常的な相対流 (基本流) ( $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\omega}$ ) があって、これに微小な攪乱 ( $\mathbf{v}', \omega'$ ) が加えられたとする: 即ち、

$$\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'. \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) を (3.2.1) に用い、基本流が (3.2.1) の解であるとする、微小攪乱に対する次の線形方程式が得られる:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad}) \omega' + (\mathbf{v}' \cdot \text{grad}) (\bar{\omega} + f) = \nu \Delta \omega' \quad (3.2.3)$$



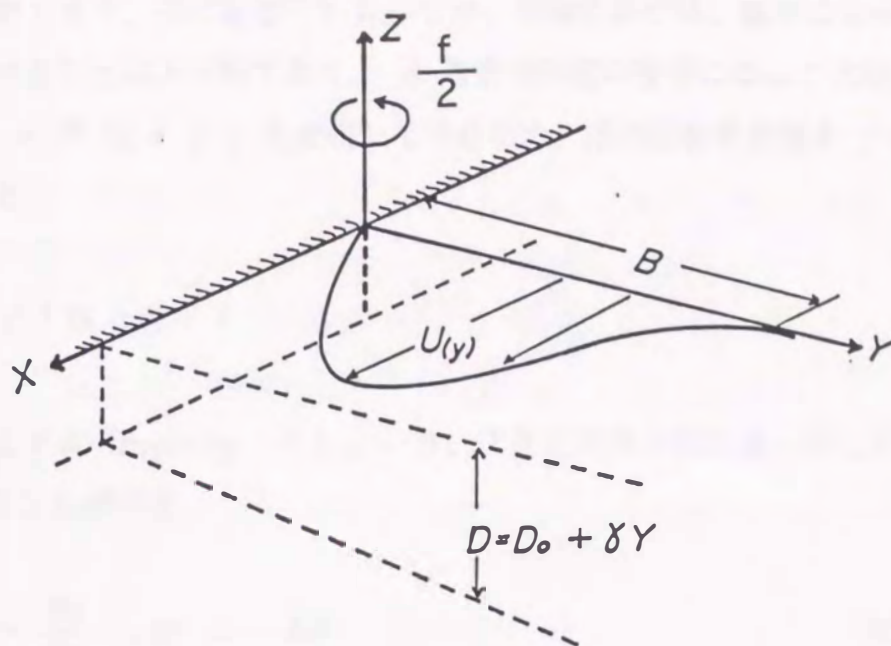


図1 基本流と座標系

ここで、基本流として、東西陸岸（鉛直側壁）に沿うJet型速度分布をもつ東向きの定常平行流を考える。図1のように、 $x$  軸を東向き、 $y$  軸を北向きとし、陸岸を  $y = 0$  となるように座標系を選ぶと、基本流及びその渦度は

$$\bar{v} = (U(y), 0), \quad \bar{\omega} = -\frac{dU}{dy}$$

なる形に表される。なお、この様な直角座標は、回転球面（地球）に対する局所平面近似として良く知られているものである。コリオリパラメータ  $f$ （自転角速度の局所鉛直成分の2倍）は、緯度の増加関数であるが、この局所平面近似のもとでは一般に

$$f = f_0 + \bar{\beta} y$$

と表される。ここに  $f_0$  及び  $\bar{\beta}$  は、 $y = 0$  に対応する緯度における  $f$  及びその



緯度方向の変化率であり、共に定数である。なお、実験室系では、場所によって回転角速度を変化させることは不可能であり、 $\bar{\beta}$  効果は深度の変化によって代用される。図1の様に深度  $D$  が  $D_0 + \gamma y$  と変化している場合、系の回転角速度を  $f/2$  (一定) とすると

$$\bar{\beta} = -f\gamma / D_0$$

なる等価性が成立する (Pedlosky<sup>20)</sup>)。一方、2次元の微小攪乱場に対して流線関数  $\psi$  を導入することができ、

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \omega' = -\Delta \psi \quad (3.2.4)$$

となる。 $\mathbf{v}$ 、 $\bar{\omega}$  及び  $f$  に対する上記の表現と (3.2.4) を用いると、攪乱の流線関数に関する線形方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi + \left( \beta - \frac{d^2}{dy^2} U(y) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi \quad (3.2.5)$$

に帰着する。ただし、ここでは、全ての量は、基本流の幅  $B$  及び代表流速  $U_0$  を用いて、無次元化されており、

$$R = U_0 B / \nu \quad (\text{Reynolds数}),$$

$$\beta = \bar{\beta} B^2 / U_0$$

である。 $\beta$  は Jet 流の幅  $B$  と "Inertia boundary layer" の幅  $\sqrt{U_0 / \bar{\beta}}$  の比の 2 乗を意味し、一般に  $\beta \sim O(1)$  である。

方程式は線形であり、主流が  $x$  及び  $t$  に無関係な場合を考えているので、 $x, t$  に関しては個々の Fourier 成分を扱えば良く、流線関数を次の形に表す：

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (3.2.6)$$

$\alpha$  は (実) 波数であり、 $c (= c_r + i c_i)$  の実部  $c_r$  は攪乱の位相速度を、虚数部  $c_i$  は増幅率を表わす。特に、 $c_i > 0$  のとき、攪乱は  $\exp(\alpha c_i t)$  の様に指数関数的に増大するから、基本流はこの攪乱に対して不安定と結論される。(3.2.6) を (3.2.5) に代入すると攪乱の振幅関数  $\phi(y)$  に関する次の式を得る：

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) + (\beta - U'')\phi = (i\alpha R)^{-1}(\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi). \quad (3.2.7)$$

ここに、プライム (') は  $y$  に関する微分を表わす。

固体境界面 ( $y = 0$ ) での non-slip の条件と無限遠 ( $y = \infty$ ) で攪乱が消滅するという条件は  $\phi$  を用いて次の形に書かれる。

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0, \quad (3.2.8)_1$$

$$\phi(\infty) = \phi'(\infty) = 0. \quad (3.2.8)_2$$

(3.2.7) 及び (3.2.8)<sub>1, 2</sub> は一つの固有値問題を形成し、その固有値関係式から攪乱の複素速度  $c$  が  $\alpha$  と  $R$  及び  $\beta$  の関数として決定される。(3.2.7) は Tareev<sup>21)</sup> によって導かれた式と一致するが、Tareev は具体的な基本流  $U(y) \neq \text{const.}$  に対する固有値問題を解いていない。なお、非粘性の極限  $R = \infty$  においては、Kuo<sup>5)</sup>、Lipps<sup>6)</sup> 等によって扱われた非粘性固有値問題

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) + (\beta - U'')\phi = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0. \quad (3.2.10)$$

になる。



実際に安定問題を解くためには、基本流の速度プロファイル  $U(y)$  は明らかな形で指定しておかねばならない。本章の全ての数値例に関して、次式を境界 Jet 型の非対称プロファイルとして考えていく。

$$U(y) = \begin{cases} a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 & , 0 \leq y \leq 0.5 \\ \operatorname{sech}[\pi(y-0.5)/\sqrt{2}] & , 0.5 \leq y \end{cases} \quad (3.2.11)$$

ここで、係数  $a_1, a_2, a_3, a_4$  は、そのプロファイルが  $U''(0)$  の指定された値に対して  $y = 0.5$  で 2 階の微分まで連続であるように決定される。この主流の速度プロファイルは  $y = 0.5$  で最大値 (= 1) となり、およそ  $y = 0.8$  で変曲点を持つ。沖側の

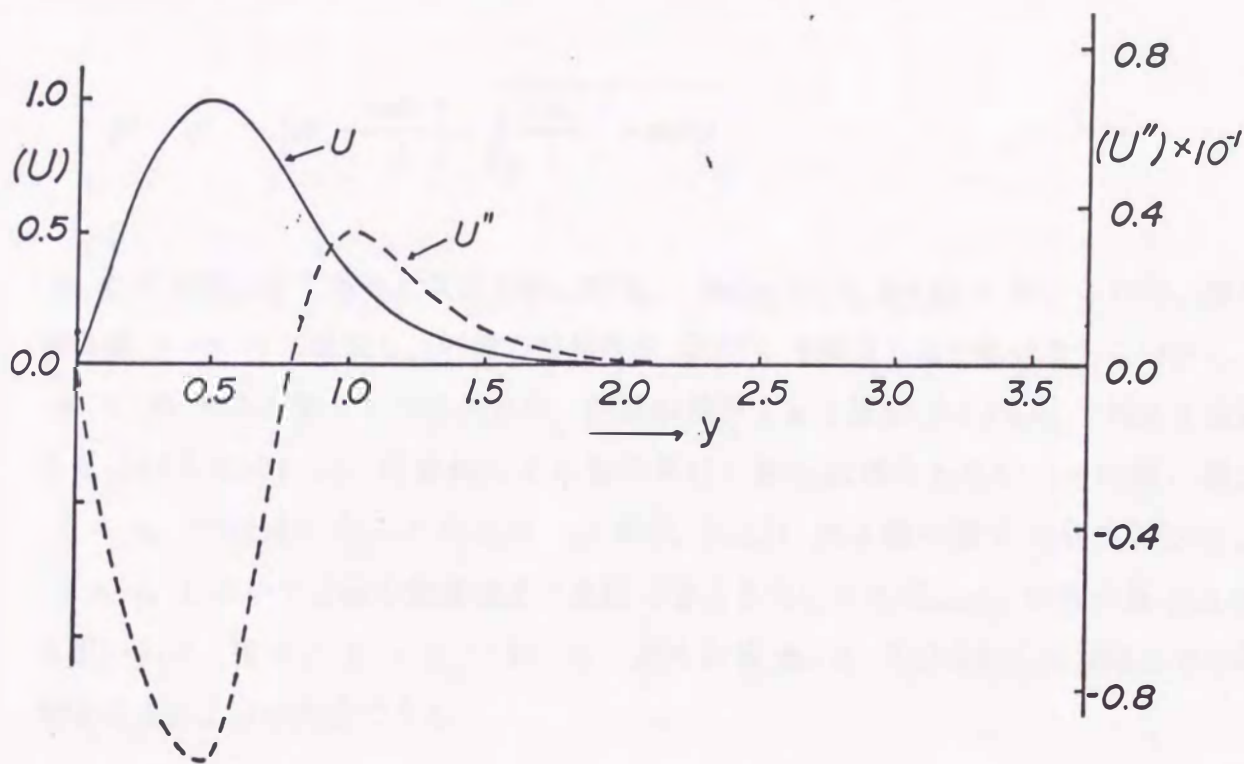


図2 基本流の速度プロファイルとその2階微分  
( $\bar{U}''(0) = 0.8$ の場合)

領域、即ち  $y \geq y_0$  ( $\approx 2.0$ ) で実質的に zero になる。図2が  $U''(0) = 0.8$  に対する速度プロファイルとその2階微分を示している。



### § 3. 3 解法

$\phi_j$  ( $j = 1 \sim 4$ ) を (3.2.7) の4つの1次独立な特解とする。  $U(y)$  と  $U''(y)$  が近似的に zero とみなしうる沖側の領域  $y \geq y_0$  では、(3.2.7) は定係数を持つ簡単な式となり、 $\phi_1 \sim \phi_4$  は次式のように指数関数によって表現される：

$$[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4] \propto [e^{-py}, e^{py}, e^{-qy}, e^{qy}] \quad (3.3.1)$$

ここで、

$$p^2, q^2 = \left( \alpha^2 - \frac{i\alpha Rc}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{i\alpha Rc}{2} \right)^2 + i\alpha R\beta} . \quad (3.3.2)$$

$p, q$  の実部は正であると仮定する。即ち、 $\text{Re}(p) > 0, \text{Re}(q) > 0$ 。この時、解は無有限遠  $y \rightarrow \infty$  で減衰し、外側の境界条件 (3.2.8)<sub>2</sub> を満足しなければならないから、 $\phi_1$  と  $\phi_3$  のみが解として許される。内部の境界 Jet 領域  $0 \leq y \leq y_0$  で対応する解を見つけるためには、計算機による数値解法に頼らねばならない。その際、解が  $y = y_0$  で連続であるためには、方程式 (3.2.7) が4階の微分方程式だから、 $y = y_0$  において3階の微係数まで連続になるようにすればよい。外側の解 (3.3.1) を用いると、接続点  $y = y_0$  において、求める解  $\phi_1, \phi_3$  及びそれらの3階までの微係数は次のように指定できる：

$$[\phi_1, \phi_1', \phi_1'', \phi_1'''] = [1, -p, p^2, -p^3]; y = y_0, \quad (3.3.3)_1$$

$$[\phi_3, \phi_3', \phi_3'', \phi_3'''] = [1, -q, q^2, -q^3]; y = y_0. \quad (3.3.3)_2$$

$\phi_1$  と  $\phi_3$  に関する初期条件として、これらを用いて、(3.2.7) を  $y = y_0$  から  $y = 0$  まで Runge-Kutta 法によって倍精度演算で積分していく。このときの  $y_0$  の値は 3.0 とした (図 2 参照)。そして、Reynolds 数の値に無関係に 0.01 のステップサイズ ( $\Delta y$ ) が用いられた。選んだステップサイズが適当かど

うかは、Reynolds 数  $R$  の色々な値で試験的に計算をしてチェックした。

さて、(3.2.7) の一般解で無限遠の条件を満たすものは次式のように  $\phi_1$  と  $\phi_3$  の一次結合として書かれる。

$$\phi = A_1 \phi_1 + A_3 \phi_3 \quad (3.3.4)$$

残りの境界条件 (3.2.8)<sub>1</sub> を解 (3.3.4) に適用すると、定数係数  $A_1$  と  $A_3$  に関する 2 つの同次方程式を得る。この式は係数行列の行列式が 0 になる、即ち、次式が成り立つ時のみ有意な解を持つ。

$$\det(c, \alpha, R; \beta) = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_3(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_3'(0) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.5)$$

結局、求める固有値は、この行列式の zero 点として決定される。

固有値の探索は試行錯誤法によって実行される。 $R$  と  $\alpha$  の任意の組合せに対して、一つの格子が複素  $c$  平面内に選ばれる。その試行固有値の組に対して、前述の数値解法によって解  $\phi_1$  と  $\phi_3$  を計算し、(3.3.5) における行列式の値を評価する。もし仮に行列式の zero 点 ( $c$  の固有値) が近似的にある格子内に見つかり、その近傍で行列式の値を、メッシュをさらに小さくした新しい格子上において、繰り返し評価する。 $R$  と  $\alpha$  に対する真の固有値  $c = c_r + i c_i$  は、内挿法によって決定される。このようにして、一定の  $\beta$  に対する  $c_r, c_i$  の固有値が  $R$  と  $\alpha$  の関数として得られる。特定のいくつかの固有値に対し、 $\phi_1$  と  $\phi_3$  の一階微分  $\phi'$  の固有関数も求められた。非粘性固有値問題も同じ様な方式で取り扱われる。沖側の領域  $y \geq y_0$  で、(3.2.9) が許容出来る解は次式のみである。

$$\phi_1 \propto \exp(-py) \quad (3.3.6)$$

ここで、 $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta/c}$  ,  $\text{Re}(p) > 0$  である。

内部領域では、(3.2.9) は次の様な初期条件から出発し、 $y$  の増分を  $\Delta y = 0.01$  で、Runge-Kutta 法によって積分される。

$$[\phi_1(y_0), \phi_1'(y_0)] = [1, -p] \quad (3.3.7)$$



積分は  $U(y) = c$  なる臨界点における (3.2.9) の対数的特異性を適当な方法\*)を用いて避けるような複素  $y$  平面内の経路に沿って実行される。境界条件 (3.2.10) より、積分された解は側壁で zero となることが要求される。

即ち、

$$\phi_1(0; c, \alpha) = 0 \quad (3.3.8)$$

この式が成り立つ  $c$  と  $\alpha$  の特別の組合せが非粘性固有値である。計算は粘性計算の場合と同様、試行錯誤によってなされる。

---

\*) 特異点周りの積分経路の選び方に関しては Lin (1955)<sup>15)</sup> を参照のこと。



§ 3. 4 結果と考察

(3.2.11) を基本流の速度プロファイルの表式として用いて、境界 Jet の安定特性が  $0.8$  と  $-0.1$  の間の  $\beta$  パラメータの色々な値に対して計算された。(3.2.11) 内の自由パラメータ  $U''(0)$  は、以下にあげる数値例に対しては、 $U''(0) = 0.8$  とした。

$U''(0) = 0$  を持つ (3.2.11) の別のプロファイルも、 $U''(0)$  の値の変化の影響を吟味するために取り扱われた。しかしながら、この程度  $U''(0)$  の値を変化させても、安定特性にほとんど差が生じないことがわかった。

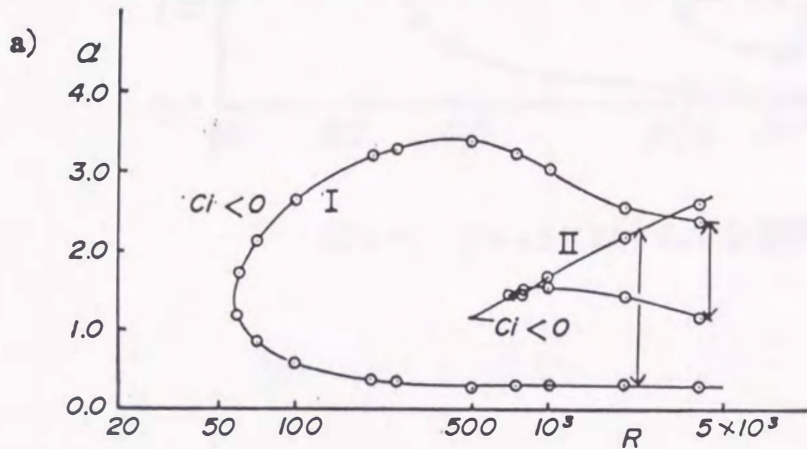


図 3 a)  $\beta = -0.1$  に関する中立安定曲線

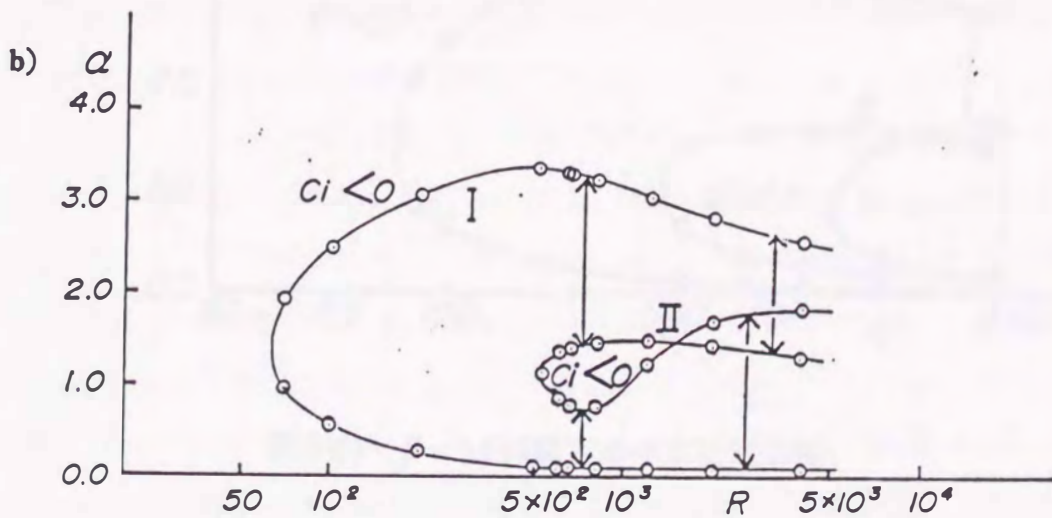


図 3 b)  $\beta = 0.4$  に関する中立安定曲線

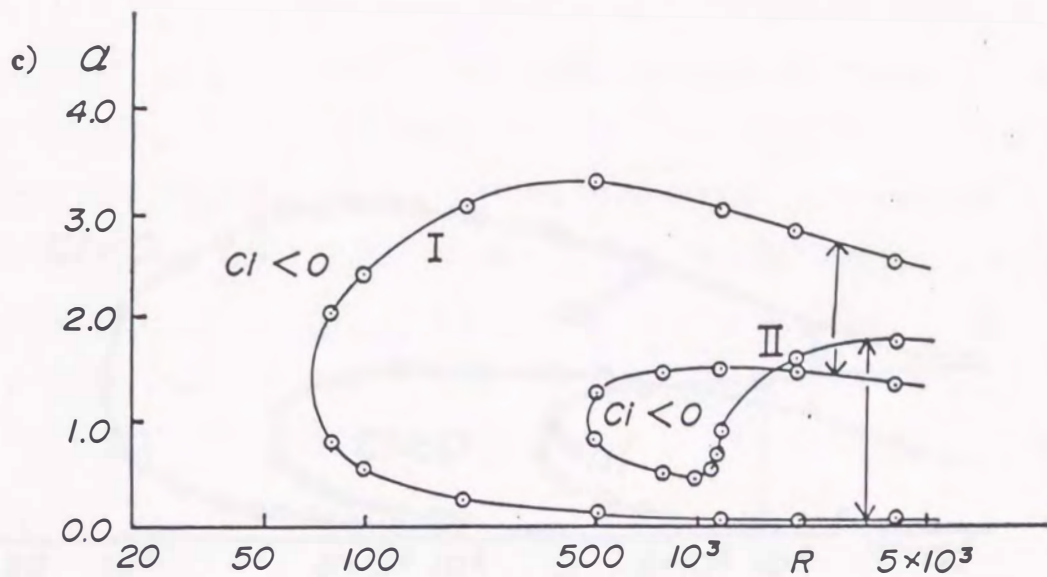


図 3 c)  $\beta = 0.5$ に関する中立安定曲線

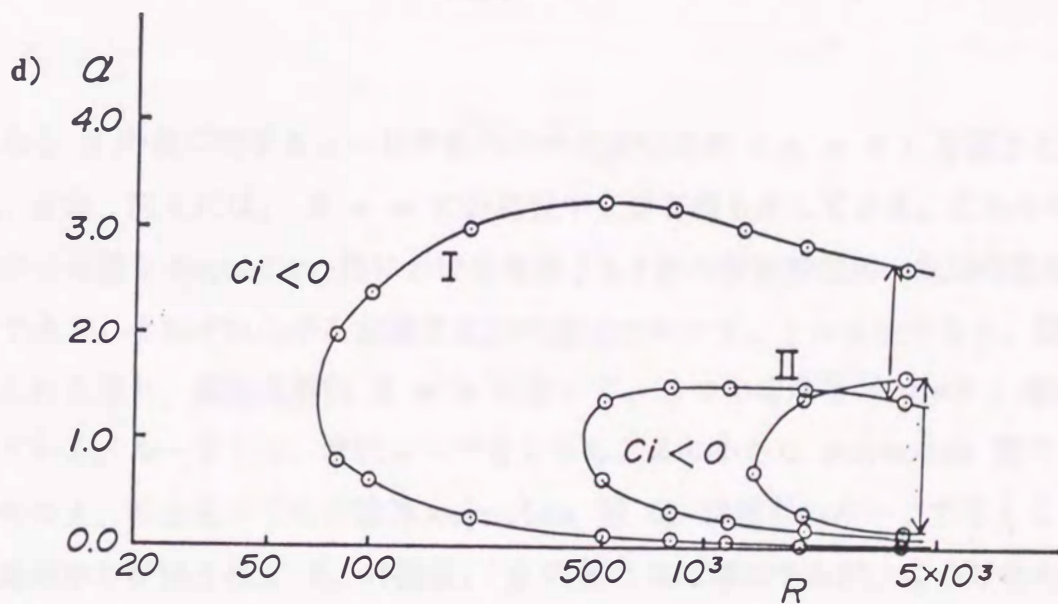


図 3 d)  $\beta = 0.6$ に関する中立安定曲線



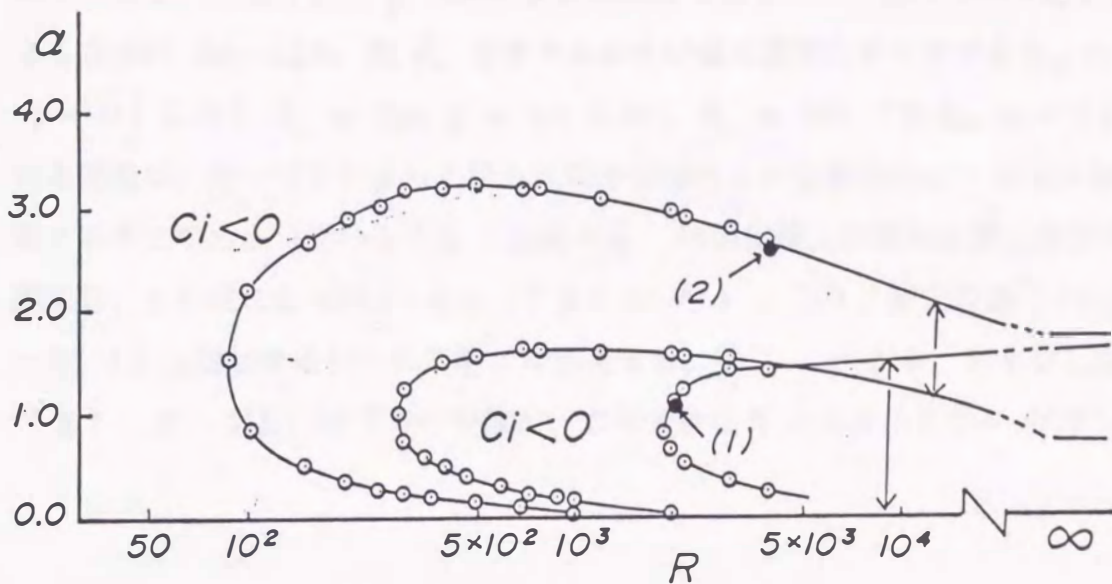


図4  $\beta=0.8$ に関する中立安定曲線  
(●は固有関数が計算された固有値の位置を示す。)

いろいろな  $\beta$  の値に対する  $\alpha - R$  平面内の中立安定曲線 ( $c_i = 0$ ) を図3と図4に示す。なお、図4には、 $R = \infty$  に非粘性中立固有値も示してある。これらの中立曲線から有限な Reynolds 数における境界 Jet 流の安定特性の一般的特徴を見ることができる。それぞれの中立曲線は2つの違ったループ、IとIIからなり、図4の例に見られる通り、非粘性極限  $R = \infty$  において、3つの有意な ( $\alpha \neq 0$ ) 漸近値をもっている。ループIは、常にループIIよりも、より小さな Reynolds 数で現れる。それゆえ、不安定のための臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$  は前者のループで与えられる。中立曲線から評価される  $R_{cr}$  の値は、 $\beta$  の値と共に増加するが、ここで考える  $\beta$  の範囲内に対しては100よりも小さい。たとえば、 $\beta = -0.1$  に対して  $R_{cr} = 57$ 、 $\beta = 0.8$  に対して  $R_{cr} = 87$  である。なお、この様に、臨界 Reynolds 数が  $\beta$  の値と共に増加する特徴は注目し得る。それは、 $\beta$  効果が、 $R_{cr}$  を増加させるという意味において、流れの安定化に働くということを意味するからである。これまでの非粘性解析において、 $\beta$  効果は不安定波数領域を縮小させるという意味に



おいて安定化作用があることは知られていたが、今、ここに、臨界 Reynolds 数を増
 加させるという点でも、 $\beta$  効果が安定化要因であることが知れたのである。ループ
 II も最小の Reynolds 数  $\tilde{R}_{cr}$  を有するがその値は数百のオーダーである。たとえば、
 $\beta = -0.1$  に対し  $\tilde{R}_{cr} = 700$ ,  $\beta = 0.8$  に対し  $\tilde{R}_{cr} = 290$  である。ループ II の興味
 ある特徴は、ループ I によって境された不安定な  $\alpha - R$  領域内に ‘安定の島’ を形
 成することである（そのような ‘安定の島’ は固体壁上を流れる薄い液膜の安定問
 題においても現れる (Miles, 1960)<sup>16)</sup>）。この ‘安定の島’ は  $\beta$  が
 $-0.1$  から増加するにつれて著しく発達する。特に、 $\beta$  が  $0.5$  を少し越え、
 ‘島’ (ループ II) の下方の分枝が、より大きな  $R$  とより小さな  $\alpha$  の方へ拡張し始

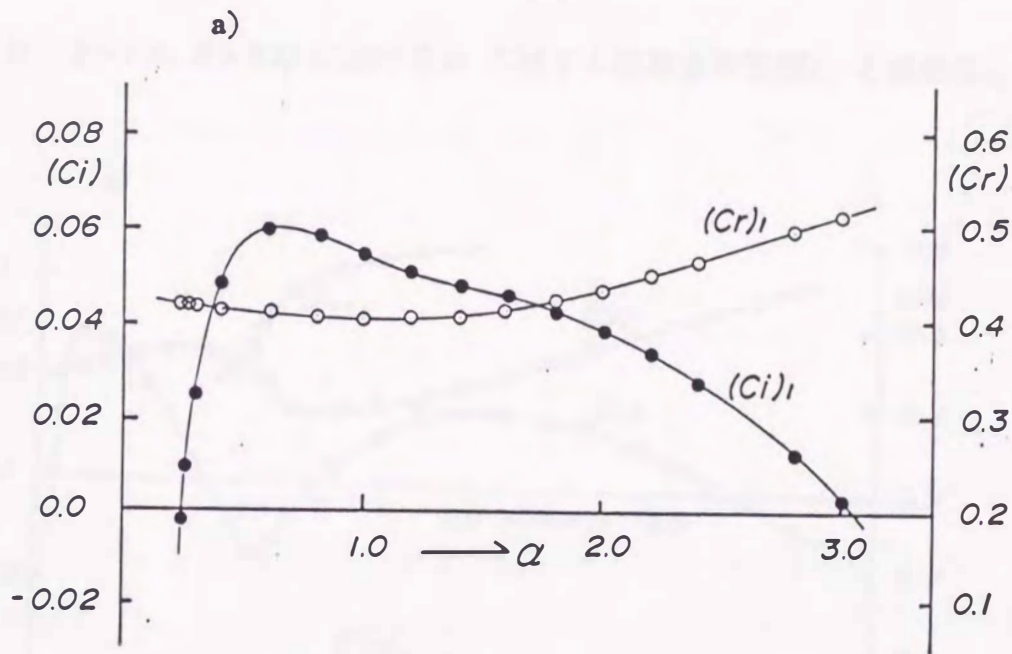


図 5 a)  $\beta = 0.4$ ,  $R = 200$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

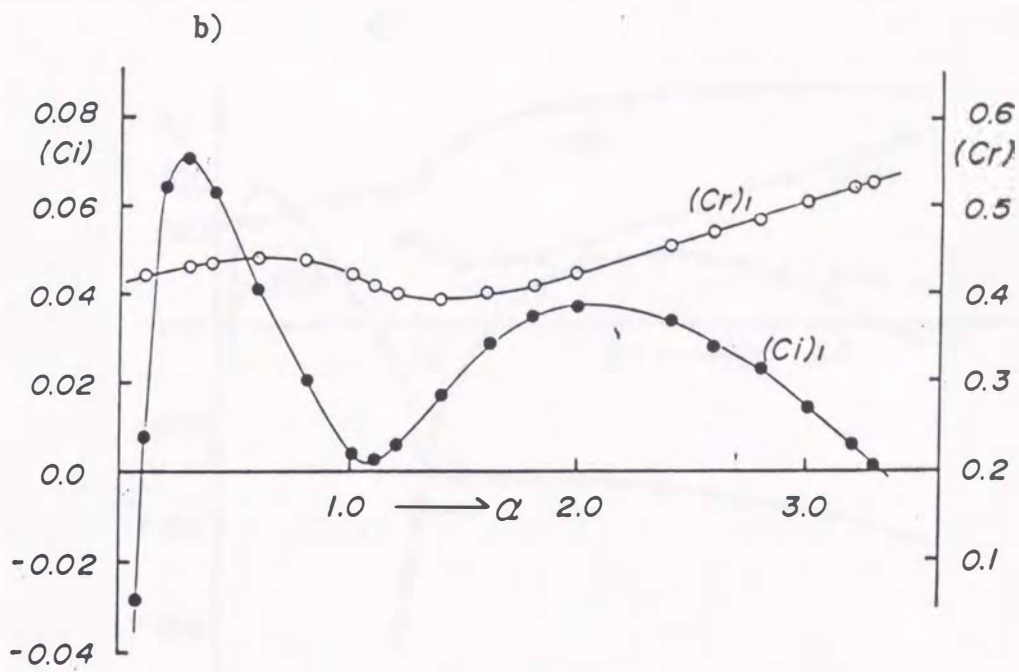


図 5 b)  $\beta=0.4$ ,  $R=500$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

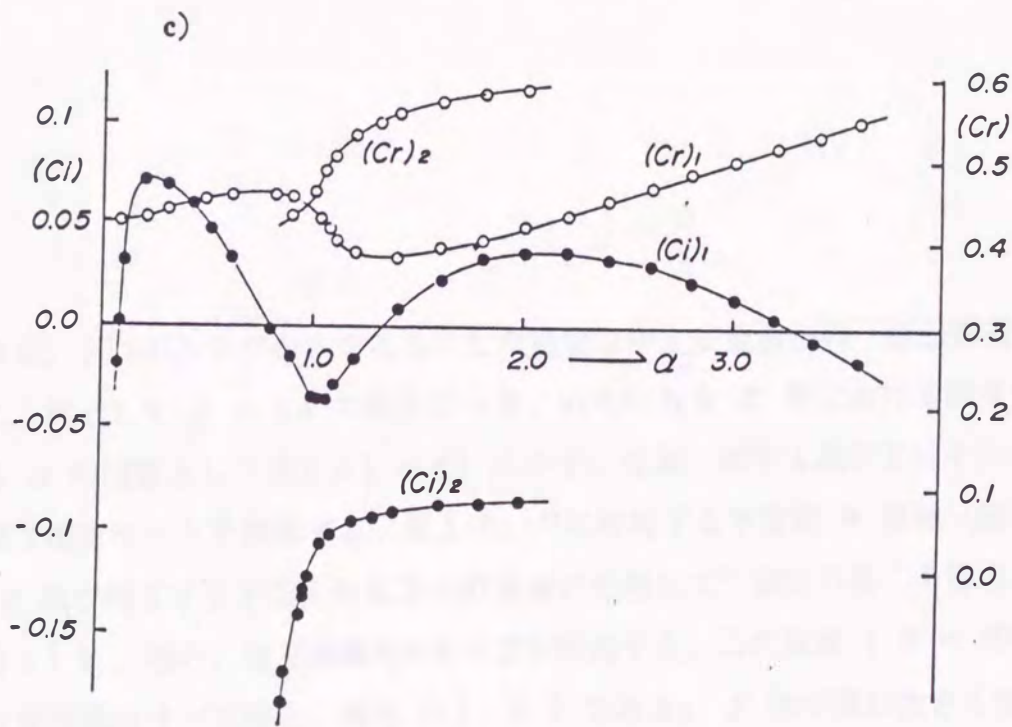


図 5 c)  $\beta=0.4$ ,  $R=600$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$



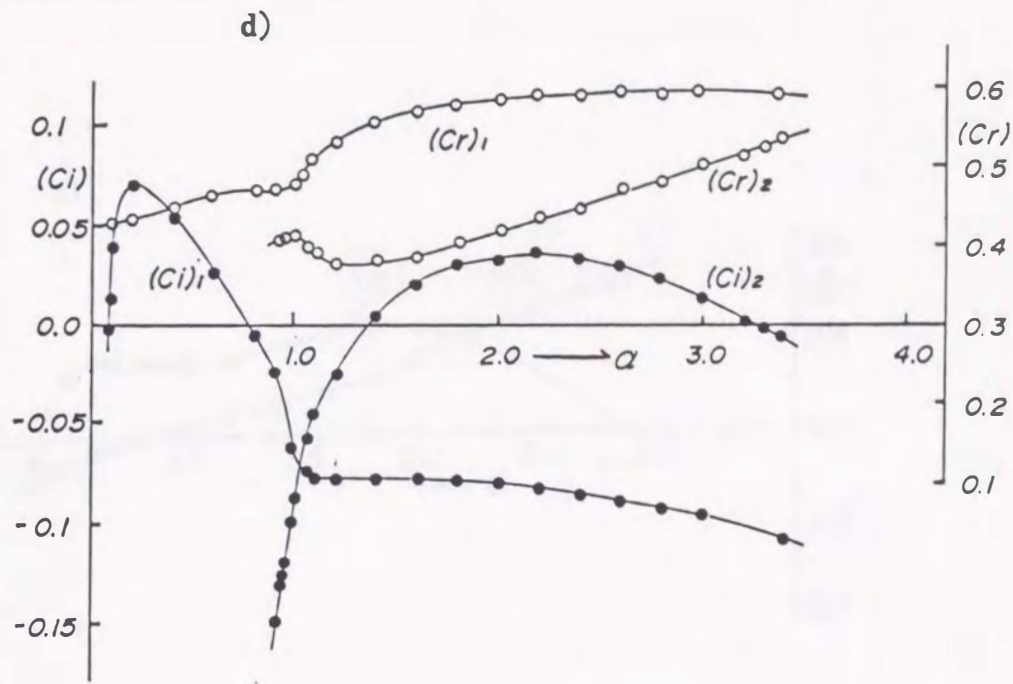


図5 d)  $\beta = 0.4, R = 650$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

める。2つのループからなるこうした複雑な中立安定曲線の”断面構造”を見るために、例として  $\beta = 0.4$  の場合につき、いろいろな  $R$  数における固有値 ( $c_r, c_i$ ) を  $\alpha$  の関数として図5 a) ~ d) に示す。なお、添字1及び2はそれぞれ第1及び第2固有モードを意味する。第1モードに対応する不安定  $\alpha$  領域 (図5 a)) は、 $R$  数が約500を越えると2つの領域に分離して”安定の島”を形成する (図5 c))。即ち、中立曲線のIIループが出現する。この段階 ( $R = 600$ ) では、第2固有値はすべて安定、即ち  $(c_i)_2 < 0$  である。 $R$  数が更に大きくなると、 $\alpha = 1$  の近傍で、第1モードと第2モードの間に一種の”共鳴” (2つの固有値の一致) が発生し、第1モードばかりでなく第2モードも不安定となる (図5 d))。 $\beta = 0.4$  の場合、この”共鳴”の起こる  $R$  数  $R_{res}$  は600と650の間にあるよ



うであるが、数値解法では、その詳細を明らかにすることはできなかった。

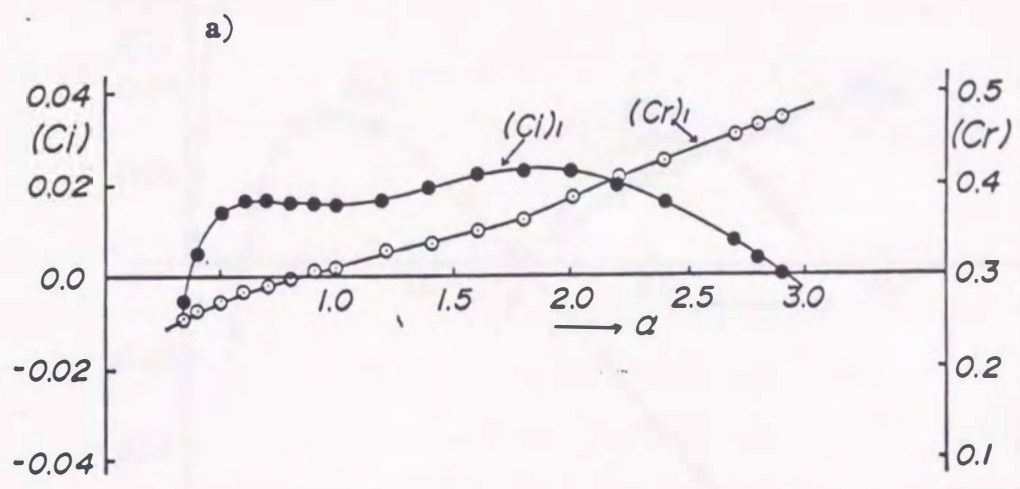


図6 a)  $\beta = 0.8, R = 200$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

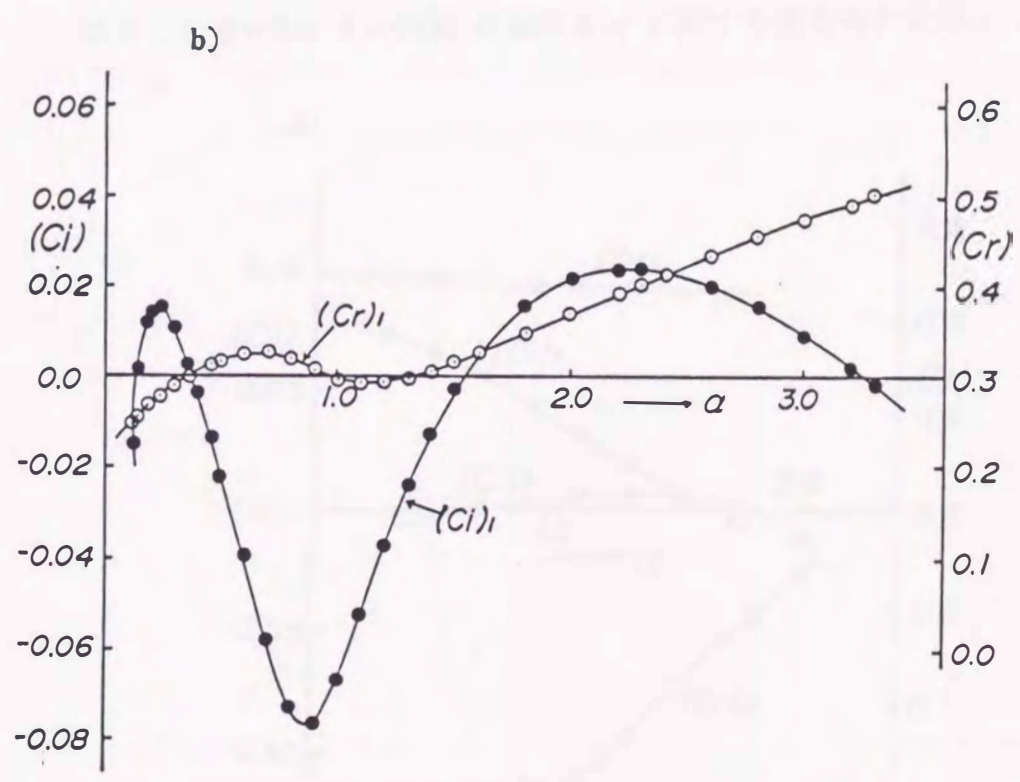


図6 b)  $\beta = 0.8, R = 500$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

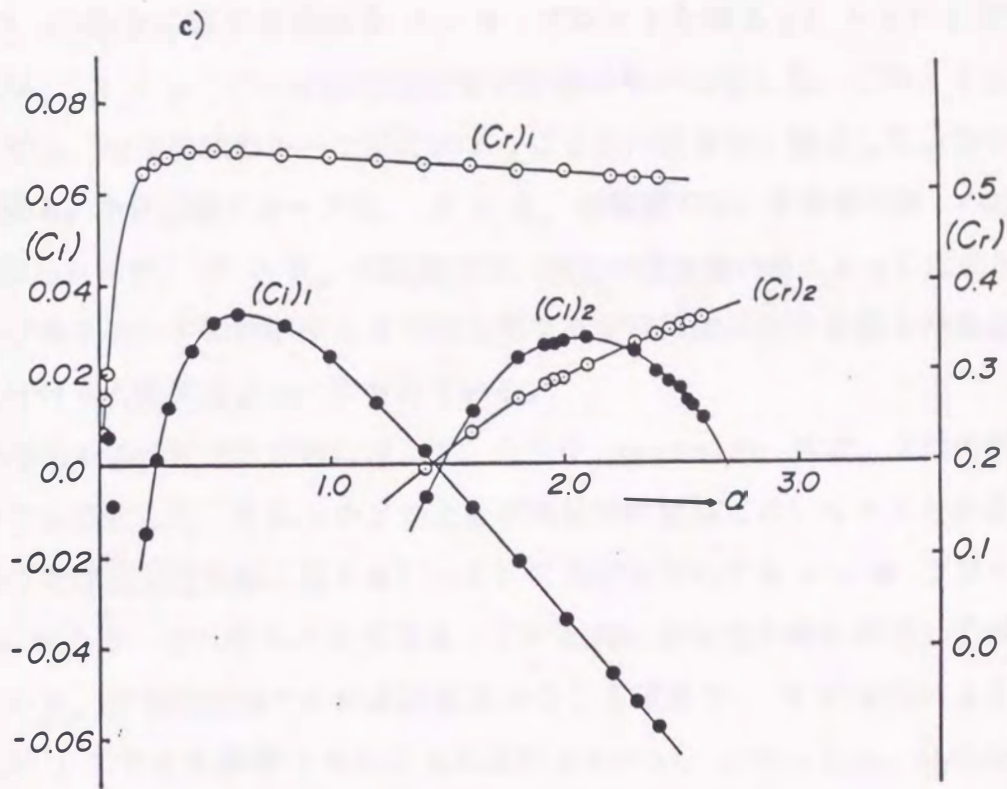


図6 c)  $\beta=0.8, R=4000$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$

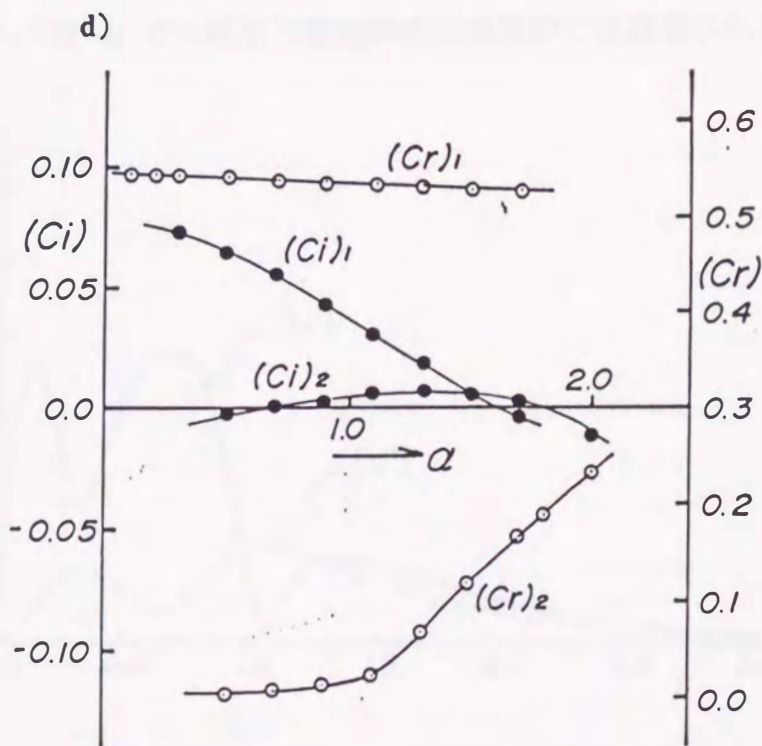


図6 d)  $\beta=0.8, R=\infty$  における  $\alpha$  に対する固有値の実部  $c_r$  と虚数部  $c_i$



$\beta = 0.8$  の場合に関する同様な  $c - \alpha$  プロットを図 6 a) ~ c) に示す。図 6 d) には、 $R = \infty$  での非粘性固有値を比較のために示した。このようなクロスプロットから、中立曲線のループがどのように2組の固有値と関連しているかを知ることが出来る。中立曲線のループは、 $R < R_{res}$  の範囲では、固有値の第1の組によってのみ形作られるが、 $R > R_{res}$  の範囲では、両方の固有値の組によって形成される。第1および第2モードに対応する2つの主要な不安定領域は図3と図4の安定曲線において矢印付きの垂線によって示されている。

ここで考える  $\beta$  のすべての値に対して、大きな Reynolds 数で、2つの異なる不安定モードが存在して、それらの2つともが非粘性の極限においてさえも生き残る。図4における中立安定曲線と図6 a) ~ d) における対応する  $c - \alpha$  プロットは、 $R \rightarrow \infty$  のとき、それぞれの不安定モードが如何に非粘性分枝に漸近してゆくかを例示している。非粘性極限への漸近的収束はむしろ緩慢で、 $R$  の変化による影響は  $R \sim O(10^4)$  でさえも顕著であることに注目されたい。このことは、非粘性理論が中間の Reynolds 数 ( $R_{cr} \sim \bar{R}_{cr}$ ) では勿論のこと  $10^4$  のような大きな Reynolds 数でさえも、うまく安定特性を記述出来ないことを意味している。非粘性近似は十分大きな Reynolds 数、すなわち、 $R > O(10^4)$  で有効であろう。しかしながら、そのように大きなレイノルズ数  $R$  での線形不安定特性は実際的には観測されることはない。

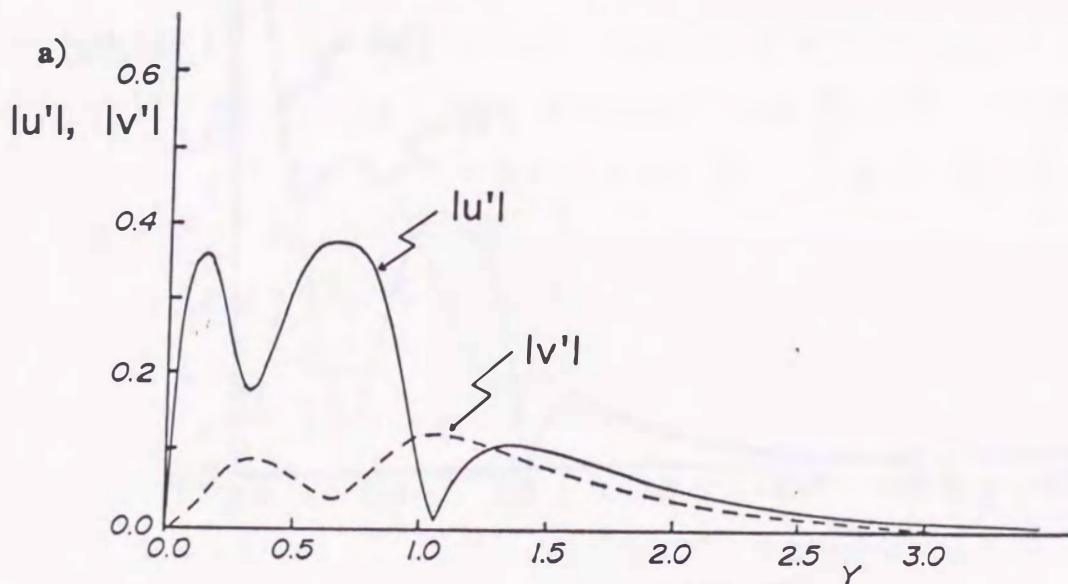


図7 a) 第1固有モード——速度の振幅  
( $R = 2000$ ,  $\alpha = 1.12$ ,  $c_r = 0.545$ ,  $c_i = 0.0003$ ;  $\beta = 0.8$ )

実際の境界 Jet 流は、より小さいレイノルズ数  $R$ 、特に  $R_{cr}$  近くの不安定攪乱によって不安定化するからである。

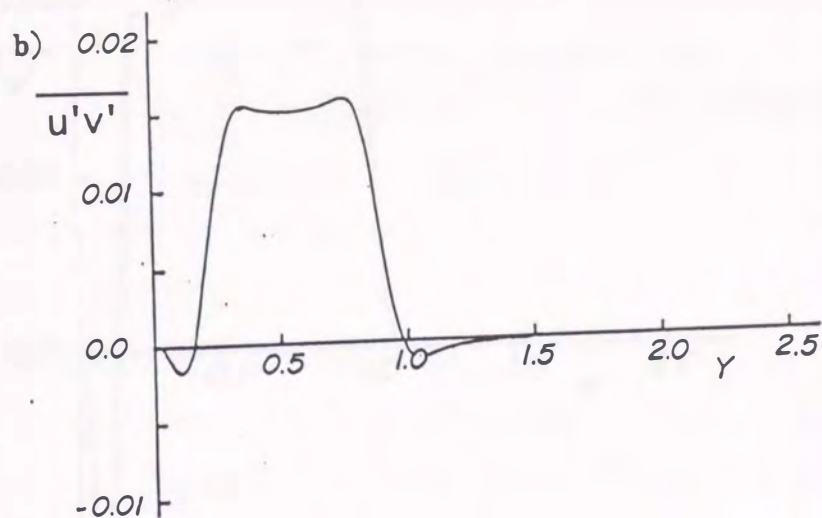


図 7 b) 第 1 固有モード——レイノルズ応力  
 ( $R=2000$ ,  $\alpha=1.12$ ,  $c_r=0.545$ ,  $c_i=0.0003$ ;  $\beta=0.8$ )

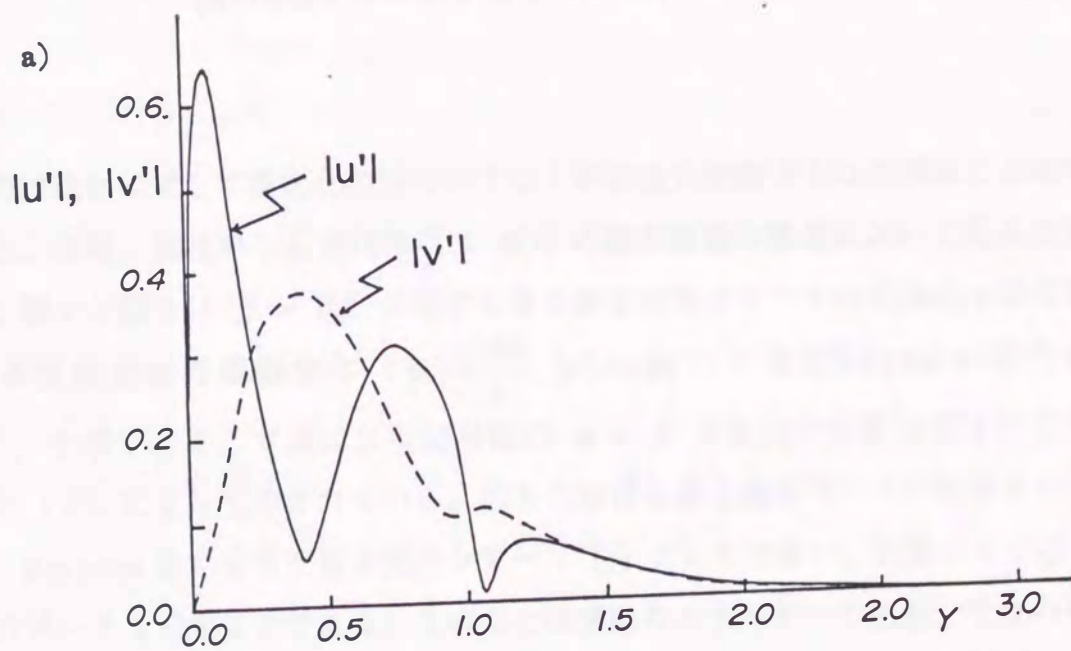


図 8 a) 第 2 固有モード——速度の振幅  
 ( $R=4000$ ,  $\alpha=2.64$ ,  $c_r=0.365$ ,  $c_i=0.0063$ ;  $\beta=0.8$ )



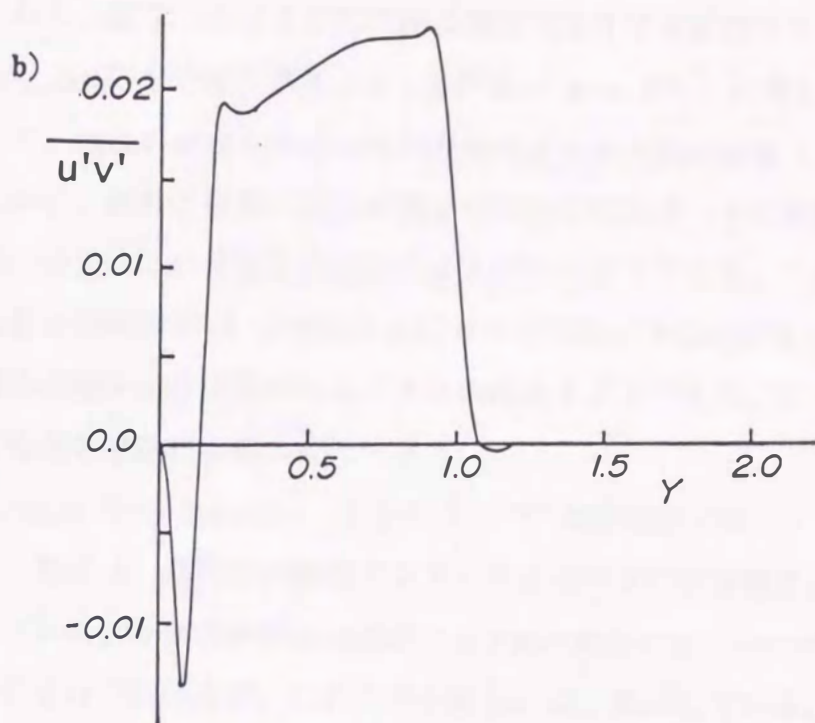


図8 b) 第2固有モード—レイノルズ応力  
 ( $R = 4000, \alpha = 2.64, c_r = 0.365, c_i = 0.0063; \beta = 0.8$ )

粘性力は流れに対して安定化要因だけでなく不安定化要因ともなり得ることを序論に述べた。実際、粘性の不安定化作用は  $\phi(y)$  の固有関数の構造において見ることができる。図7と図8は  $\beta = 0.8$  に対する第1および第2モードの代表的な固有値に対応する攪乱速度の振幅分布 ( $|u'| = \left| \frac{d\phi}{dy} \right|, |v'| = \alpha|\phi|$ ) 及び Reynolds 応力成分 ( $\overline{u'v'}$ ) を示す。ここで選ばれた固有値の  $\alpha - R$  平面内の位置は図4のなかで(1)と(2)によって示されている。図8における第2固有モードの注目すべき特徴は、Reynolds 応力分布が基本流のシア  $U'(y)$  が正で大きい、側壁のすぐ近くで鋭い負のピークを示すことである。このことは攪乱のエネルギーの生産、すなわち  $-\overline{u'v'} \cdot \frac{dU}{dy}$  が側壁近傍で大きく、流体粘性の典型的な不安定化作用を示している。また、攪乱の速度の振幅も側壁の近くで、非常に大きくなっていることにも注目すべきである。第2の固有モードのこれらの特徴は、まさしく粘性作用によって不安定化さ

れる粘性型不安定（たとえば、Tollmien-Schlichting 波）の特徴と一致する。これに対し、図7における攪乱の場合は側壁の存在には敏感ではないようである。

Reynolds 応力分布が基本 Jet 流の軸 ( $y = 0.5$ ) に関してほとんど対称である。そして、攪乱の速度の振幅は内側の領域よりも外側の領域 ( $y > 0.5$ ) で大きい。とにかく、粘性と境界の組合せ効果がこの不安定モードに影響する形跡は見られない。粘性の効果はこの攪乱を安定化させるだけのようである。この点に関して、第1モードの最大増幅率が  $R$  が増加するにつれて増加する傾向があり、一方、第2モードの増幅率が減少する傾向があることは興味あることである。こうした第2モードの特徴は変曲点不安定に共通のものである。

Betchov と Criminale (1967)<sup>22)</sup> は非対称プロファイルを持つ自由 Jet 流が、一般には、非粘性の極限でシア不安定の2つの分離されたモードを持つことを述べている。本研究の結果は境界 Jet 流の場合にも、一つのモードは側壁の影響を大いに受けてはいるが、このことが正しいことを示している。しかしながら、 $\beta$  面上では可能な不安定モードの数は主流のシア帯からずっと離れた外側の境界条件に依存することを注意すべきである。本研究では無限遠で消滅するような攪乱にのみ着目しているが、もし外側にも境界を設定するか、または無限遠で減衰しない波を許すことによって、この制限を緩めるとすれば、付加的な不安定モードが存在し得る。実際、Niino (1982)<sup>8)</sup> は  $\beta$  面上の非粘性のシア流が、固有のシア不安定のほかに付加的な不安定が許されることを指摘した。しかしながら、そのような付加的な不安定が粘性力によって増幅され、有限な Reynolds 数 (即ち、 $R_{cr} \sim \bar{R}_{cr}$ ) において優勢になるとは思われない。なぜなら、粘性の不安定化作用は主流のシアが事実上 zero になる遠方の領域内では決して発生しないからである。実際の海流、又は実験室系の流れの挙動との比較において、最も基本的な性質は不安定波の波長である。図3 a) ~ d) 及び図4から見られる様に、臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$  は  $\beta$  の値と共にゆっくり増加するが、 $R_{cr}$  に対する波数  $\alpha_{cr}$  はほぼ1.5である。これを波長に換算すると、 $\lambda_{cr} = 2\pi/\alpha_{cr} \cdot B \approx 4B$  となる (ここに、 $B$  は基本流の幅で、海流の場合100 km程度である)。これは、黒潮や Gulf Stream といった海流に見られる最も活発な変動の波長である。これに対し、非粘性理論においては、成長率  $\alpha_i$  が最も大きい攪乱が実際に観察されると考えるわけであるが、その波数は0.1 ~ 0.2程度である (図6 a) 参照)。これは  $40B$  程度の波長を意味し、明



らかに大きすぎる。

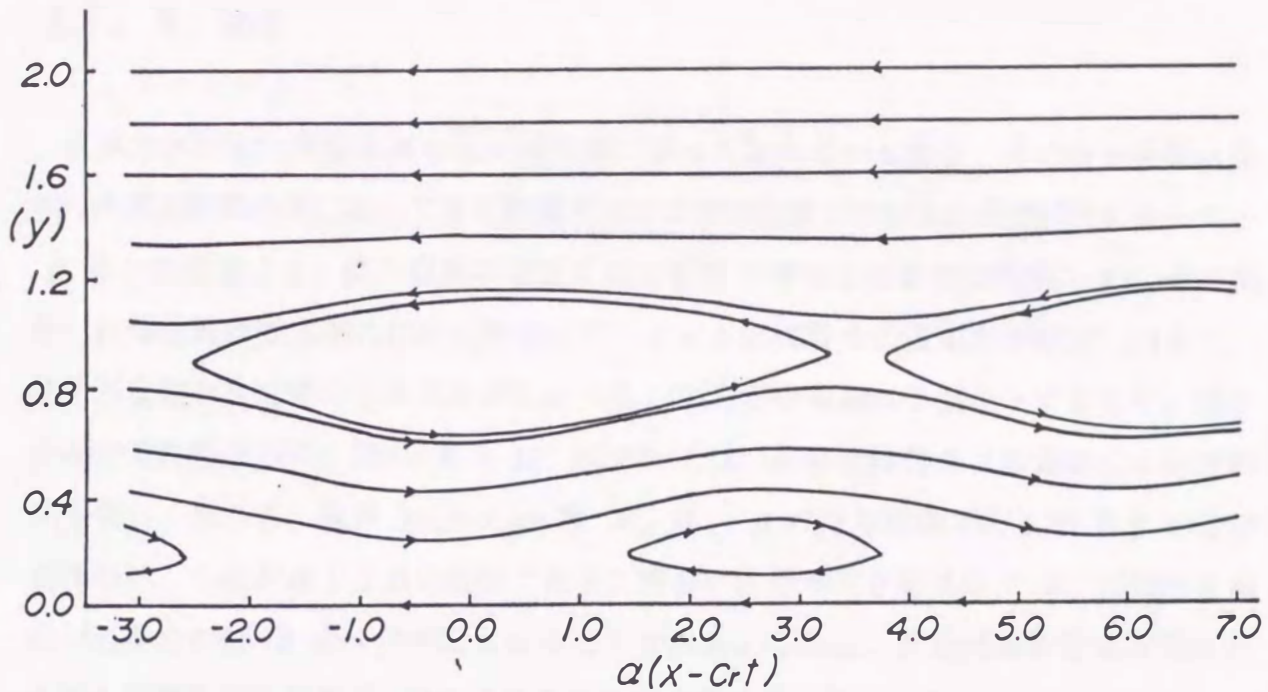


図9 流線紋様の例 ( $R = 500, \alpha = 3.25, c_r = 0.50$ )

最後に、 $\beta = 0.8$  の場合につき、 $\alpha = 3.25, c_r = 0.50$  をもつ中立攪乱の  $R = 500$  における流線文様を図9に示す。これは、攪乱の位相速度で動く座標系から見た流線紋様であり、当然のことながら、＜沖側＞と固体壁のある＜岸側＞とに合計2連の” Cat's Eye ”が見られる。

### § 3. 5 結語

流体力学的安定理論は基本流が固体壁に沿って流れている場合、その安定特性は流体の内部粘性の効果によって強く影響されることを示唆している。その考えに立って、 $\beta$  面上の境界 Jet 流の線形不安定を流体粘性を考慮して新たに吟味した。その結果、流体粘性は固体壁の存在と相まって、Jet 流に特有の変曲点不安定に加えて、粘性不安定をも可能にすることがわかった。中立安定曲線は2重ループとなり、複雑な不安定特性を示す。特に  $R < 10^4$  においては、非粘性特性とは定量的にも定性的にも著しく異なる。臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$  は、 $\beta$  の増加関数であるが ( $\beta$  の安定化作用)、たかだか100の程度である。特に、注目すべき結果は、 $R_{cr}$  に対する波長が基本流の幅  $B$  の4倍程度となることである。これは、非粘性解析から示唆される最も優勢な攪乱の波長  $40B$  よりもはるかに現実的な値である。

自然界の流れに関しては、基本流そのものが曖昧であるばかりか、渦動粘性に対する適切な表現も知られていない。陸岸を単純に鉛直側壁とみなすのが妥当かどうかにも問題がある。従って、モデル流に関する不安定解析結果をそのまま自然界の現象に適用するには慎重でなければならない。しかし、そうした様々な問題点にもかかわらず、本解析の結果が、攪乱の波長に関して比較的妥当な値を与えることは興味深い。海流に対する渦動粘性は  $10^7 \text{ cm}^2/\text{sec}$  程度と言われている。この場合、黒潮や Gulf Stream に対する Reynolds 数は100の程度である。この値は非粘性近似を適用するには余りにも小さ過ぎることを本解析結果は示唆している。



## 第4章 側壁に沿う非対称Jet流の順圧不安定——実験的研究

### §4.1 まえがき

第2章で扱った、回転円板上の3次元境界層の安定性に関しては、そもそも決定的な実験的研究が先行し、実験的に発見された不思議な定常渦攪乱を説明するためにその線形安定性が調べ始められたと言う経緯がある。そして、流体粘性を考慮すれば、実際、線形安定論により当の定常渦現象が良く説明されるというのが第2章の結論であった。一方、前章で扱った境界Jet流の順圧不安定性は、これまでにDunst<sup>12)</sup>及びKimura<sup>13)</sup>によって実験的に調べられたが、それらの実験的研究は先行する非粘性安定解析(Kuo<sup>5)</sup>及びLipps<sup>6)</sup>)を指針として実施されたもので、流体粘性の作用については全く考慮されていない。そこで、前章で新たに示された粘性安定解析結果に基づいて、境界Jet流の順圧不安定性を改めて実験的に調べてみようというのが本章の目的である。なお、次節で述べるようにDunstとKimuraはそれぞれ別の境界Jet流を扱っているが、本実験では両者を扱う。

§ 4. 2 実験方法

すべての実験は直径100cmのターンテーブル上に搭載された内径40cmの円形

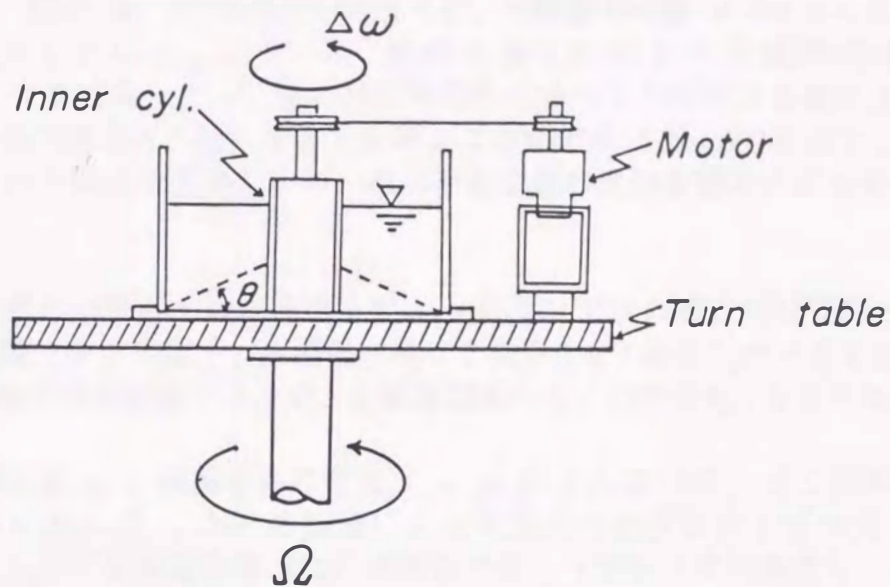


図1 実験装置

水槽内で行われた。装置の概略を図1に示す。§ 3. 2に述べた様に、室内実験においては  $\beta$  効果は水深変化によって作らねばならない（地形性  $\beta$ ）。図1に点線で示された傾斜底板はそのためのものである。その傾斜勾配  $\gamma = \tan \theta$  は0.4に固定した。ターンテーブルの回転は常に反時計まわり（正）で、その角速度  $\Omega$  は0.4~1.2 rad/s の範囲に限定された。作業流体は水道水であったが、その中には可視化のために少量のチモールブルーを混入した。

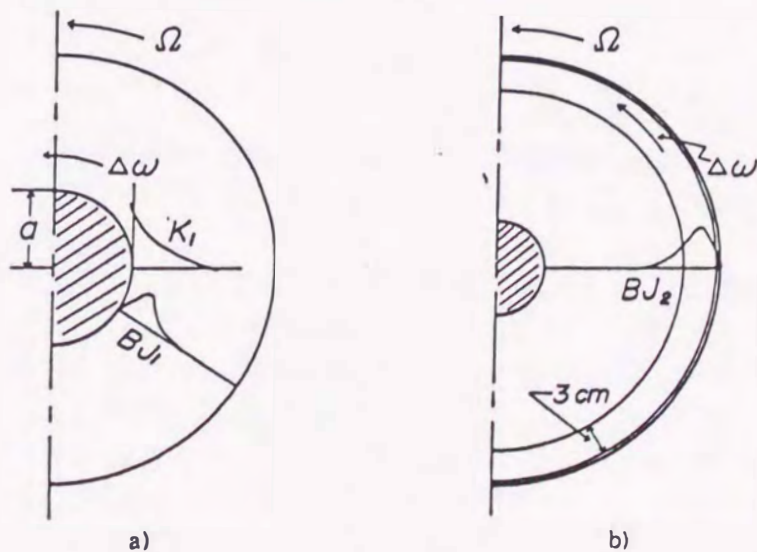


図2  $K_1, BJ_1, BJ_2$  の模式図



ターンテーブルを始動させてからほぼ30分が経過すると、水槽内の水は相対静止（剛体回転）の状態になる。この相対静止水槽の中にDunst及びKimuraにならつて次の二種類の方法により境界Jet流が作られた（図2 a）, b）参照）：

a) まず、水槽の中心部に設けた同心円筒（半径  $a = 8 \text{ cm}$ ）に相対回転  $\Delta\omega$  を与えることにより、内筒壁に沿って定常な鉛直境界流を作っておく。この境界層の周方向流速は、図に  $K_1$  で示されているように、内筒壁での値  $a \Delta\omega$  から外に向かって単調に減少している。この  $K_1$  流が完成したところで突然内筒を停止（ $\Delta\omega \rightarrow 0$ ）させると、 $K_1$  流の後に時間的にゆっくり変化する境界Jet流ができる。この方法で作られた流れを  $B J_1$  と呼ぶことにする（Dunstの方法）。 $B J_1$  流は時間依存という難点はあるものの、線形不安定波の波形を観るには好都合であろう。

b) 円形水槽の内壁近くの水表面を幅3cmのリング状の板に相対回転  $\Delta\omega$  を与えて擦る。駆動リングの直下、水槽壁に沿って境界Jet流  $B J_2$  ができる（Kimuraの方法）。この流れは定常流であるが、非線形調節のきいた不安定しか見られない。

径の回転角速度  $\Omega$ 、底面傾斜の有無（ $\gamma = 0$  または  $0.4$ ）および水深  $H$  の色々な組合せに対して、 $\Delta\omega$  の加減によって流れの強さを少しずつ変化させて  $B J_1$  および  $B J_2$  の不安定性を調べた。流れをチモールブルーで可視化し、そのわずかなゆらぎの有無によって、安定-不安定を判定した。なお、チモールブルーの発色はNaOH水溶液を注射器で注入することによってなされた。基本流の流速プロファイルの測定にもチモールブルー法が用いられたが、この場合は色素の放出は白金線（0.5mm径）を用いて電気的になされた。時間的に変化する  $B J_1$  流の中に適宜放出された色素線の変形の様子を写真1に示す。こうした色素線の変形を一定の間隔で撮影し、各時間間隔当りの色素線の変位を写真から読み取った。時間変化する  $B J_1$  流の場合、1.5s間隔で撮影された写真を用いた。

### § 4. 3 実験結果

以下の記述に現れる無次元パラメータをここにまとめて掲げておく：

$$\begin{aligned}
 R &= |u_m| \cdot b / \nu && (\text{Reynolds 数}) \\
 \bar{R} &= a|\Delta\omega| \cdot B / \nu && ( \quad \quad \quad ) \\
 \varepsilon &= u_m / \Omega \cdot b && (\text{Rossby 数}) \\
 \bar{\varepsilon} &= \Delta\omega / \Omega && ( \quad \quad \quad ) \\
 E &= \nu / \Omega \cdot H^2 && (\text{Ekman 数}) \\
 \beta &= (2\Omega \cdot \gamma / H) \cdot b^2 / u_m && (\text{地形性 } \beta)
 \end{aligned}$$

ここに、 $R$  及び  $\bar{R}$  は流れの Reynolds 数、 $\varepsilon$  及び  $\bar{\varepsilon}$  は Rossby 数、 $E$  は Ekman 数で、 $\beta$  は無次元地形性  $\beta$  である。また、 $\nu$  は動粘性係数、 $B$  は  $K_1$  流の幅を表す。 $u_m$  および  $b$  はそれぞれ境界 Jet ( $B J_1$ ,  $B J_2$ ) の最大相対流速と幅を表す。この幅  $b$  は、 $u_m$  に達する点の壁面からの距離の 2 倍とする。 $B J_1$  の場合、 $u_m$  も  $b$  も時間に依存するから、 $R$ 、 $\varepsilon$  および  $\beta$  は時間の関数となる。回転テーブルに対して相対的に反時計まわりの流れを正とする。従って、 $\Delta\omega > 0$  であれば  $u_m > 0$ 、 $\Delta\omega < 0$  であれば  $u_m < 0$  となる。

#### 4. 3. 1 $K_1$ 流の特性

この流れについては、 $B J_1$  流と密接な関係があるので、ここにその特性の概略を記す。

この流れは水平粘性拡散と Ekman 吸い込みがバランスした鉛直境界層であり、特に底が平坦な場合 ( $\beta = 0$ )、その層流周速度分布は一次の変形ベッセル関数  $K_1$  で記述される。また、その幅は次式で与えられる。：

$$B = 4.2HE^{1/4} .$$

実測結果はこれらの理論式と良く一致することが確かめられた。 $H$  を大きくすると  $B$  は増大し、水槽全域が境界流となる。 $H \rightarrow \infty$  とすれば、この流れは二同心円筒間の Couette 流となる。

この定常で軸対称な  $K_1$  流はある Reynolds 数を越えると不安定となる。底が平坦 ( $\beta = 0$ ) な場合、この流れの安定限界は  $\bar{R} < 1500$  程度であった。 $\beta > 0$

( $\gamma = 0.4$ ,  $\Delta\omega > 0$ ) の場合は、流れは一層不安定となり、 $\bar{R}$  が約 1000 で不安定が見られた。こうした臨界  $\bar{R}$  数を越えると、全周にわたって 1~2 波の進行波が現れ、流れは層流であっても、定常でも軸対称でもなくなる。さらに高い  $\bar{R}$  の範囲では、境界流は内筒壁からはがれて“外海”に飛び出し、そこで 1~2 ヶの直立した渦となる (Couette 流の不安定との相違に注目)。この段階では、色素の激しい混合から見て、流れは乱流となっているものと思われる。 $\bar{R}$  が 5000 を越えると、奇妙なことに、ふたたび安定な軸対称境界層が現れる。但し、流れは乱流で



ある。なお、 $\beta < 0$  ( $\gamma = 0.4, \Delta\omega < 0$ ) の場合には、境界流の幅が表層と底層で著しく異なり（底層ほど大）、2次元的な流れと見るのは無理であった。

この流れはかつて Dunst<sup>12)</sup> によって調べられたことがあるが、そこでは上に述べたような激しい不安定領域の存在については何も触れられていない。また、幅  $B$  が  $\varepsilon$  の関数としているが、これは正しくない。少なくとも  $\bar{R} < 1500$  の範囲では、 $B$  は  $\varepsilon$  に無関係で、 $E^{1/4}$  に比例する。

#### 4. 3. 2 $BJ_1$ 流の不安定

$BJ_1$  流の実験は、 $K_1$  流自身がほぼ2次元的な軸対称安定層流の範囲でなされねば意味がない。 $\beta = 0$  の場合は、この点で満足な実験が可能であった。しかし  $\beta > 0$  の場合は、 $K_1$  自身が比較的低速で不安定となるため、純粋な  $BJ_1$  不安定は見られなかった。一方、 $\beta < 0$  の場合は、 $K_1$  の2次元性が良くないため  $BJ_1$  の実験はできなかった。したがって、以下、おもに底が平坦 ( $\beta = 0$ ) な場合の結果について述べる。

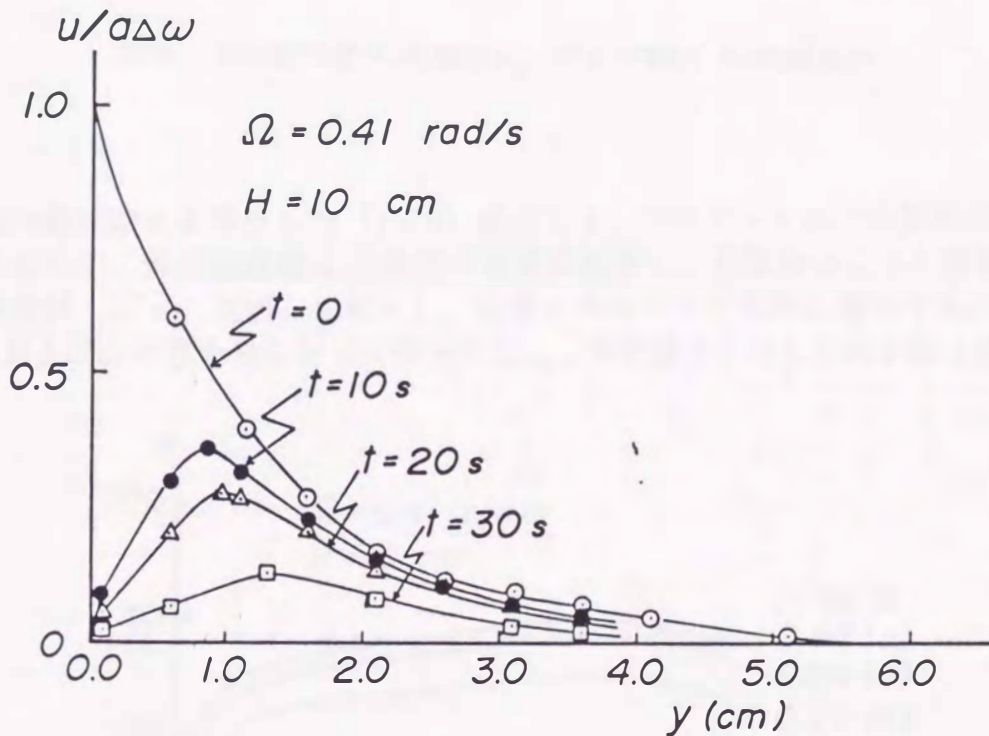


図3  $BJ_1$  プロファイルの時間変化、 $t$  は内藤停止後の時間(s)  
 $y$  は内筒壁からの半径方向の距離(cm)

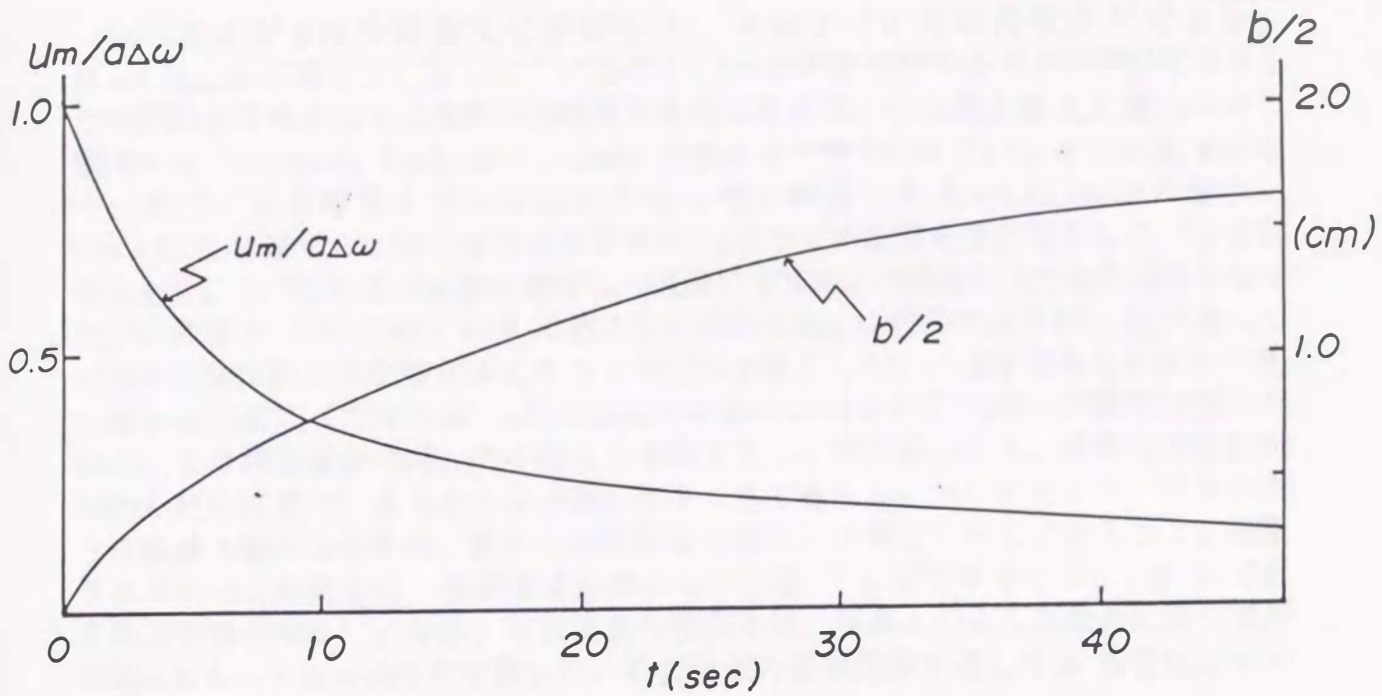


図4  $BJ_1$ 流の最大周速度  $u_m$  および幅  $b$  の時間変化

内筒の相対回転を停止した ( $t=0$ ) 後の  $BJ_1$  プロファイルの時間変化の実測例を図3に示す。最大流速度  $u_m$  は最初に急激に減少し、以後ゆっくりと漸減する。幅  $b$  は最初は  $\sqrt{v t}$  に比例して増大し、以後もゆっくりと単調に増加する。様々な  $\Omega$ 、 $\Delta\omega$  および  $H$  の組合せに対して得られた  $u_m$ 、 $b$  の値を平均したのが図4である。

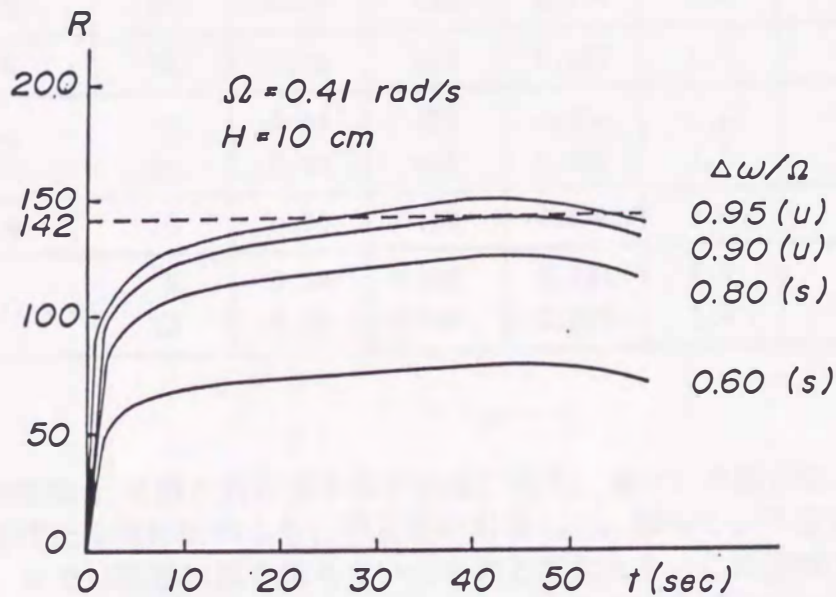


図5  $R$  数の時間変化 ( $u$ ) は不安定、( $s$ ) は安定を意味する



$u_m$  および  $b$  の時間変化に対応して、 $R$  および  $\varepsilon$  の時間依存が定まる。 $\Omega = 0.41$  rad/s の場合につき、いくつかの  $\varepsilon = \Delta\omega/\Omega$  の値に対する  $R$  の時間変化を示したのが図5である。 $R$  は最初の短時間に急激に増大し、ある最大値  $R_m$  に達してから漸減する ( $R(0)=0, R(\infty)=0$ )。 $\Delta\omega$ 、すなわち  $\varepsilon$  が十分小さいときには  $R_m$  も小さく、 $BJ_1$  は全時間を通じて安定であった。例示した  $\Omega = 0.41$  rad/s の場合、 $\Delta\omega = 0.9\Omega$  に達すると内筒停止後およそ45sでわずかな揺らぎが発生した(不安定の発生)。この揺らぎは次第に増幅し、最後には写真2の様ないくつかの渦対となった。この場合 ( $\Omega = 0.41$ ) の  $R_m$  は約140であった。この例のように、 $R_m$  に達してから不安定が見られた場合は  $R_m$  をもって臨界  $R$  数とした。 $\Omega$  が大きくなると、 $R_m$  に達する以前に (たとえば、 $\Omega = 1$  rad/s の場合は  $t = 28 \sim 30$  s で) 不安定が認められた。このような場合には、その時点の  $R$  数をもって臨界値とした。実際は不安定が認められた以前の、より小さな  $R$  数をとるべきであろう。ついでながら、以上のような臨界  $R$  数の決め方は、翼面上の境界層の場合と本質的に同じであることに注意されたい (この場合は、境界層は前縁からの距離  $x$  に依存するから、 $t$  を  $x$  で置き換えた形となる)。なお、不安定波の波数  $\alpha$  は、写真2のような最終段階の渦対の数  $n$  をもって  $\alpha = nb/a$  で定義した。不安定波の発展段階を通して  $\alpha$  は変化しないようであった。

$\beta = 0$  の場合の結果を要約すると表1のようになる。色々な  $\Omega$  および  $H$  の値に対して、不安定波が現れる  $\Delta\omega$  の値の下限を  $\Omega$  に対する比 ( $\bar{\varepsilon}$ ) の形で第3列に示してある。表の第4列および第5列は、それぞれ対応する  $R$  および  $\varepsilon$  の値を示す。

表-1  $BJ_1$  の不安定特性  $\beta = 0$ .

$\Omega$ rad/s	$H$ cm	$\bar{\varepsilon}$	$R$	$\varepsilon$	$\alpha$	$\sqrt{E/\alpha\varepsilon}$
0.41	10	0.9	142	0.432	1.3	0.034
0.5	13	0.78	138	0.374	1.3	0.025
0.6	10	0.68	144	0.326	1.3	0.038
0.7	8	0.64	158	0.308	1.3	0.042
	10	0.63	156	0.302	1.3	0.038
0.8	10	0.60	169	0.288	1.3	0.038
1.0	8	0.54	<189	0.344	1.4	0.030
	13	0.56	<196	0.302	1.4	0.023

不安定波の波数  $\alpha$  は第6列に示されている。なお、 $\Omega = 1$  の場合は、先に述べたように、内筒停止後短時間のうちに不安定が出現した。恐らく、不安定が認められた時点では、すでに臨界状態を越えていたものと思われる。この意味で、表の  $\Omega = 1$  に対する  $R$  値の欄には不等号を付してある。 $u_m$  および  $b$  の少なからぬ測定誤差を考えると、 $R$  の値は比較的一定しているように思われる ( $\varepsilon$  の値に比べて)。臨界  $R$  数は140~190の範囲であろうか。不安定限界が  $R$  数に依存するか  $\varepsilon$  に依存



するかは次のBJ<sub>2</sub>流の実験でより明確になる。

さて、第3章の安定解析によると、 $\beta=0$ の場合、臨界 Reynolds は約60で、その波数は1.3である。即ち、 $R > 60$  に対し、増幅係数  $c_i$  がある波数帯に対して正となる。特に、 $R = 100$  では、波数  $\alpha = 1.3$  に対して  $c_i$  は最大値0.03をとる。 $R = 200$  では、同じく  $\alpha = 1.3$  に対して  $(c_i)_{\max} = 0.07$  となる。この様に、臨界  $R$  数近くの最も不安定な攪乱に対する波数1.3が、解析的に得られた波数と良く一致する。しかし、臨界  $R$  数については、解析値をそのまま実験値と比較することはできない。第3章の解析では底面摩擦の効果を無視しているからである。流体粘性がある場合底面には Ekman 境界層が発達し、それを通して内部領域の渦度の消散が起こる。この消散の効果を考慮するためには、攪乱の渦度方程式 (3.2.5) の右辺に  $-\sqrt{E}/\varepsilon \Delta\psi$  を加えればよい (Pedlosky<sup>20)</sup>)。しかし、攪乱の渦度  $-\Delta\psi$  に比例するこの項は、攪乱の流線関数として (3.2.6) のかわりに

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp\left(-\frac{\sqrt{E}}{\varepsilon} t\right) \exp\{i\alpha(x-ct)\} \quad (3.2.6)'$$

を用いれば、固有値問題には全く影響しない。ただし、この場合、攪乱が不安定となる条件は  $c_i > 0$  でなく、

$$c_i > \sqrt{E}/(\alpha\varepsilon)$$

でなければならない。この不等式の右辺の推定値を表の最終列に掲げてある。それらの値と  $c_i$  の計算値を比較すると、実際の不安定が  $R=100 \sim 200$  の範囲で生ずるのは妥当のように思われる。

同様な実験は  $K_1$  が安定な乱流である ( $\bar{R} > 5000$ ) 場合についても試みられた。内筒停止後にできる BJ<sub>1</sub> 流の  $R$  数も充分高いので常に不安定が見られた。Dunst は  $K_1$  流が乱流である場合、BJ<sub>1</sub> も乱流であると考えた (それゆえに非粘性解析を使った) が、それは誤りである。 $K_1$  流が乱流であっても、内筒停止後に新たに生ずる BJ<sub>1</sub> は美しい層流である。それは、充分発達した乱流中に置かれた平板の前縁付近の境界層が層流であるのと同じである。また、いかに安定な BJ<sub>1</sub> も充分時間

表-2 BJ<sub>1</sub> の不安定特性  $\beta > 0$ .

$\Omega$ rad/s	H cm	$\bar{\varepsilon}$	R	$\varepsilon$	$\alpha$
0.41	7.3	0.95	98	0.68	0.7
0.5	7.3	0.82	87	0.66	0.8
0.7	7.4	0.70	95	0.56	1.2



が経過すると、最後には必ず写真3のように不規則な形にくずれてしまうことがわかった。これは流れの不安定とは関係なく、回転水槽によく見られる弱い渦の仕業であるから注意を要する（DunstはこれをBJ<sub>1</sub>、不安定と混同した）。

$\beta > 0$  の場合は、 $K_1$  の安定域 ( $\bar{R} > 1000$ ) ではBJ<sub>1</sub> の不安定が見られなかった。BJ<sub>1</sub> の不安定が見られる時には、 $K_1$  流自身がすでに不安定な状態にあった。参考までに  $\beta > 0$  の場合に得られた結果を表2に掲げる。計算によると、 $\beta > 0$  の場合、流れは安定し、 $\beta = 0$  の場合に比べ臨界R数は高くなるはずであるが、表では逆に低い値となっている。恐らく、 $K_1$  流の不安定によるものと思われる。

#### 4. 3. 3 BJ<sub>2</sub> の不安定

$\beta = 0$  ( $\gamma = 0$ )、 $\beta > 0$  ( $\gamma = 0.4, \Delta\omega > 0$ ) および  $\beta < 0$  ( $\gamma = 0.4, \Delta\omega < 0$ ) に対して得られた結果を、それぞれ表3 a)、b) およびc) に示す。

表-3 BJ<sub>2</sub> の不安定特性

a)  $\beta = 0$ .

$\Omega$ rad/s	H cm	$\bar{\epsilon}$	R	$\alpha$
0.41	8	0.244	181	1.3
	13.5	0.249	185	1.3
	16	0.27	207	1.3
0.7	8	0.143	181	1.7
	13.5	0.140	183	1.3
	16	0.160	215	1.3
1.0	8	0.098	173	1.3
	16	0.100	187	1.3
1.5	8	0.600	159	1.3
	13.5	0.062	174	1.3
	16	0.067	188	1.3

b)  $\beta > 0$ .

$\Omega$ rad/s	H cm	$\bar{\epsilon}$	R	$\alpha$
0.4	7.0	0.305	279	(1.8)
0.7		0.166	284	
1.0		0.117	281	
1.2		0.088	236	



表3 (前ページより続き)

c)  $\beta < 0$ .

$\Omega$ rad/s	H cm	$\bar{\epsilon}$	R	$\alpha$
0.4	7.0	-0.155	142	2.0
0.7		-0.091	157	2.0
1.0		-0.066	158	2.0
1.2		-0.056	151	1.6

この流れの場合、Rossby 数  $\epsilon$  はほぼ  $\bar{\epsilon}$  に比例するので、 $\bar{\epsilon}$  の値のみを掲げた。

Rossby 数  $\epsilon$  が大幅に変化しているのに対し、Reynolds 数  $R$  は比較的一定している。これは、境界 Jet 流の不安定限界は Reynolds 数によって与えられることを示すものに他ならない。Kimura<sup>13)</sup> が指摘したような臨界 Rossby 数なるものは存在しないことは明かである。

$\beta=0$  の場合、 $R$  数および  $\alpha$  が、 $B J_1$  の対応する値 (表1) にほぼ一致することに注意されたい。この場合、水深  $H$  が大きい程  $R$  が大きくなっているが、その理由は不明である。測定誤差かも知れない。

$\beta > 0$  の場合、臨界  $R$  数は  $\beta=0$  の場合よりははつきりと高い値を示す。この傾向は計算結果と一致する。計算によると、底面摩擦を無視した場合、 $\beta=0$  では  $R_{cr} \approx 60$  であるのに対し、 $\beta > 0$  では  $R_{cr} \approx 100$  であった。また、同じ  $R (> R_{cr})$  に対する  $(c_i)_{\max}$  の値を比べてみても、 $\beta=0$  の場合のほうが  $\beta > 0$  の場合より大きい。つまり、正の  $\beta$  は流れを安定化させるというのが計算の結果であった。 $\beta > 0$  の場合の典型的な不安定波形を写真4に示す。一般に、波形は不均一できたなく、強い非定常性を示した (波数も時間的に変動した)。したがって、表に示した  $\alpha$  の値はおよその推定値にすぎない。

$\beta < 0$  の場合は、 $\beta=0$  よりもやや低めの  $R$  が得られた。この場合の波形の典型的な例を写真5に示す。 $\beta=0$  や  $\beta > 0$  の場合と異なり、規則正しい非常に美しい波形が見られる。なぜこのような波形の差が生ずるかははっきりしないが、恐らく、非線形調節に差異があるものと思われる。なお、 $B J_1$  の場合 (写真2) は、はっきりとした渦対が見られたが、 $B J_2$  ではそうした明瞭な渦対構造は見られなかった。壁面側に小さくつぶれた対の渦列が存在しているようでもあるが、はっきりしない。



#### § 4. 4 結語

$B J_1$  および  $B J_2$  の二種類の境界 Jet 流の不安定性を可視化法によって調べ、安定解析結果と過去の実験結果と対比して論じた。安定-不安定の判定が目視により感覚的になされたこと、可視化法による定量的測定が不正確であること等の理由により実験結果にバラツキが多かったが、解析結果との一致はおおむね良好であった。とりわけ、①境界流の不安定限界は Rossby 数ではなく、Reynolds 数によって与えられること、②粘性が効く場合にも  $\beta$  効果は流れを安定化させることが実証された。線形安定解析において、粘性が決定的に重要な役割を演ずることが明らかにされたから、非線形解析において粘性を考慮することは不可欠であろう。

海洋学的見地からも黒潮、Gulf Streamなどの西岸強化流で発生する大規模渦の発生 Reynolds 数を評価して比較してみると、本章の実験結果で得られた  $O(100)$  程度の臨界 Reynolds 数  $R_{cr} = 140$  をあてはめることは、妥当であることが確認できた。

本研究において、観測撮影された写真例を以下の写真 1 から 5 までに上げる。

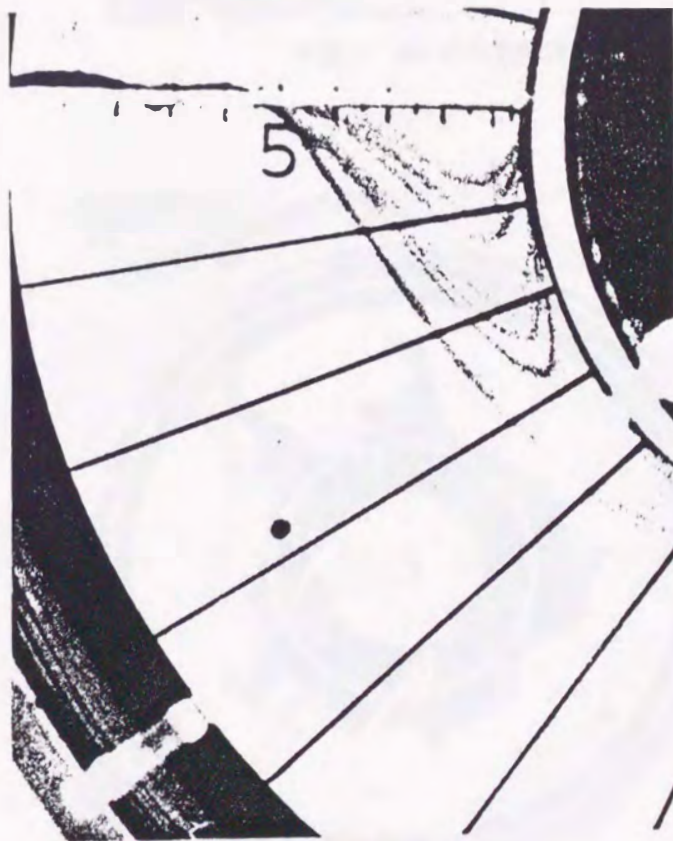


写真1  $B J_1$  プロファイル



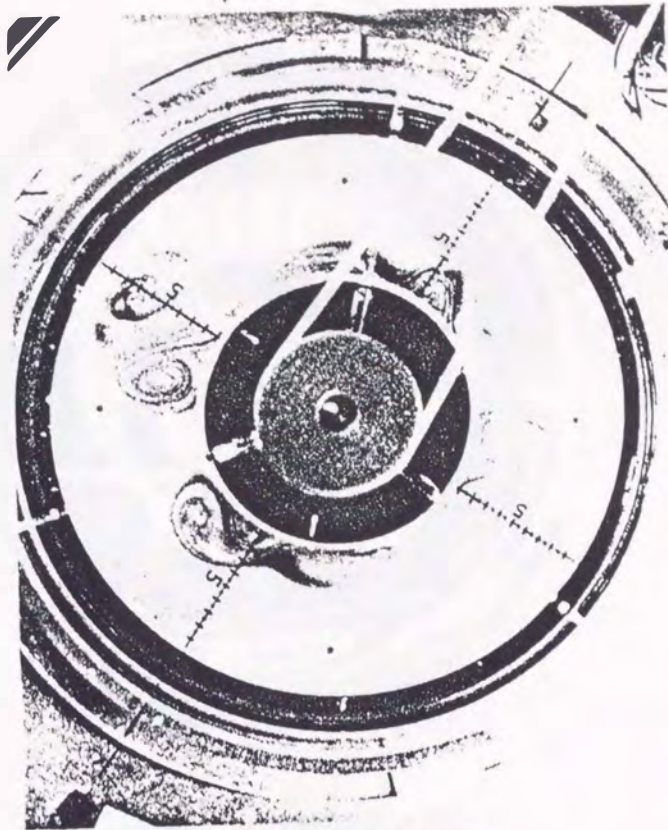


写真2  $B_1$  の不安定例



写真3 自然の乱れ



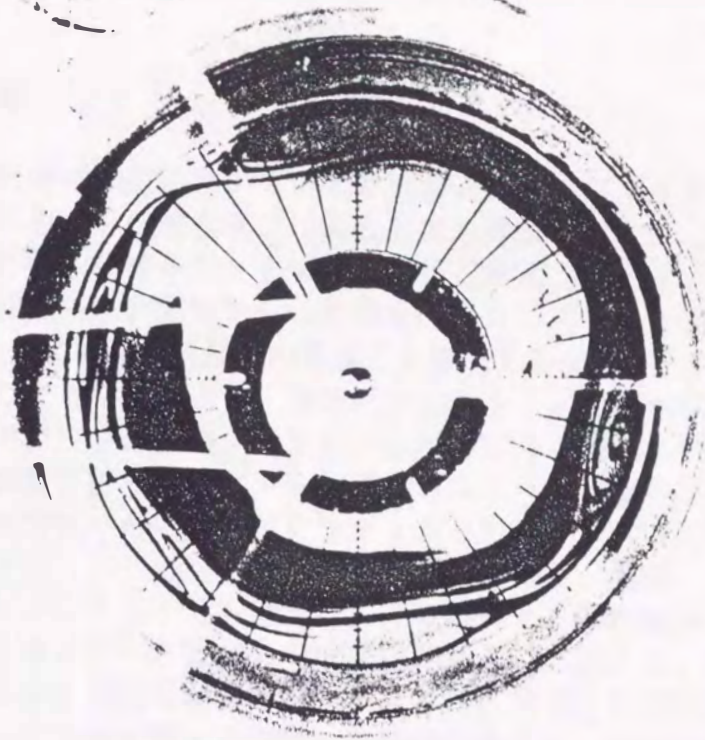


写真4  $BJ_2$  の不安定 ( $\beta > 0$ )

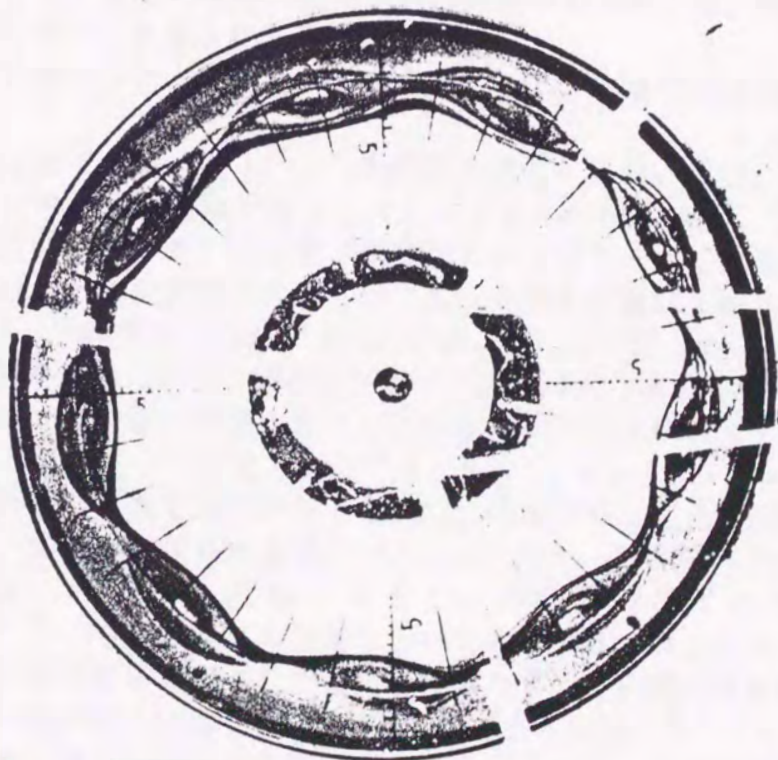


写真5  $BJ_2$  の不安定 ( $\beta < 0$ )



## 第5章 結論

流体力学的安定問題において、基本流の速度プロファイルが非対称性を有する場合、単調な分布をもつ基本流とは異なる安定特性を示すことは当然予測できる。そのような、単純な動機から、まず最初に後退翼面上やあるいは回転円板上の流れに誘起される規則正しい配置をもつ渦発生メカニズムを、従来から定説として定着していたStuartの理論的説明の矛盾点を解決するために、本研究がスタートした。さらに、そのような興味から、海洋流体力学上、有名な西岸強化流である‘黒潮’あるいは‘湾流’などが陸岸にきれいな渦を形作る現象に注目し、この場合の流れがやはり固体壁に沿う非対称Jet流であることと上記の後退翼あるいは回転円板上の流れの非対称分布の速度プロファイルとのアナロジーに着目した。これらの研究結果を参考にして、海洋学上、重要な強流である‘黒潮’における渦発生メカニズムを明らかにすることも考えた。この事例を、非対称速度分布、すなわち壁面噴流の速度分布に関する流体力学的安定問題として捕らえ、その安定論の知識を縦横に駆使しながら詳細な解析を試みた。さらに流体力学的安定論の実証実験は非常にデリケートな注意を要する困難な実験ではあるが、回転円板上に置いた円形水槽内に従来からの方式による非対称(境界)Jet流と本研究において作られた新方式による境界Jet流とを比較検討する室内実験を実施し、上記理論解析上の安定特性の幾つかを実験的に立証することができた。理論上の安定特性を実験によって完璧に証明することは不可能である。なぜなら、乱れのない完璧な平均流を作ることのむずかしさ、発生した渦の位相速度の測定のみずかしさ、渦の発生時点を捕捉することのみずかしさ等々があるから。

以下に、本研究で行った研究の要点を再記して、各章毎の研究のまとめを列記しよう。

第1章は序論である。「1.1 本研究の背景」においては、本研究を開始するにあたり、どのような観点に着目しスタートしたかを述べた。「1.2 これまでの研究の概要」において、本研究で研究される主要テーマに関連する従来からの研究を拾い上げ、その主要論点を明らかにし、本研究の論点を浮き彫りにした。さらに、「1.3 本研究の目的及び方法」では、1.2で明らかにされた研究論点に対し明確な結論を下すために、研究目的と研究方法はどうあるべきかをまとめた。

第2章において、後退翼面上あるいは回転円板上の流れに対する3次元境界層流で観測される規則正しく配置された‘stationary mode’の渦発生現象に対する新しい妥当な説明が与えられた。速度プロファイルが剥離流に似て、逆流域を含み、変曲点の位置が流速=zeroの点と一致する(J-プロファイル)かあるいは、わずかに流速=zeroの点からはずれている2~3種(K, K')のプロファイルに対し、いわゆる速度プロファイルが非対称性を有する特異な分布の安定問題として考えて流体力学的安定性の数値研究を行った。その結果、この渦現象を説明するためには、従来から定説となっていたStuartのJ-プロファイルに関する定常中立攪乱とする説明よりも、変曲点の位置が流速>0側に少し偏るK-プロファイルに対する‘stationary mode’の定常増幅攪乱の方が渦発生波数について、実際の現象と比較して、より良い一致をして説得力ある説明が得られた。



第2章において、速度プロファイルの非対称性が流体力学的安定問題において特異な安定特性を生じさせるという事実を発見し、さらに第3章では固体壁を持つ非対称（境界）Jet流の安定問題へと関心を拡張していった。そして、この研究は、海洋流体力学上、西岸強化流である‘黒潮’あるいは‘湾流（Gulf Stream）’における陸岸側でしばしば観測される渦の発生に関するメカニズムを知る手がかりとしての情報を得るという関心も大いにあった。従来の研究では、このような境界Jet流の安定性計算あるいは実験結果の定性的説明に際し、自由シアー流の理論解析に用いられる非粘性近似（Navier-Stokes方程式の $R^{-1}$ 展開による）理論による結果を拡大解釈して議論されてきた。

しかしながら、本研究では、そのような非粘性理論によって境界Jet流の安定性を論ずることは不十分であり、内部粘性を含めた完全な粘性固有値問題を解かねばならないことを強調して、数値解法の手段を用い、 $\beta$ 一面における境界Jet流の順圧不安定問題を線形理論の範囲で解いた。同時に、 $R=\infty$ に対する非粘性問題も取り扱われた。こうして、攪乱の波数、位相速度および増幅率の $R$ 依存性を求め、検討した。攪乱の構造（固有関数）の計算例も示した。

不安定が現れる臨界 Reynolds 数  $R_{cr}$  は100以下である。 $R$ が数百の程度になると、 $R_{cr}$ に始まる第一の不安定モードに加えて、第二モードの不安定が現れる（この Reynolds 数で、第一固有値と第二固有値の間に一種の「共鳴」が起こる）。したがって、中立曲線は一般に多重ループとなる。二組の不安定モードは、 $R\rightarrow\infty$ にしたがって、それぞれに対応する不安定モードに漸近するが、それらの $R$ 依存性は $10^4$ といった大きな $R$ においてもなお明瞭であり、特に中間の Reynolds 数において現れる不安定特性は非粘性結果とは著しく異なることを発見した。これらの結果から現実の境界Jet流の不安定特性を論ずるには、流体粘性の効果を論ずることが決定的に重要であることを証明した。

第4章において、第3章で調べた境界Jet流の Reynolds 数依存性を実験的研究の立場から証明するために、 $\beta$ 一面における境界Jet流の順圧不安定に関する室内実験およびその結果について述べた。回転テーブル上に固定して置かれた、テーブルと同時に回転する円形水槽の中に2つの異なる方式で境界Jet流を作り、チモールブルーによる可視化法を用いて、流れを可視化して渦発生の臨界 Reynolds 数が調べられた。並行して、渦の写真を撮影し、あるいは目視して渦の個数を求め波数を測定した。底には、底面傾斜を設けて地形性 $\beta$ 効果の影響も調査した。従来、DunstおよびKimuraの実験では、両者とも非粘性理論を根拠として、境界Jet流の不安定限界の Rossby 数に関する依存性のみ考え、Reynolds 数に関する考慮は全く成されなかった。ところが、第3章の理論解析においても結論されたごとく、固体壁の存在が流体粘性の安定効果と不安定効果の「二重性」と相まって特異でかつ複雑な不安定特性を生じることから判断すると、この場合実験結果は、明確に流体粘性すなわち Reynolds 数が不安定を決定づける重要な役割を担うパラメータであることを示している。

以上、壁面噴流型の境界層流れの流体力学的安定問題を後退翼面上あるいは回転円板上の流れの3次元境界層流の場合および固体壁をもつ境界Jet流の場合に関し数値解法を援用して理論的に検討した。さらに、回転テーブル上に固定して置かれた円形水槽を用いて境界Jet流を作って行う実験的研究も行った。それらの結果を、実用上の流れあるいは実際の自然界の流れ現象に応用、対比して種々論じて



きた。

流れの非対称性あるいは固体壁の存在は、それ自体通常のアナリティシティとは異なった特異でかつ複雑な安定特性の様相を生じさせることがわかった。決して、非粘性近似理論だけで説明できるものではなく、非粘性の極限  $R = \infty$  から Reynolds 数有限な領域までの完全な粘性問題を解かねば、不安定に関する全体像を把握することはできないし、臨界 Reynolds 数  $R_c$  の決定には、なおさら流体粘性を十分考慮すべきであることを結論した。



## 謝 辞

元九州大学応用力学研究所 岡部淳一教授（前西日本工業大学学長）は、著者に流体力学的安定論の研究への興味を喚起して戴き、現在まで終始変わらぬ御激励と暖かい御指導・御鞭撻を賜りました。九州大学応用力学研究所 本地弘之教授、更には前久留米工業大学 教養部 種子田定俊教授、故中村康治九州大学名誉教授の諸先生方にもいつも変わらぬご厚情を戴きました。ここに、記して先生方の学恩に対し深く感謝の意を表します。

特に、本研究の遂行にあたっては、九州大学応用力学研究所 竹松正樹教授に、壁面噴流型の流体力学的安定論研究の示唆と御教示を仰ぎ、研究設備の貸与から研究に関する有益な議論まで、研究を円滑に進める上で多大のご援助を戴きましたことに深甚の謝意を表します。

昭和59年5月1日から昭和60年2月28日の期間、内地研究員として九州大学応用力学研究所滞在中、実験設備の設計と保守及び実験補助を北 統夫技官に援助して戴きました。又、その期間には九州大学応用力学研究所 沿岸海象部門や流体力学部門の方々にも種々お世話になりました。ここに記して、感謝の念を表します。

尚、元有明工業高等専門学校長で、すでに故人となられた吉村虎造先生には九州大学応用力学研究所への内地留学の機会を与えて戴いたこと、元有明工業高等専門学校長 竹村哲男先生ならびに前有明工業高等専門学校長で現久留米工業大学学長 高松康男先生及び現有明工業高等専門学校長 山藤 馨先生等の多くの先生方の御激励と援助に支えられて本研究が完成したこと、また、有明工業高等専門学校の諸先生方にも、折りに触れて研究遂行の御激励を戴きましたことなど、様々な形でご声援戴き、筆者の挫折しかかる気力を鼓舞して戴いたことに対して、衷心から謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1 . Gregory, N., Stuart, J. T. and Walker, W. S., *Phil. Trans.*, A Vol. 248, 1955, P. 155
- 2 . Rosenhead, L., *Laminar Boundary Layers* ( Oxford ) , 1963
- 3 . Squire, H. B., On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, *Proc. Roy. Soc. London*, A142, pp.621-628
- 4 . Dunn, D. W. and Lin, C. C., On the stability of the boundary layer in a compressible fluid, *J. Aero. Sci.*, Vol. 20, 1955, p. 455-77
- 5 . Kuo, H. L., Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere, *J. Met.*, 6, 1949, p. 105-122
- 6 . Lipps, F. B., The barotropic stability of the mean winds in the atomosphere, *J. Fluid Mech.*, 12, 1962, p. 397-407
- 7 . Foote, J. R. and Lin, C. C., Some recent investigations in the theory of hydrodynamic stability, *Quart. Appl. Math.*, 8, 1951, p. 265-280
- 8 . Niino, H., A weakly non-linear theory of barotropic instability , *J. Meeor. Soc. Japan*, 60, 1982, p. 1001-1024
- 9 . Niino, H. and Misawa, N., An experimental and theoretical study of barotropic instability, *Atomos. Sci.*, 41, 1984, p. 1992-2011
- 1 0 . Wazzan, A. R., T. T. Okamoto and M. O. Smith., Stability of laminar boundary layers at separation, *Phys. Fluid*, 10, 1967, p. 2540-2545
- 1 1 . Yamashita, I. and Takematsu, M., A numerical study on the instability of three dimensional boundary layers, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, 22, NO. 69, 1974, p. 1-14
- 1 2 . Dunst, M., An experimental and analytical study of instability of asymmetric jetstream-like currents ina rotating fluid, *J. Fluid Mech.*, 60,1973, p. 391-405
- 1 3 . Kimura, R., Barotropic instability of a boundary jet on a sloping bottom, *Geophys. Fluid Dyn.*, 7, 1976, p. 205-230
- 1 4 . Brown, W. B., A stability criterion for three-dimensional boundary layers, *Boundary layer and flow control-2*, Pergamon Press, 1961, p. 903-913
- 1 5 . Lin, C. C., *Theory of hydrodynamic stability*, Cambridge Univ. Press, London and Newyork, 1955, pp.155
- 1 6 . Miles, J. W., The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion, *J. Fluid Mech.*, 8, 1960, p. 593-610
- 1 7 . Kurtz Jr., E.F. and Crandall, S.H., Computer-aided analysis of hydrodynamics stability
- 1 8 . Takematsu, M., Stability of a laminar flow along a flexible boundary (III), *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, Vol. 18, 1970, p. 87-180
- 1 9 . Eady,E.T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*,1,(3),33-52
- 2 0 . Pedlosky, J., *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979, pp.624
- 2 1 . Tareev, B. A., Unstable Rossby waves and the instability of oceanic currents, *Izv., Atmospheric and Oceanic Series*, 1, NO.4, 1965, pp. 426-438
- 2 2 . Betchov, R. and W. O. Criminale, *Stability of parallel flows*, Academic Press, Newyork and London, p.390



補章

この章には、本文中に用いられている、主な式の導出方法をあげる。

付録 本研究の数値計算に用いた主要な式の導出方法

1. 3次元境界層流の安定問題に関する数値計算について

1. 1 粘性問題の計算法における差分方程式の導出

本文第2章§2.2でも述べている通り、3次元境界層流の安定問題解析には、 $(x, y, z)$ 座標系において、 $(x, y)$ 座標系に関する量を用いると、第3の座標 $z$ 成分の量は適当な式によって換算できる。そこで、安定問題を解析するためには、(2.2.5)<sub>1</sub>で示したように、2次元のOrr-Sommerfeld方程式と同じ次式を解けばよい：

$$(U-c)(w_1'' - \alpha^2 w_1) - U'' w_1 = (i\alpha R)^{-1} (w_1'''' - 2\alpha^2 w_1'' + \alpha^4 w_1) \quad (1)$$

整理すると、

$$w_1'''' + p(z)w_1'' + q(z)w_1 = 0 \quad (1)'$$

ここで、 $p(z) = -2\alpha^2 - i\alpha R(U(z) - c)$ 、 $q(z) = \alpha^2 \{ \alpha^2 + i\alpha R(U(z) - c) \}$ 。

境界条件は

無限遠で、

$$w_1(\infty) = w_1'(\infty) = 0 \quad (2)$$

固体壁面で

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0 \quad (3)$$

上式で $U$ は基本流の速度分布であり、次式を用いる。

$$U(z) = -1 + (m+1)e^{-z} - m e^{-2z} \quad (4)$$

ここで、 $m$ は速度プロファイルの変曲点の位置により決まるパラメータで定数である。

数値計算の便宜上、境界条件を(2)に相当する無限遠での条件に変形するために、 $z \rightarrow \infty$ で収束する解は、

$$U(\infty) = -1, U''(\infty) = 0 \text{ より、}$$

非粘性解 ( $\alpha R \rightarrow \infty$ ) は、次式

$$w_1'' - \alpha^2 w_1 = 0 \quad (5)$$

を解いて、

$$\varphi_1 \sim e^{-\alpha z} \quad (6)$$



が得られる。

粘性解で収束する解は、

$$\varphi_2(z) \sim e^{-\kappa} . \quad (7)$$

ここで、 $\gamma^2 \equiv \alpha^2 + i\alpha R(1-c)$  ,  $\text{Re}[\gamma] > 0$  。

無限遠での境界条件(2)式より、その条件に相当する内部領域  $(0, z_0)$  の条件へ変形するために、ある有限な値  $z = z_0$  で、内部領域の解と外部領域の解を接続する必要がある。そのために、無限遠での収束解(6), (7) 式を用いて、一般解、 $A e^{-\alpha} + B e^{-\kappa}$  を用いて、3階までの微係数の連続性から接続条件を作ると、次式のように与えられる。

$$\begin{cases} w_1 = A e^{-\alpha} + B e^{-\kappa} \\ w_1' = A(-\alpha)e^{-\alpha} + B(-\gamma)e^{-\kappa} \\ w_1'' = A\alpha^2 e^{-\alpha} + B\gamma^2 e^{-\kappa} \\ w_1''' = A(-\alpha^3)e^{-\alpha} + B(-\gamma^3)e^{-\kappa} \end{cases} \quad (8)$$

これら4式から任意定数  $A, B$  を決定すると、

$$w_1''(z) + \gamma w_1'(z) - \alpha^2 w_1'(z) - \alpha^2 \gamma w_1(z) = 0 \quad (9)$$

$$w_1'(z) + (\alpha + \gamma) w_1'(z) + \alpha \gamma w_1(z) = 0 \quad (10)$$

この2つの式が、無限遠の条件と同等の境界条件となり、これにより、有限の領域のみを考慮した数値計算をすることが可能になる。

ここで、基本方程式Orr-Sommerfeld方程式(1)と境界条件(3), (9), (10)式を差分化する。

$(0, z_0)$  の領域を  $N$  々の格子点で分割して、その一つの格子点  $n$  における  $w_1$  の差分は、

$$\begin{bmatrix} w_{1n} \\ h dw_{1n}/dz \\ h^2 d^2 w_{1n}/dz^2 \\ h^3 d^3 w_{1n}/dz^3 \\ h^4 d^4 w_{1n}/dz^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1n} \\ \mu \delta w_{1n} \\ \delta^2 w_{1n} \\ \mu \delta^3 w_{1n} \\ \delta^4 w_{1n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ O(h^2) \\ O(h^2) \\ O(h^2) \\ O(h^2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $h$  は  $z$  についての増分である。 $\delta$  は中心差分演算子で、 $\mu$  は平均差分演算子である。この場合、打ち切り誤差は  $h^2$  のオーダーである。

そこで、計算の精度を上げるために、3階の微分以外のすべての微分を打ち切り誤差が  $h^4$  のオーダーになるように次のような新しい変数  $g$  を導入する(幸いにも、打ち切り誤差のオーダーが大きくなる3階の微分が、(1)式には表れない)。

$$w_{1n} = \left( 1 + \frac{1}{6} \delta^2 + \frac{1}{360} \delta^4 \right) g_n \quad (12)$$

逆に、

$$g_n = \left( 1 - \frac{1}{6}h^2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{90}h^4 \frac{d^4}{dz^4} \right) w_{1n} \quad (13)$$

ここで、 $z_n$  は計算する  $z$  領域の分割格子点  $n$  での値であり、  
 $w_{1n} = w_{1n}(z_n)$ ,  $g_n = g(z_n)$  である。

この変数を用いて(12)式を書き替えると、

$$\begin{bmatrix} w_{1n} \\ h dw_{1n}/dz \\ h^2 d^2 w_{1n}/dz^2 \\ h^3 d^3 w_{1n}/dz^3 \\ h^4 d^4 w_{1n}/dz^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{360} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n \\ \mu \delta g_n \\ \delta^2 g_n \\ \mu \delta^3 g_n \\ \delta^4 g_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(h^4) \\ O(h^4) \\ O(h^4) \\ O(h^2) \\ O(h^4) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$g_n$  の  $z_n$  まわりの5点近似による中心差分表示は

$$\begin{bmatrix} g_n \\ \mu \delta g_n \\ \delta^2 g_n \\ \mu \delta^3 g_n \\ \delta^4 g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(z_n - 2h) \\ g(z_n - h) \\ g(z_n) \\ g(z_n + h) \\ g(z_n + 2h) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)と(15)を結合して、 $w_{1n}$  とその微分を  $g$  の代数方程式に変換する行列が得られる：即ち、

$$\begin{bmatrix} w_{1n} \\ h dw_{1n}/dz \\ h^2 d^2 w_{1n}/dz^2 \\ h^3 d^3 w_{1n}/dz^3 \\ h^4 d^4 w_{1n}/dz^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{360} & \frac{7}{45} & \frac{41}{60} & \frac{7}{45} & \frac{1}{360} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(z_n - 2h) \\ g(z_n - h) \\ g(z_n) \\ g(z_n + h) \\ g(z_n + 2h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(h^4) \\ O(h^4) \\ O(h^4) \\ O(h^2) \\ O(h^4) \end{bmatrix} \quad (16)$$

格子点  $n$  における基礎方程式 (1)' の差分形は

$$K_n g_{n+2} + L_n g_{n+1} + M_n g_n + L_n g_{n-1} + K_n g_{n-2} = 0$$

ここで、



$$\left. \begin{aligned} K_n &= 1 + \frac{1}{12}p_n h^2 + \frac{1}{360}q_n h^4 \\ L_n &= -4 + \frac{2}{3}p_n h^2 + \frac{7}{45}q_n h^4 \\ M_n &= 6 - \frac{3}{2}p_n h^2 + \frac{41}{60}q_n h^4 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ただし、 $p_n = p(z_n)$ ,  $q_n = q(z_n)$  を示して、点  $z_n$  における (1) 式の  $p, q$  の値である。

境界条件(3)式は、

$$\left. \begin{aligned} g_2 + 56g_1 + 246g_0 + 56g_{-1} + g_{-2} &= 0 \\ g_1 - g_{-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

境界条件(9), (10) 式は、

$$\left. \begin{aligned} B_{11}g_{N+2} + B_{12}g_{N+1} + B_{13}g_N + B_{14}g_{N-1} + B_{15}g_{N-2} &= 0 \\ B_{21}g_{N+2} + B_{22}g_{N+1} + B_{23}g_N + B_{24}g_{N-1} + B_{25}g_{N-2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $g$  の添字の  $N$  は無限遠に相当する  $z = z_0$  での  $z$  の値を示している。さらに、

$$\begin{aligned} B_{11} &= 180 + 30\gamma h - \alpha^2 \gamma h^3, \\ B_{12} &= -360 + 240\gamma h - 180\alpha^2 h^2 - 56\alpha^2 \gamma h^3, \\ B_{13} &= -540\gamma h - 246\alpha^2 \gamma h^3, \\ B_{14} &= 360 + 240\gamma h + 180\alpha^2 h^2 - 56\alpha^2 \gamma h^3, \\ B_{15} &= -180 + 30\gamma h - \alpha^2 \gamma h^3, \\ B_{21} &= 30 + \alpha \gamma h^2, \\ B_{22} &= 240 + 180(\alpha + \gamma)h + 56\alpha \gamma h^2, \\ B_{23} &= -540 + 246\alpha \gamma h^2, \\ B_{24} &= 240 - 180(\alpha + \gamma)h + 56\alpha \gamma h^2, \\ B_{25} &= B_{21} \end{aligned}$$

である。

即ち、この差分式を整理すると、次式のように線形代数方程式に帰着される。

$$[\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{W}] = 0 \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{D}(\alpha, R, c)$  は正方行列である。また、 $\mathbf{W}$  は離散格子点  $z_n$  ( $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N, N+1, N+2$ ) を表す列ベクトルである。





## 2. 境界ジェット流の線形安定性計算

大略の数値解法の手順は1節と同じであるので、その箇所の説明は省き、本節の計算に関して特徴的な箇所のみ説明する。

### 2. 1 基本流の速度分布

安定問題の解析には基本流の具体的な表現が重要である。固体壁での速度プロファイルの曲率の値を種々取りたいことと、その調整しやすさを考慮して、固体壁近く ( $0 \leq y \leq 0.5$ ) では、4次の多項式近似を使う。 $y > 0.5$  から無限遠方 (数値計算上は  $y = 3.0$ ) では、無限遠で指数関数的に  $U \rightarrow 0$  となる：すなわち、

$$U(y) = \begin{cases} a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 & (0 \leq y \leq 0.5) \\ \text{sech}\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(y-0.5)\right\} & (y > 0.5) \end{cases} \quad (23)$$

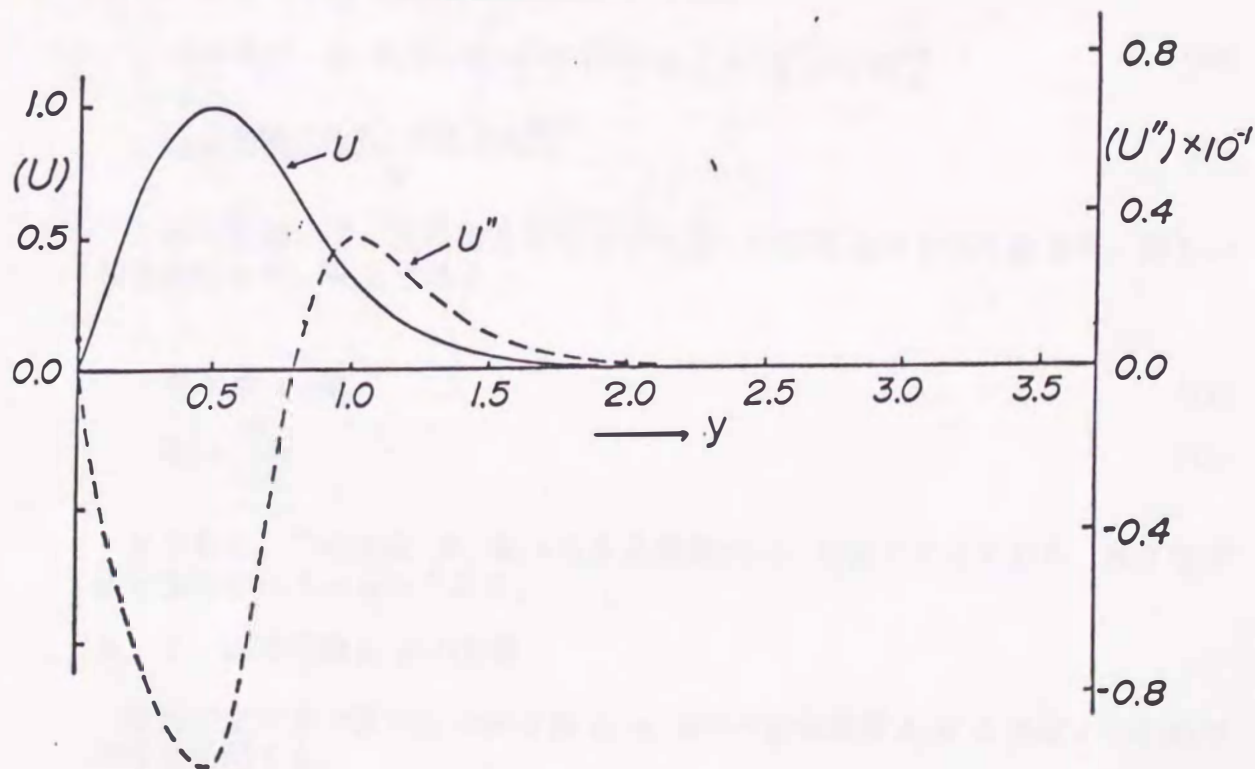
を考える。  
ここで、 $a_1 \sim a_4$  は

$$U''(0) = b, \quad U(0.5) = 1, \quad U'(0.5) = 0, \quad U'''(0.5) = \left. \frac{d^2}{dy^2} \text{sech}\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}(y-0.5)\right\} \right|_{y=0.5}$$

より、つぎの通りに決定される。

$$a_1 = -(\pi^2 + b - 48)/12, \quad a_2 = b/2, \quad a_3 = \pi^2 - b - 16, \quad a_4 = (48 + 2b - 4\pi^2)/3$$

これが境界ジェットの基本流となる。ここで、 $b$  は速度プロファイルの固体壁での曲率の規定値である。この速度プロファイルは下図の通りで、本文中の第3章 § 3. 2 の図2を再度掲載した。



## 2. 2 数値積分における解の独立性維持のためのSchmidtの直交化法について

このようにして、無限遠の初期条件から壁面まで積分を繰り返していくと、ある箇所から解の独立性が失われてくる可能性がある。それを、防止する手だてとして、Schmidtの直交化法を用いる。これを使えば、積分のステップが進んでも、いつも独立性が保証された解を捨てることができる。その方法を述べる。無限遠で収束する基礎方程式の解は、

$$\phi_1 = e^{-\tilde{\alpha}y}, \phi_1' = -\tilde{\alpha}e^{-\tilde{\alpha}y}, \phi_1'' = \tilde{\alpha}^2 e^{-\tilde{\alpha}y}, \phi_1''' = -\tilde{\alpha}^3 e^{-\tilde{\alpha}y} \quad (24)$$

$$\phi_3 = e^{-\gamma y}, \phi_3' = -\gamma e^{-\gamma y}, \phi_3'' = \gamma^2 e^{-\gamma y}, \phi_3''' = -\gamma^3 e^{-\gamma y} \quad (25)$$

の2つである。ここで、 $\tilde{\alpha}^2, \gamma^2 = \left(\alpha^2 - \frac{i\alpha Rc}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{i\alpha Rc}{2}\right)^2 + i\alpha R\beta}$ 。  $\tilde{\alpha}, \gamma$  の実部は正であると仮定する。即ち、 $\text{Re}(\tilde{\alpha}) > 0, \text{Re}(\gamma) > 0$ 。

$\tilde{\Phi} = (\phi, \phi', \phi'', \phi''')$  のようなベクトル表示を使うと、解をまとめて表現でき、無限遠 ( $y=3.0$ ) における初期条件は

$$\tilde{\Phi}_1(3) = (1, -\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^2, -\tilde{\alpha}^3) \quad (26)$$

$$\tilde{\Phi}_3(3) = (1, -\gamma, \gamma^2, -\gamma^3) \quad (27)$$

積分ステップが  $-h$  だけ進んだところの解を

$$\tilde{\Phi}_1(3-h) = (\phi_1, \phi_1', \phi_1'', \phi_1''') \quad (28)$$

$$\tilde{\Phi}_3(3-h) = (\phi_3, \phi_3', \phi_3'', \phi_3''') \quad (29)$$

これら2つより、 $|\tilde{\Phi}_3(3-h)|^2$  と  $\tilde{\Phi}_1(3-h) \cdot \tilde{\Phi}_3(3-h) / |\tilde{\Phi}_3(3-h)|^2$  なる関係式を作る。この二つの量をそれぞれ、 $N, A$  と置くと、

$$N = \tilde{\Phi}_3(3-h) \cdot \tilde{\Phi}_3(3-h) = |\phi_3|^2 + |\phi_3'|^2 + |\phi_3''|^2 + |\phi_3'''|^2 \quad (30)$$

$$A = \frac{\phi_1\phi_3 + \phi_1'\phi_3' + \phi_1''\phi_3'' + \phi_1'''\phi_3'''}{N} \quad (31)$$

これらを用いて、次の積分ステップの新しい初期条件を作りなおす。新しい初期条件を  $\Phi_1, \Phi_3$  とすると、

$$\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1 - A\tilde{\Phi}_3 \quad (32)$$

$$\Phi_3 = \frac{\tilde{\Phi}_3}{\sqrt{N}} \quad (33)$$

すなわち、この式は  $\Phi_1 \cdot \Phi_3 = 0$  なる関係がいつも成り立っており、独立性が必ず保証されているのである。

## 2. 3 固有関数 $\phi, \phi'$ の計算

線形安定計算で得られた固有値  $c, \alpha, R$  から固有関数  $\phi, \phi'$  を決定するための計算を列記する。



(1) 式を書き替えて、

$$\phi'''' + p(y)\phi'' + q(y)\phi = 0 \quad (34)$$

ここで、

$$p(y) = -2\alpha^2 - i\alpha R(U(y) - c)$$

$$q(y) = \alpha^4 + i\alpha R\{\alpha^2(U(y) - c) - \beta + U''(y)\}$$

無限遠での境界条件を書き替える。つまり、無限遠近くの内部領域の解と無限遠での解とを接続させて、無限遠まで考慮することなく数値計算が可能ないように解の接続を行う。

$\phi_i, \phi_o$  をそれぞれ、無限遠近くの内部領域、外部領域の解として、次の接続条件を考慮する。(方程式(34)が4階の微分までであるので、3階の微係数までの連続性を保証する)

$$\phi_i = \phi_o, \phi_i' = \phi_o', \phi_i'' = \phi_o'', \phi_i''' = \phi_o''' \quad (35)$$

(24), (25)より、無限遠で収束する粘性解と非粘性解は次のように得られる。無限遠方の外部領域の解を表すために、その表記をかえて、

$$\phi_{1o} \sim e^{-\tilde{\alpha}y}, \phi_{3o} \sim e^{-\gamma y}$$

ここで、添字の  $o$  は、外部領域の解であることを示す。これらから無限遠で収束する一般解を作ると、

$$\phi = A_1\phi_1 + A_3\phi_3$$

次に、内部領域の解を、 $\phi_i \Rightarrow \phi$  と表記し直せば、(35)式の左辺を内部領域の解と見ることができる。

これに、(35)式の接続条件を使って、任意定数の  $A_1, A_3$  を消去すると、

$$\phi''' + \gamma\phi'' - \tilde{\alpha}^2\phi' - \tilde{\alpha}^2\gamma\phi = 0 \quad (36)$$

$$\phi'' + (\tilde{\alpha} + \gamma)\phi' + \tilde{\alpha}\gamma\phi = 0 \quad (37)$$

固体壁での条件は次式である。すなわち、

$$\phi(0) = 0 \quad (38)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (39)$$

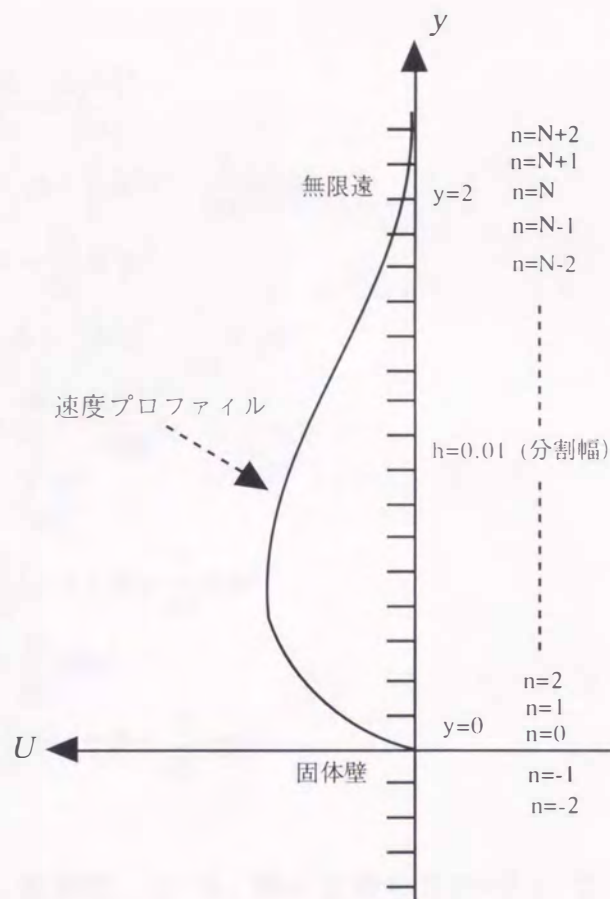


図1 流れの領域と分割方法、分割幅、格子点、番号付け

境界ジェットの流れ領域を図1のような区間（区間幅  $h=0.01$  程度）に分割する。

(34), (36), (37), (38), (39) を図1のように分割した流れ領域で5点近似を用いて、差分化すると次の差分方程式が得られる。

(34)式は、流れの内部領域および固体壁と無限遠で、

$$K_n \phi_{n+2} + L_n \phi_{n+1} + M_n \phi_n + L_n \phi_{n-1} + K_n \phi_{n-2} = 0 \quad (34)'$$

ここで、

$$K_n = 1 + \frac{1}{12} p_n h^2 + \frac{q_n}{360} h^4$$

$$L_n = -4 + \frac{2}{3} p_n h^2 + \frac{7}{45} q_n h^4$$

$$M_n = 6 - \frac{3}{2} p_n h^2 + \frac{41}{60} q_n h^4$$

$p_n = p(y_n)$ ,  $q_n = q(y_n)$ ,  $h$  は区間  $y$  の分割幅を表す。

(36), (37) 式は、無限遠 ( $y=3.0$ 、格子点番号で  $n=N$ ) で

$$B_{11} \phi_{N+2} + B_{12} \phi_{N+1} + B_{13} \phi_N + B_{14} \phi_{N-1} + B_{15} \phi_{N-2} = 0 \quad (36)'$$

$$B_{21} \phi_{N+2} + B_{22} \phi_{N+1} + B_{23} \phi_N + B_{24} \phi_{N-1} + B_{25} \phi_{N-2} = 0 \quad (37)'$$



ここで、

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma h}{12} - \frac{\tilde{\alpha} \gamma^2 h^3}{360} \\
 B_{12} &= -1 + \frac{2}{3} \gamma h - \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^2 h^2 - \frac{7}{45} \tilde{\alpha}^2 \gamma h^3 \\
 B_{13} &= -\frac{3}{2} \gamma h - \frac{41}{60} \tilde{\alpha}^2 \gamma h^3 \\
 B_{14} &= 1 + \frac{2}{3} \gamma h + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^2 h^2 - \frac{7}{45} \tilde{\alpha}^2 \gamma h^3 \\
 B_{15} &= -\frac{1}{2} + \frac{\gamma h}{12} - \frac{\tilde{\alpha} \gamma^2 h^3}{360} \\
 B_{21} &= \frac{1}{12} + \frac{\tilde{\alpha}^2 \gamma h^2}{360} \\
 B_{22} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} + \gamma) h + \frac{7}{45} \tilde{\alpha} \gamma h^2 \\
 B_{23} &= -\frac{3}{2} + \frac{41}{60} \tilde{\alpha} \gamma h^2 \\
 B_{24} &= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} (\tilde{\alpha} + \gamma) h + \frac{7}{45} \tilde{\alpha} \gamma h^2 \\
 B_{25} &= B_{21}
 \end{aligned}$$

(38), (39) 式は、固体壁 ( $y=0$ 、格子点番号で  $n=0$ ) で

$$\frac{1}{360} \phi_2 + \frac{7}{45} \phi_1 + \frac{41}{60} \phi_0 + \frac{7}{45} \phi_{-1} + \frac{1}{360} \phi_{-2} = 0 \quad (38)'$$

$$\phi_1 - \phi_{-1} = 0 \quad (39)'$$

(35)' から (40)' 式は同次連立方程式を構成する。これらをガウスの消去法で解き、 $\phi, \phi'$  を求める。

#### 2. 4 流れ関数の決定

固有関数  $\phi$  が見つかり、次のようにして流れ関数が決定して、流れ紋様が描ける。つまり、流れ関数  $\psi$  は、

$$\begin{aligned}
 \psi(x, y, t) &= \phi(y) e^{i\alpha(x-c_r t)} \\
 &= e^{\alpha_r t} \{ \phi_r(y) \cos \alpha(x-c_r t) - \phi_i(y) \sin \alpha(x-c_r t) + i(\phi_i(y) \cos \alpha(x-c_r t) + \phi_r(y) \sin \alpha(x-c_r t)) \}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha$  は攪乱の波数、 $x, y$  は座標、 $t$  は時間、 $c_r$  は攪乱の位相速度、 $c_r$  は攪乱の増幅率、 $\phi_r$  は攪乱の振幅関数の実部、 $\phi_i$  は攪乱の振幅関数の虚部である。

$c_i = 0$  の中立攪乱に対する流れ関数は

$$\text{Re}[\psi] = \phi_r(y) \cos k(x-c_r t) - \phi_i(y) \sin k(x-c_r t) \quad (40)$$

により求める。

位相速度  $c_r$  で動く座標系から見た主流の流れ関数は、

$$\tilde{\psi}(x, y, t) = \int (U - c_r) dy = \int U dy - c_r y \quad (41)$$

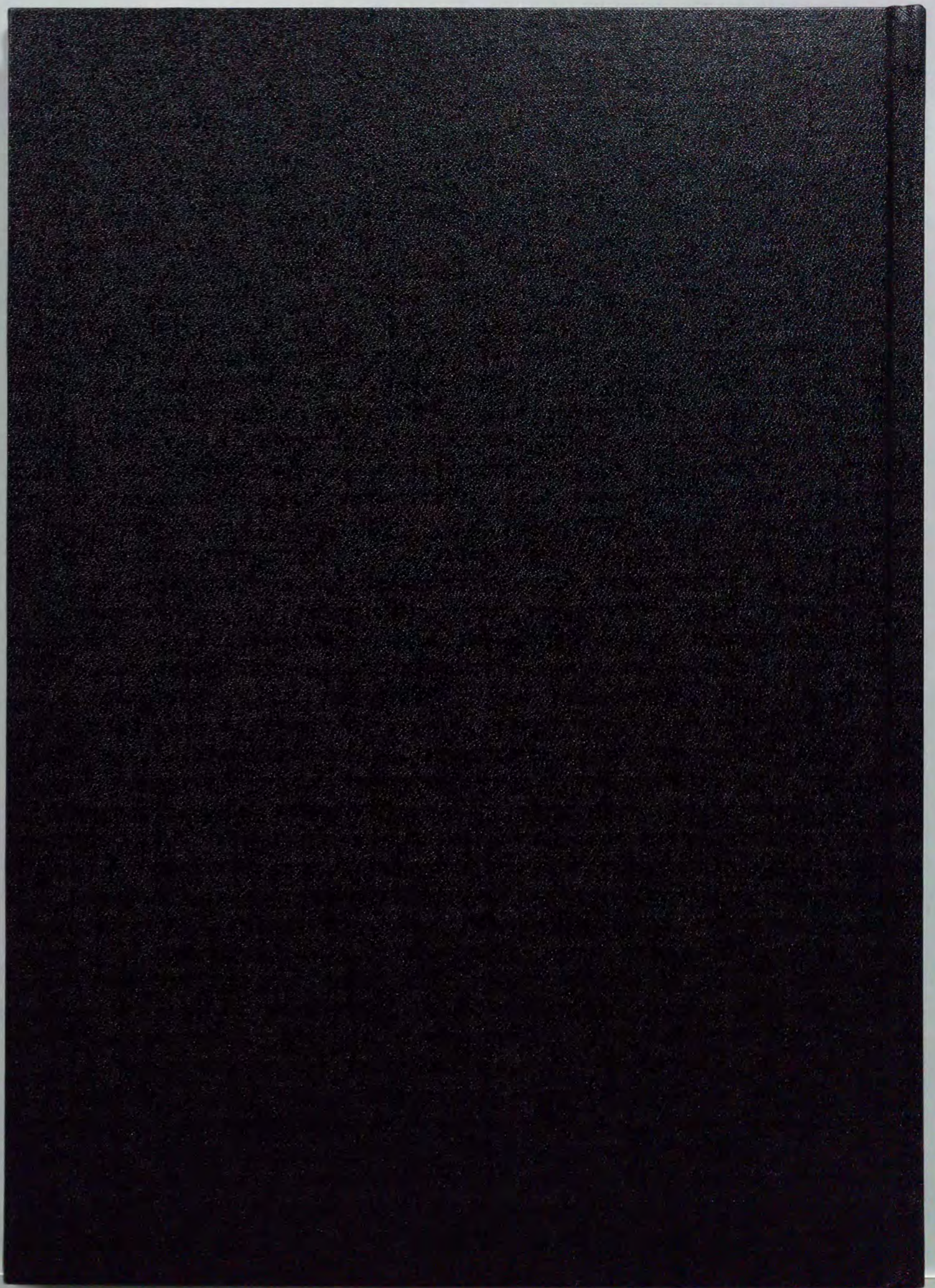
である。攪乱と主流の総合した流れ関数  $\Psi$  は、

$$\Psi = \text{Re}[\psi] + \tilde{\psi} = P\{\phi_r(y)\cos k(x - c_r t) - \phi_i(y)\sin k(x - c_r t)\} + \int U dy - c_r y + \text{const.} \quad (42)$$

ここで、 $P$  は任意パラメータで、 $k | \text{Re}[\psi] |_{\max} \sim 0.1$  になるよう決定し、 $\text{const.}$  は  $\tilde{\psi}_{\max} \sim 0.12$  になるように決定する。

(42) 式が境界ジェット流の典型的な流れ紋様を表して、その一例が本論文第 3 章 § 3. 4 の図 9 である。







Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

