

個体面に沿う噴流型境界流の安定性に関する研究

山下, 巖

<https://doi.org/10.11501/3150981>

出版情報 : 九州大学, 1998, 博士 (理学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :

固体面に沿う噴流型境界流の安定性に関する研究

山 下 巖

目 次

第1章 序 論	(1)
§ 1. 1 本研究の背景	(1)
§ 1. 2 これまでの関連研究の概要	(3)
§ 1. 3 本論文の目的および方法	(6)
第2章 3次元境界層流の線形安定性	(9)
§ 2. 1 まえがき	(9)
§ 2. 2 問題の記述	(10)
§ 2. 3 問題の解法	(15)
2.3.1 非粘性問題の解法	(15)
2.3.2 漸近解法	(18)
2.3.3 完全粘性問題の解法	(19)
§ 2. 4 結果と考察	(22)
§ 2. 5 結語	(30)
第3章 側壁に沿う非対称 Jet 流の順圧不安定	(32)
§ 3. 1 まえがき	(32)
§ 3. 2 問題の記述	(33)
§ 3. 3 解法	(38)
§ 3. 4 結果と考察	(41)
§ 3. 5 結語	(54)
第4章 側壁に沿う非対称 Jet 流の順圧不安定——実験的研究	(55)
§ 4. 1 まえがき	(55)
§ 4. 2 実験方法	(56)
§ 4. 3 実験結果	(58)
4. 3. 1 K_1 流の特性	(58)
4. 3. 2 $B J_1$ 流の不安定	(59)
4. 3. 3 $B J_2$ の不安定	(63)
§ 4. 4 結語	(65)
第5章 結論	(68)
謝 辞	(71)

参 考 文 献 (72)

補 章 (73)

付 録 本研究の数値計算に用いた主要な式の導出方法 (74)

第1章 序 論

§ 1. 1 本研究の背景

力学系の微小攪乱に対する免疫性を力学的安定性という。連続体である流体の安定性は、層流から乱流への遷移現象の本質に関わるものとして、流体力学の重要な基礎的課題として位置づけられている。又、安定性の解析は、遷移の予測と制御に必須の知識を提供することから、流体摩擦抵抗の低減などの工学的問題の解決においても重要な役割を担っている。そうした基礎、応用の両面にわたる要請から、これまでも、実に多くの流れについて安定性が調べられてきた。

その結果、重力や遠心力などの外力が介在しない均一流体の場合、着目する流れ（主流）の速度分布形状と固体境界の存在が、流れの安定性を特徴づける重要な要因であることが知られている。主流の速度分布形状に関しては、特に非粘性流体の場合、その分布が変曲点を持つこと、言い換えると、主流の渦度分布が停留値を持つことが攪乱が成長するため（不安定化）の必要条件であることが知られている。このように、主流の速度分布が変曲点を持つことによって生ずる不安定を「変曲点不安定」という。固体境界の介在しない噴流や後流などの、いわゆる自由剪断流に見られる不安定はみなこの種の不安定であり、その中の攪乱の消長・挙動は主流の速度分布形状のみによってほぼ決定されてしまう。この場合、流体粘性は、攪乱に微弱な減衰作用を及ぼすのみで、本質的な役割を果たさないため、簡単な非粘性解析によって安定性の大略を知ることが出来る。しかし、固体境界が存在すると、その近傍では、流体粘性は、攪乱を抑える安定化要因であるのみならず、攪乱を増幅させる不安定化要因ともなり得る（粘性作用の二面性）。それ故、主流の速度分布が変曲点を持たなくとも不安定が生じ得る。このように、壁面近くの粘性の作用によって誘起される不安定を「粘性不安定」と言う。管内の流れや境界層流に見られる不安定がその例である。この場合には、非粘性の極限では不安定が存在しないから、非粘性解析は全く無力であり、安定解析には完全な粘性問題を扱わねばならない。それでは、この二つの不安定要因が共存する場合、流れはいかなる安定性を示すであろうか？

速度分布が変曲点を持ち、かつ、固体境界に沿う流れの例としては、2次流れを伴うある種の3次元境界層流や壁面噴流を挙げることが出来る。従来、この種の流れに

見られる不安定も、本質的には「変曲点不安定」であろうとの考えから、もっぱら非粘性解析によってその安定性が論じられてきた。しかし、固体境界が介在する場合には、非粘性解析だけで実在の粘性流体の安定性が言い尽くされ得るか否かは自明ではない。固体境界が存在することにより、流体粘性が安定性に決定的な影響を及ぼす可能性があるからである。実際、次節で詳述するように、後退翼面上および回転円板上の3次元境界層の安定性に関する実験と非粘性解析結果との重大な不一致がその可能性を強く示唆している。

そこで、本研究では、特に、後退翼面上および回転円板上の3次元境界層に着目し、その安定性を完全な粘性問題を解いて詳細に調べることにより、この安定問題に関する理論と実験の歴史的不一致を解消するとともに、速度分布に変曲点を持つ流れの安定性問題における固体境界と流体粘性の重要性を例証した。なお、同様な粘性解析を陸岸に沿う噴流型海流についても行い、これまで知られている非粘性解析結果を完全な粘性問題の結果と対比して論ずる。

§ 1. 2 これまでの関連研究の概要

(1) 後退翼面上及び回転円板上の3次元境界層の安定性

後退翼 (Yawed Wing) 面上、あるいは静止流体中に置かれた回転円板上の3次元境界層流の遷移現象の研究は1940年代の後半以来多くの研究者によって成されてきたが、就中、Royal Aircraft Establishment と National Physical Laboratory の両グループによる組織的研究が有名である。Gray (R.A.E.) は、翼面に china-clay を塗布して飛行実験を行い、後退翼面上の3次元境界層流が、後退角のない翼面上の2次元境界層流よりも早く乱流に遷移すること、しかもその遷移に先行して、翼面に付着するように、静止した規則正しい渦列が存在することに気がついた。

Gregory と Walker¹⁾ (N.P.L.) は、同様な渦現象が回転円板上の3次元境界層流の場合にも存在することを示した (Rosenhead の書物の口絵²⁾ 参照) 。

N.P.L. のグループは、“ evaporation ” 法による定性的な観察だけにとどまらず、特殊な聴診器を用いて、その遷移領域の定量的な側面についても調べ、観測される定常攪乱 (渦) が非常に強いものであることを示した。この3次元境界層流に特有な渦現象に対する理論的説明は Squire³⁾、Dunn & Lin⁴⁾ とそして

Stuart¹⁾ らによって試みられた。特に、Stuart¹⁾ は3次元定常流に重畳される2次元微小攪乱を支配する方程式を吟味し、この3次元的問題が、ある妥当な近似のもとに、通常の2次元問題、すなわち Orr-Sommerfeld 固有値問題に帰着されることを示し、この場合の“主流”としては、攪乱の伝播方向の主流の速度成分をとらねばならないが、Stuart が観測結果との関連においてとくに注目したのは、剥離流に似て、壁面近くに逆流域を含む、いわゆる壁面噴流型に類似のプロファイルで、そのプロファイルの変曲点 (Inflexion Point) が丁度、流速=zero の点と一致するような“平均流速”分布である。これは、J-プロファイルと呼ばれている。このような特別のプロファイルに対しては、非粘性の極限で位相速度 zero

の定常中立攪乱が存在することは安定論でよく知られた事柄である。実際、J-プロファイルの実現する方向の軌跡から予測される攪乱の配置は観測結果とほぼ一致する。従って、当の定常な渦現象は、J-プロファイルに固有な“ Inflexional Instability ” (変曲点不安定) であるとするのが、Stuart の説明であり、従来の

定説となっていた¹⁾。Stuart は、実際に非粘性固有値問題を J-プロファイルについて解き、非伝播型中立攪乱 ($c_r = 0, c_i = 0$) の波数を決定した。その値は実験値とは一致しなかったが、その食い違いは粘性の影響によるものであらうと説明された。そうした波数の食い違いはともかくとして、Stuart の説明には別の、より本質的な欠陥があることをここで指摘しておかねばならない。それは、観察される最も優勢な渦パターンの説明に、成長率ゼロの中立攪乱を対応させたことである。しかし、自然条件のもとで観察される渦は最大の成長率を持つ増幅攪乱であるはずである。

(2) 海流の順圧不安定性

回転系における大規模な準平行流の順圧不安定問題を陸岸に沿う境界ジェット流、即ち固体面に沿う噴流型境界流とみなして議論するが、このような問題は地球流体力学的興味から Kuo⁵⁾、Lipps⁶⁾ 以来、多くの研究者によって論じられ、現在、この問題に関する全ての様相はほとんど解明されているように思われている。しかしながら、これまですでに発表された結果は、流体粘性は余り重要でない因子として、主として非粘性理論にもとづく議論と解釈が流布している。大気中のジェット流のように、側壁を持たない”自由流”の安定問題においては非粘性近似が有効であることは Foote と Lin (1951)⁷⁾ によって示されている。この場合、流体粘性は、基本流を安定化させるようにのみ作用し、しかも、この安定化作用は、流れの Reynolds 数が極度に小さくならない限り、ほとんど無視しうると予想される。自由シア一流の安定性における流体粘性のこうした安定化作用については、Niino (1982)⁸⁾ 及び Niino と Misawa (1984)⁹⁾ によって詳細に調べられている。すなわち、従来の研究は、流体粘性の作用を無視するか、たかだか安定化要因としてのみ考慮するという点で、本質的に自由流を対象としたものである。しかし、海流のように、陸岸(側壁)に沿う流れも、自由流と同列に論じられるか否かは明らかにされていない。

基本流が固体境界に接している場合には、§ 1.1 で触れられたように、流体粘性は不安定要因ともなり得る。その典型的な例は平板上の Blasius 境界層の不安定である。この場合、速度分布が変曲点を持たないため、非粘性の極限では安定であるが、粘性の作用によって不安定(「Tollmien-Schlichting 不安定」)が生ずる。このような、固体境界の存在による粘性の不安定化作用は、速度分布に変曲点を持つ境界流の場合においても重要であらうと予測される。実際、この予測が正しいことは、剥

離を伴う境界層流に関するWazzan等(1967)¹⁰⁾の安定解析及び後退翼面上あるいは回転円板上の3次元境界層に関する YamashitaとTakematsu(1974)¹¹⁾の結果が例証している。これらの研究結果は、いずれも、陸岸に沿う海流は、大気中のジェット流のような自由流とは同列に論じられないことを強く示唆している。

なお、壁面噴流型の境界ジェット流の安定性に関する実験的研究は、Dunst(1973)¹²⁾及び Kimura(1976)¹³⁾等によって試みられている。しかし、これらの実験的研究においては、実験結果の評価に非粘性理論が用いられている。

§ 1. 3 本論文の目的および方法

速度分布が変曲点を持ち、かつ、固体境界に沿う流れは、実験室系のみならず、自然界にも見られるが、上述の通り、それらの流れの安定性は、これまで、もっぱら非粘性理論の枠組みの中で論じられてきた。しかし、変曲点不安定のみならず、粘性不安定も生じ得る条件を備えたこの種の安定問題において、流体粘性の影響は本質的でないとする根拠はないのではないか。むしろ、非粘性理論と現象との決定的な不一致は、流体粘性（正確には、Reynolds 数）をもう一つの重要なパラメータとして考慮する必要があることを示唆しているのではなからうか。二つの典型的な具体例につき、実際に、有限な粘性のもとでの安定性を調べることにより、この流体粘性の効果に関する疑問に答えるのが本論文の目的である。

第2章では、後退翼面上あるいは回転円板上の3次元境界層流の安定性を研究する。

後退翼面上あるいは回転円板上の3次元境界層流に誘起される2次流れは、ある条件で規則正しく配置された stationary mode の渦として観測される。渦の発生する方向は理論と実験がうまく一致するが、その波数については大きな食い違いが生じた。渦現象を考えると、波数の食い違い以外に、理論と実験の相関は別の本質的な面において不十分に思われる。観測される渦は大きな振幅を持つ優勢なモードであることが分かっている。一方、理論上は非伝播攪乱は中立モードだけである。中立攪乱が自然条件でそのように優勢な攪乱であるとは思われない。そのような優勢な渦は中立攪乱よりもむしろ、ある大きな増幅攪乱に伴うものであるに違いない。従って、J-プロファイルに対して、中立攪乱とは別に位相速度 = zero の増幅攪乱を発生させることが可能なのか？この3次元境界層流の研究の主目的は、この疑問に答えることであり、“stationary mode”の渦現象に対してもっと妥当な説明を用意することである。

この研究では、攪乱方程式がJ-プロファイルに対してばかりでなく、J-プロファイルとはわずかに異なる別の2~3のプロファイルに対しても、直接数値解法を適用することによって解かれる。そして、可能な攪乱の位相速度と同時に増幅率が、波数と Reynolds 数の関数として決定される。次に、その結果を渦現象に関する Gregoryらの以前の実験結果と比較して論じる。この問題に関する同様の数値的研究

は Brown¹⁴⁾ によって臨界 Reynolds 数を予測すると言う実際的興味から成された。しかし、彼の計算は中立安定の場合に限定され、増幅攪乱の方面には、注意が払われなかった。

第3章では、側壁に沿う非対称ジェット流の順圧不安定性の研究を行う。

粘性安定解析の結果が海洋学上の陸岸に沿う“黒潮”などの西岸強化流との関連性、即ち β 一面上の境界ジェット流の場合へと拡張される。側壁を有する流れの場合に、安定特性を決定づける重要要因となる流体粘性を考慮した線形攪乱方程式に対する固有値問題が数値解法の力をかりて取り扱われる。そして、基本流の安定特性が、興味ある全 Reynolds 数領域について決定される。ここでの主要目的は、境界流の安定に関し流体の内部粘性の重要性、即ち流体粘性の安定効果と不安定効果の“二重性”をできるだけ立証することであり、そして、非粘性近似の適用限界を見つけることである。

第4章では、実験的研究の立場から、室内実験によって境界ジェット流の定性的定量的な安定特性を見出すことを試みる。

自然界の流れにおいては、その不安定性を調べようとする所のいわゆる“基本流”そのものが、極めて曖昧であるばかりでなく、渦動粘性に対する適切な表現も知られていない。陸岸を単純に固体境界とみなすのが妥当かどうかにも問題がある。それに現実に見られる不安定は密度成層の影響を受けた一種の複合不安定であろう。従って、モデル流に関するこの種の不安定解析結果をそのまま自然界の現象に適用するには慎重でなければならない。しかし、室内実験においては、固体壁に沿う定粘性の“基本流”を扱うことが多いことを考えると、固体境界に沿う平行粘性流の不安定性を調べることは意味のあることである。このような側壁に沿う非対称ジェット流に関連する室内実験は前述した通り、Dunst および Kimura によって行われた。彼らの研究は不安定性の Rossby 数依存を研究したもので、上に述べる粘性作用の二面性には全然ふれてない。

そこで、筆者の実験研究では、流れの不安定性にとって本質的なものは Reynolds 数であるという上述の数値計算結果に立って、境界ジェット流の不安定にとって重要なのは Rossby 数と Reynolds 数のいずれであるのかを確認するのが主目的である。なお、Dunst と Kimura はそれぞれ別の境界ジェット流を扱っているが、本実験では回転テーブル上の円形水槽において Dunst 方式および Kimura 方式の二種類のジェット (Boundary Jet) 流を実現し、その不安定性をチモールブル

—を用いた可視化法により調べる。流体粘性の効果という観点から特に興味があるのはここで扱う境界流の場合である。

この論文は、境界層の可視化法について述べている。まず、境界層の可視化法として、染料法、油膜法、煙法、レーザー光法、粒子追跡法などがある。それぞれの特徴と適用範囲を述べている。また、境界層の可視化法として、染料法、油膜法、煙法、レーザー光法、粒子追跡法などがある。それぞれの特徴と適用範囲を述べている。また、境界層の可視化法として、染料法、油膜法、煙法、レーザー光法、粒子追跡法などがある。それぞれの特徴と適用範囲を述べている。

第2章 3次元境界層流の線形安定性

§ 2. 1 まえがき

本章では、壁面近くに比較的強い2次流れを有する、3次元境界層流の線形安定性を問題にし、特に、この種の流れの遷移現象を支配するものとして興味を持たれている、壁面に対して静止した stationary mode の不安定攪乱の実体に、より満足な「説明」を与えることを試みる。

この安定問題は、局所平行流の仮定を拡張し、さらに2~3の妥当な近似を導入すると、個々の攪乱に対して、その伝播方向の主流の速度成分を“平均流”とする通常の Orr-Sommerfeld 固有値問題を解けばよいことが知られている。当面の3次元境界層流に対して考えられる、さまざまな平均流速分布のうち、実験結果¹⁾との関連において、特に興味があるのは、その分布の変曲点が、丁度、流速 = zero の点と一致する、J-プロファイルと呼ばれる分布である。ここでは、J-プロファイルとそれに近い2~3の“平均流”プロファイルに対して数値解法と漸近解法を併用して固有値方程式を解き、攪乱の位相速度 (c_r)、および成長率 (c_i) を波数 (α) と Reynolds 数 (R) の関数として求める。

§ 2. 2 では、本章での研究についての問題の定式化を行い、§ 2. 3 で、その問題の解法の詳細を述べる。§ 2. 4 では、計算結果とそれに対する考察および検討を加えて、3次元境界層流の新しい安定特性を明らかにしてゆく。

§ 2. 2 問題の記述

3次元構造の主流に重畳された2次元微小攪乱の安定特性は、Stuart¹⁾をはじめ数人の研究者が定式化を行い、文献としても見受けられるが、完全を期すために、問題の定式化から始める。

安定性を調べようとする定常3次元境界層流（以下、主流という）の速度を \mathbf{V} 、圧力を P で表わす。 \mathbf{V} と P はもちろん与えられた境界条件を満たす Navier-Stokes 方程式の定常解でなければならない。いま、この主流に速度 $\hat{\mathbf{v}}$ 及び圧力 \hat{p} の微小攪乱が加わったものとする、攪乱を含む流れの速度及び圧力は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) &= P(\mathbf{x}) + \hat{p}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\}$$

と表される。ここに、 \mathbf{x} は空間座標、 t は時間である。この \mathbf{v} 及び p を Navier-Stokes 方程式及び連続の式に代入し、 \mathbf{V} と P 自身が Navier-Stokes 方程式の定常解であることを考慮すると、微小攪乱の挙動を記述する方程式が得られる。以下、主流の代表速度 V^* 及び代表長さ δ を用いて、すべての変数を無次元化し、それぞれの無次元変数に対して同じ記号を用いるものとする、得られる攪乱方程式は、攪乱量について2次の項を無視すると、次のように書かれる：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \text{grad})\hat{\mathbf{v}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \text{grad})\mathbf{V} = - \text{grad } \hat{p} + R^{-1} \Delta \hat{\mathbf{v}}, \quad (2.2.1)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{v}} = 0, \quad (2.2.2)$$

ここで、 R は V^* 、 δ 及び動粘性係数 ν で定義される Reynolds 数、即ち $R = V^* \delta / \nu$ であり、 Δ は Laplacian である。

攪乱の形を限定し、攪乱方程式を成分ごとに書き下すためには空間座標を特定しなければならない。ここでは、境界面（一般に曲面）に沿って x 軸及び y 軸を選び、それに垂直な方向を z 軸とする直交曲線座標 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ を導入するのが好都合である。ここで、境界層流の安定解析に通常用いられる局所平行流の仮定を導入する。

即ち、主流 \mathbf{V} の x 及び y 方向の変化の空間スケールが攪乱の波長に比べて充分大きいものとして、局所的に \mathbf{V} は z のみの関数と考える。更に、実験で観察される最も顕著な攪乱が等間隔で並ぶ渦列を形成することから、ここで、境界面上の座標軸の一つ、 x を着目する点に形成される攪乱の波数ベクトルに沿って選ぶことにする。すると、攪乱の方程式(2.2.1)が線形であり、そこでは \mathbf{V} は z のみの関数であるから、 x 、 t に関して個々の Fourier 成分を扱えばよいことになる。即ち攪乱は次の形に表す：

$$\hat{\mathbf{v}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = (u_1, v_1, w_1) \exp \{i\alpha (x - ct)\} \quad (2.2.3)$$

$$\hat{p} = p_1 \exp \{i\alpha (x - ct)\} \quad (2.2.4)$$

ここで、 α は実数で、攪乱の波数を表す。 $c (= c_r + i c_i)$ は複素数で、その実部 c_r は位相速度、虚数部 c_i は攪乱の時間的成長率である。 u_1 、 v_1 、 w_1 及び p_1 は攪乱の振幅関数を表わす。(2.2.3)及び(2.2.4)の表現を攪乱方程式(2.2.1)及び(2.2.2)に代入し、 p_1 を消去すると、 u_1 、 v_1 、 w_1 に対する3つの方程式が得られる。

$$(U - c)(w_1'' - \alpha^2 w_1) - U''w_1 + \frac{i}{\alpha R} (w_1'''' - 2\alpha^2 w_1'' + \alpha^4 w_1) = 0 \quad (2.2.5)_1$$

$$(U - c)v_1 + \frac{i}{\alpha R} (v_1'' - \alpha^2 v_1) - \frac{i}{\alpha} w_1 V' = 0 \quad (2.2.5)_2$$

$$i\alpha u_1 + w_1' = 0 \quad (2.2.5)_3$$

ここで、 $'$ は z についての微分を表す。 U と V は、それぞれ x 方向、 y 方向の主流の速度成分である。第1式は良く知られた2次元安定理論における Orr-Sommerfeld 方程式にほかならない。この方程式が当面の3次元問題においても本質的な役割を果たす。

境界面及び充分遠方では攪乱速度はゼロとならなければならない。即ち、 $z = 0$ と $z = \infty$ に対して $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ でなければならない。(2.2.5)₃ を考慮すると、

$$z = 0, \infty \text{ で } v_1 = w_1 = w_1' = 0 \quad (2.2.6)$$

(2.2.5)₁ と w_1 を含む斉次境界条件 (2.2.6) は一つの固有値問題を形成し、そこから、 $D(c; \alpha, \alpha R) = 0$ の形の固有値関係が導かれる。そして、この関係から α と R の関数として $c (= c_r + i c_i)$ を決定することができる。 c_i が正ならば、攪乱は増幅し、 $c_i = 0$ ならば中立、そして、 c_i が負ならば攪乱は減衰する。一旦、 w_1 に関する固有値問題が解かれると、その他の成分 u_1 と v_1 は (2.2.5)₂ と (2.2.5)₃ と付随する境界条件から決定される。

それ故、固有値に関する限り、数学的問題は、形式的には通常の2次元的な流れの固有値問題と同じである。しかしながら、今考えている問題では、問題に表われる速度プロファイル U は3次元主流の攪乱の伝播方向の成分を示し、一般に、それは通常の2次元安定問題で取り扱うプロファイルよりも、もっと複雑な形をとる。したがって、以下に典型的な3次元境界層流の速度プロファイルの可能な形を簡単に記述する。

(主流の速度成分) : 表面上の任意の点で、“外部のポテンシャル流” に沿う成分と垂直な成分とに主流を分解することができる。その接線成分は通常境界層型であり、

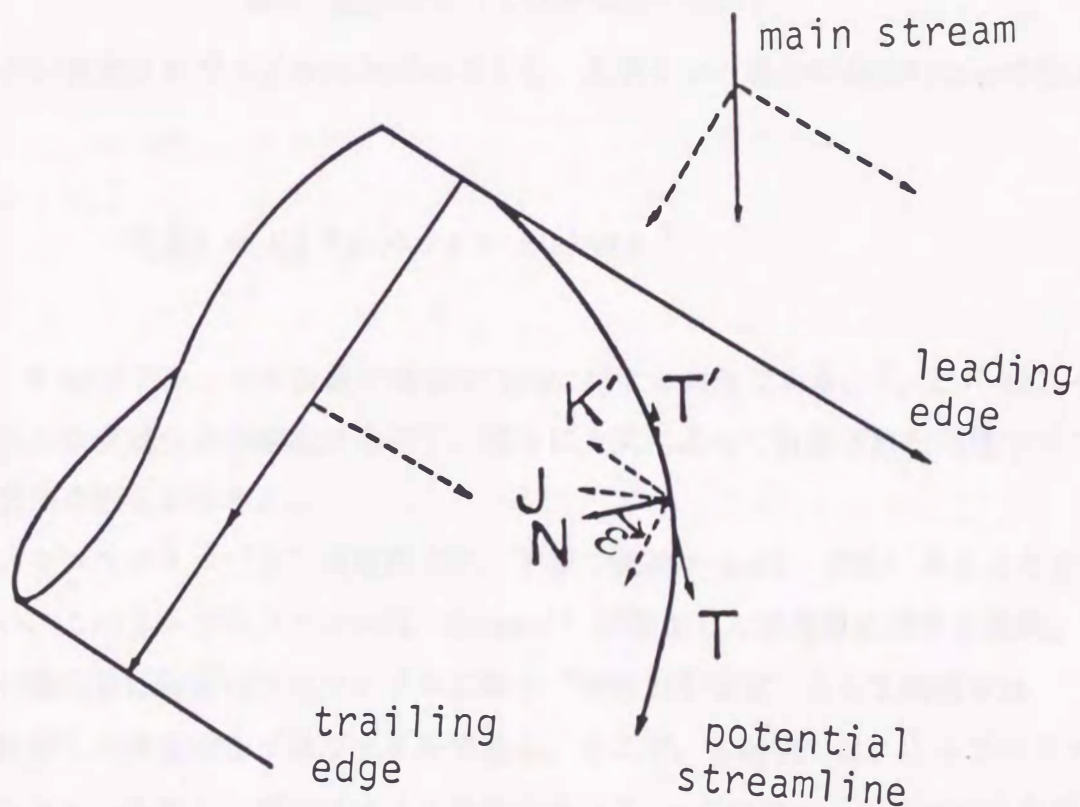


図1 三次元境界層流の主要な方向

一方、垂直成分（2次流れ）は壁面噴流型である（図1、2参照）。任意の方向に関

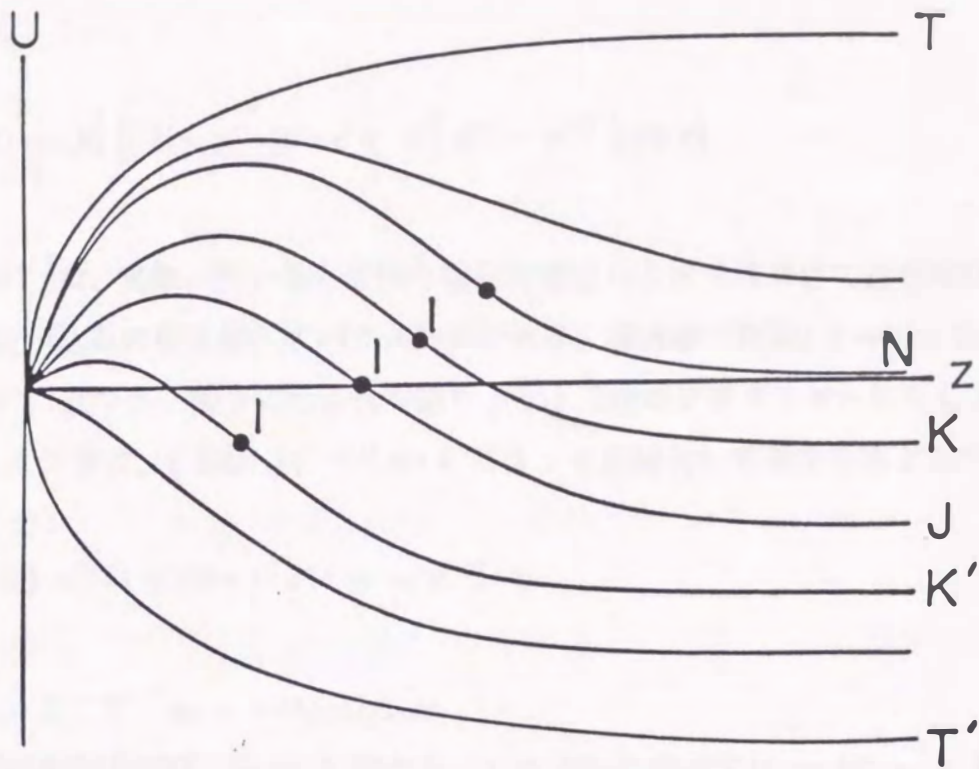


図2 速度成分（Iは変曲点の位置）

しては、その速度プロファイルは次式のごとく、上記2つの場合の合成によって与えられる。

$$U_\epsilon(z) = V_0 \{ F_n(z) \cos \epsilon + F_t(z) \sin \epsilon \}$$

ここで、 ϵ はポテンシャル流線に垂直な方向に対する角度である。 F_n と F_t は、それぞれ速度の垂直成分と接線成分を示す。図2に上式によって計算された速度プロファイルの典型的な形を例示する。

とくに、プロファイル“J”は変曲点が、丁度 流速 = zero の点にあることを注目したい。このJ-プロファイルは Stuart¹⁾ が静止した渦現象に関する説明、即ち「この渦現象は特定のプロファイルに伴う“変曲点不安定”として説明される。」と結論した決定的なプロファイルである。そこで、本研究では、J-プロファイルはもちろん、そのJ-プロファイル近傍のKとK'-プロファイルについても注目して研究をすすめる。

Stuart¹⁾ は、接線方向と垂直方向の速度プロファイルが $F_n = M(e^{-z} - e^{-2z})$

$F_1 = 1 - e^{-z}$ の形で定義され、従って、任意方向の速度が次式で定義される場合を考えた。

$$U_\varepsilon(z) = V_0 \left[(1 - e^{-z}) \sin \varepsilon + M (e^{-z} - e^{-2z}) \cos \varepsilon \right] \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) は、実際、吸い込みを伴う回転円板上の3次元境界層の速度成分を表わし、 M は吸い込みの強さを示すパラメータである。境界層の外側 ($z \rightarrow \infty$) では、速度は $V_0 \sin \varepsilon$ に近づき、図2に示される通り J と J 近傍のプロファイルに対しては負の値をとる。つぎに、(2.2.7) を $-V_0 \sin \varepsilon$ によって正規化して添字を落として書くと、

$$U(z) = -1 + (m+1) e^{-z} - m e^{-2z} \quad (2.2.8)$$

となる。ここで、 $m = -M \cos \varepsilon / \sin \varepsilon$ 。

この速度分布では、 $m = 3$ のとき、 $z = \log_e 3$ の点で $U = U'' = 0$ となる。これが、まさしく Stuart¹⁾ が注目した J-プロファイルにほかならない。 m が3よりわずかに大きい小さいかによって、K (K')-プロファイルを表現できる。それ故、当面の渦現象を研究するためには、この簡単な速度プロファイル(2.2.8)を用いばよい。

§ 2. 3 問題の解法

2.3.1 非粘性問題の解法

すべての Reynolds 数の範囲において、固有値問題を解き、安定性を調べるためには、 $R \rightarrow \infty$ の極限における固有値問題、即ち非粘性問題を解いておかねばならない。なお、この非粘性問題は、かつて Stuart¹⁾ によって扱われたものと同じであるが、ここでは J-プロファイルについて、一般に $c_i = 0$ なる中立固有値が求められているだけである。本論文では、特に増幅攪乱に着目しているので、J-プロファイルのみならず、K、K'-プロファイルについても、一般に $c_i \neq 0$ なる固有値特性を調べる。非粘性の攪乱方程式は、(2.2.5)₁ において $R = \infty$ とおけば

$$(U-c)(w_1'' - \alpha^2 w_1) - U'' w_1 = 0 \quad (2.3.1)$$

の形となる。境界条件は(2.2.6)に与えられているが、無限遠方 $z \rightarrow \infty$ の条件のみ、別な形に書き変えておくのが好都合である。 $z \rightarrow \infty$ では、 $U = -1$, $U'' = 0$ であるから、(2.3.1)は $\exp(\pm \alpha z)$ なる解を持つが、(2.2.6)から許されるのは、 $\exp(-\alpha z)$ のみである：即ち、

$$z \rightarrow \infty \text{ で } w_1' + \alpha w_1 = 0 .$$

主流の速度 U は、 $z \rightarrow \infty$ のとき、指数関数的に -1 に近づくから、充分大きな有限の点 $z = z_0$ をもって無限遠とみなしても差し支えない。結局、 w_1 に対する境界条件は

$$w_1'(z_0) + \alpha w_1(z_0) = 0 \quad (2.3.2)$$

$$w_1(0) = 0 \quad (2.3.3)$$

と書かれる。

この簡単化された境界値問題は2次元流の安定問題については、色々な速度プロファイルに対して解かれているけれども、これまで、ここで考えているような速度プロファイルに関する問題を解く試みは余りない。このようなプロファイルに対する問題を解く最も有効な方法は計算機による数値解法を利用することであり、含まれるパラメータの値に制限されることなく計算が可能である。

数値解法を適用するにあたり、次式の新しい従属変数を導入する。

$$G(z; \alpha, c) = -\alpha w_1(z)/w_1'(z) \quad (2.3.4)$$

G によって、(2.3.1) は次のような1階の微分方程式に帰着される：

$$G' - \alpha(G^2 - 1) - \frac{U''G^2}{\alpha(U - c)} = 0 \quad (2.3.5)$$

境界条件(2.3.2) と(2.3.3) は、 G に関してそれぞれ

$$G(z_0; \alpha, c) = 1, \quad (2.3.6)$$

$$G(0; \alpha, c) = 0 \quad (2.3.7)$$

と表せる。これらの式が元の式よりも数値解法に対しては好都合な形であることがわかる。

ここでの目的は、2つの境界条件(2.3.6) と(2.3.7) を同時に満足する解を(2.3.5) が持つように α と c の特定の組合せを見つけることである。そのような α と c の値が固有値として採用される。このために用いられる計算の手順は次のようである。

- ① 指定された実数値 α に対して適当な c の複素数値を選ぶ。
- ② “初期”条件(2.3.6) から出発して、(2.3.5) を $z = z_0$ から壁面 ($z = 0$) に向かって積分する。
- ③ 積分値 $G(0; \alpha, c)$ が“固有値判定条件”(2.3.7) を十分な精度で満足するまで試行錯誤的に c の値を調節しながら積分を繰り返す。

ここで、(2.3.5) の積分には Runge-Kutta 法を用いる。その際、非粘性方程

式(2.3.1)及び(2.3.5)は、 $U(z_c) = c$ なる点 z_c において対数的特異点を持つことに注意しなければならない(図3参照)。 z_0 から0に向かう積分路を、複素 z 平面において、 z_c の上側を避けて通るか、下側を通るべきかは、Orr-Sommerfeld方程式(2.2.5)₁の解の z_c 近傍での挙動から決定されねばならない。非粘性方程式の特異点回りのこうした積分路の選択の問題は、すでにLin(1955)¹⁵⁾により一般的に論じられており、ここで考えている U に対しては、図3b)に示したような積分路を選べばよいことが知られている。

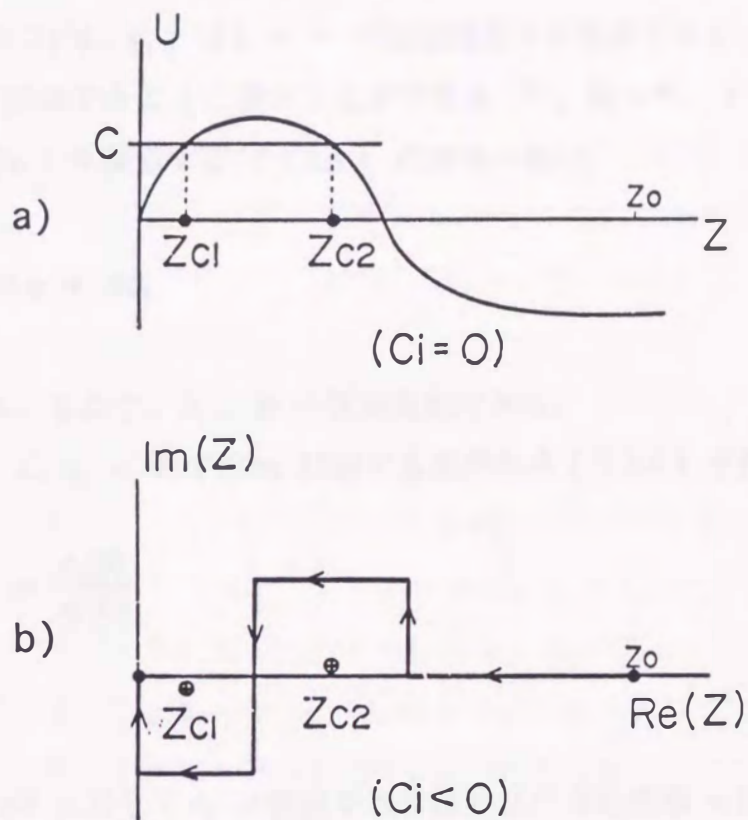


図3 特異点と積分経路

2.3.2 漸近解法

有限ではあるが、充分大きい Reynolds 数の値に対する安定問題は、Orr-Sommerfeld 方程式 (2.2.5)₁ の大きな αR に対する漸近解を用いて、解析的に扱うことができる (特に、簡単な U に対しては)。ただし、漸近解法では、一般に $c_i \neq 0$ なる固有値を求めることは困難であり、 $c_i = 0$ なる中立固有値のみが扱われる。

Orr-Sommerfeld 方程式 (2.2.5)₁ の4つの特解を $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ とする。そのうちの2つ $\{\phi_2, \phi_4\}$ は $z = \infty$ で指数関数的に発散するが、他の2つ $\{\phi_1, \phi_3\}$ は $z = \infty$ で消滅するように選ぶことができる¹⁵⁾。従って、 $z = \infty$ での w_1 に関する条件 (2.2.6) を満足する (2.2.5)₁ の解は一般に

$$w_1 = A\phi_1 + B\phi_3 \quad (2.3.8)$$

と書かれる。ここで、 A 、 B は任意定数である。

(2.3.8) に $z = 0$ での w_1 に関する境界条件 (2.2.6) を課すことにより、

$$\frac{\phi_1(0)}{\phi_1'(0)} = \frac{\phi_3(0)}{\phi_3'(0)} \quad (2.3.9)$$

を得る。

大きな αR に対して ϕ_1 は前節で取り扱われた非粘性解 $w_1(z)$ によって近似されることが良く知られている。⁵⁾ すなわち、

$$\phi_1(z) \equiv w_1(z) + O[(\alpha R)^{-1}] \quad (2.3.10)$$

他方、 ϕ_3 は近似的に次式のように求められる。

$$\phi_3(z) \equiv \chi_3(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \eta^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\eta)^{3/2} \right] d\eta + O(\varepsilon) \quad (2.3.11)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (z - z_c) / \varepsilon \\ \varepsilon &= \{ \alpha R U'(z_c) \}^{-1/3} \\ c &= U(z_c) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12)$$

$H_{1/3}^{(1)}$ は 1/3 次の第一種 Hankel 関数である。(2.3.9) に (2.3.10) と (2.3.11) を代入し、 w_1 に対して (2.3.4) の関係を用いると次の形の固有値方程式を得る。

$$\frac{G(0; \alpha, c)}{\eta_c \alpha} = F(z_c) \quad (2.3.13)$$

ここで、 $\eta_c = z_c / \varepsilon = \{ \alpha R U'(z_c) \}^{1/3} \cdot z_c$ である。 F は変形 Tietjens 関数で、Miles の論文¹⁶⁾に正確な数表が掲載されている。左辺の非粘性関数は、今考えている U に対しては解析的に求めることができないので、数値積分によって求めねばならない。

固有値方程式 (2.3.13) を解くには図式解法を用いると便利である。右辺の複素関数値は、Miles の数表から “ Argand 図 ” の上に、 z_c をパラメータとする一本の曲線で表現される。一方、左辺の値は前節の数値積分法により容易に計算され、同じ図面の上に、 c をパラメータとする $\alpha = const.$ の曲線群として表わせる。両曲線の交点から、それぞれの α の値に対する固有値 c および z_c (すなわち、 R) を求めることが出来る。こうして求められた実数 (または c) を R の関数として図にプロットすると安定・不安定の限界を定める、いわゆる中立曲線が得られる。

2.3.3 完全粘性問題の解法

主流の速度分布が変曲点を持つ場合には、一般に相当小さな Reynolds 数の範囲でも不安定は可能であるから、すべての不安定固有値を求めるには数値解法に頼らねばならない。

(2.2.5)₁ によって定義される粘性問題を w_1 に関する (2.2.6) の 4 つの境界条件のもとに解く。数値解法を適用するためには、積分の範囲は有限でなければならないから、 $z = \infty$ で規定される 2 つの条件を、非粘性問題の場合と同様に z の有限な点で

の等価な条件によって置き換える必要がある。

U が実質的に一定 (本問題では -1) となる境界層の外側では、無限遠で消滅する (2.2.5)₁ の解は一般に次式の形で求められる

$$w_1 = A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{-\gamma z}, \quad z \geq z_0. \quad (2.3.14)$$

ここで、 $\gamma \equiv \{ \alpha^2 - i\alpha R(1+c) \}^{1/2}$, $\text{Re}[\gamma] \geq 0$ 。 A_1 と A_2 は任意定数である。 $z = z_0$ の解 w_1 と (2.3.14) は、 $z = z_0$ において、3階の微係数まで一致しなければならない。この条件から、 A_1 と A_2 を消去すると、次の条件に帰着する。

$$\left. \begin{aligned} w_1'''(z_0) + \gamma w_1''(z_0) - \alpha^2 w_1'(z_0) - \alpha^2 \gamma w_1(z_0) &= 0 \\ w_1''(z_0) + (\alpha + \gamma) w_1'(z_0) + \alpha \gamma w_1(z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

$z = \infty$ での攪乱の消滅条件の代わりに、これら2つの条件を用いると、本問題において、 $z \geq z_0$ の半無限の領域を考慮する必要がなくなる。一方、壁面の境界条件は(2.2.6)で、

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0. \quad (2.2.6)$$

計算機による解を得るためには、有限な内部領域(0, z_0)を N 個の等間隔な微小区間に分割し、その各格子点で、問題に表れる全ての微分を次式のように5点差分近似の中心差分と平均差分の方式で差分化する。これにより、微分形の(2.2.5)₁式及び境界条件(2.2.6)と(2.3.15)は線形代数方程式に帰着され、次のように書かれる：

$$[D] \cdot [W] = 0 \quad (2.3.16)$$

ここで、 $D(\alpha, R, c)$ は $N+5$ 次の正方行列であり、 W は離散格子点 z_n ($n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N, N+1, N+2$) での w_1 を表す列ベクトルである。 $D(\alpha, R, c)$ 及び W の導出とその具体的な形は末尾の付録に示す (E.F.Kurtz and S.H.Crandall¹⁷⁾ 参照)。この同次方程式は係数行列の行列式の値が zero の時の

み有意な解を持つ。すなわち、

$$|D(\alpha, R, c)| = 0 \quad (2.3.17)$$

なる固有値方程式が得られる。この係数行列 $D(\alpha, R, c)$ は、壁面での条件に対応する2列を除いて、Takematsu¹⁸⁾ の論文で扱われた式と全く同じである。

$|D|$ のゼロ点を求めるには、試行錯誤法がとられる。 α と R の各値を選び、掃出法によって、行列式の値が複素 c - 平面内の格子上で計算される。 c を適当に試行錯誤的に調節して、ゼロ点の位置が確定可能になるまで行列式の値を繰り返し求める。厳密なゼロ点（即ち、固有値 c ）は内挿法によって決定される。固有値探しの作業は比較的高い Reynolds 数から始めると、前節で求めた非粘性問題の解と漸近解法の結果を良質な推定値（initial guess）として用いることができ便利である。得られた結果は独立変数 z の分割幅

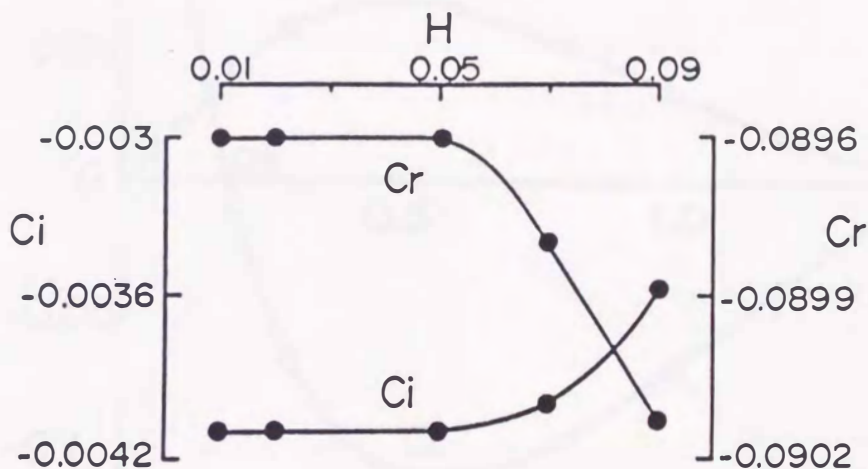


図4 分割幅のチェック

(h) に依存するが、 h を充分小さく取ると一定の値に収束する（図4参照）。適切な h の値を前もって決定するのは困難であるので、選んだ h の値が充分小さいものであるか否かを適当にチェックする。なお、「掃出し」計算の反復の過程で「桁落ち」の起こる可能性もあるので、計算はすべて「倍精度計算」で行い、約18桁の有効桁数は維持できるようにした。

§ 2. 4 結果と考察

前述の方法によって、安定計算は、J-プロファイルとその近傍のKとK'-プロファイル（図2参照）に対して成された。(2.2.8)式で用いた速度プロファイルのパラメータ m の値はJ-プロファイルは $m = 3.0$ 、KとK'-プロファイルに対しては、それぞれ $m = 3.5$ と $m = 2.6$ とした。

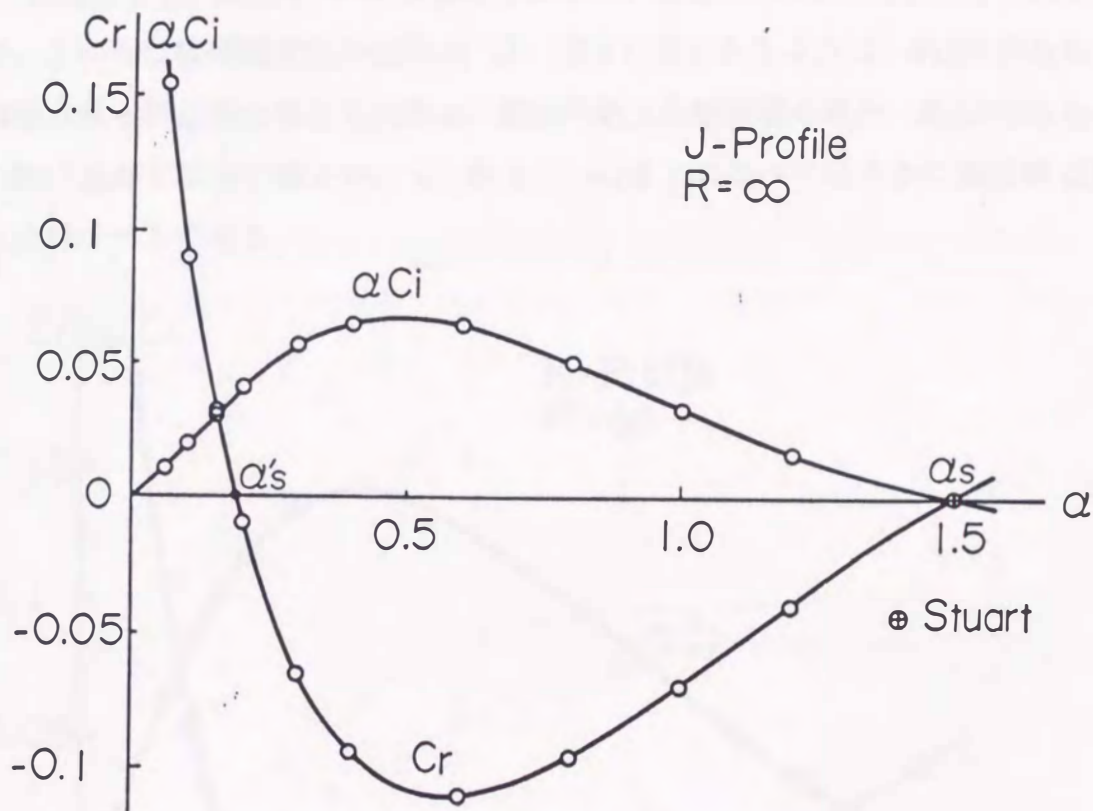


図5 非粘性固有値

1) 非粘性固有値：図5はJ-プロファイルに対する非粘性固有値を示す。この場合、不安定 ($c_i > 0$) は $0 < \alpha < \alpha_s (= 1.5)$ の範囲内の波数に対して生ずる。実際、 $\alpha = \alpha_s$ で、増幅率 c_i はもちろん、位相速度 c_r も zero となる。この特別の固有値は、最初 Stuart¹⁾ によって発見された。これまで、この静止した中立攪乱が、観測される静止渦現象に対応するとみなされてきた。しかしながら、ここで計算した完全な非粘性特性を見ると、 $c_r = 0$ は、別の波数 $\alpha'_s (< \alpha_s)$ でも発生す

ることがわかる。そして、その対応する成長率は大きな正の値（最大値ではないが）を取ることに注目すべきである。Stuart によって発見された中立モードとは異なる、別の非伝播型の攪乱の増幅モード*が存在するので非粘性の極限に限っても、 $\alpha = \alpha_s$ なる中立攪乱が、ここで発見された $\alpha = \alpha'_s$ なる増幅攪乱を凌駕することはあり得ないのである。これは、Stuart¹⁾ によって与えられた従来の説明の破綻を意味する。

即ち、観測される静止渦現象との関連においてより重要なのは、二つの非伝播 ($c_r = 0$) 攪乱のうち、波数 α_s の中立攪乱ではなく、波数 α'_s の増幅攪乱の方である。ところで、この非伝播増幅攪乱の波数 α'_s は、図5に見られるように、約0.2である。一方、観測される静止渦の無次元波数は、回転円板上の境界層の場合、約0.4である。両者の一致は良好とは言い難いが、 α'_s が α_s ($=1.5$) に比べてはるかに実測値に近いことは注目すべきである。

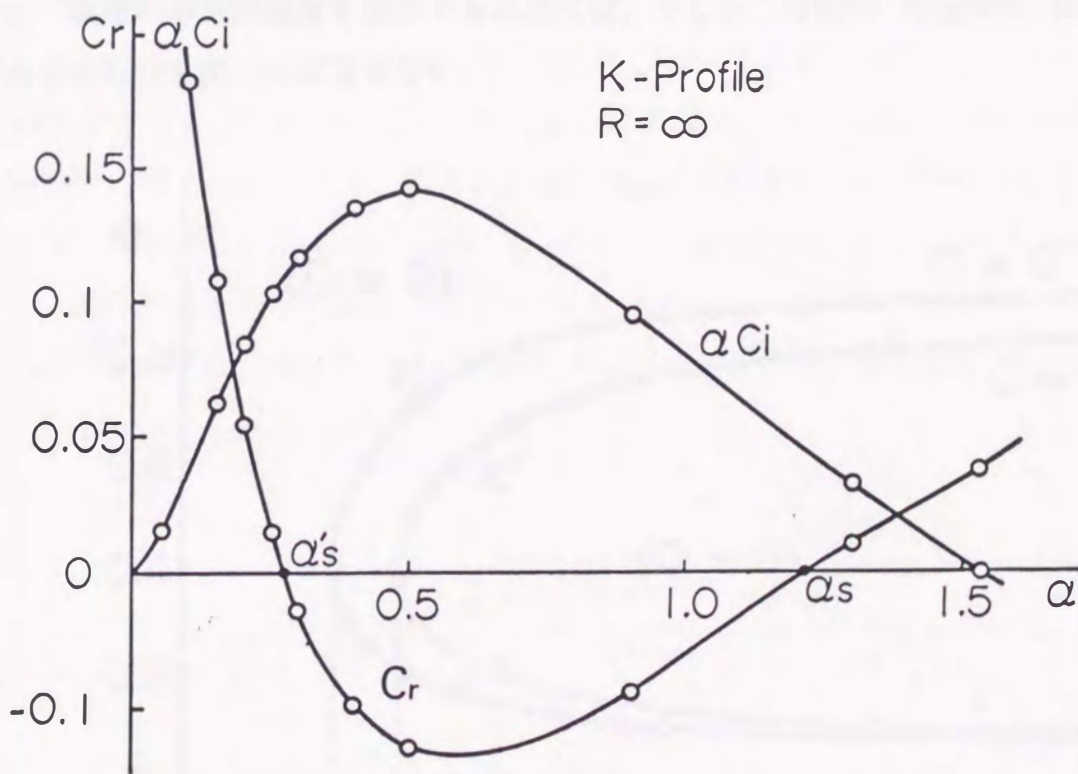


図6 非粘性固有値

図6は K - プロファイルに対する非粘性結果を示す。J - プロファイルの場合と同

*) このような付加的な非伝播型の攪乱の存在は、これまで示されていないように思われる。

様、 $c_r = 0$ となる2つの異なる波数 α_s と α'_s ($\alpha_s > \alpha'_s$) が存在し、低いほうの波数 α'_s の増幅率が α_s に対する増幅率よりも大きい。 K' 型のプロファイルに対しては、 α_s を持つ非伝播型の攪乱が全て減衰する ($c_i < 0$) ことを除き同じ様な性質を示す。それ故、 α'_s をもつ増幅非伝播型の攪乱の存在は、考慮中のこの型の速度プロファイルに共通な性質であると言える。これに対して、中立静止攪乱は連続的なプロファイル成分のセットの中で、一つの特別のプロファイル J に対してのみ可能であるに過ぎない。なお、 K -プロファイルに対する α'_s の値は約 0.3 であり、実測値 0.4 にかかなり近くなっている。

以上の様に、J、 K 及び K' の三つの成分プロファイルについてその非粘性安定特性を詳細に調べた結果、いずれのプロファイルに対しても、二つの異なるモードの非伝播型 ($c_r = 0$) 攪乱が可能であることがわかった。そのうちの一つは、常に増幅攪乱 ($c_i > 0$) であり、しかもその波数は静止渦の実測値に比較的近い値を示す。しかし、実際の静止渦現象を説明するためには、さらに、有限の Reynolds 数領域における安定特性を調べねばならない。

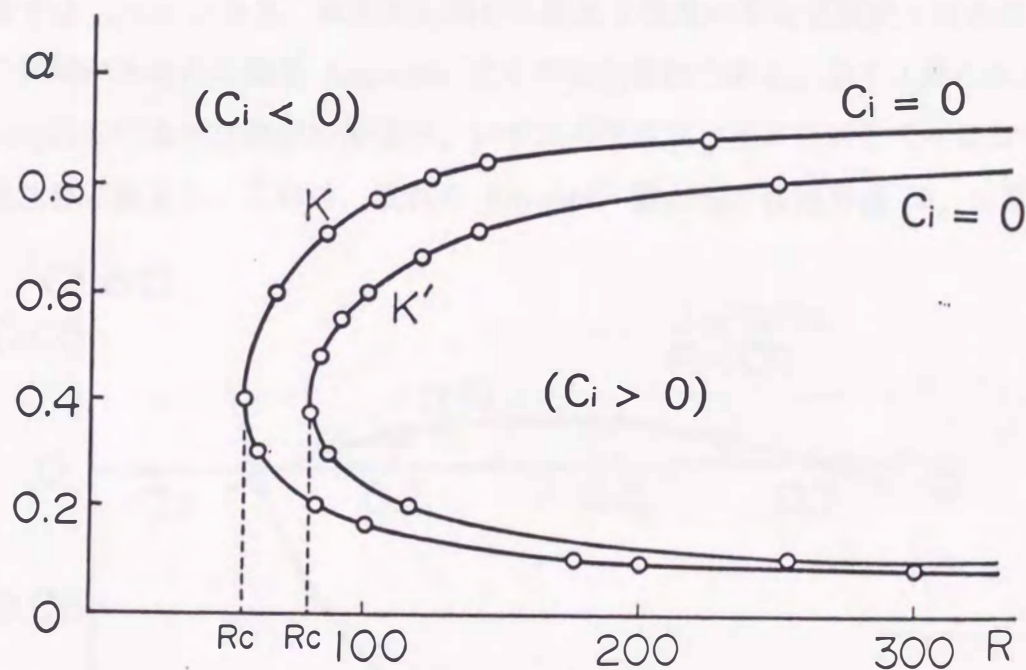


図7 中立安定曲線

2) 粘性固有値：非粘性固有値が求まると、大きい Reynolds 数領域における粘性固有値、特に $c_i = 0$ なる中立固有値は、2.3.2節で述べた漸近解法を用いて容易に求めることができる。しかし、ここで扱う安定問題のように、主流の速度分布が変曲点を持つ場合には、一般に、漸近解法が使えないような低い R 数に対しても、中立 ($c_i = 0$) 及び増幅 ($c_i > 0$) 擾乱が可能であるから、完全な中立曲線を求めるためには、2.3.3節の数値解法に頼らねばならない。その際、数値解法による固有値探しに不可欠な "initial guess" としては、漸近解法で求められた中立固有値が使われる。

こうして求められた、 K 及び K' - プロファイルに対する中立 ($c_i = 0$) 曲線の一部を図7に示す。なお、 J - プロファイルに対する中立曲線は両曲線にはさまれる形となるが、ここでは省略してある。すべての波数 α に対して流れが安定である最大の Reynolds 数、即ち臨界 Reynolds 数 R_c は、プロファイルにより多少異なるが、60~80とかなり低い。 $R > R_c$ では、中立曲線は二つの分枝を持つ。このうち波数の大きい方の分枝は、 $R \rightarrow \infty$ で、それぞれのプロファイルに固有の非粘性固有値 α_s に漸近する。(J - プロファイルの場合、 $\alpha_s = 1.5$; 図5参照)。一方、波数の小さい方の分枝は、 $R \rightarrow \infty$ で、すべて $\alpha \rightarrow 0$ に漸近する。この二つの分枝で境される波数帯では $c_i > 0$ となる。線形安定解析の結果を現実の不安定現象と対応させるとき、特に興味があるのは臨界 Reynolds 数近くの安定特性である。図7に見られるように、 $R = R_c$ における中立曲線の波数が、いずれのプロファイルに対してもほぼ0.4となることは注目し得る。これは、流れの Reynolds 数が僅かに臨界値 R_c を越え

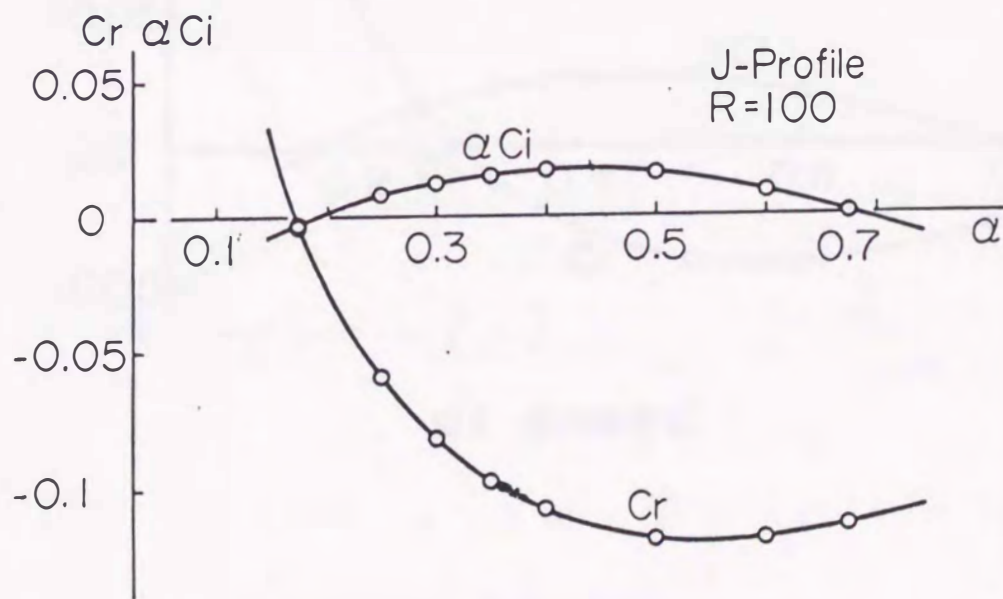


図8 粘性固有値

たとき、最初に不安定となるのは波数 0.4 近くの波数帯の攪乱であることを意味する。この波数 0.4 なる値は上にも述べたように観測される静止渦現象の波数にほかならない。しかし、実際の現象との対応を論ずるには、位相速度も含めて、粘性固有値を更に詳細に見なければならない。

図8は、J-プロファイルの場合につき、 $R=100$ における増幅攪乱の位相速度 c_r 及び増幅率 α_i と波数 α の関係を示したものである。なお、J-プロファイルにつき、 $R=\infty$ における非粘性固有値は図5に示してある。 $R=100$ においては、 $\alpha=0.17\sim 0.68$ の波数で不安定 ($c_i > 0$) となるが、それらの不安定攪乱の c_r はすべて負であることがわかる。J-プロファイルの場合、 $R_c < R < 100$ の範囲でも、同様に、すべての増幅攪乱は負の位相速度を持つ。即ち、大きな正の増幅率を持ち、かつ $c_r = 0$ となる攪乱は存在しない。 R 数が増大するにつれ、図8は図5に漸近する。極度に大きい R 数に対しては、図5に例示されているように、 $c_r = 0$ なる増幅攪乱が可能であるが、最大の増幅率を持つ優勢な攪乱はすべて負の c_r を持つ。結局、J-プロファイルについては、すべての R 数において、 $c_r = 0$ なる優勢な増幅攪乱は存在しないことになる。

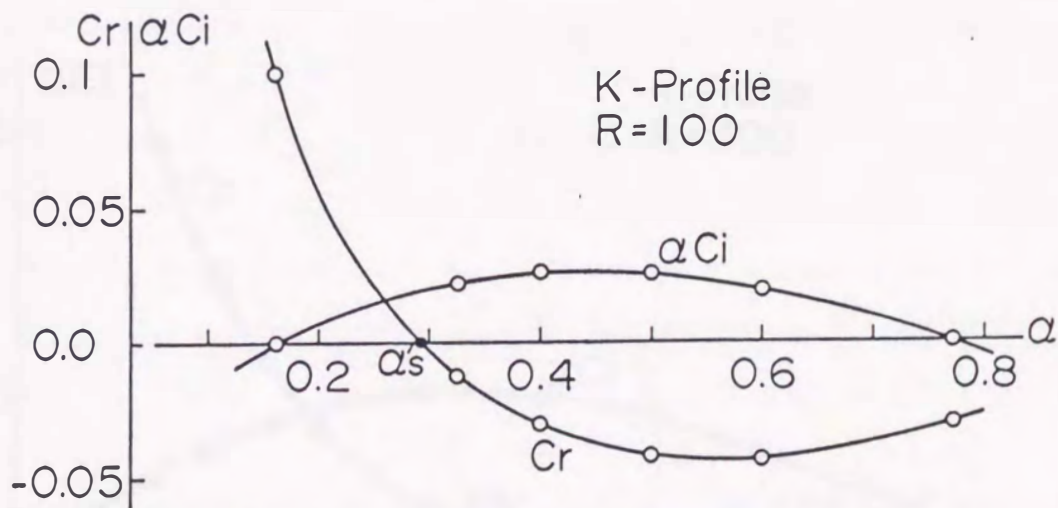


図9 粘性固有値

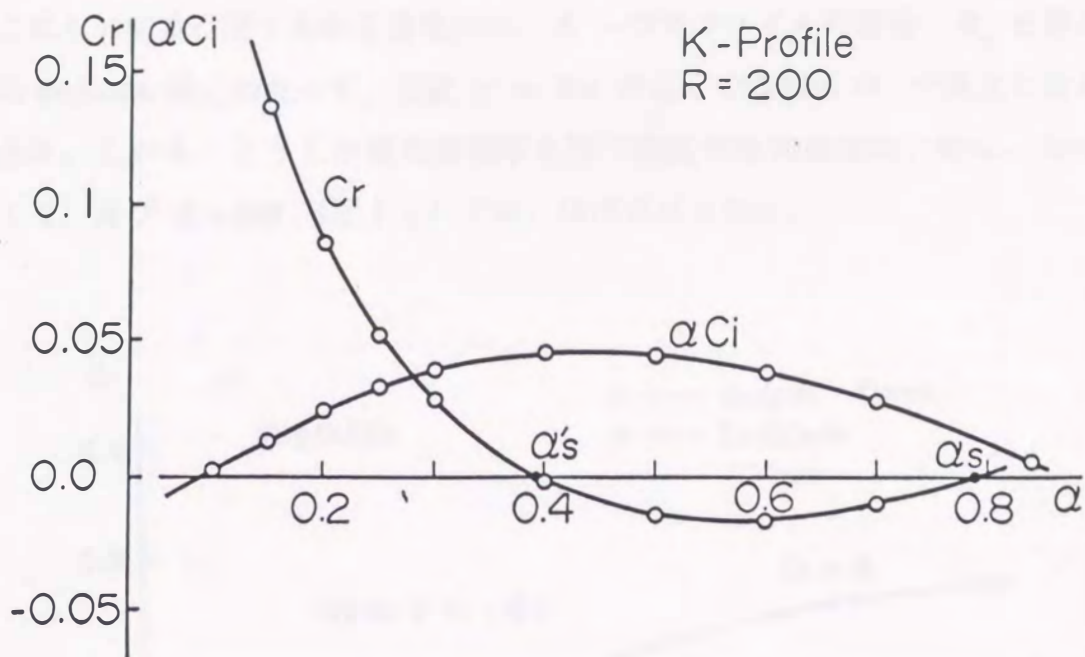


图 10 粘性固有值

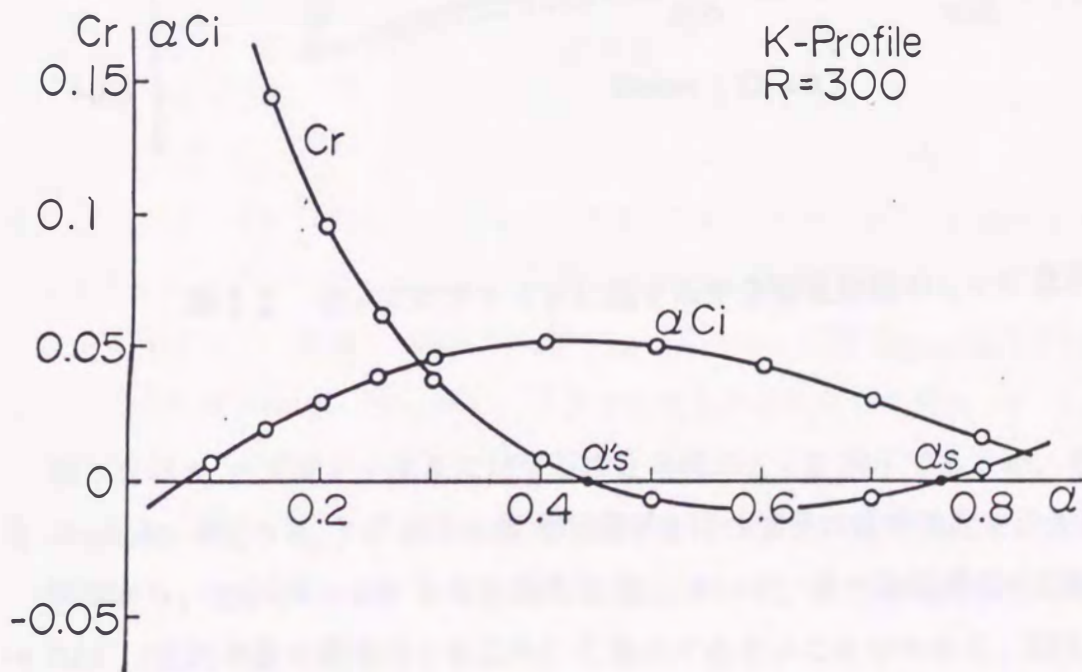


图 11 粘性固有值

K - プロファイルの場合につき、 $R = 100, 200$ 及び 300 における固有値を、それぞれ図 9、図 10 及び図 11 に示す。なお、 $R = \infty$ における固有値は図 6 に示してある。これらの図及び図 7 の中立曲線から、 K - プロファイルの場合、 R_c を越えるすべての Reynolds 数にわたって、波数 $\alpha = 0.4$ の近くで増幅率 αc_i が最大となることがわかる。しかも、こうした最大増幅率を持つ攪乱の位相速度は、特に、 $R = 200$ (図 10) 及び $R = 300$ (図 11) では、ほぼゼロとなる。

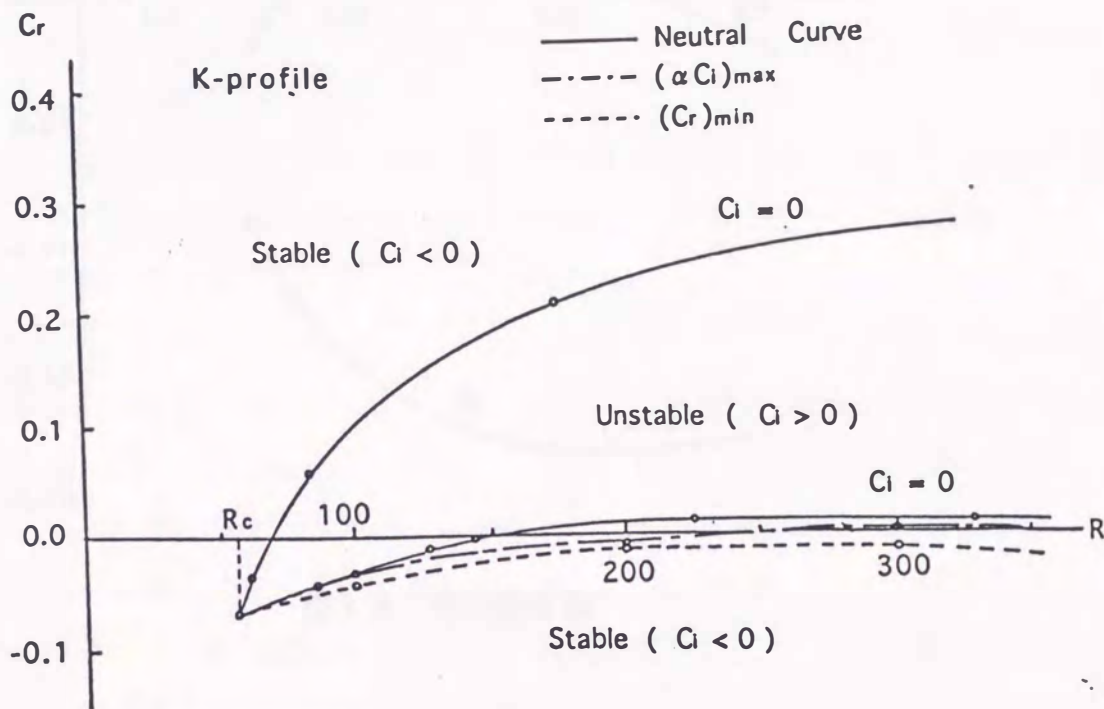


図 12 K -プロファイルに関する中立安定曲線の $c_r - R$ 表示

図 12 は K - プロファイルに対する中立曲線の $c_r - R$ 表示であるが、そこには、各 Reynolds 数 ($> R_c$) における最大増幅率を持つ攪乱の位相速度も示されている。

同図から、 $150 < R < 400$ なる広範な R 数において、最大増幅攪乱の位相速度は ± 0.01 (主流の最大流速の 1% 以内) と極めて小さいことがわかる。即ち、 K - プロファイルの場合、臨界 Reynolds 数 R_c を越えた Reynolds の領域で最も卓越するのは波数 0.4 程度の、ほぼ静止した攪乱であることになる。これは、まさに観測される

静止渦現象の特徴と合致する。

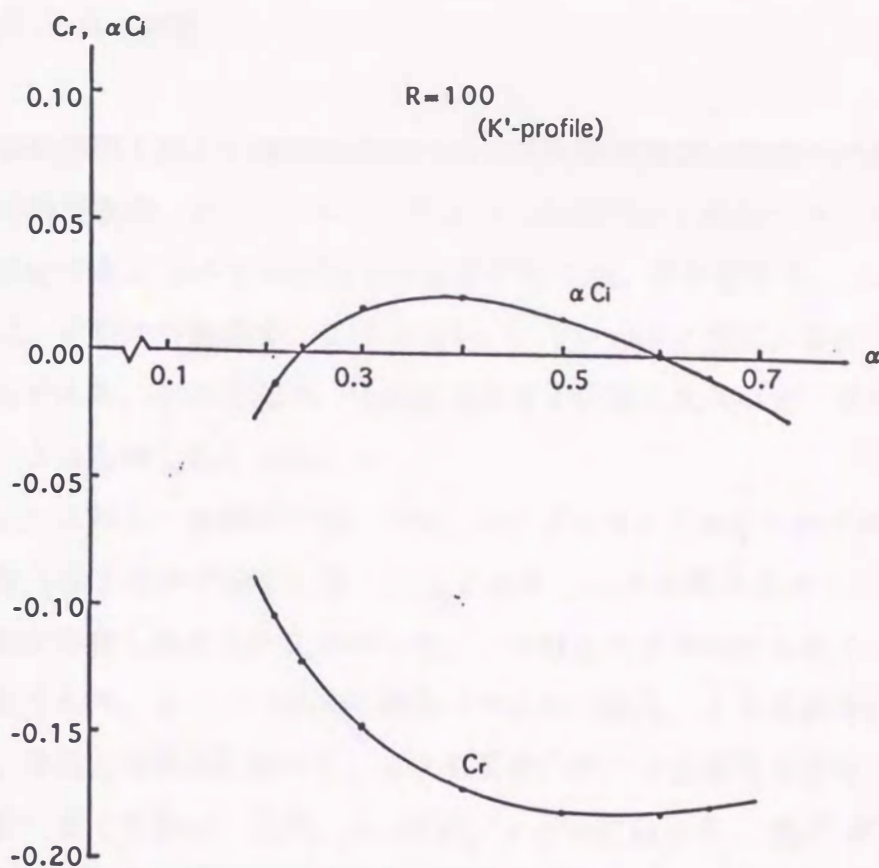


図13 粘性固有値

図13は、 K' -プロファイルの場合につき、 $R=100$ における安定特性を示したものである。 J -プロファイルに対する図8と同様、増幅攪乱 ($\alpha_i > 0$) の位相速度はすべて負である。実際、 K' -プロファイルの場合、臨界 Reynolds 数の近くのみならず、すべての Reynolds 数領域で、主要な増幅攪乱は負の位相速度を持つ。これは、この速度プロファイル (図2) が、壁面 ($z=0$) 近傍を除いて、ほとんど負の値を持っていることから当然予想される結果である。結局、 K' -プロファイルは、 J -プロファイルと同様に、実際の静止渦現象に関連づけられるような安定特性は持っていないことになる。

§ 2. 5 結語

回転円板上あるいは後退翼面上の3次元境界層流の乱流への遷移に先行して現れる静止渦現象は、J-プロファイルというある特殊な成分プロファイルに関する変曲点不安定であるというのが従来の定説であった。その根拠は、J-プロファイルについては、非粘性の極限で、位相速度(c_r)ゼロの中立攪乱が存在し得ることが示されたからである。その波数は、実測波数より4倍近く大きい、その食い違いは粘性の効果によるものと考えられていた。

これに対し、本研究では、まず、J-プロファイルについての非粘性安定問題を数値的方法を用いて完全に解くことにより、二つの異なるモードの非伝播($c_r = 0$)攪乱が存在し得ることを見出した。一つはこれまでに知られている波数の大きい中立攪乱であり、もう一つはより波数の小さい(即ち、より実測値に近い)増幅攪乱である。現実との対応において、より重要なのは、中立攪乱ではなく増幅攪乱であることは言うまでもない。なお、J-プロファイルに近いK-及びK'-プロファイルについても同様な非粘性解析を行い、二つの異なるモードの非伝播攪乱の存在は、これらのプロファイルに共通する性質であることを示した。特にK-プロファイルの場合、波数の小さい方の非伝播攪乱が非常に大きな(最大ではないが)増幅率を持つことがわかった。これらの新たな非粘性解析結果は、実際の静止渦現象を説明するのに、もはや、J-プロファイル及びそれに固有の非伝播中立攪乱に固執する必要のないことを示すのに充分である。

実際の現象を説明するのにより重要なのは、臨界 Reynolds 数近くの攪乱の挙動である。そこで、本研究では、完全な粘性問題を数値的に解き、臨界 Reynolds 及びその近くの安定特性を調べた。その結果、特にK-プロファイルの場合、臨界 Reynolds 数を越える相当広範な Reynolds 数領域において、増幅率最大の攪乱がほぼゼロに近い位相速度を持ち、かつ、その波数が実測される静止渦の波数にほぼ等しいことを見出した。なお、こうした安定特性は、K-プロファイルのみならず、それに近いプロファイル群に共通のものであろう。なぜならば、すべての安定特性は、 $K' \rightarrow J \rightarrow K$ とプロファイルの変化につれて、連続的に変化しているからである。

以上要約したように、3次元境界層流の線形安定性を改めて吟味することにより、

実験で知られる静止渦列と同じような波長の非伝播攪乱が、確かに、臨界 Reynolds 数を越えた粘性域において最大の線形増幅率を持つことがわかった。そうした微小攪乱は、指数関数的に最も早く成長し、中立攪乱はもちろんのこと、あらゆる攪乱を凌駕するはずである。その成長が有限振幅の段階に達すると、やがて、非線形性による抑止効果を受けて、ある平衡振幅に落ちつくものと推論される。これが、本研究が到達した、静止渦現象に対する新たな説明である。