管開口端からの圧縮波の放出により形成されるパルス波の特性に関する研究

安信, 強

https://doi.org/10.11501/3110987

出版情報：九州大学, 1995, 博士（工学）, 論文博士
バージョン：
権利関係：

管開口端からの圧縮波の放出により形成されるパルス波の特性に関する研究

[illegible]

管開口端からの圧縮波の放出により形成されるパルス波の特性に関する研究

1995年　12月

安信　　強

目　次

記　　　号

a	：	音速
D	：	円管の直径
D（θ）	：	指向性係数
e	：	単位体積あたりの全エネルギー
F	：	x方向の流束ベクトル
F（ω）	：	圧力波形のフーリエ変換
G	：	y方向の流束ベクトル
h	：	エンタルピー
i	：	x方向の格子点、または虚数単位
j	：	y方向の格子点
k	：	波長定数（$k=2\pi/\lambda$）
L	：	圧縮波による圧力上昇値と最大圧力こう配により定義される圧縮波の長さ
L_1	：	圧縮波の波頭から波尾までの長さ（圧縮波波面の長さ）
Δl	：	開口端補正長
M_s	：	入射衝撃波マッハ数
m	：	質量
n	：	時間ステップ
O	：	座標の原点
p	：	圧力
R	：	開口端における音波の反射率
r	：	原点からの距離
t	：	時間
U	：	保存量ベクトル
u	：	x方向の流速成分
V	：	状態量ベクトル
v	：	y方向の流速成分
W	：	軸対称ベクトル

x、y、z：直交座標系

Z_r　：　放射インピーダンス

ζ　：　式（3・16）で定義される変数

η　：　式（3・25）で定義される変数

θ　：　角度

κ　：　比熱比

λ　：　音波の波長、または $\lambda = \Delta t / \Delta x$

ρ　：　密度

Φ　：　速度ポテンシャルの実効値

ϕ　：　速度ポテンシャル

ω　：　角振動数

主な添字

e　：　開口端における状態

i　：　開口端に入射する音波、または管内の圧縮波

max　：　最大値

r　：　開口端で反射した音波

ref　：　参照状態

0　：　入射衝撃波前方、または一様静止気体

1　：　圧縮波前方の静止した大気

第1章　緒　　論

1・1　本研究の背景

管内を伝ぱする圧縮波が管の開口端に達すると開口端で圧縮波の一部は反射され、残りは管外に放出される。このような現象は、開口端に音波が達した場合にも生じることが知られているが、通常、音響工学では開口端における音波の反射と放射と呼び、放出とは呼ばない。本論に入る前に、まず、放出と放射の相違を明確にしておく。

本論文の第２章で述べるように、音響工学で取り扱う音波は、その振幅が圧縮波のような有限振幅波と比べるときわめて小さい。このような微小振幅の音波が一様な静止気体中のある一点に達したとき、その位置の流体粒子は移動を始めるが、音波の一周期がその位置を通過してしまうと流体粒子は再び元の位置に戻り、変位はゼロとなる。このように流体粒子には音波の通過による正味の変位は生じないから、結果的に音波の通過によって流れは誘起されない。これに対して、一様な静止気体中のある一点に圧縮波のような有限振幅波が達した場合には、その位置の流体粒子には正味の変位が生じ、結果的に流れが誘起される。したがって、音波が開口端で反射と放射する場合には流れは誘起されないが、圧縮波が開口端に達した場合には開口端より下流側へ向かう流れが誘起される。このように開口端に音波が達した場合と圧縮波が達した場合では結果として生じる現象に相違があり、厳密には区別されるべきである。よって、本論文では開口端に圧縮波が達した場合には圧縮波の放出と呼び、音波が達した場合には音響工学に準じて音波の放射と呼ぶ。同様に、開口端に衝撃波が達した場合にも流れが誘起されるから、このときにも衝撃波の放出と呼ぶことにする。

さて、開口端で反射された圧縮波は膨張波として管の上流方向へ折り返すが、放出された圧縮波はパルス状の圧力波となって管外の空間を伝ぱし、音を発生させる。例えば、新幹線がトンネルに突入することによりトンネル出口で発生する衝撃音[(1)][(2)]は、このようにして生じる音である。本論文では、このパルス状の圧力波をパルス波と呼ぶことにする。

近年、新幹線の高速化にはめざましいものがあり、数年後には、300km/h以上の走行速度での営業運転が計画されている。このように鉄道の高速化を実現するためには、基礎的な研究や新たな技術開発を必要とする課題が数多く存在するが[(3)][(4)]、その一つに騒音問題がある。特に、住宅地域や商業地域を通過する機会の多い新幹線にとって、騒音問題

は克服すべき重要な課題である。このような騒音問題を引き起こす騒音源には、車輪がレールと接触することにより生じる転動音、これらの振動が高架橋などの構造物を伝わることにより生じる構造物音、パンタグラフと架線との接触による摺動音、パンタグラフの離線によるスパーク音、空気中での車両の移動により車体まわりやパンタグラフから発生する空力音などがあり、高速になるにしたがって空力音の占める割合が大きくなる[3]。しかし、新幹線の高速化に伴い、これらとは異なるタイプの騒音として、上述したトンネル出口での衝撃音が大きな問題となりつつある。

トンネル出口での衝撃音の発生機構を、図１・１に示す。新幹線列車がトンネルに突入すると列車がピストンの作用をしてトンネル内の空気を圧縮し、その結果、列車前面に圧縮波が形成される。形成された圧縮波は出口方向へ向かってトンネル内を伝ぱし、トンネル出口に到達する。圧縮波がトンネル出口に達すると、上述したようにトンネル出口より外部空間に圧縮波が放出される。図１・１に示すように、放出された圧縮波はパルス波となって外部空間を伝ぱし、このときに前述した衝撃音を発生させる。このパルス波は、鉄道関係者の間では微気圧波[1]と呼ばれている。

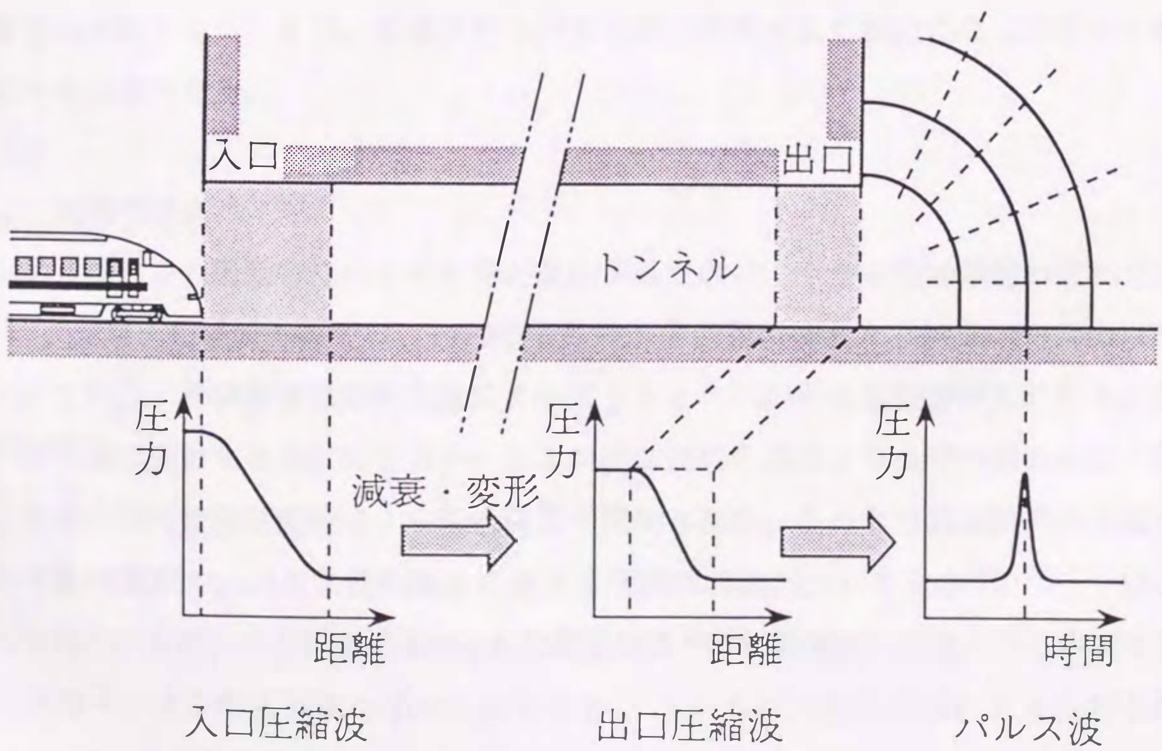


図１・１　パルス波の発生機構

一方、トンネル出口で反射された圧縮波は、膨張波としてトンネル入口に向かって折り返す。この膨張波がトンネル入口に達すると入口で反射を起こし、圧縮波として再びトンネル出口に向かって伝ぱする。この圧縮波がトンネル出口に到達すると、出口での反射により、再度、膨張波としてトンネル入口に向かって伝ぱする。このように、トンネル出口や入口での反射により、トンネル内には圧力波が繰り返し伝ぱし続け、やがて、減衰によりこの圧力波は消失する。また、トンネルに突入した列車は、トンネルを通過するまでの間にトンネル内を伝ぱする圧力波と干渉し続ける。その結果として、列車は圧力変動を繰り返し受け、場合によっては列車内の乗客に”耳つん現象”と呼ばれる急激な圧力変動を与える(5)。したがって、列車の車体強度上の問題や乗客への不快感解消の観点から、トンネル内に生じる圧力変動に対して、これまでに多くの研究(6)~(11)がなされ、現在でも継続されている(12)(13)。

このように、トンネル出口での衝撃音の発生要因は、トンネル出口（開口端）からの圧縮波の放出により形成されるパルス波である。したがって、衝撃音の低減をはかるためには、パルス波の性質を解明することが不可欠である。このためには、トンネル内の圧縮波とパルス波との関係や、開口端における圧縮波の放出機構の解析が重要となる。特に、開口端における圧縮波の放出機構の解明は、前述したトンネル内の圧力変動を解析するうえでも重要な意味をもつ。また、形成されたパルス波の距離減衰や指向性などの特性を調査することも必要である。

1・2　従来の研究

トンネル出口での衝撃音に対する研究が開始されたのは、今から約20年前のことである(1)(2)。当時、山陽新幹線では、1975年３月の博多開業に備えた訓練運転が岡山以西で行なわれていた。その訓練運転の実施によってトンネル出口から破裂音が生じたり、家の窓や戸が不意に振動するなどの苦情がトンネル出口近辺の住民より当時の国鉄に多く寄せられ、国鉄の鉄道技術研究所による現地調査が開始された。これらの調査結果から得られたパルス波の実態や、パルス波の強さに対する理論解析法については小沢(1)(2)によりまとめられているが、この報告で述べられた調査結果や解析結果の一部を以下に列挙する。

1．列車のトンネル突入速度が200km/hの場合、トンネル内の圧縮波による圧力上昇は１kPa程度、形成されるパルス波の強さは、出口より20mの地点で大きい場合で245Pa程度、小さい場合で9.8Pa程度と微小である。

2．パルス波の強さは、トンネル出口に到達した圧縮波の波面の最大圧力こう配に比例する。

3．トンネル内の軌道構造（スラブ軌道とバラスト軌道）やトンネル長は、パルス波の強さに影響を与える。特にスラブ軌道の場合には、圧縮波の非線形効果により波面の最大圧力こう配が増加し、結果としてパルス波の強さは大きくなる。

4．パルス波の強さは列車のトンネル突入速度の3乗に比例する。また、スラブ軌道の場合には、突入速度の増加に伴って上述の非線形効果により3乗則より高い値となる。

5．圧縮波波面の最大圧力こう配を減少させるとパルス波の強さを低減できる。この原理に基づいて、トンネル入口に最大圧力こう配を減少させるための入口フードを設置し、パルス波の強さを低減させる効果があることを確認した。

特に、2のパルス波の強さと圧縮波波面の最大圧力こう配との関係は、トンネル内に形成される圧縮波とパルス波の強さを結び付けるうえで重要である。この関係は、空力音響理論のわき出しのモデルを用いて解析的に得られる[2]。しかし、この解析結果は、実際に新幹線のトンネルで生じる圧縮波のうち、特に、その波面の最大圧力こう配が比較的緩やかな場合によく成り立つことが指摘されている[1]。したがって、例えば、波面の圧力こう配が急峻な場合など、圧縮波のパラメータが変化したときに対しても、この圧縮波とパルス波との理論的な関係が有効であるかは疑問であり、上記の解析をさらに詳しく検討する必要がある。また、パルス波の強さに及ぼす圧縮波の影響因子や指向性などのパルス波の特性についても議論の余地が残されている。さらに、開口端での圧縮波の放出過程に関しては、この報告では触れられていない。

小沢の研究以後、トンネル出口での衝撃音に関する研究は、近年の新幹線の高速化に伴う騒音低減の要請も受けて、現在でも継続して行なわれている。例えば、騒音低減対策については、上述した入口フードの設置のほかに、トンネル内の斜杭などを利用する方法[1]やトンネル壁面対策[1]、連続したトンネルをスリット付きシェルターでつなぐ方法[1]、車両対策、アクティブな方法などが提案されている。車両対策とは、車両の先頭部形状の最適化により、列車のトンネル突入時に形成される圧縮波の最大圧力こう配を減少させる方法[14][15]や、車両の断面積の縮小を行ない、形成される圧縮波の強さを低減させる方法[16]をさす。特に先頭部形状の影響に関しては、列車のトンネル突入と圧縮波の形成に対する研究[17]~[20]が貢献している。また、アクティブな方法は、トンネル内とトンネル出口の2つに分けられる。前者には、ウォーターカーテンの設置[15]やトンネル内で水滴

を噴霧させる方法[21]があり、いずれもトンネル内を伝ぱする圧縮波の遮蔽を目的としている。また、後者にはトンネル出口で負のパルス波を発生させる方法があり[22]、これは、出口から放出されるパルス波と負のパルス波を干渉させることにより、パルス波の強さを減少させることを目的としている。

一方、小川ら[23]は、流れの数値シミュレーション（ＣＦＤ）を適用した研究を行なっている。この手法を適用した研究は、トンネル内の圧力変動や、列車先頭部形状と形成される圧縮波との関係の解析が主体であるが、出口近傍の流れ場についても計算が行なわれている。また、船橋ら[24]は、トンネル出口での衝撃音に対して、ＴＶＤ法による数値解析と模型実験による調査を行なっている。この研究では、開口端（出口）から衝撃波が放出される場合を対象としている点が特徴である。さらに佐宗ら[25] [26]は、開口端から衝撃波が放出される場合のパルス波の低減化対策に上述した入口フードを適用したときの有効性について、模型実験による研究を行なっている。今後の高速化により、トンネル内に形成される圧縮波がその伝ぱ途中で衝撃波に遷移することも想定され、このような観点からの研究も必要と考えられる。

このようにトンネル出口での衝撃音に対する研究は、騒音の発生原因となるパルス波の強さの低減化対策や、ＣＦＤを用いた流れ場のシミュレーションなど、現在でも継続して行なわれている。しかし、圧縮波とパルス波との関係に対する解析的な研究は、小沢の研究以後、進展していないのが現状である。また、開口端での圧縮波の放出過程に対する解析的な研究に関しても、ほとんど報告例はない。

一方、開口端から圧縮波以外の圧力波が放出される場合に関しては、従来よりいくつかの研究がなされている。

まず、管内を伝ぱする音波が管の開口端から放射される場合には、Nomuraら[27]とLevineら[28]の研究がある。Nomuraらは開口端に無限バッフル板がある場合、Levineらは無限バッフル板のない場合を対象として、いずれも音響理論を用いた解析を行なっている。また、音響工学によれば、音波の反射と放射による開口端の補正や、放射された音波の特性が理論的に解析されている[29] [30]。第２章で述べるように、音波は微小振幅の線形波であり、有限振幅の非線形波である圧縮波とは波動としての性質が異なる。したがって、音波に対する解析結果を開口端からの圧縮波の放出現象の解析に適用する場合、このような波動としての性質の相違を考慮する必要がある。

次に、管内を伝ぱする非線形音波が開口端から放射される場合には、Nakamuraら[31]と

Salikuddinら[32]~[34]の研究がある。まず、Nakamuraらは、N波の開口端での反射と放射現象を対象として、理論解析と実験による調査を行なっている。この研究では、反射波と放射波の強さや開口端に生じる圧力変動を、音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いて理論的に求めており、NomuraらやLevineらとは異なる考え方が示されている。N波の強さが2kPa（20mbar）の場合でも、放射波の強さや開口端に生じる圧力変動の理論値と実験値は比較的よく一致する。しかし、N波の強さが及ぼす影響に関しては議論されていない。また、Salikuddinらは、管内を伝ぱするN波が開口端に達したとき、開口端に生じる圧力変動や反射率を実験的に調査し、上述したLevineらの解析結果との比較を行なっている。この結果によれば、N波の波長が減少すると、音響理論の解析結果と相違が生じることが示されている。

Nakamuraらのように、反射波と放射波の強さや開口端に生じる圧力変動を、音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いて理論的に解析する方法は、他にも応用されている。例えば、Rudinger[35] [36]は、開口端から衝撃波が放出される場合に適用して解析を行ない、実験結果と比較している。開口端に入射する衝撃波前後の圧力比が1.56の場合には理論解析結果と実験結果との一致は良好であるが、圧力比の増加にともない、両者の相違が顕著になる。このRudingerの解析方法は、Sockelら[11]によって実際のトンネル内の圧力変動の解析に応用され、実測結果との比較がなされている。しかし、トンネル出口（開口端）に生じる圧力変動や、パルス波については触れられていない。これに対してBrownら[37]は、弱い衝撃波が開口端に達したときに開口端に生じる圧力変動を主体として、RudingerとLevineらの解析方法、および数値計算により解析を行なっている。この研究では、バッフル板の有無などの開口端の形状に関しても考察されている。また、小沢[1]は、新幹線のトンネル内の圧縮波が出口から放出される場合に対して上記の方法を適用した解析を行なっている。この結果を用いて、パルス波の強さと周波数の関係を論じているが、実測値との十分な比較検討はなされていない。

このように、開口端からの圧力波の放出現象に対して、音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いて理論的に解析した研究はこれまでに行なわれているが、圧力波の強度が大きい場合には、実験値との良好な一致は得られない。また、理論値を得るためには、入射波のフーリエ変換とその逆変換を用いる必要があり、比較的多くの労力を要する。

一方、管内を伝ぱする衝撃波が開口端から放出される際に生じるパルス波に対して、実

験的に調査した研究[38]~[41]が、これまでにいくつかなされている。これらの研究では、衝撃波の強さとパルスの強さとの関係や、パルス波の距離減衰特性が解析されている。さらに、パルス波による衝撃音を減少させるために、開口端にバッフル板[38]やサイレン[39]、液体膜[40]を取付けた場合の実験も報告されている。また、自動車の排気管からの金属音[42]も、このように開口端（排気管出口）から衝撃波が放出されることによって生じる現象であり、排気管内での衝撃波の形成過程や伝ぱ特性の実験的な調査[42]、あるいは衝撃音の低減化対策についての研究[43][44]がなされている。しかし、圧縮波が管の開口端から放出される場合に対しては、実験的に調査された研究はこれまでにほとんど報告例がない。

1・3　本研究の目的

開口端からの圧縮波の放出に関する問題点を簡潔に列挙すると、以下のとおりである。

1. 圧縮波とパルス波との関係に対する解析結果と数値解析および実験との比較、検証。
2. 圧縮波の最大圧力こう配などのパラメータがパルス波の強さに及ぼす影響。
3. 開口端からの圧縮波の放出過程。
4. 形成されたパルス波の指向特性や距離減衰特性などの解析。

本論文では、理論解析、数値解析、および実験により、上記の問題点を明らかにすることを目的としている。

1・4　本論文の構成

本論文は6章より構成されている。

第2章では、圧縮波の開口端からの放出に関する従来の研究がまとめられている。特に理論的な解析では、空力音響理論を用いた解析結果が述べられているほか、線形音波や非線形音波、あるいは有限振幅波に対する研究結果についてもふれている。これらの研究から得られる結果の比較と、問題点が提起されている。

第3章では、圧縮波とパルス波の関係に関する理論解析が述べられている。本論文では、空力音響理論に開口端補正を考慮した解析方法を提案し、圧縮波とパルス波との関係を論じる。

第4章では、数値解析を用いて、パルス波の形成過程や形成領域が述べられている。ま

た、パルス波の形成過程に及ぼす要因についても解析を行なっている。

第５章では、遠距離場におけるパルス波の特性を数値解析と実験により明らかにする。特に数値解析では、今後の高速化に対応して、列車が速度500km/h程度でトンネルに突入する場合までを対象としている。得られた数値解析結果、および実験結果をもとに、第３章で述べた理論解析結果に対する検証を行なう。

第６章は、本論文の結論である。

第２章　管開口端からの圧縮波の放出に関する従来の解析法

管開口端から音波が放射される場合、開口端における音波の反射率や放射率、開口端補正、あるいは放射された音波の距離減衰や指向特性などの理論的な解析[29][30]が、音響工学においてなされている。これらの知識は、管内を伝ぱする圧縮波とこの圧縮波が開口端から放出されることにより形成されるパルス波との関係や、パルス波の伝ぱ特性を求めるうえで基礎的な知見を与えるほか、第１章の１・２節で述べたように、圧縮波や衝撃波の開口端からの放出に関して音響理論を適用した解析[35][36]もなされている。そこで２・１節において、本研究に関連した音響理論による解析と、音響理論を適用した圧縮波や衝撃波の開口端からの放出に関する従来の研究について述べる。

一方、第１章の１・２節で述べた、圧縮波の最大圧力こう配とパルス波の強さとの関係は、空力音響理論を適用して理論的に導出されたものである[2]。この理論的な関係は、実際の新幹線のトンネルで形成される圧縮波に対して有効であることが確認されている。しかし、圧縮波のパラメータ、すなわち圧縮波による圧力上昇や圧縮波の最大圧力こう配などが新幹線のトンネルで得られる値と異なる場合についても、上記の理論的な関係が有効であるかは十分な議論がなされていない。そこで２・２節では、まず、空力音響理論を用いてこの理論的な関係を導出し、次に、この関係を種々の圧力上昇値や最大圧力こう配を有する圧縮波に適用して問題点を明らかにする。

２・１　音響理論による解析法

媒質中のある点に生じたじょう乱がある有限の速度で周囲に伝わる現象は波（wave）、あるいは波動（wave motion）と呼ばれる。例えば、空気中を伝わる音は波動であり、音の伝ぱ方向と圧力などの振動方向が同一の縦波（疎密波）である。この意味から、音は音波（sound wave）とも呼ばれる。音波は気体、液体、固体のいずれの媒質中でも伝ぱすることができるが、例えば空気中を通過すると、空気の圧力や密度、温度などの状態量がわずかながら変動する。音波の伝ぱによる圧力変動は音圧（sound pressure）と呼ばれ、その値は大気圧に比べてきわめて小さい。このように振幅が小さい圧力変動を微小じょう乱（small or infinitesimal disturbance）、微小じょう乱による波を微小振幅波（small or infinitesimal amplitude wave）、その伝ぱ速度を音速（sound speed）と呼んでいる。このよう

な波動、および物理現象としての音波の性質は、音響工学の理論により解析することができる。

本節では、音響工学の理論のうち、上記で述べたように、開口端における音波の反射率や放射率、開口端補正、あるいは放射された音波の距離減衰や指向特性などの理論的な解析結果と、圧縮波や衝撃波の開口端からの放出に関して音響理論を適用した解析結果について記述する。

なお、音響工学と圧縮性流体力学は互いに独立した学問体系を構築している関係から、同一の物理量に対して異なる記号が使用される場合がある（例えば、圧縮性流体力学では音速をａで表わすが、音響工学ではｃを使用し、ａは管の半径を表わす）。本論文では、同一の物理量に対して使用される記号が異なる場合には、圧縮性流体力学で使用される記号を優先的に使用する。したがって、以下に述べる音響理論に関しては、音響工学とは異なった記号を用いている場合があることに注意されたい。

2・1・1　線形波動方程式

音響理論による解析の出発点として、まず、波動方程式の導出を行なう。簡単化のために、断面積が一定の管内に、一次元非定常等エントロピー流れが存在する場合を考える。このときの基礎式は、以下に示す連続の式、運動方程式、等エントロピーの式である[45]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (2 \cdot 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (2 \cdot 2)$$

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \mathrm{const} \qquad (2 \cdot 3)$$

上式のうち、式（２・１）と式（２・２）は非線形偏微分方程式である。そこで、流れ場に生じる状態変化が微小であると仮定して、式（２・１）と式（２・２）を線形化する。線形化することにより、容易に解を得ることができる。

いま、圧力p_0、密度ρ_0の一様な静止気体中を微小じょう乱が伝ぱし、微小じょう乱による圧力、密度、速度の変動量をそれぞれp'、ρ'、u'とすれば、微小じょう乱が通過し

たのちの圧力、密度、速度は次式で与えられる。

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad u = 0 + u' \tag{2・4}$$

上述のように、微小じょう乱による状態量の変化はきわめて微小であるから

$$p' / p_0 \ll 1 , \quad \rho' / \rho_0 \ll 1 , \quad u' / a_0 \ll 1$$

ここで、a_0は一様な静止気体中の音速である。

式（2・4）を式（2・1）と式（2・2）に代入し、二次の微小項を無視すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \tag{2・5}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{2・6}$$

また、圧力pをρ_0のまわりにテイラー展開すると

$$p = p_0 + A\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2} B\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^2 + \cdots\cdots \tag{2・7}$$

ここで、$A \equiv \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s,\, \rho = \rho_0} = \rho_0 a_0^2$,　$B \equiv \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,\, \rho = \rho_0}$ であり、$(\partial p / \partial \rho)_s$ は等エントロピー過程における微分を示す。

式（2・7）の右辺の二次以上の項を無視すれば、圧力変動p'は次式で表わされる。

$$p' = p - p_0 = A\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) = a_0^2 \rho' \tag{2・8}$$

式（2・8）を式（2・6）に代入すれば

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \tag{2・9}$$

式（2・9）をtで、式（2・5）をxで微分し、両式からρ'を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - a_0{}^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0 \qquad (2 \cdot 10)$$

同様に、式（2・9）をｘで、式（2・5）をｔで微分し、両式からu'を消去すると、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0{}^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0 \qquad (2 \cdot 11)$$

式（2・10）と式（2・11）は、一次元の波動方程式と呼ばれる。この波動方程式を満足する微小じょう乱の伝ぱ速度は音速a_0である。a_0は一定であるから、微小じょう乱の波形は変化しない。また、式（2・10）と式（2・11）は線形微分方程式であり、解の重ね合わせが可能である。

さて、上述の波動方程式を導出するにあたり、一次元流れ場を仮定したが、実際の音波の伝ぱを考察する上では、三次元流れ場として取り扱う必要がある。したがって、音響理論では、一般に次式で示される三次元の波動方程式が用いられる。これはダランベールの波動方程式と呼ばれる[30]。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0{}^2\, \nabla^2\, \phi \qquad (2 \cdot 12)$$

ここで、$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$、また、$\phi$は速度ポテンシャルである。

式（2・12）より速度ポテンシャルϕが求まれば、音場における音圧pと粒子速度Vが得られる。すなわち、ρを密度とすれば

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (2 \cdot 13)$$

$$V = -\, grad\ \phi \qquad (2 \cdot 14)$$

ところで、本節の冒頭で述べたように、管内を伝ぱする圧縮波と開口端からの圧縮波の放出により形成されるパルス波との関係を考察するためには、管の直径に対してその長さが長い、円形断面の直管をモデルとして考える必要がある。このような管内を音波が伝ぱする場合、その音波は平面波（plane wave）とみなされる[46]。平面波とは、その波面

（wave front）、すなわち同一時刻での変動状態が等しい点を結んだ面が平面となる波のことであり、一次元の波動現象として解析が可能である[30]。このようなモデルは、棒の中を縦波が伝ぱする場合と同様な解析方法で取り扱うことができる。

次に、初期条件として与える平面波の波形に関しては、その波長を明確にする必要がある。一般に音響の問題は波長によって現象に相異が生じることが多く、波長は重要なパラメータとなる。したがって、音波の波形を表現する場合に波の運動を単弦振動とし、この波には始めも終わりもなく無限につながっていると仮定して解析されることが多い。このような音波を単弦振動音波[47]という。

本節では、円形断面の直管内を単弦振動音波が伝ぱする場合を想定し解析を行う。この場合、式（２・12）の波動方程式は、次式のように書き表される。

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad (2 \cdot 15)$$

ここで、ｋは波長定数で、波長をλとするとき、$k = 2\pi/\lambda$である。

２・１・２　音波の反射率と開口端補正

管内を伝ぱする音波が開口端に達すると、開口端から音波の一部が放射され、球面波（波面が球面となる波）に近い形で空間を伝ぱすることが知られている[29]。開口端における音波の放射と反射を理論的に解析するためには、開口端付近の音場を正確に記述して計算する必要があり、Nomuraら[27]は無限バッフル板のある場合、Levineら[28]は無限バッフル板のない場合の計算を行っている。本節では、これらの解析結果を用いて音波の放射と反射の性質や、無限バッフル板の影響について考察する。

解析に用いた座標系を図２・１に示す。この図２・１は無限バッフル板のある場合であるが、無限バッフル板のない場合も同様である。座標系には円筒座標を用いている。開口端の中心Ｏを原点とし、管の中心軸上における原点からの距離をｘ、管の中心軸に垂直な面の中心軸からの距離をｙ、原点と観測点Ｐとの距離をｒ、原点を中心として、原点と観測点を結ぶ直線と管の中心軸のなす角度をθとする。

無限バッフル板が存在する場合には、式（２・15）を満足する解を、以下のように仮定する[27]。

$$\phi_0 = \frac{V_0}{k} e^{-ikx} \tag{2・16}$$

$$\phi_1 = \frac{V_0}{k} \left\{ C_0 e^{ikx} + \sum_{S=1}^{\infty} C_S J_0(\beta_S k) \exp\left(\sqrt{\beta_S{}^2 - k^2 (D/2)^2} \, \frac{x\, D}{2} \right) \right\} \tag{2・17}$$

$$\phi_2 = \frac{V_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(k,x) \qquad x > 0 \tag{2・18}$$

これらの式において、ϕ_0は入射波、ϕ_1は反射波、ϕ_2は放射波の速度ポテンシャルを表わす。また、J_0は第零次のベッセル関数、V_0は入射波の振動速度、β_sは次式を満足する変数である。

$$J_0'(\beta_S) = -J_1(\beta_S) = 0$$

さらに、S_nは次式で表わされる。

$$S_n(k,x) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi}\, J_0(k\xi)\, J_{2n+1/2}(\xi) \exp\left(-\sqrt{\xi^2 - k^2 (kD/2)^2} \, \frac{xD}{2} \right)}{\sqrt{\xi^2 - k^2 (kD/2)^2}} d\xi \qquad x > 0$$

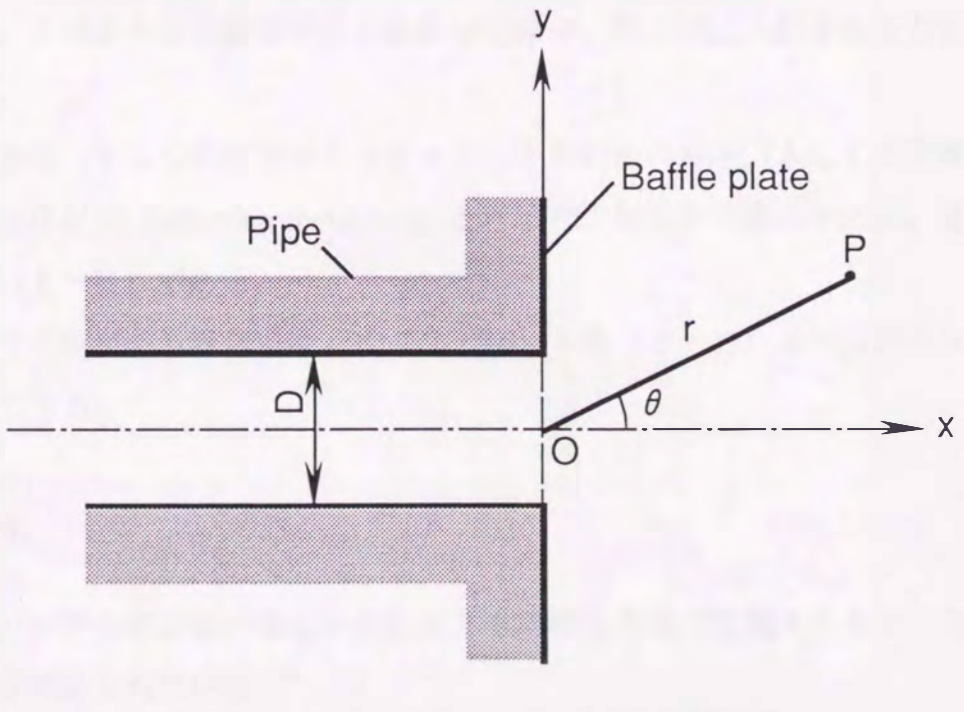


図２・１　解析に用いた座標系と使用記号

上式において、J_0'は第零次のベッセル関数の一次微分、J_1は第1次第1種のベッセル関数である。

図2・1に示す解析モデルに対して式（2・17）と式（2・18）の右辺の未知係数A_n、C_0、C_sを求め、速度ポテンシャルを決定する。

無限バッフル板がない場合には、式（2・15）を次式のように仮定する[28]。

$$\phi_0 + \phi_2 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x \to -\infty \qquad (2 \cdot 19)$$

$$\phi_1 = f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad r \to \infty \qquad (2 \cdot 20)$$

式（2・19）は管内の速度ポテンシャルを表わしており、式（2・19）の右辺第一項は入射波を、第二項は反射波を意味する。また、式（2・20）は管外の速度ポテンシャルを表わしており、f（θ）は角度θによるポテンシャルの変化を意味している。無限バッフル板がある場合と同様に、式（2・19）と式（2・20）の右辺の未知係数A、B、f（θ）を求め、速度ポテンシャルを決定する。

（1）　反射率　R

管内を伝ぱする音波が開口端に達すると音波の反射と放射が起こり、その結果として管内のエネルギーが管外に放射される。もし、開口端で完全反射が生じた場合には、開口端を含む平面上では音圧の変化は起こらず、管外の圧力、例えば大気圧であれば、大気圧に保持される。このような音波の反射と放射の現象は、開口端に入射する圧力波の波長により変化する。

反射波の音圧（もしくは速度ポテンシャル）と入射波の音圧（もしくは速度ポテンシャル）との比は反射率（reflection coefficient）と呼ばれ、記号Rで表わされる。管外へ放射される割合は（1－R）である。

無限バッフル板がある場合には、式（2・16）と式（2・17）より反射率Rは次式で求めることができる。

$$R = \frac{\phi_1}{\phi_0} \qquad (2 \cdot 21)$$

また、無限バッフル板がない場合の反射率Rも同様な方法で定義されるが、その近似解として、次式が求められている[28]。

$$|R| \approx e^{[-(kD/2)^2/2]}\left[1+\frac{1}{6}(kD/2)^4\left\{\log\frac{1}{\gamma kD/2}+\frac{19}{12}\right\}\right], \quad kD/2 < 1$$

$$|R| \approx (\pi kD/2)^{1/2} e^{-kD/2}\left(1+\frac{3}{32}\frac{1}{(kD/2)^2}\right), \quad kD/2 > 1 \qquad (2 \cdot 22)$$

なお、Rは複素数であり、この複素数の絶対値を｜R｜とする。また、γは定数である。

式（2・21）と式（2・22）の計算結果を図2・2の実線と破線で示す。図2・2は反射率｜R｜と無次元化された波長定数ｋD/2の関係を示しており、ｋD/2はπ D/λに等しい（本章の冒頭で述べたように、音響工学では管の半径をａで表わすので、ｋD/2はｋａである）。図2・2より、ｋD/2＝0、すなわち入射波の波長λが無限大の場合にはバッフル板の有無にかかわらず｜R｜＝1となり、完全反射の状態とみなせる。したがって、管外への音波の放射は生じない。また、ｋD/2の増加にともなって｜R｜は低下し、ｋD/2＝3のときにはバッフル板がある場合で｜R｜≒0.1、ない場合で｜R｜≒0.15である。このことより、入射波の大部分が管外へ放射されることがわかる。なお、ｋD/2＝3

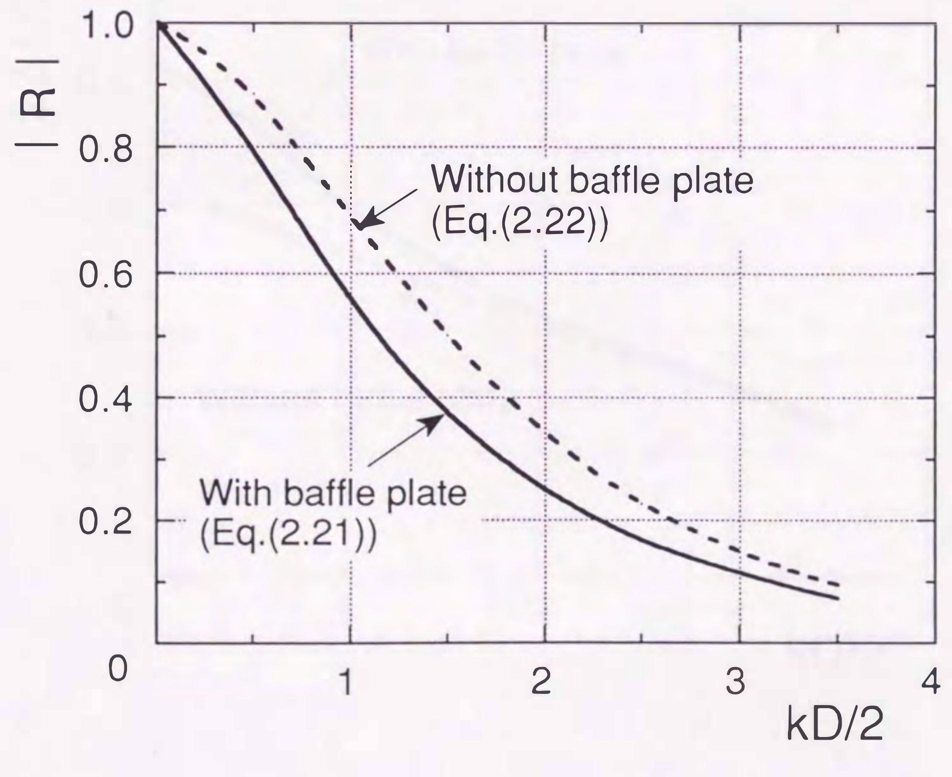


図2・2　開口端における音波の反射率

は波長と管直径がほぼ等しい場合に相当する。一方、無限バッフル板の影響については、バッフル板のない場合の方が反射率が大きいことがわかる。

（2）　**開口端補正長**　Δl

（1）の結果から、開口端では完全反射が生じないため、開口端より下流側に完全反射が生じるとする仮想開口端を考える。開口端から仮想開口端までの距離を Δl するとき、Δl を開口端補正長という。開口端補正（open end correction）を行って完全反射が生じる仮想開口端を考えると、管内の音場を正確に表現できる。つまり、開口端における反射波は入射波と等しい振幅を有し、補正長に比例した位相の相違を生じている波として取り扱うことができる。

開口端補正長 Δl と反射率Ｒの間には次式の関係が成り立つ [28]。

$$R = |\mathbf{R}|e^{-2ik\Delta l} \qquad (2 \cdot 23)$$

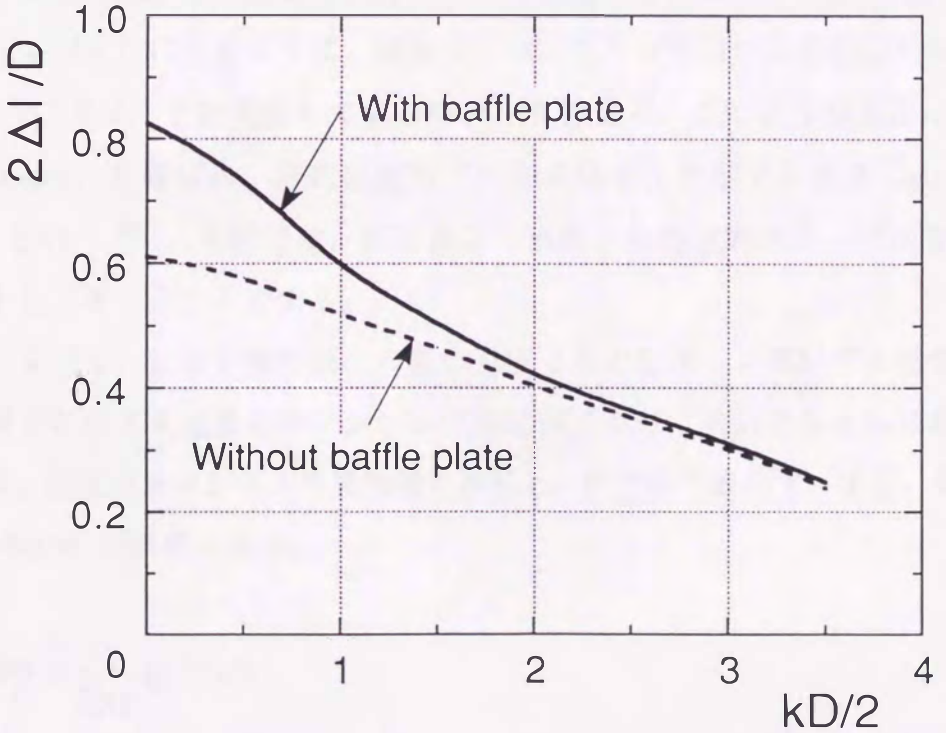


図２・３　音波の開口端補正長

開口端補正長と波長定数との関係について、図２・３に示す。縦軸は無次元化された開口端補正長２Δl /D、横軸はｋD/2 である。図中の実線は無限バッフル板のある場合、破線はない場合を表わす。ｋD/2＝0、すなわち波長λが無限大の場合には補正長はバッフル板のある場合でΔl =0.411D、ない場合でΔl =0.307Dである。特に、バッフル板のある場合の値Δl =0.411Dは、他の解析法で得られたΔl =0.41D [48] やΔl =0.425D [49] とよく一致する。図２・３より、補正長はｋD/2 の増加にともない、減少することがわかる。次に、バッフル板の影響については、ｋD/2＜２の領域ではバッフル板のある方が補正長が長いが、ｋD/2＞２では顕著な相違を生じない。

２・１・３　平面音源からの音波の放射

前節では、開口端に入射した単弦振動音波と、開口端での反射と放射により生じた反射波、および放射波との関係について述べた。開口端より放射された放射波は、その強さを弱めながら管外の空間を球面状に伝ぱしていく。管外の空間における放射波の特性を知ることは、圧縮波の放出により形成されたパルス波の特性を理解する上で重要と考えられる。よって、本節では、開口端より放射された放射波の特性について述べる。

図２・４（ａ）に示すように、無限大のバッフル板を有する直径Dの振動板が、振動速度$v_0 e^{i\omega t}$でピストン運動しているモデルを考える。このような音源は平面音源（plane surface source）と呼ばれ、特に振動面が円形の場合を円形平面音源（circular plane surface source）という [30] 。本節では、開口端より放射された放射波を、平面音源より放射される音波として考えることにする。

図２・４（ａ）に示す振動板上の微小面積ｄＳがピストン運動する場合、ｄＳにより空間内の点Ｐに生じる速度ポテンシャルの実効値ｄΦは、次式で与えられる。なお、以下の解析では、速度ポテンシャルを実効値で表示し、記号Φで表わす。また、Φとϕの間には、$\phi = \sqrt{2}\Phi e^{i\omega t}$ の関係がある。

$$d\Phi = \frac{V_0}{2\pi r} e^{-ikr}\, dS \qquad (2\cdot 24)$$

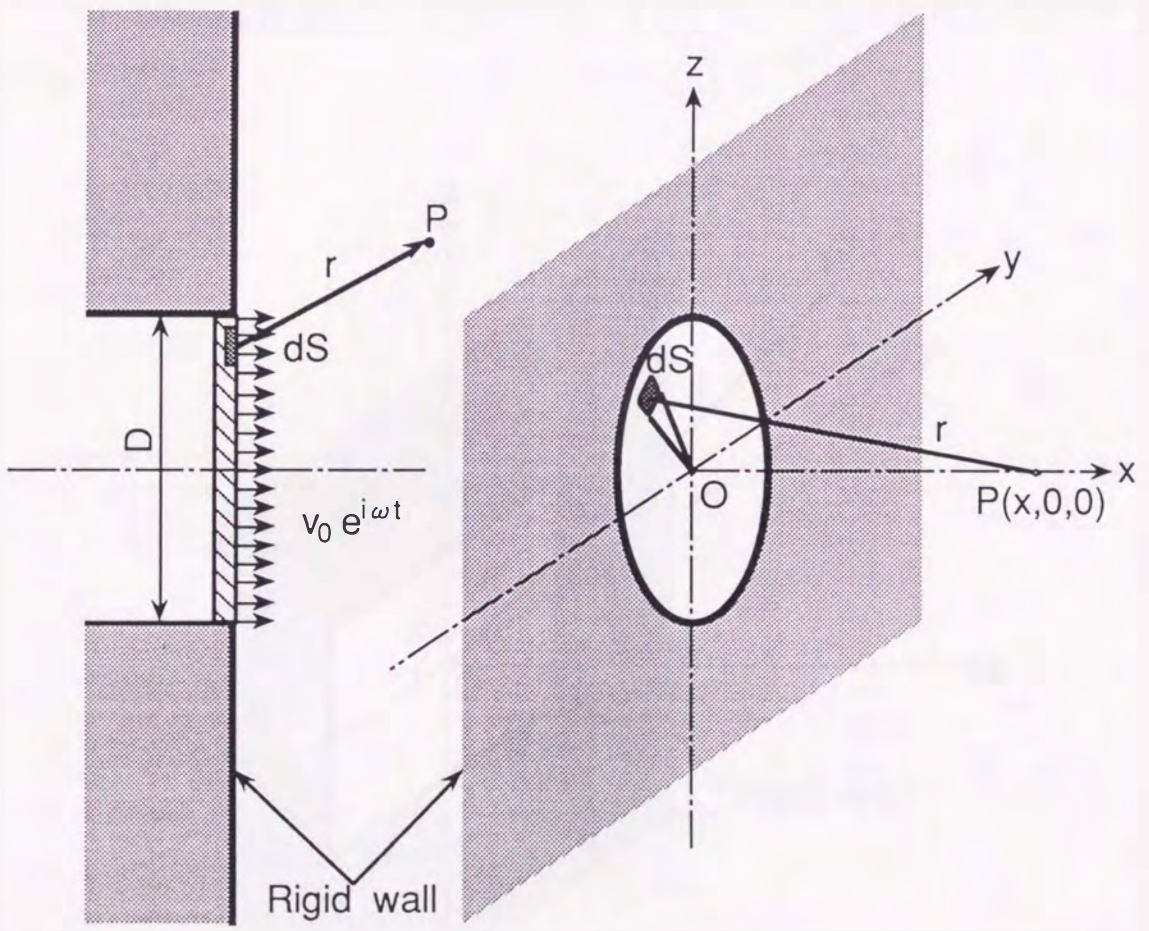
ここで、$v_0 e^{i\omega t} = \sqrt{2}\, V_0\, e^{i\omega t}$　、ｒはｄＳから点Ｐまでの距離である。
したがって、点Ｐに生じる速度ポテンシャルΦは、式（２・24）を振動面全体に対して積分することにより得られる。点Ｐが図２・４（ｂ）の中心軸（ｘ軸）上に存在する場合、

Φは次式で表わされる。

$$\Phi = 2\,\frac{V_0}{k}\,\sin\frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+(D/2)^2}\;-x\right)\exp\left(-i\,\frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+(D/2)^2}+x\right)\right) \qquad (2\cdot 25)$$

また、音圧pはp=iωρΦの関係式より求められ、絶対値で表わせば次式で与えられる。

$$|p| = \rho a\,|V_0|\left|2\sin\frac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{x^2+(D/2)^2}\;-x\right)\right| \qquad (2\cdot 26)$$



（a）円形平面音源のモデル

（b）円形平面音源の解析に使用した座標系

図2・4　円形平面音源のモデルと解析に使用した座標系

一方、点Ｐが振動板より十分遠方にある場合、微小面積ｄＳから点Ｐまでの距離ｒは、振動板の中心Ｏからの距離ｘに等しいと考えられるので、式（２・25）は次式のように近似できる。

$$\Phi = \frac{V_0 (D/2)^2}{2\,x} e^{-ikx} \tag{2・27}$$

また、音圧ｐは次式で与えられる。

$$p = i\omega\rho \frac{V_0 (D/2)^2}{2\,x} e^{-ikx} \tag{2・28}$$

式（２・28）より、振動板より十分遠方における音圧は、１/ｘに比例して減少することがわかる。

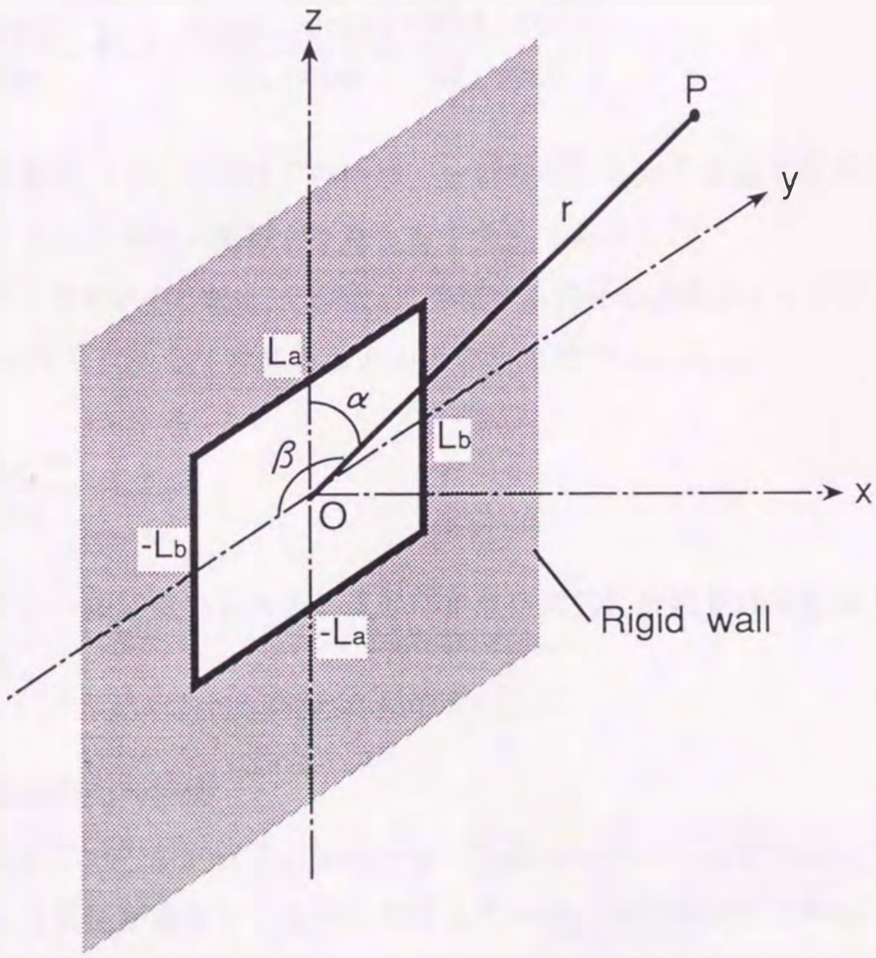


図２・５　矩形平面音源の解析に用いた座標系

一方、点Pが振動板より十分遠方で、中心軸上以外の位置に存在する場合には、速度ポテンシャルΦ（θ）は、次式のように表わされる。

$$\Phi(\theta) = \frac{V_0\, e^{-ikr}}{2\pi r}\, \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{2\, J_1(kD/2\, \sin\theta)}{kD/2\, \sin\theta} \tag{2・29}$$

ここで、θは振動板の中心Oと点Pを結ぶ直線が中心軸となす角度、J_1は第1次第1種のベッセル関数である。

次に、図2・5に示すように、高さ$2L_a$、幅$2L_b$の矩形の平面音源から音波が放射される場合について述べておく。このような音源は方形平面音源（rectangular plane surface source）と呼ばれるが [30]、空間内の速度ポテンシャルの求め方は円形平面音源の場合に準じているので、結果のみを示す。

図2・5に示す点Pに生じる速度ポテンシャルΦは、次式で与えられる。

$$\Phi = \frac{V_0\, e^{-ikr}}{2\pi r} 4L_aL_b \frac{\sin(kL_a \cos\alpha)}{kL_a \cos\alpha} \frac{\sin(kL_b \cos\beta)}{kL_b \cos\beta} \tag{2・30}$$

ここで、rは振動板の中心Oと点Pの距離、αは中心Oと点Pを結ぶ直線がz軸となす角度、βは中心Oと点Pを結ぶ直線がy軸となす角度である。

図2・5に示す点Pが中心軸上（x軸）に存在する場合の速度ポテンシャルは、式（2・30）に$\alpha = \beta = \pi / 2$を代入して求めることができ、次式で示される。

$$\Phi = \frac{V_0\, e^{-ikr}}{2\pi r} 4L_aL_b \tag{2・31}$$

以上の結果から、振動板のピストン運動により空間内に放射される音波の特性を解析することができる。

2・1・4　音波の指向特性

開口端より放射された放射波は、原点からの距離rが等しい位置においても中心軸からの角度θによって音圧が異なり、指向性を有している。音響理論によれば、音源より十分遠方において音源より任意の方向へ放射される音圧と、音源から一定の基準方向における音圧との比を指向性係数（coefficient of directivity） [50] D（θ）とし、指向性係数によっ

て指向特性を表わしている。一般に、本研究のようなモデルでは管の中心軸を基準とする。指向性係数は、その定義から１に近づくほどその方向に対する指向性は強くなり、全ての方向で１の場合には音圧分布は同心円状となる。

指向性係数は、放射空間の速度ポテンシャルが求まれば、計算することができる。円形平面音源の場合、音源より十分遠方の中心軸上における速度ポテンシャルは式（２・27）で、中心軸以外の速度ポテンシャルは式（２・29）で表わされるので、両者の比をとれば、指向性係数として次式を得る。

$$D(\theta)=\left|\frac{\Phi(\theta)}{\Phi(0)}\right|=\left|\frac{2J_1(kD/2\ \sin\theta)}{kD/2\ \sin\theta}\right| \qquad (2\cdot 32)$$

また、方形平面音源の場合、式（２・30）と式（２・31）より

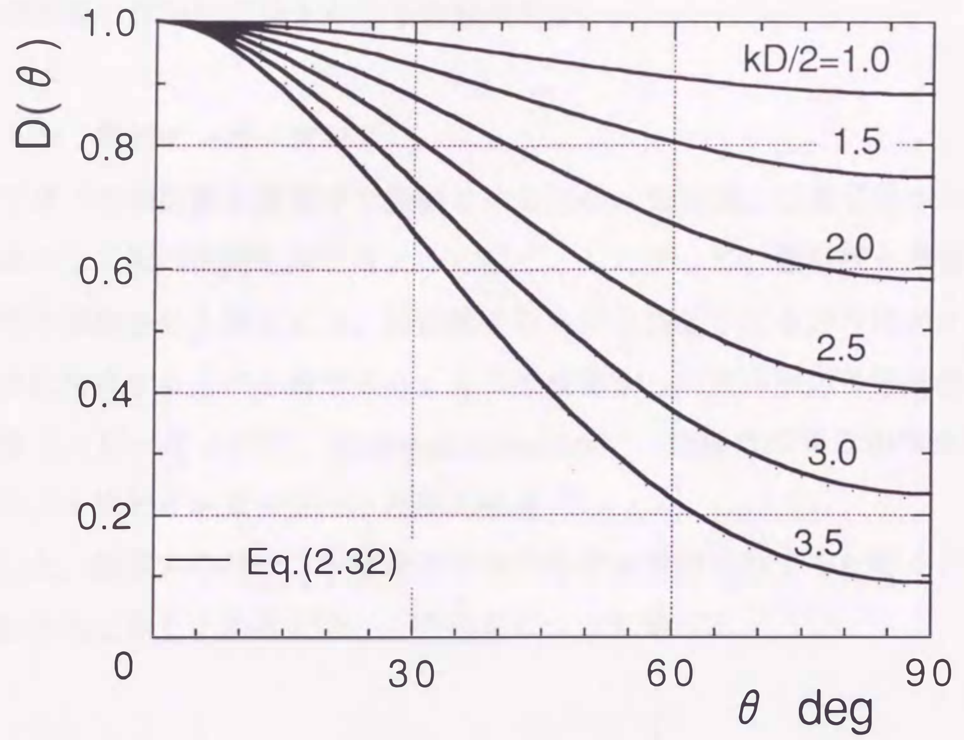
$$D(\alpha,\beta)=\left|\frac{\sin(kL_a\cos\alpha)}{ka\cos\alpha}\ \frac{\sin(kL_b\cos\beta)}{kL_b\cos\beta}\right| \qquad (2\cdot 33)$$

式（２・33）に$\beta=\pi/2$、$\theta=\pi/2-\alpha$、および$\alpha=\pi/2$、$\theta=\pi/2-\beta$を代入し、垂直方向における指向性$D_V(\theta)$と水平方向における指向性$D_H(\theta)$に分割して示せば、次式のように表わされる。

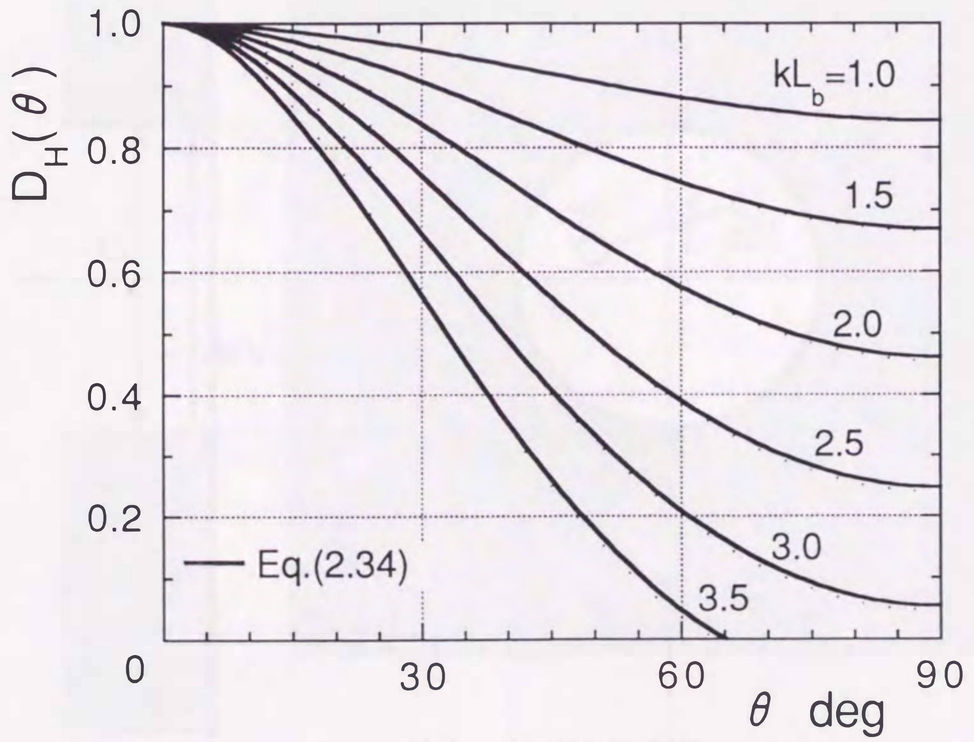
$$D_V(\theta)=\left|\frac{\sin(kL_a\sin\theta)}{kL_a\sin\theta}\right|$$

$$D_H(\theta)=\left|\frac{\sin(kL_b\sin\theta)}{kL_b\sin\theta}\right| \qquad (2\cdot 34)$$

式（２・32）および式（２・34）による計算結果を図２・６（ａ）（ｂ）に示す。図２・６の横軸は中心軸からの角度θ、縦軸は指向性係数$D(\theta)$を表わす。図２・６（ａ）は式（２・32）、すなわち円形平面音源の指向性係数で、$kD/2=1\sim3.5$について示している。また、図２・６（ｂ）は式（２・34）、すなわち方形平面音源の水平方向の指向性係数で、$kL_b=1\sim3.5$について示している。図２・６（ａ）（ｂ）とも管の中心軸を基準としたので、$\theta=0°$のときはいずれも$D(\theta)=1$である。図よりθの増加にともない、$D(\theta)$は減少する。また、$kD/2$およびkL_bが上昇するほどその減少割合は大き



（a） 円形平面音源



（b） 方形平面音源

図2・6 音波の指向性係数

くなることがわかる。このことは、ｋD/2およびｋＬ$_b$の増加により、管の中心軸方向に対する放射波の指向性が強まることを意味する。

２・１・５　放射インピーダンス

前節で述べた振動板を媒質中で振動させる場合、振動板には媒質側からの反作用力が生じ、結果として板の振動を抑えるように働く。したがって、振動板を媒質中で真空中と同一の速度で振動させる場合には、振動板そのものを振動させる力のほかに、媒質側からの反作用力に対抗する力が必要である。この媒質側からの反作用力と振動板の振動速度との比を放射インピーダンスＺ$_r$（radiation impedance）、振動板の単位面積あたりの放射インピーダンスを放射インピーダンス密度と呼ぶ[30]。

前述した、無限大のバッフル板を有する円形平面音源に対する放射インピーダンスはすでに導出されており、本節では、この理論について述べる。

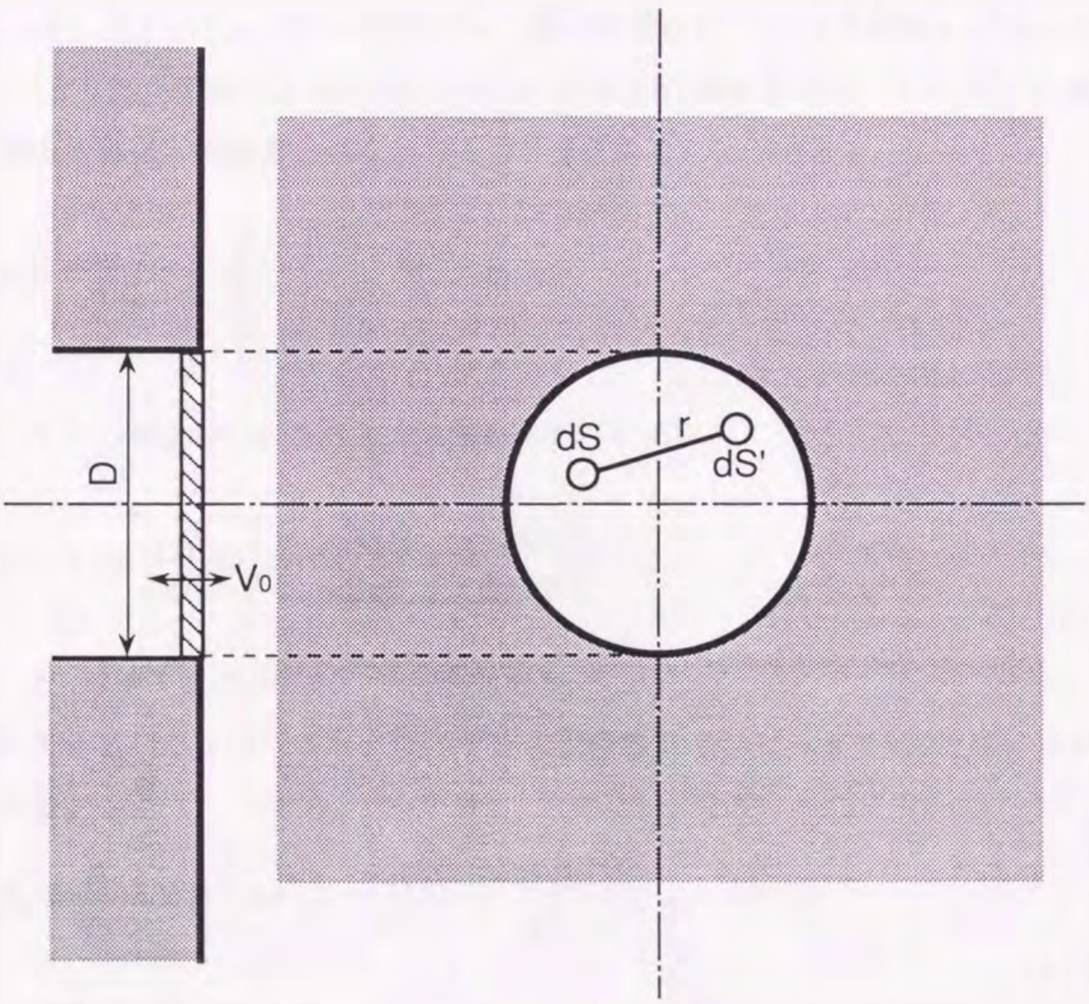


図２・７　放射インピーダンスの解析モデル

図２・７に示すように、無限大のバッフル板を有する直径Ｄの円形平面音源を考え、振動板が振動速度V_0でピストン運動しているとする。この振動板上の微小面積ｄＳの振動により他の微小面積ｄＳ'に生じる速度ポテンシャルｄΦ'は、ｄＳとｄＳ'の距離をｒとして、式（２・24）より次式で与えられる。

$$d\Phi' = \frac{V_0\, e^{-ikr}}{2\pi r} dS \tag{2・35}$$

よって、振動板全体の振動が微小面積ｄＳ'に生じる速度ポテンシャルΦ'は、式（２・35）を振動面全体で積分することにより得られ、次式で与えられる。

$$\Phi' = \frac{V_0}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS \tag{2・36}$$

式（２・36）とｐ'＝ｉωρΦ'の関係より、微小面積ｄＳ'に生じる音圧ｐ'が求められる。音圧ｐ'により微小面積ｄＳ'には微小な力ｐ'ｄＳ'が作用するので、このｐ'ｄＳ'を振動面全体で積分すれば、振動面全体に生じる力Ｆを求めることができる。よって

$$F = \frac{i\omega\rho V_0}{2\pi} \iint_S \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS\, dS' \tag{2・37}$$

式（２・37）の積分は、以下のように求められている。

$$F = V_0\, \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \rho a \left\{1 - \frac{J_1(kD)}{kD/2} + i\,\frac{H_1(kD)}{kD/2}\right\} \tag{2・38}$$

ここで、H_1は第１次のストルーブ関数である。

したがって、式（２・38）より、円形平面音源の放射インピーダンスZ_rは、以下のように示される。

$$\begin{aligned} Z_r = \frac{F}{V_0} &= \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \rho a \left\{1 - \frac{J_1(kD)}{kD/2} + i\,\frac{H_1(kD)}{kD/2}\right\} \\ &= R_r + i\,X_r \end{aligned} \tag{2・39}$$

式（2・39）において、R_rは放射抵抗（radiation resistance）、X_rは放射リアクタンス（radiation reactance）と呼ばれる[30]。

式（2・39）による計算結果を図2・8に示す。図2・8の縦軸は、放射抵抗R_rおよび放射リアクタンスX_rを$\pi D^2 \rho a/4$で除した値を示す[51]。$\pi D^2 \rho a/4$は、振動板から平面波が放射された場合の放射インピーダンスである。図2・8より、R_rは$kD/2$に比例して増加したのち、ほぼ$kD/2>2$で1.0に漸近するが、X_rは$kD/2$に比例して増加したのちに$kD/2 \fallingdotseq 1.3$でピークとなり、$kD/2>1.3$では減少することがわかる。したがって、$kD/2>1.3$では放射リアクタンスは減少して放射抵抗のみとなり、平面波に近づいているといえる。

ところで、実際に取り扱われる音波では、$kD/2<0.6$の場合が多い[51]。図2・8より、この領域では$R_r<X_r$であり、媒質の反作用はおもに慣性に依存する[51]。したがって、この慣性のためにエネルギーが費やされ、結果として管外に放射されるエネルギーが減少する。$kD/2<0.6$の領域では、式（2・39）は次式のように近似できる。

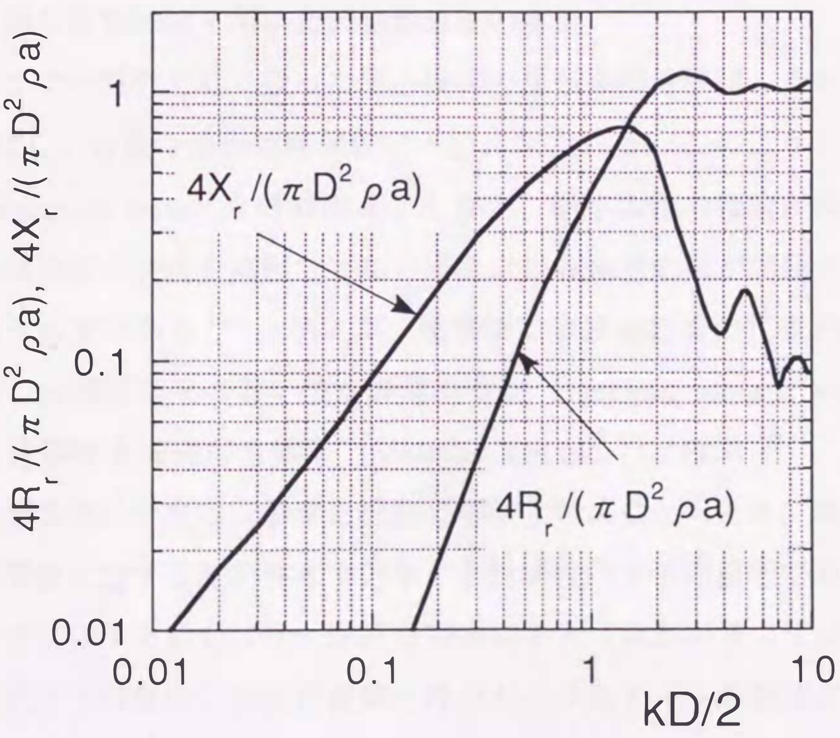


図2・8　ピストン円板の放射インピーダンス[51]

$$Z_r = \frac{\pi(D/2)^4 \rho}{2a}\omega^2 + i\omega\frac{8(D/2)}{3\pi}\pi(D/2)^2 \rho \qquad (2 \cdot 40)$$

式（2・40）において、放射リアクタンスを$X_r=\omega M$とすれば

$$M = \frac{8(D/2)}{3\pi}\pi(D/2)^2 \rho \qquad (2 \cdot 41)$$

式（2・41）のMは、振動板が媒質を振動させるために、振動板に余分に付加された質量と考えられ、付加質量（additional mass）と呼ばれる[30]。この付加質量は、管の長さが

$$\Delta l = \frac{\frac{3}{8}\rho\,(D/2)^3}{\rho\,\pi\,(D/2)^2} = \frac{8\,(D/2)}{3\pi} = 0.85\,(D/2) \qquad (2 \cdot 42)$$

だけ延長されたことに等しい。文献（49）による開口端補正長Δl =0.425 Dは、このようにして得られた値である。

2・1・6　線形音響理論を用いた非線形音波の解析

2・1・5までの解析で取り扱った微小振幅の単弦振動音波は、その前方の静止気体の音速a_0で伝ぱし、音波の波形は時間的に一定に保たれる。このような波は、厳密には線形音波（linear acoustic wave）と呼ばれる。しかし、微小振幅の仮定が保持されず、音圧による音波の伝ぱ速度の変化を無視できない場合には非線形効果が問題となり、有限振幅波として取り扱う必要がある[52]。例えば、衝撃波は有限振幅波の代表的な例である。有限振幅波のうち、非線形効果の弱い波を非線形音波（nonlinear acoustic wave）、非線形音波を対象とした音響学を非線形音響学（nonlinear acoustics）と呼ぶ[52]。また、非線形音響学に対し、線形音波に対する音響学を線形音響学と呼ぶこともある。非線形音響学は、線形音響学と衝撃波に対する圧縮性流体力学とを結び付ける学問領域である。

非線形音波が伝ぱする場合には、非線形効果によって波形が波の伝ぱとともに変形してしだいに急峻化する現象や、非線形減衰と呼ばれるエネルギーの散逸による減衰などが生じる[53]。したがって、有限振幅の単弦振動音波が伝ぱする場合には、図2・9（a）に示すような鋸歯状波（sawtooth wave）に変形し、単一波、例えば、単弦振動音波の1周期分のみで構成されるような波が伝ぱする場合には、図2・9（b）に示すようなN波（

N wave）（もしくは音響衝撃波（acoustic shock））に変形する。このような非線形波、特にN波の性質は、線形音波と比べて本論文で解析対象とする圧縮波に近いと考えられる。そこで本節では、非線形音波の開口端での反射と放射に関するこれまでの研究結果について述べる。

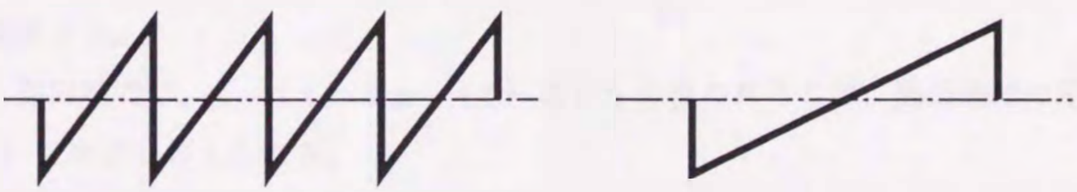
さて、Nakamuraらは、管内を伝ぱするN波の減衰[54]や、開口端からのN波の放射[31]に関する研究を行なっている。この研究の特徴は、開口端における反射と放射を理論的に取り扱うために、前述した線形音響理論の放射インピーダンスを用いていることである。すなわち、開口端の音響インピーダンスは、開口端にピストンが存在し、このピストンが振動するモデルでの音響インピーダンス（放射インピーダンス）に等しいとして解析を行なう。このように開口端での音響インピーダンスが既知の場合、開口端における反射率Rは次式で与えられる[55]。

$$R = \frac{\overline{Z_r} - 1}{\overline{Z_r} + 1} \qquad (2 \cdot 43)$$

ここで、$\overline{Z}_r$は式（2・39）で表わされる放射インピーダンスZ_rを、$\pi D^2 \rho a/4$で無次元化したものである。

式（2・43）は、ある固有音響インピーダンスをもつ媒質中を伝ぱする音波が、異なる固有音響インピーダンスをもつ媒質中に入射した場合の、反射と放射に関する音響理論に基づくものである。式（2・39）より、放射インピーダンスZ_rは$kD/2$、すなわち周波数ωに依存するので、式（2・43）による反射率も周波数ωにより変化する。

一方、開口端に入射する入射波と開口端で反射した反射波を、フーリエ変換を用いて次式のように表わす。



（a）鋸歯状波　　（b）N波

図2・9　非線形波の波形のモデル

$$p_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \quad , \quad p_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_r(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2 \cdot 44)$$

ここで、$p_i(t)$ は入射波の圧力波形を、$p_r(t)$ は反射波の圧力波形を表わしている。また、$F_i(\omega)$ と $F_r(\omega)$ はそれぞれ $p_i(t)$、$p_r(t)$ のフーリエ変換である。

式（2・44）は、任意波形の圧力波をさまざまな波長の線形音波の重ね合わせとして表現することを意味している。これは、波動方程式が線形微分方程式であるため、解の重ね合わせが可能であることによるものである。

式（2・43）を用いれば、$F_i(\omega)$ と $F_r(\omega)$ の間には次式で示される関係が成り立つ。

$$F_r(\omega) = R\, F_i(\omega) \qquad (2 \cdot 45)$$

式（2・45）を式（2・44）の $p_r(t)$ に代入すれば

$$p_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R\, F_i(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2 \cdot 46)$$

式（2・46）は、任意波形の入射波を式（2・44）によりさまざまな波長の線形音波に分割し、この線形音波の１つ１つに対して式（2・43）による反射率を用いて反射波を求め、得られた反射波を重ね合わせることにより、元の任意波形の入射波に対する反射波を得ることを意味する。

一方、開口端では、$p_i(t)$ と $p_r(t)$ がともに現われるので、開口端での圧力波形 $p_e(t)$ は次式で与えられる。

$$p_e(t) = p_i(t) + p_r(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega)\left[1 + R\right] e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2\cdot47)$$

また、開口端より放射された放射波は、管外の空間を減衰しながら伝ぱする。この放射波により、管外の任意の点に生じる圧力変化ｐ（ｘ，ｔ）は、次式で与えられる。

$$p(x,t) = -2\, i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\rho a U_0(x,\omega)\right] e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2\cdot48)$$

ここで、 $U_0(x,\omega) = U_0(\omega)\, \sin\frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2 + \left(D/2\right)^2} - x\right)$

$U_0(\omega) = \frac{1}{\rho a} F_i(\omega)\left[1 - R\right]$ である。

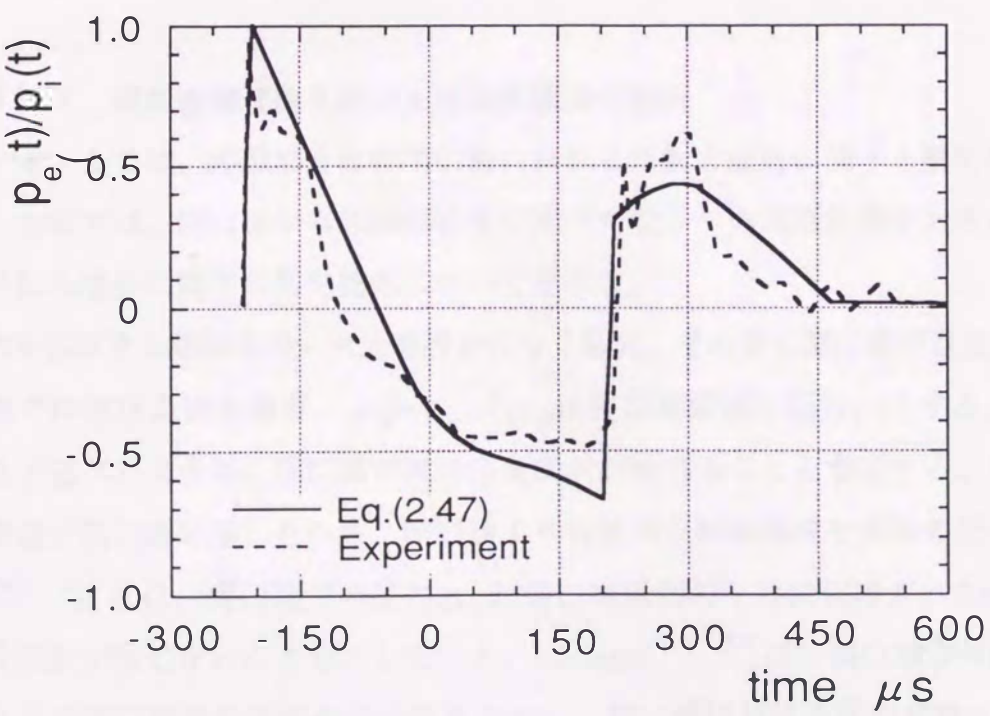


図２・10　非線形音波が放射されるときの開口端における圧力の時間的変化 (31)

式（2・44）から式（2・48）より、入射波の圧力波形のフーリエ変換$F_i(\omega)$が与えられれば、放射インピーダンスZ_rを用いて反射波の圧力波形$p_r(t)$や開口端における圧力変化$p_e(t)$、管外に生じる圧力変化$p(x, t)$を計算できる。

2kPaの強さのN波が開口端に達したとき、開口端に生じる圧力変化$p_e(t)$の式（2・47）による計算結果と実験結果との比較を、図2・10に示す。図2・10は、Nakamuraらの研究で得られた結果である[(31)]。図中の実線は式（2・47）による計算結果を、破線は実験結果を表わしている。図2・10より、計算結果と実験結果は比較的よく一致しており、非線形音波に対して線形音響理論を用いた解析が可能であることを示している。しかし、N波の強さが及ぼす影響に対しては、十分な議論がなされていない。

このように、開口端の音響インピーダンスが放射インピーダンスと等しいとする取り扱い方法は、Nakamuraらのほかに、後述するRudingerや小沢の研究でも行なわれている。

一方、Salikuddinら[(32)〜(34)]は、管内を伝ぱするN波の開口端における反射と放射について実験的な調査を行なっている。これらの研究では、N波の強さを変化させた場合や、開口端部分の断面積をノズルのように減少させた場合の影響が解析されている。実験結果からN波の開口端での反射率を求め、前述したLevineらによる線形音波に対する結果[(28)]との比較を行なっており、N波の波長の減少に伴い、両者の相違が顕著になることが示されている。

2・1・7　線形音響理論を用いた有限振幅波の解析

2・1・6では、非線形音波の開口端における反射と放射に関する解析例について述べたが、本節では、開口端から非線形音波に比べて強さや非線形効果が大きい有限振幅波が放出される場合に関する研究結果について述べる。

管内を伝ぱする衝撃波の一次元解析を行なう場合、その管に開口端が存在するときには、開口端での境界条件を通常、$p_e = p_0$（p_0は開口端周囲の圧力）とする。これは、2・1・2で述べたように、開口端で波の完全反射が生じることを意味する。しかし、実際には衝撃波が開口端に達したのち、開口端より複数の反射衝撃波や渦輪の発生が確認されている[(56)]。これは、開口端での圧力p_eが開口端周囲の圧力に保持されない、すなわち波の完全反射が生じないことを示している。Rudinger[(35)(36)]は、開口端から衝撃波が放出されるときの開口端での境界条件を得るために、開口端における圧力変動p_eを音響工学を用いた理論解析と実験により定量的に求めることを行なった。この研究でなされた理論解

析は、２・１・６で述べた、Nakamuraらの解析と原理的には同一である。つまり、線形音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いて、開口端における圧力変動p_eを計算している。Nakamuraらの解析法と異なる点は、開口端に到達した入射波の圧力変動ｐを次式で示されるように仮定したことである。

$$\begin{cases} p(t) - p_0 = 0 & \text{for} \quad t < 0 \\ p(t) - p_0 = e^{-\beta t} & \text{for} \quad t > 0 \end{cases} \qquad (2 \cdot 49)$$

ここで、ｔは入射波が開口端に達したときをｔ＝０とする時刻、p_0は開口端周囲の圧力で、大気圧とする。

Nakamuraらの解析と同様に、開口端に到達した入射波を次式のように表わす。

$$p - p_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2 \cdot 50)$$

ここで、$F_i(\omega)$は入射波のフーリエ変換であり、次式で示される。

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(t) - p_0\right] e^{i\omega t}\, dt \qquad (2 \cdot 51)$$

式（２・51）に式（２・49）を代入すれば、次式を得る。

$$F_i(\omega) = -\frac{p_1 - p_0}{2\pi i} \frac{1}{\omega + i\beta} \qquad (2 \cdot 52)$$

開口端で反射した反射波のフーリエ変換を$F_r(\omega)$とすれば、$F_i(\omega)$と$F_r(\omega)$の間には次式で示される関係が成り立つ。

$$F_r(\omega) = R\, F_i(\omega) \qquad (2 \cdot 53)$$

ここで、Ｒは式（２・43）で与えられる反射率である。

したがって、開口端から衝撃波が放出されるときの開口端における圧力p_eは、次式のよ

うになる。

$$p_e - p_0 = (p_1 - p_0) + \int_{-\infty}^{\infty} F_r(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2\cdot54)$$

式（2・54）に式（2・52）、式（2・53）を代入すれば、次式を得る。

$$I \equiv \frac{p_e - p_0}{p_1 - p_0} = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Z_r - 1)\, e^{-i\omega\tau}}{(Z_r + 1)(\omega + i\beta')}\, d\omega \qquad (2\cdot55)$$

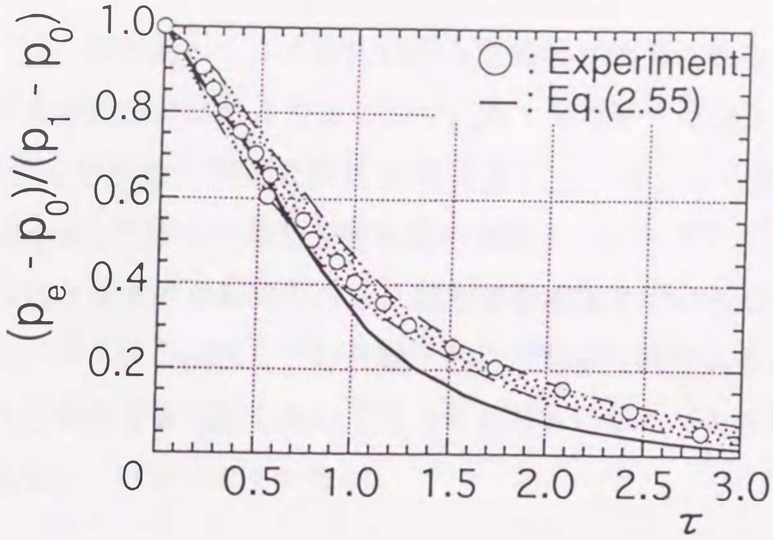
ここで、$\beta' = \beta D / a_0$，　$\tau = a_0 t / D$　、Z_rは放射インピーダンス、a_0は衝撃波前方の大気圧での音速である。

式（2・55）は開口端から衝撃波が放出される場合の開口端における圧力p_eを示すが、Rudingerはさらに式（2・55）を拡張し、$p(t) - p_0 = F(t)$で表わされる任意の圧力波に対しても開口端における圧力p_eを与える式を導出した。その式を以下に示す。

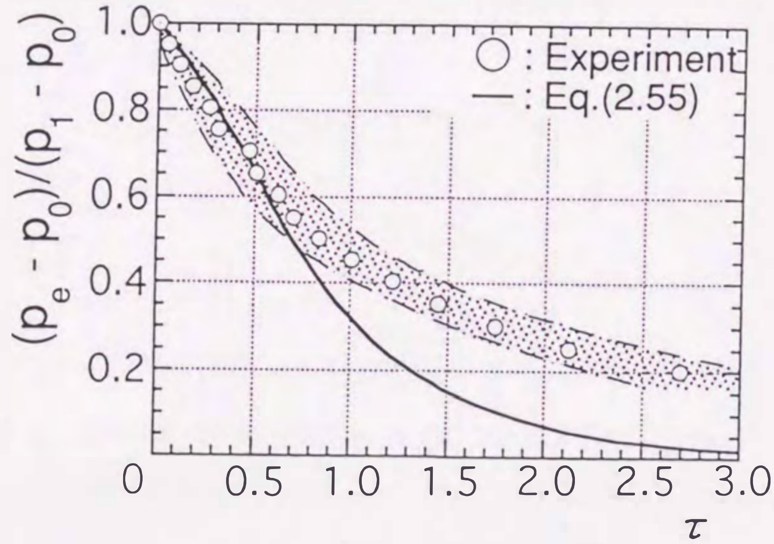
$$p_e(\tau) - p_0 = F(\tau_0)\, I(\tau - \tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dF(\theta)}{d\theta}\, I(\tau - \theta)\, d\theta \qquad (2\cdot56)$$

式（2・56）により、圧縮波が開口端に到達したときの開口端における圧力を求めることが可能である。

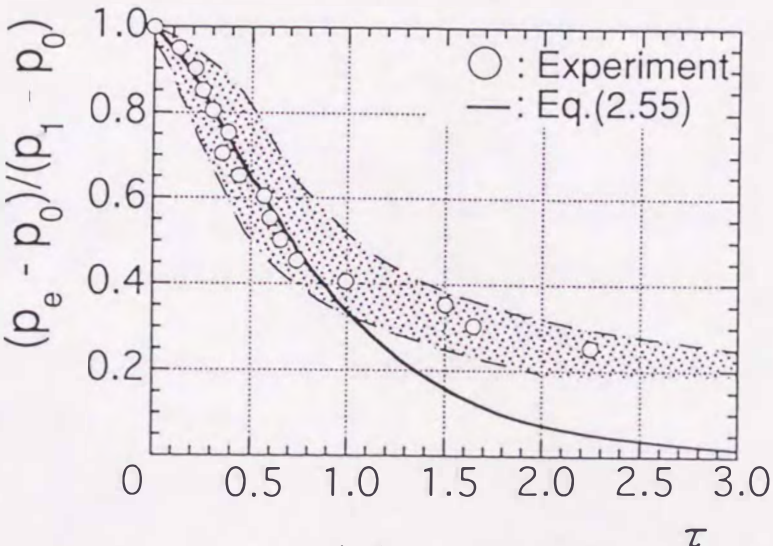
開口端から衝撃波が放出されるとき、開口端に生じる圧力p_eの式（2・55）による計算結果と実験結果との比較を図2・11に示す。図2・11の横軸は無次元化されたp_e、縦軸は無次元時間τである。図2・11（a）は入射衝撃波前後の圧力比がp_1/p_0=1.56の場合、図2・11（b）はp_1/p_0=1.74の場合、図2・11（c）はp_1/p_0=1.93の場合である。図中の実線は式（2・55）による計算結果を、〇印は実験結果をそれぞれ示し、斜線は実験の誤差範囲を表わす。これらの図より、入射衝撃波の強さが弱い場合には式（2・55）による計算結果と実験結果は比較的よく一致するが、入射衝撃波が強くなるにつれて、実験結果に対して式（2・55）による圧力p_eの方が時間的に早く減少する傾向が示される。



（a） $p_1/p_0=1.56$



（b） $p_1/p_0=1.74$



（c） $p_1/p_0=1.93$

図２・11　衝撃波が放出されるときの開口端における圧力の時間的変化 (35)

一方、小沢[1]は、新幹線のトンネル出口から圧縮波が放出されることにより形成されるパルス波の強さを理論的に求める方法として、第1章で述べた空力音響理論を用いる方法のほかに、線形音響理論を用いた解析法を提案している。この解析法は、前述したNakamuraらやRudingerと同様に、線形音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いてパルス波の強さを求めるものである。線形音響理論を用いることにより、パルス波の特性や圧縮波とパルス波の関係などの音響学的な考察が可能である。しかし、小沢の研究では、このような線形音響理論を用いて得られる計算結果とパルス波の強さの実測結果との十分な比較検討は、行なわれていない。

2・2　波により誘起される流れを考慮した解析法

2・1節で述べた音響理論では、その音源は主として振動板やスピーカなど振動する固体である。しかし、音波は振動する固体とは無関係に、流れそのものの中でも発生することが知られている[57]。つまり、空気中を伝わる音波は空気の体積変化の波であるから、ある領域中の一部に空気の体積変化が生じると音波が発生する。このような空気の体積変化は、空気中のある領域に応力が働いている場合や、空気の一部に物体力が作用するとき、あるいは空気のわき出しや吸い込みが存在する場合に発生する[58]。このように流体の非定常運動によって発生する音は空力音（aeroacoustic sound）[57]と呼ばれる。Lighthillは乱流領域からの空力音の解析を行い[59][60]、音響学的類推（acoustic analogy）の考えを提唱してLighthillの方程式を導出した。以後、Powellの渦音理論[61]を始めとして、Curle[62]やFfowcs Williams and Hall[63]による研究がなされ、空力音響学（aeroacoustics）と呼ばれる分野の基礎となった。本節では、Lighthillの方程式を中心に、空力音響学の理論について述べる。

2・2・1　Lighthillの方程式

図2・12に示すように、表面積Σの検査体積中に体積V_0の乱流領域と、密度ρ_0、圧力p_0の一様静止気体が存在する場合を考える。乱流領域では流体は非圧縮性と仮定し、一様静止気体中に放射される音波は十分弱いと考える。この場合の連続の式と運動量の式は、以下のように示される[64]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i}(\rho u_i) = 0 \qquad (2 \cdot 57)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} - \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \qquad (2 \cdot 58)$$

ここで、y_iは乱流領域中の任意点の位置座標である。また、τ_{ij}はストークスの応力テンソル[64]で、次式で表わされる。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (2 \cdot 59)$$

ただし、$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)$　、また、δ_{ij}はクロネッカーのデルタ、μは粘性係

数である。

式（2・57）の両辺を時間 t で微分し、式（2・58）の両辺の発散をとり、両式を整理すれば

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(\rho u_i u_j) \qquad (2 \cdot 60)$$

式（2・60）の両辺に $-a_0{}^2\nabla^2\rho$ （a_0は一様静止気体中における音速）を加えて整理すると

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_0{}^2\nabla^2\rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \qquad (2 \cdot 61)$$

ここで、T_{ij}はLighthillの応力テンソルで、次式で表わされる。

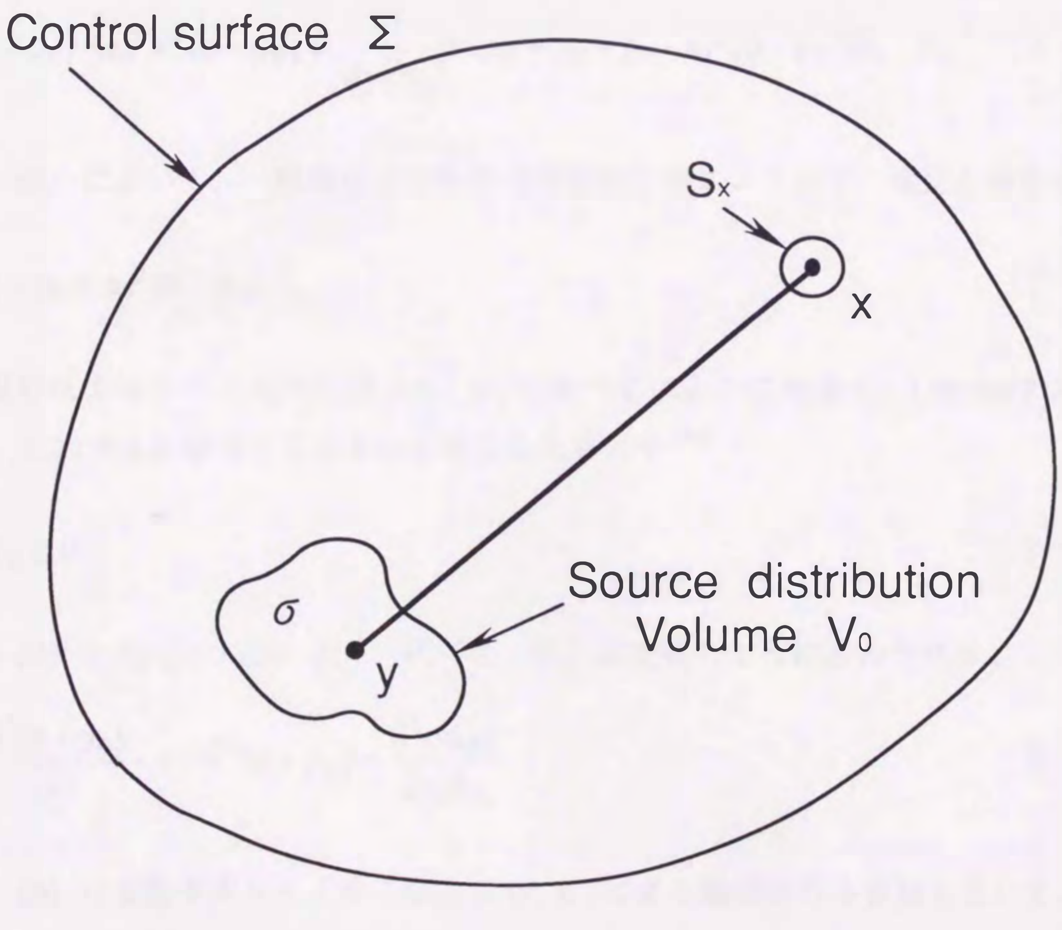


図2・12　空力音の解析モデルと使用記号

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + \left(p - a_0^2\rho\right)\delta_{ij} + \tau'_{ij} \qquad (2 \cdot 62)$$

ただし、$\tau'_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$、また、$\rho u_i u_j$ はレイノルズ応力である。

式（2・61）はLighthillの方程式である。このLighthillの方程式は、音速 a_0 の一様静止気体中に $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$ なる音源が存在するときの音場を表わす方程式と考えられる。線形音響理論によれば、このような音源は、4重極音源と等価である[58]。したがって、$\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$、すなわち応力テンソルの変動により生じた密度変動は、一様静止気体中に4重極音源が存在するときの密度変動として表わすことができる。これが音響学的類推（acoustic analogy）である[65]。また、乱流領域の外部では式（2・61）の右辺は0となり、前節で述べた線形音響理論の波動方程式と同一となる。

さて、圧力と密度の変動量をそれぞれ $p - p_0$、$\rho - \rho_0$ とし、これらを式（2・61）に代入すれば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho - \rho_0) - a_0^2\nabla^2(\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left\langle \rho u_i u_j + \left\{p - p_0 - a_0^2(\rho - \rho_0)\right\}\delta_{ij} - \tau'_{ij} \right\rangle \qquad (2 \cdot 63)$$

式（2・63）において、一様静止気体中の状態変化を等エントロピー変化とみなせば

$$p - p_0 \cong a_0^2(\rho - \rho_0) \qquad (2 \cdot 64)$$

また、粘性応力はレイノルズ応力 $\rho u_i u_j$ に比べてはるかに小さく、Lighthillの応力テンソル T_{ij} に対する影響はごく小さいと考えられるので[66]

$$\tau'_{ij} \cong 0 \qquad (2 \cdot 65)$$

式（2・64）と式（2・65）より、式（2・63）は次式のように表わされる。

$$\frac{\partial^2(\rho - \rho_0)}{\partial t^2} - a_0^2\nabla^2(\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} \qquad (2 \cdot 66)$$

式（2・66）は変動するレイノルズ応力 $\rho u_i u_j$ により励起される音場を表わす。この変動するレイノルズ応力が生じる領域の外部では、式（2・66）は前述のように線形波動方程式となる。

乱流領域中に時間的に変動する流体のわき出しがある場合、その流出量が時間tの関数として単位時間あたりq（t）で表わされるとすれば、式（2・66）は次式で表わされる。

$$\frac{\partial^2(\rho - \rho_0)}{\partial t^2} - a_0{}^2\nabla^2(\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial q}{\partial t} \qquad (2 \cdot 67)$$

式（2・67）から、わき出しの流出量qの時間的変化∂q/∂tにより音波が励起されることがわかる。したがって、わき出しが存在してもその流出量が時間的に一定であれば、わき出しによる音波は生じない。音響理論によれば、この∂q/∂tによる音源は単極音源と等価である[58]。

式（2・66）および式（2・67）により、流れ場内に乱流や時間的に変動するわき出しが存在する場合に励起される音波を理論的に表わすことができる。しかし、図2・12に示す一様静止気体中の点xに生じる密度変動を求める場合、乱流領域の体積V_0がきわめて小さい、すなわち音響工学で扱われる点音源に相当する場合では、式（2・66）および式（2・67）は有効であるが、音源の大きさを無視し得ない場合には、式（2・66）および式（2・67）を全体積にわたって積分する必要がある。よって、体積V_0の乱流領域により点xに生じる密度変動を以下に求める。

まず、式（2・66）および式（2・67）を変形して

$$\nabla^2\rho_a - \frac{1}{a_0{}^2}\frac{\partial^2\rho_a}{\partial t^2} = -\frac{\sigma(y,\, t)}{a_0{}^2} \qquad (2 \cdot 68)$$

ここで、$\rho_a = \rho - \rho_0$、また、σ（y， t）は式（2・66）および式（2・67）の音源項（右辺）を表わす。

図2・12に示すように、乱流領域の存在により点xに生じる密度変動をv、密度変動の伝ぱ速度を音速a_0とすれば、乱流領域に生じる密度変動ρ_aと点xに生じる密度変動vの間には、次式で表わされる関係が成り立つ。

$$v(x,\, y,\, z,\, t) = \rho_a(x,\, y,\, z,\, t - r/a_0), \qquad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (2 \cdot 69)$$

式（2・69）のvを式（2・68）に代入して整理すれば

$$\nabla^2 v + \frac{2r}{a_0}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{r_i}{r^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\} + \frac{\sigma(y,\, t - r/a_0)}{a_0{}^2} = 0 \qquad (2 \cdot 70)$$

式（2・70）の両辺に1/rをかけ、検査体積Vにわたって体積積分すれば

$$\iiint_V \frac{1}{r}\nabla^2 v\, dV(\mathbf{y}) + \iiint_V \frac{2}{a_0}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{r_i}{r^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right]\right\} dV(\mathbf{y})$$

$$+\frac{1}{a_0{}^2}\iiint_V \frac{\sigma(\mathbf{y},\, t - r/a_0)}{r}\, dV(\mathbf{y}) = 0 \qquad (2 \cdot 71)$$

一様静止気体中の点xが表面積S$_x$の空間に取り囲まれていると仮定し、式（2・71）の体積積分をグリーンの定理

$$\iiint_V \left\{\frac{1}{r}\nabla^2 v - v\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dV(\mathbf{y}) = \iint_{\Sigma + S_x} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS(\mathbf{y}) \qquad (2 \cdot 72)$$

を用いて面積分に変換し、整理すれば

$$\iiint_V \left\{\frac{1}{r}\nabla^2 v - v\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dV(\mathbf{y}) = -\frac{1}{a_0{}^2}\iiint_V \left\{\frac{\sigma(\mathbf{y},\, t - r/a_0)}{r}\right\} dV(\mathbf{y})$$

$$-\frac{2}{a_0}\iint_{\Sigma + S_x} n_i\frac{r_i}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) dS(\mathbf{y}) \qquad (2 \cdot 73)$$

ここで、式（2・72）の右辺の積分の第2項は、表面積S$_x$に対して次式のように計算される。

$$\iint_{S_x} v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x})\lim_{r\to 0}\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) r^2\, d\Omega$$

$$= 4\pi v(\mathbf{x}) \qquad (2 \cdot 74)$$

なお、点xが表面積S$_x$の空間中に存在しない場合、式（2・74）の右辺は0と定義する。式（2・72）と式（2・73）の左辺を消去し、式（2・74）を代入すれば、次式を得る。

$$4\pi v(\mathbf{x}) = \frac{1}{a_0{}^2}\iiint_V \frac{\sigma(\mathbf{y},\, t - r/a_0)}{r}\, dV(\mathbf{y})$$

$$(2 \cdot 75)$$

$$+\int_{\Sigma}\int\left\{\frac{2}{a_0}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS(\mathbf{y})$$

式（2・75）において、定義より

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left[\rho_a(\mathbf{y},\, t-r/a_0)\right]=\left[\frac{\partial \rho_a}{\partial n}\right]-\frac{1}{a_0}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \rho_a}{\partial t}\right] \qquad (2\cdot 76)$$

式（2・76）を式（2・75）の右辺に代入すれば

$$4\pi\rho_a(\mathbf{x},t)=\frac{1}{{a_0}^2}\int\int\int\frac{[\sigma(\mathbf{y})]}{r}dV(\mathbf{y})$$

$$+\int_{\Sigma}\int\left\{\frac{1}{a_0}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \rho_a}{\partial t}\right]-[\rho_a]\frac{\partial(1/r)}{\partial n}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \rho_a}{\partial n}\right]\right\}dS(\mathbf{y}) \qquad (2\cdot 77)$$

ここで、［　］は遅延時刻 $t-r/a_0$ における値を意味する。すなわち、ある関数 f に対して、$[f]=f(t-r/a_0)$ である。

式（2・77）は、変動する流体密度に対するKirchhoffの方程式である [64]。式（2・77）において、右辺第２項は乱流領域外部での音源により点 x に生じる密度変動を表わしている。前述したように、生成された変動の伝ぱ速度は a_0 であり、変動が生成され始めてからの時間を t とすれば、領域外部で生成された変動が及ぶ範囲は a_0t である。したがって、一様静止気体中の点 x が領域外部の音源より十分遠方の位置に存在するときには、この音源で生成された変動の影響は現われず、この場合には式（2・77）の右辺第２項は無視できる。よって、式（2・77）は次式のように表わされる。

$$4\pi\rho_a(\mathbf{x},t)=\frac{1}{{a_0}^2}\int\int_{V_0}\int\frac{[\sigma(\mathbf{y})]}{r}dV(\mathbf{y}) \qquad (2\cdot 78)$$

式（2・28）は、一様静止気体中の点 x での音場を求める際に、音源、すなわち乱流領域を微小な点音源の集合体とみなし、この各点音源から遅延時刻 $t-r/a_0$ に放射された音波により形成される音場の総和をとることを意味している。

式（2・78）の密度 ρ を式（2・64）を用いて圧力 p に変え、さらに、式（2・78）の右辺に変動わき出し項を代入すれば、次式を得る。

$$p_a(\mathbf{x}, t) - p_0 = \frac{1}{4\pi}\iint_{V_0}\int \frac{1}{r}\left[\frac{\partial q}{\partial t}\right] dV(\mathbf{y}) \qquad (2 \cdot 79)$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)$$

ただし、$m = \iint_{V_0}\int q(t - r/a_0)\, dV(\mathbf{y})$

式（2・79）は、一様静止気体中に流出量が時間的に変動するわき出しが存在するとき、わき出しより十分遠方の位置に生じる圧力変動を表わす。式（2・79）より、十分遠方の位置に生じる圧力変動は、わき出しからの距離rに反比例し、わき出しによる増加質量の時間的変化に比例することがわかる。

2・2・2　圧縮波とパルス波の強さとの関係

2・2・1では空力音響理論について述べ、流れの中に応力変動やわき出しなどが存在する場合に、これらにより音波が発生することを示した。本節では、この空力音響理論を用いて、圧縮波の初期波形と形成されるパルス波の強さとの関係を解析的に求める。すなわち、開口端からの圧縮波の放出により流れが誘起される現象を、一様な静止流体中にわき出しが存在するモデルにおきかえて解析する。2・1節で述べたように、音響理論は微小振幅の線形波である音波を記述する理論であるが、圧縮波のような有限振幅波に対しても、その局所部分に対しては適用することができるから(67)、局所部分に適用し、積分することによって上述の関係が得られる。

図2・13に示すような、無限大のバッフル板を有する直径Dの円管の開口端から、単位時間に質量mのわき出しがあるような半空間の三次元音場を考える。バッフル板の存在により、バッフル板がない場合と比べて放射空間が半分になるため、開口端下流の音場での圧力変化は、バッフル板がないときの圧力変化の2倍となる(30)。したがって、開口端からの距離rがDに比べ十分大きい遠距離場（r≧D）での圧力変化Δp（r，t）は、式（2・79）の右辺を2倍して

$$\Delta p(r,t) = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right) \qquad (2 \cdot 80)$$

なお、Δｐ（ｒ，ｔ）はゲージ圧であり、以後の解析において、圧力にΔを付けた場合はゲージ圧を表わす。

いま、図２・14に示すように、圧縮波ａｂが開口端Ｏに向けて、左から右に伝ぱしているとする。図２・14の横軸は管軸方向の距離ｘ、縦軸はゲージ圧力Δｐで、図２・14には二つの異なる時刻における圧力波形を示している。圧縮波Δp_iによって誘起される流れの速度をu_iとすれば、$\Delta p_i = \rho_1 a_1 u_i$の関係が成り立つ(67)。また、開口端における流れの流出速度をu_eとすれば、開口端から流出する質量は$m = (\pi/4)\ D^2 \rho_1 u_e$である。さらに開口端から膨張波が反射されるという条件により、$u_e \fallingdotseq 2u_i$という関係が得られる。これらの関係を用いて式（２・80）を変形すると

$$\Delta p(r,t) = \frac{D^2}{4ra_1}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_i \qquad (2 \cdot 81)$$

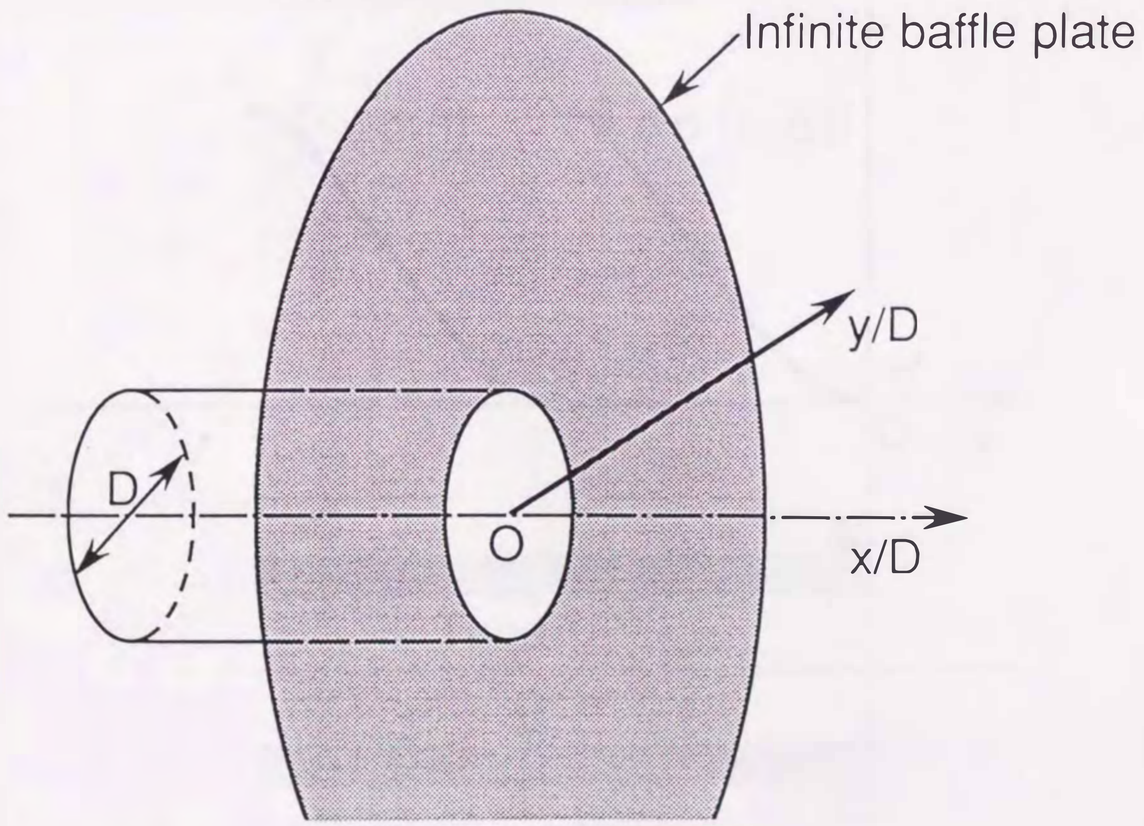


図２・13　無限バッフル板を有する円形開口端

ここに、（$\partial\Delta p/\partial t$）$_i$は圧縮波の最大圧力こう配である。式（2・81）より、遠距離場における音圧Δpは、距離rに反比例する。一方、近距離場における管中心軸上の圧力に対しては、2・1・3で導出した式（2・26）をもとに、波長λの波に対して次式が成り立つ。

$$\Delta p(r,t) = \frac{2\lambda}{\pi a_1}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_i \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{r^2 + (D/2)^2} - r\right)\right\} \qquad (2\cdot 82)$$

式（2・81）と式（2・82）は、遠距離場と近距離場のいずれにおいても、圧力変化Δpは、開口端での圧縮波の最大圧力こう配（$\partial\Delta p/\partial t$）$_i$に比例することを示している。

一方、遠距離場において、管の開口端からの距離rにおけるパルス波の強さΔp_{max}は、式（2・81）の右辺が最大のときに得られる。すなわち

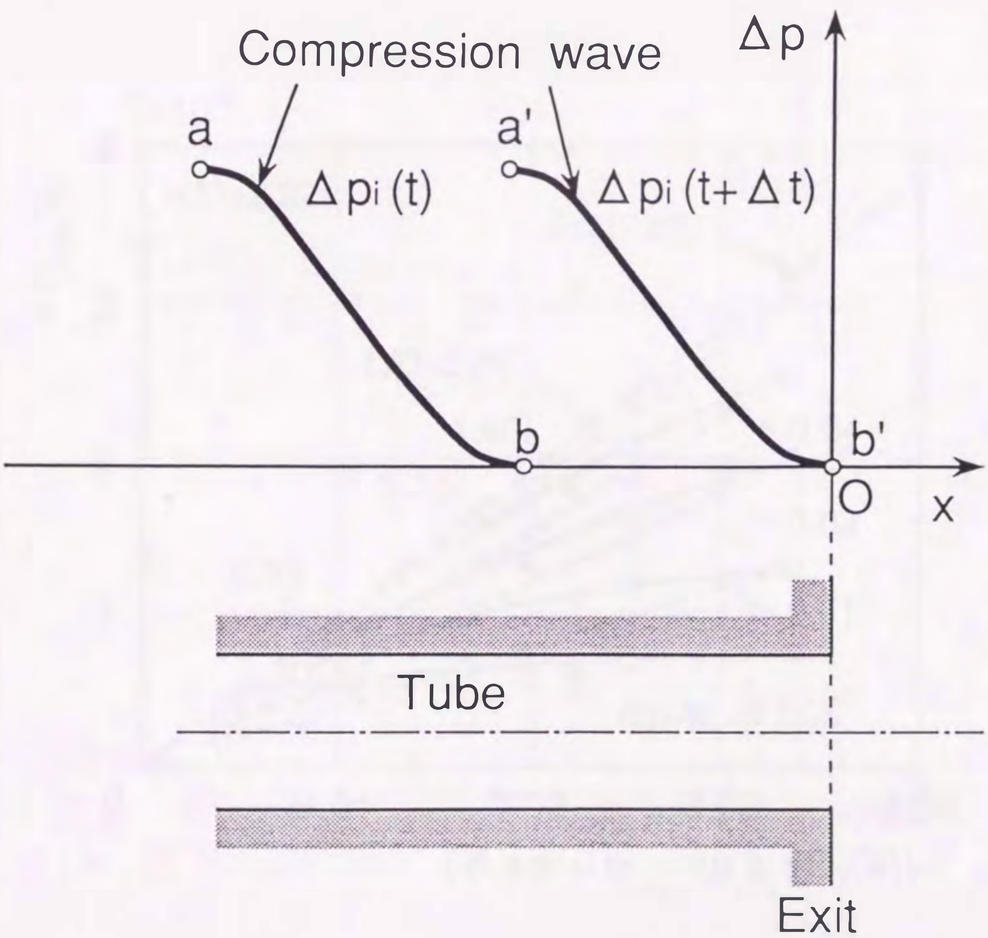


図2・14　管内を伝ぱする圧縮波

$$\Delta p_{max}(r) = \frac{D^2}{4ra_1}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_{i,max} \tag{2・83}$$

同様に近距離場においては、式（2・82）より

$$\Delta p_{max}(r) = \frac{2\lambda}{\pi a_1}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right)_{i,max} \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\sqrt{r^2 + (D/2)^2} - r\right)\right\} \tag{2・84}$$

管中心軸上の $x/D=2.22$ において得られた、パルス波の強さ Δp_{max} と圧縮波の最大圧力こう配 $(\partial \Delta p/\partial t)_{i,max}$ との関係を、図2・15に示す。図2・15の縦軸と横軸は、いずれも無次元化している。図2・15に示された結果は、式（3・11）（第3章3・2節参照）で与えられる圧縮波が、開口端より放出されるときに形成されるパルス波の強さを表わしている。図中の一点鎖線は式（2・83）による計算結果を、○印は第5章の5・1節で述べるTVD法による数値解析結果をそれぞれ示しており、実線と破線は圧縮波による圧力

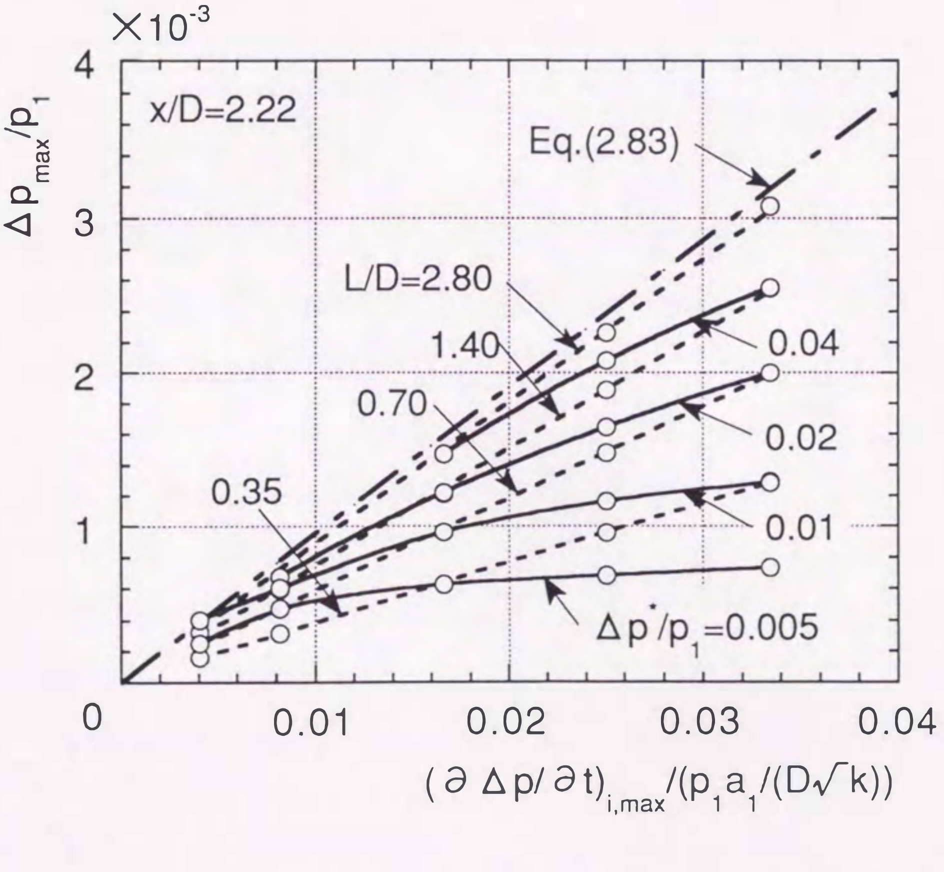


図2・15　遠距離場におけるパルス波の強さと初期圧縮波の最大圧力こう配との関係

上昇値$\Delta p^*/p_1$と圧縮波の長さL/D（Δp^*やLの詳細については、第3章の3・2節参照）が同じ値の波形の計算点を結んだ線である。数値解析では、第3章の3・2節に示す式（3・11）において、$\Delta p^*/p_1$=0.005～0.04、L/D=0.35～2.80の範囲で変化させている。それぞれの波形における圧力の時間的変化の最大値$(\partial \Delta p/\partial t)_{i,max}$は、式（3・12）より計算できる。図2・15より、計算点はいずれも式（2・83）による値より小さく、$(\partial \Delta p/\partial t)_{i,max}$が同一でも$\Delta p^*/p_1$とL/Dの値によってかなり異なることがわかる。このことは、パルス波の強さを式（2・83）では正確に予測できないことを示している。

2・3　従来の解析法における問題点

第2章では、まず、2・1節において、線形音波の開口端での反射と放射現象や、放射波の距離減衰や指向性などの特性に対する線形音響理論による解析結果ついて述べた。また、開口端からの非線形音波の放射や、衝撃波、あるいは圧縮波の放出現象に線形音響理論を適用したときの結果について考察した。次に、2・2節では空力音響理論について述べ、この空力音響理論を用いて開口端からの圧縮波の放出により形成されるパルス波の強さを解析的に求めることを行った。これらの結果から得られる、従来の解析方法における問題点を以下に述べる。

（1）線形音響理論における解析結果から、線形音波の開口端での反射と放射に対する開口端補正や、開口端での線形音波の反射率と放射率、あるいは放射された音波の指向特性が明らかにされた。これらの結果は微小振幅の線形音波に対するものであり、線形音響理論を用いて有限振幅波である圧縮波の反射と放射現象を解析する場合には、その適用範囲を考慮する必要がある。

（2）非線形音波や衝撃波、あるいは圧縮波などの圧力波が開口端に達したときの開口端における反射率や開口端における圧力の時間的変化、あるいは開口端から放出された波の強さを解析的に得る手段として、線形音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いる方法と、空力音響解析を用いる方法がこれまでに報告されている。

（a）線形音響理論の放射インピーダンスと波の重ね合わせを用いる方法を非線形音波や衝撃波に適用した場合、非線形音波や衝撃波が弱い場合には実験結果と良好な一致を示すが、強い場合ほど両者の相違は増加する。このように、圧力の高い、いいかえれば振幅の大きな圧力波に対しては、この方法の適用は問題がある。また、この方法ではフーリエ変換を用いるので、結果を得るまでに、比較的多くの労力を必要とする。

（b）空力音響解析を圧縮波に適用した場合、形成されるパルス波の遠距離場における波形は式（2・81）で与えられ、その強さΔp_{max}は式（2・83）で表わされる。すなわちΔp_{max}は、圧縮波の最大圧力こう配$(\partial \Delta p/\partial t)_{i,max}$に比例する。一方、数値解析による$\Delta p_{max}$は、$(\partial \Delta p/\partial t)_{i,max}$の増加とともに大きくなるが、両者の間には比例関係は成り立たない。したがって、式（2・83）を用いて、パルス波の強さを正確に予測することはできない。