フレーゲの論理哲学

田畑，博敏

https://doi.org/10.11501/3135134

出版情報：九州大学，1997，博士（文学），論文博士
バージョン：

第Ⅴ部　破綻：パラドクス

第８章　ラッセルのパラドクス
と論理主義の再構成

はじめに

本章および次章ではラッセルのパラドクスを取り上げる。フレーゲの『算術の基本法則』に発生した矛盾であるラッセルのパラドクスとそれの克服の問題こそ，「算術は論理学に還元できる」というフレーゲが生涯を賭けて遂行しようとした「論理主義」の帰趨を伺う試金石である。パラドクスの発生と，フレーゲ自身も寄与したパラドクスの克服の行き詰まりは，「論理主義」の破綻を意味するのだろうか？それによって，「論理主義」に類似した数学の哲学はすべて望みがないのだろうか？本章の目的は，必ずしもそうではないこと，「論理主義」は復活し得ること，少なくとも論理的に再構成し得ること，をN．コッキアレッラが提出した解釈[1]に拠って示すことである。以下，本章の概要を示す。まず，フレーゲの「論理主義」に決定的な打撃を与えたパラドクスのラッセルによる発見の経緯を見て（第１節），フレーゲ自身のそれに関するインフォーマルな説明を聞く（第２節）。ついで，矛盾の導出をフレーゲの体系に即して確認した（第３節）のち，フレーゲの体系修正の試みにも関わらず，新たな矛盾が発生したという歴史的経過に触れる（第４節）。そうして，新たな反省に基づく立て直しを図り（第５節），「論理主義」の論理的再構成を試みる（第６節）。更に，この再構成された体系の（相対的な）無矛盾性を確認して（第７節），一応の結論と見通しに至る（第８節）。

１．パラドクスの発見

まず，フレーゲの『算術の基本法則』（ＧＧＡ）[2]の中に論理的矛盾という形で発見されたパラドクスがいかなるものであったか，ということを確認することから始める。初めてのフレーゲ宛の手紙（1902年 6月16日付）において，ラッセルは以下のように問題のパラドクスに触れている。

「ｗを，“それ自身に述語づけられない述語である”という述語だとします。ｗはｗに述語づけられるでしょうか？［ｗがｗに述語づけられるとしても，述語づけ

られないとしても，その］どちらからも，矛盾が生じます。従って，wは述語ではない，と結論しなければなりません。同様に，一つの全体として見られたとき，それ自身の要素ではない諸クラスから成る（一つの全体としての）クラスというものも，存在しません。以上のことから，一定の状況下では，定義可能な集合が一つの全体を形成しないことがある，と私は結論します。」(3)

（［　］内の補足は筆者）

ここでは，二つの異なる形でパラドクスが述べられている。一つは，言わば大雑把な形での(4)「述語づけ」の語法で述べられた矛盾であり，他方は，クラス（ないしは集合）に関する「メンバー性」の語法で述べられた矛盾である。

第一の定式化が大雑把なものであるにせよ，そのような定式化の背景となる発想がきわめて異常なものであるとか，または文法的に破格な現象を扱うものだ，という訳ではもちろんない。なるほど，通常，われわれは言葉によって，言葉以外の「もの」や「こと」に言及する場合が多い。例えば，「このリンゴはまだ酸っぱい」とか「今度納入されたワープロの印字装置はよく故障する」等々と。しかし，場合によっては，言葉によって，対象としての言葉そのものについて，あるいは言葉の働きや性質について語ることもある。例えば，「“静かだ”は形容詞ではなく形容動詞に分類される」とか「ギリシア語のアオリストの用法はフランス語の単純過去のそれに似ている」等々と。従って，述語というものを，それ自身に述語づけられか否かで分類することは，当然考えられる。述語がそれ自身に述語づけられるのは，述語の表現している性質が，対象としての述語そのものに当てはまるとき，かつそのときにかぎられる。例えば，「日本語で表現できる」という述語は，れっきとした日本語で表現されている（すなわち，この述語が表現する性質にそれ自身が当てはまる）から，それ自身に述語づけられる。また，「無臭である」という述語も，対象としてのこの述語（この言葉）そのものに匂いはないから，それ自身に述語づけられる。しかし，“lang”というドイツ語は，ドイツ語の単語としては“zusammentreffend”や“deutschamericanisch”に比べると決して長くはないから，それ自身に述語づけられるとは言えないであろうし，「甘味のある」という述語も，（比喩的に使われないかぎり）それ自身に述語づけられはしない。こうして，あらゆる述語を，それ自身に述語づけられるものとそうでないものに分類しようとすることは，さして不自然な企てではない。しかし，「それ自身に述語づけられない」という，述語分類のための言葉を新たな述語と認定し，この述語について，これがいずれの部類の述語に分類されるかと問うた途端，背理に

陥るのである。すなわち，「それ自身に述語づけられない」という述語がそれ自身に述語づけられるならば，この述語は自らが表現する性質（不可自己述語性）をそれ自身有するから，その性質によって，この述語はそれ自身に述語づけられないことになる。逆に，述語「それ自身に述語づけられない」がそれ自身に述語づけられないならば，この述語は自ら表現している性質を有するから，この述語はそれ自身に述語づけられることになる。こうして，いずれに分類されてもその反対の類に戻されてしまう。これは背理である。

これに対して，第二の定式化では，クラスとその要素の関係，すなわち，「メンバー性（要素性）」の語法によって，矛盾の導出が語られる。「対象ａはクラスＡのメンバーである」を“ａ∈Ａ”と記すならば，今日の標準的な語法（第一階述語論理）では，以下のような手順で矛盾が導かれる。まず，つぎのような，内包の原理（comprehensive principle)と呼ばれる法則が前提されている，と考えられる(5)。

（ＣＰ）　$\exists y \forall x\ (x \in y \equiv Fx)$　…………[1]

（xについての任意の述語Ｆが与えられたとき，Ｆであることが，それの要素であることの必要十分条件であるような，クラスyが存在する）

“Fx”として特に，“$\neg(x \in x)$”（xはそれ自身に属さない，それ自身の要素ではない）を取る。すると，上の[1]より，

$\exists y \forall x\ (x \in y \equiv \neg(x \in x))$　…………[2]

が直ちに導かれる。この存在命題[2]で存在が主張されているようなクラスを“R”とする。そのとき，[2]より

$\forall x\ (x \in R \equiv \neg(x \in x))$　…………[3]

（すべてのものについて，Ｒに属することがそれ自身に属さないことの必要十分条件である）

となる。全称命題[3]が前提する任意の対象のうち，特にクラスＲを取る（全称例化）と[3]より，

$R \in R \equiv \neg(R \in R)$　…………[4]

が出て，これから命題論理により，

$R \in R \wedge \neg(R \in R)$　…………[5]

が導かれる。これは矛盾である。

2．フレーゲ自身のインフォーマルな説明

それでは，フレーゲ自身は，ラッセルの発見したパラドクスをどのように理解し，説明したのであろうか？フレーゲにとって，述語づけは，基本的に「対象が概念に帰属する（fallen unter）」という関係を表現するものである。「ａはＦである（対象ａが性質Ｆを持つ）」（Ｆａ）と語ることは，対象ａの概念Ｆへの帰属関係を主張することである。フレーゲの場合，クラスは概念の外延として位置づけられる。彼は『算術の基本法則』第II巻の「あとがき」[6]の冒頭で，パラドクスの出現の経緯を，まず日常語によって，次のように説明している（以下はこの説明の再構成である）。

人間のクラスについて，それが人間であると主張するひとは誰もいない。ここに，「それ自身に属さない（それ自身の要素ではない）クラス」の例がある。従って，

「ξはそれ自身に属さない（それ自身の要素ではない）クラスである」

という概念があることになる。そして，この概念の外延は，

「それ自身に属さない（それ自身の要素ではない）諸クラスのクラス」

である。これを“Ｃ”とおく。すなわち，

Ｃ＝それ自身に属さないクラスのクラス

とする。

さて，このとき，

$$\boxed{\text{CはCに属するか？}}$$

という問題が起こる。この問題に取り組む際，確認しておくべきことは，概念と，概念の外延としてのクラスとの間に成り立つ，二つの原則である。その一つは，

（※）対象ａが概念Ｇに帰属する（fallen unter)とき，ａはその概念Ｇの外延 $'\varepsilon G(\varepsilon)$ であるクラスに属する，

という原則であり，もう一つは，

（※※）対象ａがクラスに属するとき，ａは，当のクラスがそれの外延 $'\varepsilon G(\varepsilon)$ となっているところの概念Ｇに帰属する，

という原則である[7]。

さて，ＣはＣに属するか？

（i）ＣがＣに属する

と仮定する。このとき，原則（※※）によって，Ｃは，クラスＣがそれの外延となっているところの概念，すなわち「ξはそれ自身に属さないクラスである」という概念に帰属する。言い換えると，ＣはＣに属さない。以上により，

ＣがＣに属するならば，ＣはＣに属さない

ということになる。

逆に，

（ii）ＣがＣに属さない

と仮定する。すると，このとき，Ｃはそれ自身に属さないクラスの一つである。言い換えると，Ｃは「ξはそれ自身に属さないクラスである」という概念に帰属する。それゆえ，原則（※）によって，Ｃは，この概念の外延であるクラス，つまり，それ自身に属さない諸クラスのクラス，すなわちＣに属する。以上により，

ＣがＣに属さないならば，ＣはＣに属する

ということになる。

こうして，いずれにせよ，論理的矛盾（ＣはＣに属し，かつ属さない）に陥る。

3．矛盾の形式的導出と原因の摘出

パラドクスについて日常語でインフォーマルな説明を与えた後で，フレーゲは，『算術の基本法則』の体系内部で矛盾が導かれることを，彼の概念記法によって示している。その過程で，矛盾の導出に使われた諸原理の中で「疑わしい」ものを検討し直すことによって，矛盾発生の原因を突きとめようとする。それは以下のようになされる[8]。（記法は一部現在のものに改める。）

まず，「Δはそれ自身に属さないクラスである」は，

$$\exists G(\,'\varepsilon G(\varepsilon)=\Delta \ \wedge \ \neg G(\Delta))$$

と書ける。そこで，「それ自身に属さない諸クラスのクラス」を“Ｃ”と略記する：

$$C=\,'\alpha\exists G(\,'\varepsilon G(\varepsilon)=\alpha \ \wedge \ \neg G(\alpha)) \qquad \cdots\cdots(〒)$$

すると，この略記法（〒）によって，「Ｃはそれ自身に属さないクラスである」は，

$$\exists G(\,'\varepsilon G(\varepsilon)=C \ \wedge \ \neg G(C))$$

と表現される。基本法則Ｖの半分と同値な法則（Ｖｂ），すなわち $'\varepsilon F(\varepsilon)=$

${}'\alpha G(\alpha) \supset (Fx \equiv Gx)$ によって,

$$
\begin{aligned}
&{}'\varepsilon F(\varepsilon) = {}'\alpha \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = \alpha \ \wedge \neg G(\alpha)) \\
&\supset (F(C) \equiv \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C))
\end{aligned}
$$

である。これと，上の（〒）により,

$$
\begin{aligned}
&{}'\varepsilon F(\varepsilon) = C \\
&\supset (F(C) \equiv \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C))\text{。}
\end{aligned}
$$

これと，基本法則（Ⅲa）：$(a \equiv b) \supset (f(b) \supset f(a))$ の事例,

$$
\begin{aligned}
&(F(C) \equiv \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C)) \\
&\supset (\exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C)) \supset F(C))
\end{aligned}
$$

から命題論理によって,

$$
\exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C)) \supset ({}'\varepsilon F(\varepsilon) = C \supset F(C)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha)
$$

（α）の"F"を全称化して,

$$
\exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C)) \supset \forall G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \supset G(C)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\beta)
$$

つまり，Cがそれ自身に属さないクラスであれば，Cはそれ自身に属するクラスである。

他方，基本法則（Ⅱb）：$\forall F(M_\beta F(\beta)) \supset M_\beta G(\beta)$ により,

$$
\forall G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \supset G(C)) \supset ({}'\varepsilon F(\varepsilon) = C \supset F(C)) \cdots\cdots (\gamma)
$$

（γ）で，"$F(\xi)$"を"$\exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = \xi \ \wedge \neg G(\xi))$"とすると,

$$
\begin{aligned}
&\forall G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \supset G(C)) \\
&\supset [\,{}'\alpha \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = \alpha \ \wedge \neg G(\alpha)) = C \\
&\qquad \supset \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C))\,] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\delta)
\end{aligned}
$$

ここで，上の略記法（〒）により，${}'\alpha \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = \alpha \wedge \neg G(\alpha)) = C$ であることに注意すると，（δ）から,

$$
\begin{aligned}
&\forall G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \supset G(C)) \\
&\qquad \supset \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \ \wedge \neg G(C)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\varepsilon)
\end{aligned}
$$

が導かれる。つまり，Cがそれ自身に属するならば，Cはそれ自身に属さないクラスである。この（ε）から，定理（Ⅰg）[9]：$(p \supset \neg p) \supset \neg p$ によって,

$$
\exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \wedge \neg G(C))\text{。} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\zeta)
$$

（ζ）と（β）から

$$
\forall G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = C \supset G(C)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\eta)
$$

ところが，命題（ζ）と（η）は矛盾である。誤りは法則（Ⅴb）にしかあり得ない，従って，（Ⅴb）は偽であるに違いない。

こうして，フレーゲの探索によって捜査線上に浮かび上がってきた最有力の容疑者（矛盾を引き起こした原因）は，法則（Ⅴb），すなわち,

$$
(\text{Ⅴb}):\quad {}'\varepsilon F(\varepsilon) = {}'\alpha G(\alpha) \supset (Fx \equiv Gx) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots[6]
$$

という原理であった。これは，まさに以前からその自明性についてフレーゲ自身が幾分かの懸念を抱きながらも基本法則とせざるを得なかった[10]ところの法則（Ⅴ）

$$
(\text{Ⅴ}):\quad {}'\varepsilon F(\varepsilon) = {}'\alpha G(\alpha) \equiv \forall x (Fx \equiv Gx) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots[7]
$$

の半分：${}'\varepsilon F(\varepsilon) = {}'\alpha G(\alpha) \supset \forall x (Fx \equiv Gx)$ と同値である。実際，矛盾を引き起こした原因である（Ⅴb）の否定形が，直接に他の諸原理から導けるのである。（上の導出が（Ⅴb）の誤りであることの間接証明ならば，今度は同じことの直接証明が与えられることになる。）この直接的な（Ⅴb）の否定の導出について，フレーゲはまずインフォーマルに説明した後，二通りの形式的な導出[11]を実行して見せる。以下で，そのインフォーマルな説明を聞こう。（形式的導出は省く。）

まず，関数の値域（Werthverlauf）というもの——これの特殊例が概念の外延である——は，その存立に疑わしい点があるので，『算術の基本法則』第Ⅰ巻§25での一般的な第二階関数"$M_\beta\ \phi(\beta)$"の記法を用いて,

$$
{}'\alpha \exists G({}'\varepsilon G(\varepsilon) = \alpha \wedge \neg G(\alpha))
$$

すなわち，"C"は

$$
M_\beta \exists G(M_\beta\ G(\beta) = \beta \wedge \neg G(\beta))
$$

で置き換える。基本法則（Ⅱb）：$\forall G M_\beta G(\beta) \supset M_\beta F(\beta)$ で，第二階関数："$M_\beta \phi(\beta)$"として，"$M_\beta \phi(\beta) = a \supset \phi(a)$"を取り，第一階関数"$F(\xi)$"として，"$\exists G(M_\beta G(\beta) = \xi \wedge \neg G(\xi))$"を取る。すると，基本法則（Ⅱb）の事例としてつぎのことが成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\forall G(M_\beta G(\beta) = a \supset G(a)) \supset [\,\{M_\beta \exists G(M_\beta G(\beta) = \beta \wedge \neg G(\beta))\} = a \\
&\qquad\qquad \supset \exists G(M_\beta G(\beta) = a \wedge \neg G(a))\,]\text{。}
\end{aligned}
$$

これは"$p \supset (q \supset \neg p)$"という形なので対偶と移入律と巾等律により，次の"$p \supset \neg q$"の形の式を得る：

$$\forall G\,(M\beta G(\beta) = a \supset G(a)) \supset$$

$$\neg\,[M\beta \exists G(M\beta G(\beta) = \beta \wedge \neg G(\beta)) = a] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mu)$$

再び対偶により，

$$[\ M\beta \exists G(M\beta G(\beta) = \beta \wedge \neg G(\beta)) = a\ ]$$

$$\supset\ \exists G\,(M\beta G(\beta) = a \wedge \neg G(a))。\quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\nu)$$

ここで，“$\exists G\,(M\beta\ G(\beta) = \xi \wedge \neg G(\xi))$” の代わりに “$F(\xi)$” と置き，“$a$” の代わりに “$M\beta F(\beta)$” と置くと，$(\nu)$ は，

$$“M\beta F(\beta) = M\beta F(\beta) \supset F(M\beta F(\beta))”$$

となっているから，先件が削除されて，結局 (ν) より

$$F(M\beta F(\beta))$$

を得る。すなわち，第一階関数 $F(\xi)$ がアーギュメントのときの，第二階関数 $M\beta\phi(\beta)$ の値 $M\beta F(\beta)$ が，元の第一階関数に帰属する。

他方，すぐ上と同じ置き換えによって，(ν) から，

$$\exists G\,[M\beta G(\beta) = M\beta F(\beta) \wedge \neg G(M\beta F(\beta))]$$

を得る。すなわち，第二階関数 $M\beta\phi(\beta)$ のアーギュメントとなったとき，$F(\xi)$ がそうなったときの値 $M\beta F(\beta)$ と同じ値 $M\beta G(\beta)$ を取る（i.e.$M\beta G(\beta) = M\beta F(\beta)$）が，しかし，この値 $M\beta G(\beta)$ つまり $M\beta F(\beta)$ は，それ自身（$= G(\xi)$）には帰属しない，そういう概念 $G(\xi)$ が存在する。言い換えると，一アーギュメントの第一階関数をアーギュメントとして取るすべての第二階関数 $M\beta\phi(\beta)$ に対して，次のような二つの概念 $F(\xi)$，$G(\xi)$ が存在する：

$$M\beta F(\beta) = M\beta G(\beta)$$

であるが，しかし

$$F(M\beta F(\beta)) \ \text{かつ}\ \neg G(M\beta F(\beta))$$

である，つまり，

$$M\beta F(\beta) = M\beta G(\beta) \supset F(M\beta F(\beta)) = G(M\beta F(\beta))$$

ではない！

ここに，法則（Vb）：$'\varepsilon F(\varepsilon) = {'\alpha} G(\alpha) \supset (Fx \equiv Gx)$ の反例（に相当するもの）が存在する。

こうして，フレーゲは，法則（Vb）の否定を他の法則から直接に導くことによって，矛盾発生の真の原因を，この法則（Vb）と断定する。

4．体系の修正と新しい矛盾

法則（Ｖｂ）の否定形に到る導出過程を観察することによって，フレーゲは，（Ｖｂ）の反例となる二つの概念――すなわち，それらの外延は同一であるが，その外延が一方の概念に帰属しても他方の概念には帰属しないような二つの概念――に，「概念 ϕ の外延である」という（第二階の）概念が関与していることに気づく。これまで，「外延」の同一性の基準は，[7] の法則（Ｖ）によって与えられていたが，（Ｖ）の半分である（Ｖｂ）（＝[6]）が否定されるかぎり，いまや新しい基準が要求される。フレーゲはそれを次のものとする：

「一方の概念の外延が他方の概念の外延と同一であるのは，まさしく次の場合である，すなわち，第一の概念に帰属する対象が，その第一の概念の外延を除いて，すべて第二の概念に帰属し，また逆に，第二の概念に帰属する対象が，その第二の概念の外延を除いて，すべて第一の概念に帰属する場合」(12)。

すると，法則（Ｖ）に取って代わるべきものは，

$$(V')\ :\ {'\varepsilon} F(\varepsilon) = {'\alpha} G(\alpha)$$

$$\equiv\ \forall x\,[x \neq {'\varepsilon} F(\varepsilon) \wedge x \neq {'\alpha} G(\alpha) \supset (Fx \equiv Gx) \cdots [8]$$

であり，矛盾の元凶と見られた（Ｖｂ）に取って代わるべきものは，

$$(V'b)\ :\ {'\varepsilon} F(\varepsilon) = {'\alpha} G(\alpha) \supset [x \neq {'\varepsilon} F(\varepsilon) \supset (Fx \equiv Gx)] \quad \cdots\cdots\cdots [9]$$

となる。このとき，確かに，以前のような形（第３節参照）での矛盾は防止することができる。（事実，こうなる。$F(\xi)$ を，$\exists F({'\varepsilon} F(\varepsilon)) = \xi \wedge \neg F(\xi))$，つまり「$\xi$ はそれ自身に帰属しない概念の外延である」とし，$C = {'\alpha} \exists F({'\varepsilon} F(\varepsilon) = \alpha \wedge \neg F(\alpha))$ とし，“x” に C を代入すると，（V′b）より，$C = {'\alpha} G(\alpha) \supset [C \neq C \supset \{\exists F({'\varepsilon} F(\varepsilon) = C \wedge \neg F(C)) \equiv G(C)\}]$。ここで，$C \neq C$ は常に偽であるから，この最後の式は常に真である。すなわち，そこから（Ｖｂ）の反例は必ずしも導けない。）

フレーゲはこの修正によって，『算術の基本法則』の体系が維持できると考えたようである。ところが，後になって，フレーゲの修正案（V′b）に対応する法則を含む体系から矛盾が導けることが見出された(13)。クワインは，（V′b）のクワイン版である，

$$\forall y\,[y \neq \hat{x}F(x) \supset (y \in \hat{x}F(x) \equiv F(y))] \quad \cdots\cdots\cdots [10]$$

（概念Fに対応するクラス抽象体$\hat{x}$F(x) 以外のすべてのものは，

このクラス抽象体に属するときかつそのときにかぎり，Fである）

という仮定と，少なくとも二つの対象が存在することを主張する

$$\exists x \exists y\ (x \neq y) \qquad \cdots\cdots[11]$$

という仮定，および基本的な他のいくつかの仮定と定義から，矛盾を導出して見せた(14)。（実際の導出は本章の「補足」を参照）

5．論理主義は死んだ？──反省と展望──

それでは，新たな矛盾の出現によってフレーゲの体系は崩壊し，彼の「論理主義」は死んだことになるのであろうか？以下で私は，N．コッキアレッラに拠って，そうではないこと，論理主義の再構成が可能であることを示したい。

その前に，まず，フレーゲの論理主義がいかなるものであるか，という反省から始めよう。フレーゲの論理主義は，

（1）算術（実質上，幾何学を除く全古典数学）の諸概念は，純粋に論理的な概念によって定義できる。

（2）算術の諸法則は，純粋に論理的な演繹によって定義と基本法則から導出できる。

の二点に要約される。ここで注意すべきことは，算術がクラスに関する「メンバーシップの理論」に還元されるのではなく，「述語づけの理論」に還元されるということである。つまり，フレーゲの言う「論理」はクラスの理論ではなく，第二階述語論理である，ということである。

さて，算術はさまざまの「もの」を取り扱う。フレーゲは，補完の必要性（不飽和性）をその特徴とする「関数」と，完結性（飽和性）をその特徴とする「対象」という，関数と対象の基本的区別を設定し，さらに関数の間にレヴェルの差を設けた。しかし，対象の間にはレヴェルの差を設けていない。そして，算術を実際に展開するに際しては，高階の関数の直接的な取り扱いを避けて，関数と対象の基本的区別に帰着させようとする。例えば，①第二階の概念に第一階の概念を対応させ，②第一階の概念に値域（Werthverlauf）という対象（関数としての概念の値域が概念の外延である）を対応させる。（例：「4の平方根が存在する」に対して，「概念〈4の平方根〉は充たされる」が対応する。）すなわち，フレーゲによれば，「第二階の関数は一定の仕方で第一階の関数によって表現され，

そしてその第二階関数のアーギュメントとして現れる第一階関数は，それの値域によって表現される」（『算術の基本法則』 I §25）。すなわち，

$$\forall Q \exists F \forall G\ [Q\ (G) \equiv F\ (\,'\varepsilon G\ (\varepsilon))] \qquad \cdots\cdots[12]$$

である。このように，概念に対して二重の相関物──第二階の概念に対応する第一階の概念，および第一階の概念に対応する値域という対象──をフレーゲは設定した。このことの特殊ケースが法則

$$(\mathrm{V}) \qquad '\varepsilon F\ (\varepsilon) = \,'\alpha G\ (\alpha) \equiv \forall x\ (Fx \equiv Gx) \qquad \cdots\cdots[7]$$

である。つまり，ここでは，右辺での第一階概念間の相互包摂という第二階概念が，左辺で，それら第一階概念に対応する対象としてのこれらの概念の外延（＝値域）の同一性という，第一階の概念で置き換え可能である，と主張されている。しかし，先に見たように，この法則こそ，パラドクスの元凶であった。

パラドクスを避けつつ，以上のようなフレーゲの論理主義の要求を充たす体系には，どのようなものがあるであろうか？フレーゲの『算術の基本法則』の体系には，前章（第Ⅳ部第7章）でも見たように，命題論理の法則の他に次の四つの基本法則がある(15)。

（Ⅱa）：$\forall x Fx \supset Fa$

（Ⅱb）：$\forall F M_\beta F(\beta) \supset M_\beta G(\beta)$

（Ⅲ）：$G\ (a = b) \supset G\ (\forall F\ (Fb \supset Fa))$

（Ⅴ）：$'\varepsilon F\ (\varepsilon) = \,'\alpha G\ (\alpha) \equiv \forall x\ (Fx \equiv Gx)$

（Ⅵ）：$a = \backslash\, '\varepsilon\ (a = \varepsilon)$

パラドクスが出ない程度にはこの体系より弱く，しかも，それ以外の点では，フレーゲの論理主義を実行し得るに十分なほど強い体系があるだろうか？節を改めて，その点を考察することにする。

6．論理主義の再構成に向けて

さて，本節では，前節の最後で提示されたフレーゲ自身の第二階述語論理の体系とほぼ同程度の強さを持ち，しかも，

①（フレーゲの体系での（Ⅴb)に対応して）パラドクス発生の原因となる内包の原理（CP）に考察の焦点を絞ることができ，

②明示的に（CP）を原理としている他の体系との比較がしやすい，

という点で優れている第二階述語論理の体系として，以下の体系を用意する[16]。

命題論理（トートロジー）

（A1）$\forall u(\phi \supset \psi) \supset (\forall u \phi \supset \forall u \psi)$ ……uは個体または述語変項

（A2）$\phi \supset \forall u \phi$ ……uはϕの中に自由には現れない個体または述語変項

（A3）$\exists x(a = x)$ ……aは単称名でここにxは自由には現れない

（LL：ライプニッツの法則）$a = b \supset (\phi \equiv \psi)$ ……a，bは単称名で，ψはaのいくつかをbで置き換えてϕから得られる式

（CP：内包の原理）$\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi]$

……F^nはϕには自由に現れず，$x_1, \cdots, x_n$はϕに自由に現れる互いに異なる個体変項

推論規則：モドゥス・ポネンス（MP）　$\vdash \alpha, \vdash \alpha \supset \beta \quad \Rightarrow \vdash \beta$

普遍汎化（UG）　$\vdash \phi \quad \Rightarrow \vdash \forall u \phi$

ここで，概念（一般に関数）の相関物を表現する工夫，すなわちフレーゲの「概念の外延」$'\varepsilon F(\varepsilon)$に相当する工夫として，λ抽象体（λ-abstract)を導入する。（むろんλ記号はフレーゲのものではないが，複合述語の表現として気息記号がついた

$$`\varepsilon(\varepsilon^2 = 1)$$

のような記法をフレーゲは用いている[17]。フレーゲにとってこの記法は「名詞化された述語」を意味しない。その点，λ記号を導入することはフレーゲから離れるように思われるが，これはフレーゲの$'\varepsilon G(\varepsilon)$と$`\varepsilon G(\varepsilon)$の両方の役割を兼ね備えることができると同時に，法則（V）をも救えるのである。第7節参照）このλ抽象体は，次のλ変換原理（λ-conversion principle）に従う[18]。

（λ－Conv）　$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi](a_1, \cdots, a_n) \equiv \phi(a_1/x_1, \cdots, a_n/x_n)$

これを一般化すると，

（∀／λ－Conv）　$\forall x_1 \cdots \forall x_n([\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)$

となる。また，λ抽象体が述語変（定）項であることを主張する，次の法則を定める。

（Id：同一性）$[\lambda x_1 \cdots x_n P(x_1, \cdots, x_n)] = P$ ……ここでPはn項述語変項または定項

そして，λ抽象体を含む第二階述語論理のための論理文法を明確に定める。それは以下のものである。

タイプ0の表現は単称名を，タイプ1の表現は命題形式または整成式（well formed formulae)を，$n \geqq 1$なるタイプ$n+1$の表現はn項述語を，それぞれ表すとして，タイプnの有意味表現ME_nを次のように帰納的に定義する：

(1) 任意の個体変（定）項aにつき$a \in ME_0$，任意のn項述語変（定）項F^nにつき$F^n \in ME_{n+1}$および$F^n \in ME_0$；

(2) a，$b \in ME_0$ならば，$(a = b) \in ME_1$；

(3) $\pi \in ME_{n+1}$かつ$a_1, \cdots, a_n \in ME_0$ならば，$\pi(a_1, \cdots, a_n) \in ME_1$；

(4) $\phi \in ME_1$かつ$x_1, \cdots, x_n$が相異なる個体変項ならば，

$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] \in ME_{n+1}$；

(5) $\phi \in ME_1$ならば$\neg \phi \in ME_1$；

(6) ϕ，$\psi \in ME_1$ならば，$(\phi \supset \psi) \in ME_1$；

(7) $\phi \in ME_1$かつaが個体または述語変項ならば，$\forall a \phi \in ME_1$；

(8) $\phi \in ME_1$ならば，$[\lambda \phi] \in ME_0$；

(9) $n > 1$ならば，$ME_n \subseteq ME_0$。

さて，すでに述べたように，この体系においてパラドクス発生に直接関わるのは内包の原理（CP），すなわち　$\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi]$である。なぜなら，この原理こそ，任意の条件$\phi$によって創られる新しい述語の存在を主張しているからである。そこで，（CP）を含意し[19]，しかも（CP）より単純で，λ抽象体を含む式：

（CPλ）　$\exists F^n([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F)$

に考察を集中する。（これは，フレーゲが，$C = '\alpha \exists G('\varepsilon G(\varepsilon) = \alpha \wedge \neg G(\alpha))$と置いたことに相当する：本章第3節の（〒）参照。）こうすることによって，パラドクス発生の原因を，λ抽象体に関する内包の原理，すなわち（CPλ）に集中的に求めることが可能となる。ところで，パラドクスを防ぐには，関数，ひいては概念間にあるとフレーゲが見なしているような階層構造を反映するような，表現間の構文論的な次元の区別，すなわち層別化（stratification）を，特に（CPλ）に現れるλ抽象体に対して，設定せねばならない。（これは，フレーゲの対象と関数，そして第一階の関数と第二階の関数との基本的区別という彼の元来の方針に沿ったものでもある。）そこで，大雑把に言って，次の三段階の層別化[20]を，一般にλ抽象体，およびその中の述語（λ抽象体も含む）と項に対して，用意する：

（i）同次層別化：項どうしはすべて同次元，述語とλ抽象体は項より丁度一次元高

い；

(ii)単純層別化：述語“＝”の両辺に現れる項どうしは同次元，その他の項どうしは同または異次元，述語とλ抽象体はそれらに伴う項の最大次元より丁度一次元高い；

(iii) 累積層別化：項どうしは同または異次元，述語とλ抽象体はそれらに伴う項の最大次元より一次元以上高い。

これらの層別化のうち，(i) の層別化が最も厳格であり，(iii) が最も緩やかである。すると，例えば，層別化無しではパラドクスを生み出す（ＣＰλ）の事例である式：

$$\exists F\ ([\lambda x \exists G\ (x = G \wedge \neg G\ (x))] = F) \quad \cdots\cdots[13]$$

は，累積的に(iii) 層別化されてはいるが，単純にも(ii)，同次的(i) にも層別化されてはいない。また，パラドクスを誘発すべく更に巧妙に仕組まれた（ＣＰλ）の事例：

$$\exists F\ ([\lambda z\ [\lambda x y \exists G\ (x = G \wedge \neg G\ (y))](z,\ z)] = F) \quad \cdots\cdots[14]$$

も累積的に(iii) も，また単純に(ii)も層別化されていると言えるが，同次的に (i)は層別化されていない。そして，確かに，これら[13],[14] からは矛盾が導ける(21)。従って，矛盾を防ぐためには，（ＣＰλ）は（ゆえに（ＣＰ）は）同次的に層別化されていなければならない。そして，この「同次層別化」の条件は，矛盾の防止を目指すかぎり，λ抽象体にのみ課されるだけで十分である。

すると，フレーゲの「論理主義」再構成のための基礎となるわれわれの体系は，

名詞化された述語を含み，同次的に層別化された（homogeneously stratified）λ抽象体を持つ第二階述語論理

ということになる。これを“（λＨＳＴ＊）”と略記する。（“ ＊”は式中に現れるλ抽象体が同次層別化されていることを示唆する。）すなわち，

（λＨＳＴ＊）＝（命題論理＊）＋（Ａ１＊）＋（Ａ２＊）＋（Ａ３＊）
＋（ＬＬ＊）＋（λ- Conv ＊）＋（ＣＰλ＊）＋（Ｉｄ＊）
＋ＭＰ＋ＵＧ。

ただし，ここで（Ｉｄ＊）とは「名詞化された述語」に関連する次の公理である：

（Ｉｄ＊）：$[\lambda x_1 \cdots x_n P(x_1, \cdots, x_n)] = P$ ……ここでＰはｎ項述語変（定）項

さて，この体系（λＨＳＴ＊）の無矛盾性については，以下のことが分かっている。単項述語づけをメンバーシップと見なすことによって，（λＨＳＴ＊）は，クワインの集合論ＮＦを少し修正した，Ｒ．ジェンセン（Ronald Jensen)の体系ＮＦＵ（New Foundation with Urelement）(22)に相対的に無矛盾である。すなわち，

ＮＦＵが無矛盾ならば，（λＨＳＴ＊）も無矛盾である ……（☆）

が成り立つ。ところで，ジェンセンはＮＦＵが弱ツェルメロ集合論(23)に相対的に無矛盾であることを，すなわち，

弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，ＮＦＵも無矛盾である ……（%）

ことを示した(24)。従って，（☆）と（%）により，

弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，（λＨＳＴ＊）も無矛盾である……（#）

ということが帰結する。

７．相対無矛盾性

ところで，（ＬＬ＊）と（λＨＳＴ＊）とから，一般化されたフレーゲの基本法則：

（Ｖｂ＊） $[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = [\lambda x_1 \cdots x_n \psi] \supset \forall x_1 \cdots \forall x_n\ (\phi \equiv \psi)$ …[15]

が，（λＨＳＴ＊）において導ける(25)。そして，フレーゲの診断によれば，これが矛盾発生の張本人であった。しかし，前節の（#）により，もし弱ツェルメロ集合論が無矛盾ならば，（Ｖｂ＊）から矛盾は出ないことになる。つまり，われわれの体系では法則（Ｖｂ＊）は生き残る可能性がある。しかし，（Ｖｂ＊）の逆命題である（Ｖａ＊）：

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ (\phi \equiv \psi) \supset [\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = [\lambda x_1 \cdots x_n \psi] \quad \cdots\cdots[16]$$

は――これは外延性の原理（Principle of Extensionality ：Ｅｘｔ＊）であるが――（λＨＳＴ＊）からは導けない。しかし，フレーゲにとって，この外延性の原理は論理の基本法則の一つであった(26)。すなわち，この原理はできるかぎり確保しておくべき法則の一つだとフレーゲは確信していたのであった。ゆえに，この原理も再構成された「論理主義」の体系に加えることにすると，結局の所，われわれは次の結論に到達する。

フレーゲの「論理主義」の再構成＝（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）

さてこのとき，（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）の無矛盾性と，どの程度この体系に算術を還元できるかということとは，クワインの集合論ＮＦＵの，ジェンセンによるヴァリエ

ーションであるＮＦＵとの関係に掛かってくる。これについては，次のことが分かっている。まず，

$$x \in y \equiv \mathrm{def.} \exists F\,(y = F \wedge F\,(x))$$

と定義することにより，ジェンセンの集合論ＮＦＵは，（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）に含まれ，逆に，単項述語づけをＮＦＵでのメンバーシップと解釈することにより，単項（λＨＳＴ＊）(27)＋（Ｅｘｔ＊）はＮＦＵに含まれる。従って，単項（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）はＮＦＵと同等である。しかるに，単項（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）と全（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）は共無矛盾，すなわち一方が無矛盾のときかつそのときにかぎり他方も無矛盾である。このことと，前節（第６節）の最後のパラグラフでのジェンセンの結果（％）とから，次のことが導かれる：

（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）が無矛盾である $\Longleftrightarrow$ ＮＦＵが無矛盾である
弱ツェルメロ集合論が無矛盾である $\Longrightarrow$ （λＨＳＴ＊）＋（Ｅxt＊）が無矛盾である

８．結語と前途瞥見

こうして，フレーゲの「論理主義」の体系を（λＨＳＴ＊）＋（Ｅｘｔ＊）という形に再構成することによって，法則（Ｖｂ）は救われ，またＮＦＵに相対的に（従って弱ツェルメロ集合論に相対的に）無矛盾性も確保できる。算術の論理への還元も，ＮＦＵがそれを実行できる（と想定される）のと，少なくとも同程度には実行可能である。これで，フレーゲの「論理主義」はひとまず再構成できたと言えよう。

ところで，以上見てきたように，フレーゲは第二階述語論理を「論理」と考えているが，しかし，これが「論理」と呼ぶに最もふさわしい体系であるのかどうかは，これはまた別問題である。特に現在「論理」という語で普通に理解されている第一階述語論理との表現力の比較は，「論理主義」の是非を考察するに際しての重要な論点となろう。しかし，その前にわれわれは，もう一度フレーゲの体系に即して，パラドクス発生の根源となる部分，すなわち言語とその意味の確保という一層基本的な問題に戻ろう。パラドクス発生の原因は体系の公理にのみならず，体系の論理的意味論にも基づく根深いものと考えられるからである。次章で，その点を詳しく取り扱おう。

補足：クワインによる新しい矛盾の導出

まず，フレーゲの修正案のクワイン版として，次のものを置く：

$$\forall y\,[y \neq \hat{x}F(x) \supset (y \in \hat{x}F(x) \equiv F(y))] \qquad \cdots\cdots(1)$$

そして，少なくとも二つの対象の存在を仮定する。すなわち，

$$\exists x \exists y\,(x \neq y) \qquad \cdots\cdots(2)$$

さらに，“V”，“Λ”，“ι”，“W”という四つのクラス抽象体を，

$$V = \hat{x}\,(x = x) \qquad \cdots\cdots(\text{全体クラス})$$

$$\Lambda = \hat{x}\,(x \neq x) \qquad \cdots\cdots(\text{空クラス})$$

$$\iota z = \hat{x}\,(x = z) \qquad \cdots\cdots(z\text{から成る単元クラス})$$

$$W = \hat{x}\,\forall z\,(x \in z \wedge z \in x \supset x = z) \qquad \cdots\cdots(\text{包含・被包含同一})$$

と定義し，この四つに対応する(1)の事例，またはその全称化を用意する。まず，ιz とＷから，

$$\forall z \forall y\,[y \neq \iota z \supset (y \in \iota z \equiv y = z)] \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$\forall y\,[y \neq W \supset (y \in W \equiv \forall z\,(y \in z \wedge z \in y \supset y = z))] \qquad \cdots\cdots(4)$$

となる。次にＶとΛについては以下のことが直ちに対応する［∵(1)で“Ｆｘ”を $x = x$ とすると，$\forall y\,(y \neq \hat{x}\,(x = x) \supset (y \in \hat{x}\,(x = x) \equiv y = y)$ すなわち，$\forall y\,(y \neq V \supset (y \in V \equiv y = y))$ であるが，$(y \in V \equiv y = y) \equiv y \in V$，よって(5)が成り立つ。また，(1)で“Ｆｘ”を $x \neq x$ とすると，$\forall y\,(y \neq \Lambda \supset (y \in \Lambda \equiv y \neq y))$ が成り立つが，$y = y$ より $y \neq \Lambda \supset \neg\,(y \in \Lambda)$，これの対偶から(6)が導かれる。］

$$\forall y\,(y \neq V \supset y \in V) \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$\forall y\,(y \in \Lambda \supset y = \Lambda)。 \qquad \cdots\cdots(6)$$

さて，(3)への全称例化：$\forall y\,[y \neq \iota y \supset (y \in \iota y \equiv y = y)]$ と $y = y$ により，

$$\forall y\,(y \neq \iota y \supset (y \in \iota y)。 \qquad \cdots\cdots(7)$$

また，$x \in y \wedge y \in \iota z \wedge y \neq \iota z$ と置くと，(3)より，$y \in \iota z \equiv y = z$ だから，

$$\forall x \forall z\,[\exists y\,(x \in y \wedge y \in \iota z \wedge y \neq \iota z) \supset x \in z \wedge z \neq \iota z] \qquad \cdots\cdots(8)$$

ここで，$\iota y = \Lambda$ と置くと，(7)より，$y \neq \Lambda \supset y \in \Lambda$。ところで(6)から $y \in \Lambda \supset y = \Lambda$。こうして，$\iota y = \Lambda$ の下で，$y \neq \Lambda \supset y = \Lambda$，つまり $y = \Lambda$。よって，

$$\forall y\,(\iota y = \Lambda \supset y = \Lambda)。 \qquad \cdots\cdots(9)$$

もし $\iota z = z$ とおくと，(3)より $y \neq z \supset (y \in z \equiv y = z)$ だから，$y \neq z \supset y \notin z$。

対偶により，$y\in z\supset y=z$。ゆえに，

$$\forall z\forall y\,(z=\iota z\wedge y\in z\supset y=z) \qquad\cdots\cdots(10)$$

もし$V=\Lambda$とすると，(5) の対偶より$y\notin\Lambda\supset y=\Lambda$であるが，(6) より$y\in\Lambda\supset y=\Lambda$だからディレンマにより，$\forall y\,(y=\Lambda)$，すなわちすべての対象が唯一のクラス$\Lambda$であることになって(2) に矛盾する。ゆえに背理法により，$V\neq\Lambda$。このことから，(5) と(9) により，

$$\Lambda\in V,\quad \iota V\neq\Lambda,\quad \iota\iota V\neq\Lambda \qquad\cdots\cdots(11)$$

(3) でyをΛ，zをιVとすると，$\Lambda\neq\iota\iota V\supset(\Lambda\in\iota\iota V\equiv\Lambda=\iota V)$，これと(11)の右の二つから，$\Lambda\notin\iota\iota V$。しかし(11)の左端より，$\Lambda\in V$。$\iota\iota V=V$とすると矛盾する。よって，背理法により，

$$\iota\iota V\neq V \qquad\cdots\cdots(12)$$

(10)でzをιyとすると，$\iota y=\iota\iota y\wedge y\in\iota y\supset y=\iota y$。ゆえに，$\iota y=\iota\iota y$を仮定すると　$y\in\iota y\supset y=\iota y$となるが，他方，(7) の対偶から$y\notin\iota y\supset y=\iota y$。ゆえに，ディレンマにより，$\iota y=y$。まとめると，

$$\forall y\,(\iota y=\iota\iota y\supset y=\iota y=\iota\iota y) \qquad\cdots\cdots(13)$$

(12)と(13)から背理法により，$\iota V\neq\iota\iota V$を得る。そして，これから再び(13)と背理法により，

$$\iota\iota\iota V\neq\iota\iota V。 \qquad\cdots\cdots(14)$$

ここで，$\iota\iota V\neq W$かつ$\iota\iota V\notin W$　と仮定する。すると，(4) でyを$\iota\iota V$と置くことから，この仮定により，

$$\exists z\,(\iota\iota V\in z\wedge z\in\iota\iota V\wedge\iota\iota V\neq z)$$

が出る。これより，(8) でxを$\iota\iota V$，yをz，zをιVに取ると，$\iota\iota V\in\iota V$　かつ$\iota\iota V\neq\iota V$。これと，(3) でyを$\iota\iota V$，zをVに取ることから，$\iota\iota V=V$を得る。これは(12)に矛盾する。よって，背理法により，

$$\iota\iota V=W\vee\iota\iota V\in W \qquad\cdots\cdots(15)$$

ここで，$\iota W=W$と仮定する。すると，(10)でyを$\iota\iota V$，zをWと取ると，$\iota\iota V\in W\supset\iota\iota V=W$，これと(15)からディレンマによって，$\iota\iota V=W$。しかし，このとき，(14)によって，$\iota W\neq W$。以上より，$\iota W=W\supset\iota W\neq W$。ゆえに，$(p\supset\neg p)\supset\neg p$から

$$\iota W\neq W \qquad\cdots\cdots(16)$$

これと，(7) でyをWと取ると，$W\neq\iota W\supset W\in\iota W$を得ることから，

$$W\in\iota W \qquad\cdots\cdots(17)$$

(16)と，(4) でyをιWと取ることとから，

$$\iota W\in W\equiv\forall z\,(\iota W\in z\wedge z\in\iota W\supset\iota W=z) \qquad\cdots\cdots(18)$$

(18)でzをWと取り縮小すると，$\iota W\in W\supset(\iota W\in W\wedge W\in\iota W\supset\iota W=W)$。それゆえ，もと$\iota W\in W$と仮定すると，この式の後件の対偶より$\iota W\neq W\supset\neg(\iota W\in W\wedge W\in\iota W)$となるが，(16)と(17)により，

$$\iota W\notin W。 \qquad\cdots\cdots(19)$$

これと(18)によって，(18)の右辺の否定：$\exists z\,(\iota W\in z\wedge z\in\iota W\wedge\iota W\neq z)$が出る。これと，(8) で$x$を$\iota W$，$y$を$z$，$z$を$W$と取ることによって，$\iota w\in w\wedge w\neq\iota w$。よって，

$$\iota W\in W \qquad\cdots\cdots(20)$$

が出る。(19)と(20)によって矛盾である。

註

(1) Nino B. Cocchiarella, “Frege, Russell and Logicism : A Logical Reconstruction” in L. Haaparanta & J. Hintikka (eds.), Frege Synthesised, D. Reidel (1986), pp.197-252。

(2) G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, H. Pohle (1893-1903), 以下ではGGAと略記する。頁づけはOlms からの復刻版（本論文７章註１参照）による。［英訳：The Basic Laws of Arithmetic, transl. by M. Furth, Uni. of California Press (1964), 以下ＢＬＡと略記する。］

(3) G. Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Felix Meiner (1976), 以下WBと略記する。［英訳：Philosophical and Mathematical Correspondence, Basil Blackwell (1980), 以下ＰＭＣと略記する。］

(4) 実際，この手紙に対するフレーゲのラッセル宛返信（1902年 6月22日付）において，フレーゲは，「ついでながら，“述語がそれ自身に述語づけられる”という表現は私には厳密なものとは思えません。」と評している。WB, S.213, PMC, p.132 。

(5) フレーゲ自身もこの内包の原理を前提していた。というのは，この原理の第二階述語論理での対応物である次の式：

$$\exists F \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv A]$$

（ＡにＦは自由には現れない）

は，ＧＧＡでのフレーゲの基本法則（Ⅱb）：$\forall F\ (M_\beta\ F(\beta)) \supset M_\beta\ G(\beta)$ のヴァリエーションである，$(\forall F)\ B \supset B\ [A / F(x_1, \cdots, x_n)]$ から，Ｂとして

$$\neg \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv A]$$

を取ることによって，

$$\dfrac{\forall x_1 \cdots \forall x_n [A \equiv A] \qquad \dfrac{\forall F \neg \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_n, \cdots, x_n) \equiv A] \supset \neg \forall x_1 \cdots \forall x_n [A \equiv A]}{\forall x_1 \cdots \forall x_n [A \equiv A] \supset \exists F \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv A]}}{\exists F \forall x_1 \cdots \forall x_n [F(x_1, \cdots, x_n) \equiv A]}$$

のように導けるからである。

(6) GGA S.253−S.265, BLA pp.127-143.

(7) 原則（※）および（※※）を合わせると，$F(a) \equiv a \in {}'xF(x)$ となるが，これは，ＧＧＡⅠの定理１：$f(a) = a \frown {}'\varepsilon f\ (\varepsilon)$ に相当する。ＧＧＡⅠ§55 S.75,

ＢＬＡ pp.123-26 参照。

(8) ＧＧＡⅡ S.256 u.f., ＢＬＡ pp.130-33.

(9) ＧＧＡⅠ§49, S.65, ＢＬＡ p.111.

(10)フレーゲは『基本法則』第Ⅰ巻への導入でこう述べていた：「私の見るところ，論争が起こるとすれば，それは値域に関する私の法則（Ｖ）をめぐってであろう。これは例えば，概念の外延について語るとき，それに基づいて思考する原則であるにも関わらず，恐らくこれまで論理学者たちによっては取り立てて表明されたことがなかったであろう。私はこの法則を純粋に論理的なものだと見なす。」ＧＧＡⅠ S. vii, ＢＬＡ p.3-4.

(11)第一の形式的導出はＧＧＡⅡ SS.259-60, ＢＬＡ pp.134-36で示され，第二の導出はＧＧＡⅡ SS.261-62, ＢＬＡ pp.137-38で示されている。

(12)ＧＧＡⅡ SS.262-63, ＢＬＡ pp.139-140 参照。

(13)クワインによれば，フレーゲの修正案から矛盾が出ることを１９３８年にレスニェウスキーが示したということをソボチンスキーが報告している。W. V. O. Quine, “On Frege’s Way Out”, Mind LXIV (1955), pp.145-159, in Klemke(ed.) Essays on Frege, Uni.of Illinois Press (1968), pp.485-501 の註14参照。

(14)Quine, op.cit. pp.492-93.（頁付はKlemke の論集に収録されたものによる）

(15)ＧＧＡⅠ SS.60-61,ＢＬＡ p.105の§47参照。

(16)この体系は最初タルスキーによって考案され，$\forall u \phi \supset \phi$（普遍例化）も公理の一つであったが，この式が他の公理から導けることがカリシュとモンタギューによって示されている。D. Kalish and Montague, “On Tarski’s Formalization of Predicate Logic with Identity”, Archiv für mathmatische Logik und Grundlagenforschung 7 (1965) pp.81-101参照。

(17)例えば，WB S.244, PMC pp.161-2 。

(18)λ変換についての一般的記述については，Alonzo Church, The Calculi of Lambda Conversion, Princeton U. P. (1941)参照。

(19)（ＬＬ）から，

$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \supset \forall x_1 \cdots \forall x_n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \equiv F(x_1, \cdots, x_n))\ 。$$

ところで，（$\forall$／λ−Conv)より，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)\ 。$$

従って，これら二つから，

$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \supset \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)。$$

存在汎化により，

$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F \supset \exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)。$$

これに普遍汎化を施すと述語論理の法則により，

$$\exists F^n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F) \supset \exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)。$$

これから，本文の次行で導入される（ＣＰλ），すなわち

$$\exists F^n ([\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = F)$$

により，（ＣＰ），すなわち

$$\exists F^n \forall x_1 \cdots \forall x_n (F(x_1, \cdots, x_n) \equiv \phi)$$

が出る。

(20)厳密には層別化の定義はこうなる。式またはλ抽象体ϕが同次的に層別化されている（homogeneously stratified)のは，ϕ（ϕがλ抽象体ならばϕ自身も含めて）中に含まれている項，述語，λ抽象体の集合に関する，以下のような自然数の付値 t が存在するとき，かつそのときにかぎる：

(i) すべての項ａ，ｂに対して，もし（$a = b$）がϕの中に現れていれば，$t(a) = t(b)$。すなわち，等号の両辺に現れる項どうしはすべて同次元である。

(ii) $n \geqq 1$なるすべてのｎに対して，すべてのｎ項述語表現πとすべての項 $a_1, \cdots, a_n$につき，もし$\pi(a_1, \cdots, a_n)$がϕに現れている整成式ならば，(ｲ) $t(a_j) = t(a_k)$ ただし，$1 \leqq j,k \leqq n$，かつ (ﾛ) $t(\pi) = t(a_1) + 1$。すなわち，一般の述語表現に伴う項どうしはすべて同次元であり（＝(ｲ)），かつ，述語表現そのものの次元は項の次元より丁度一次元高い（＝(ﾛ)）。

(iii) すべての$m \in \omega$につき，すべての個体変項$x_1, \cdots, x_m$およびすべての整成式ψに対して，もし$[\lambda x_1 \cdots x_m \psi]$が$\phi$の中に現れていれば，（ハ） $t(x_j) = t(x_k)$ ただし，$1 \leqq j,k \leqq m$，かつ，（ニ） $t([\lambda x_1 \cdots x_m \psi]) = t(x_1) + 1$。すなわち，λ抽象体内部に現れる述語表現に伴う項どうしもすべて同次元であり（＝(ﾊ)），λ抽象体全体の次元は，それら内部の項の次元より丁度一次元高い（＝(ﾆ)）。

もし，以上の規定から（イ）と（ハ）を落とし，（ロ）と（ニ）をより弱い要求：$t(\pi) = 1 + \max[t(a_1), \cdots, t(a_n)]$ および $t([\lambda x_1 \cdots x_m \psi]) = 1 + \max[t(x_1), \cdots, t(x_n)]$ で置き換えるとき，すなわち，述語“＝”の両辺に現れる項どうしのみ

が同次元で，一般の述語表現およびλ抽象体に伴う項どうしは同次元でも異次元でもよく，また述語表現とλ抽象体の次元はそれらに伴ういくつかの項の持つ最大次元より丁度一次元高いとき，ϕは単純に層別化されている（simply stratified）と言う。また，（イ），（ロ）と共に(i)をも落とし，（ロ）と（ニ）を更に弱い要求：$t(\pi) > \max[t(a_1), \cdots, t(a_n)]$ および $t([\lambda x_1 \cdots x_n \psi]) > \max[(t(x_1), \cdots, t(x_n)]$ で置き換えるとき，すなわち，項どうしの次元は同次元でも異次元でもよく，また述語表現とλ抽象体の次元はそれらに伴ういくつかの項の持つ最大次元より一次元以上高いとき，ϕは累積的に層別化されている（cumulatively stratified）と言う。

(21)[13]からは次のようにして矛盾が導かれる。まず，

$$\lambda x \exists G (x = G \land \neg G(x)) = F$$

と置く。これとライプニッツの法則（ＬＬ）から，

$$[\lambda x \exists G (x = G \land \neg G(x))](x) \equiv F(x) \cdots\cdots ①$$

λ変換原理により，

$$[\lambda x \exists G (x = G \land \neg G(x))](x) \equiv \exists G (x = G \land \neg G(x)) \cdots\cdots ②$$

①と②より，

$$\exists G (x = G \land \neg G(x)) \equiv F(x)。\cdots\cdots ③$$

(i) $F(F)$のとき。③より，$\exists G (F = G \land \neg G(F))$。これより，ＧとしてＫを取ると，$F = K$，$\neg K(F)$，ゆえに 再び（ＬＬ）により$\neg F(F)$。すなわち矛盾。

(ii) $\neg F(F)$のとき。③より$\neg \exists G (F = G \land \neg G(F))$，よって$\forall G (F = G \supset G(F))$だから，普遍例化により $F = F \supset F(F)$，$\therefore F(F)$で矛盾。

[14]からの矛盾は次のように導かれる。まず，

$$\lambda z [\lambda x y \exists G (x = G \land \neg G(y))](z, z) = F$$

と置く。上と同様に，（ＬＬ）とλ変換原理により，

$$\lambda x y \exists G (x = G \land \neg G(y))(z, z) \equiv F(z) \cdots\cdots ④$$

(i) $F(F)$のとき。④より，$\lambda x y \exists G (x = G \land \neg G(y))(F, F)$であるからλ変換原理により，$\exists G (F = G \land \neg G(F))$，ＧとしてＫを取ると，$F = K$，$\neg K(F)$，再び（ＬＬ）より，$\neg F(F)$で矛盾。

(ii) $\neg F(F)$のとき。④より，λ変換原理により，$\lambda x y \exists G (x = G \land \neg G(y))$

$(F, F) \equiv \exists G\ (F=G \wedge \neg G\ (F)) \equiv F\ (F)$ だから，$\neg\exists G\ (F=G \wedge \neg G\ (F))$，すなわち，$\forall G\ (F=G \supset G\ (F))$，$\therefore F=F \supset F\ (F)$，$\therefore F\ (F)$ で矛盾。

(22)クワインの集合論ＮＦは，“∈”を原始述語に採る第一階述語論理をベースとして，量化の公理以外に，外延性の公理：$\forall z(z\in x \equiv z\in y) \supset x=y$ と，$x_n \in x_{n+1}$ という形で層別化された内包の原理：$\exists y \forall x(x\in y \equiv F(x))$ を持つ集合論である。クワインに依れば，「ｙが非クラス，つまり個体のときは，$x\in y$ は“ｘは個体ｙである”と解してよい」から，ｙが個体のときは，$(x\in y) \equiv (x=y) \equiv x\in \{y\}$ となって，これと，外延性の公理の事例式，$\forall z(z\in y \equiv z\in \{y\}) \supset y=\{y\}$ より，$y=\{y\}$ となる。すなわち，メンバーを持たない原要素（Urelement）ａについて，$a=\{a\}$ となる。これは一種の変則状況である。この変則状況を打開して原要素にしかるべき地位を与えるために，外延性の原理を，

$$\exists z\ (z\in x) \wedge \forall z(z\in x \equiv z\in y) \supset x=y$$

の形に制限したものがＮＦＵである。ＮＦについては，W. V. O. Quine, “New Foundations for Mathematical Logic”, in From a Logical Point of View, Harvard U. P. (1953) ［邦訳：「数理論理学の新しい基礎」，W. V. O. クワイン／飯田隆訳『論理的観点から』勁草書房（1992），119-154頁］を，ＮＦＵについては，註(24)で示すＲ．Jensen の論文を参照。

(23)「弱ツェルメロ集合論」とは，“∈”と“＝”を原始述語として持ち，１９０８年にツェルメロ（Ernst Zermelo）が与えた集合論の公理のうち，外延性，対，和，巾の各公理と，制限された分出公理：$\exists y \forall z\ (z\in y \equiv z\in x \wedge \phi)$ を持つ集合論のことである。「制限された分出公理」とは，条件ϕ中のすべての量化子が何らかの集合に制限されていること，すなわち，ϕ中に含まれる量化の表現が，$\forall x\in y\, \psi$ あるいは，$\exists x\in y\, \psi$ の形を取っているものを言う。

(24)Ronald Jensen, “On the Consistency of a slight(?) Modification of Quine's New Foundations”, Synthese 19 (1968), pp.250-63.

(25)（ＬＬ＊）より，

$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = [\lambda x_1 \cdots x_n \psi] \supset$$
$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi](x_1, \cdots, x_n) \equiv [\lambda x_1 \cdots x_n \psi](x_1, \cdots, x_n)$$

が出るが，これに（λ－Conv＊）を適用し，更にＵＧ，（Ａ１＊），（Ａ２＊）か

ら，

$$[\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = [\lambda x_1 \cdots x_n \psi] \supset \forall x_1 \cdots \forall x_n\ (\phi \equiv \psi)$$

が導ける。

(26)フレーゲの体系において，外延性の原理：$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ (\phi \equiv \psi) \supset [\lambda x_1 \cdots x_n \phi] = [\lambda x_1 \cdots x_n \psi]$ に相当するのは，基本法則（Ｖａ），すなわち，

$$\forall x\ (Fx \equiv Gx) \supset {}'\varepsilon F\ (\varepsilon) = {}'\alpha G\ (\alpha)$$

である（ＧＧＡⅠ§52）。この（Ｖａ）は矛盾発生の原因である，

$$(Vb):\ {}'\varepsilon F\ (\varepsilon) = {}'\alpha G\ (\alpha) \supset (Fx \equiv Gx)$$

と同値な式：$'\varepsilon F\ (\varepsilon) = {}'\alpha G\ (\alpha) \supset \forall x\ (Fx \equiv G\ (x))$ ……①の逆命題であり，これら二つの式（つまり（Ｖａ）と①）の連言：

$$'\varepsilon F\ (\varepsilon) = {}'\alpha G\ (\alpha) \equiv \forall x\ (Fx \equiv G\ (x))$$

をフレーゲは論理の基本法則（Ｖ）として認定していたのであった（第３，５節参照）。

(27)単項（λＨＳＴ＊）とは，登場する述語表現を単項述語に制限した（λＨＳＴ＊）の部分体系である。

第９章　パラドクスの起源

はじめに

M．ダメットは最近の著書『フレーゲ：数学の哲学』の中でこう述べている：

「フレーゲの『算術の基本法則』の体系における矛盾は，定式化の不注意に起因するたんなる事故（破局的なものではあるが）ではなかった。１９０６年８月までに，それは，理論の枠組み内部では——すなわち，原始語としての抽象作用素と値域の同一性の条件を支配する公理とをもってしては——処理しきれない，ということをフレーゲは発見していた。しかし，その基礎にある誤りは，集合論の基礎に関わる間違いより一層深刻なものであった。それは，彼の全哲学に影響する誤りであった。」(1)

では，何が問題だったのか？パラドクスに到るフレーゲの思考の線のどこに問題があったのか。われわれは前章において，論理体系としての『算術の基本法則』から矛盾がどのようにして導かれたかということ，およびフレーゲの修正案にも関わらず新しい矛盾が導かれたということ，を確認した後，論理主義というフレーゲの数学の哲学を救うための可能な方策をコッキアレッラに従って模索した。しかし，それによってすべての問題が解決した訳ではない。パラドクスの根はもっと深い。そこで，本章では，上記のダメットの解釈を参考にしながら，パラドクスの起源とも言うべき，『基本法則』の体系構成に当たってのフレーゲの論理的意味論——とくに「意味」（Bedeutung）と「二階の量化」の扱い——の持つ問題点にもう一度考察の焦点を当ててみたい。それによって，ダメットの言う「フレーゲの全哲学に影響した」パラドクスの根がどの程度に深いものだったか，を明らかにしたい。

１．パラドクスの発生

パラドクスの発見を知らせるラッセルの手紙（1902年 6月16日付）への返信（1902年6月22日付）の中で，フレーゲは，パラドクスに驚いたことを述べたのち，ラッセルの定式化の中で「述語がそれ自身に述語づけられる」というラッセルの言い方が不正確だとして，

彼自身の定式化を提案する：

「従って，私ならば“概念がそれ自身の外延に述語づけられる”と言うでしょう。

もし，関数$\Phi(\xi)$が概念ならば，私はその外延（または対応するクラス）を，“$'\varepsilon\Phi(\varepsilon)$”で示します（ただし，これの正当性に関して私は現在疑いを持っていますが）。それゆえ，

$$“\Phi('\varepsilon\Phi(\varepsilon))”$$

または

$$“'\varepsilon\Phi(\varepsilon)\frown{}'\varepsilon\Phi(\varepsilon)”$$

が概念$\Phi(\xi)$のそれ自身の外延への述語づけということになります。」(2)

この手紙の後の部分で，フレーゲは，パラドクスの発生から帰結することとして，次の三点を挙げている(3) −：

(1) 同一性の一般性を値域の同一性へと変形することは常に認められるとはかぎらない。

(2) 基本法則Ⅴは誤りである。

(3) 『算術の基本法則』第Ⅰ巻§３１でのフレーゲの説明は，あらゆる場合の記号結合に意味（Bedeutung）を確保するのに十分ではない。

この(1)の「同一性の一般性を値域の同一性へと変形すること」というのは基本法則Ⅴのことであり，結局(1)は(2)と同じことを述べているが，すでにこの時点でフレーゲは値域に関わるこの法則の誤りを見抜いていた。そして，(3)で言われていることは，フレーゲの体系構成の前提にある論理的意味論（または哲学的論理学）の矛盾発生への関与を示唆するものである。§３１での説明は，フレーゲにとって，「無矛盾性の証明」の役割を担うはずであった(4)。しかし，それは結局，「証明」にはなっていなかったのである。そこで，まず，『基本法則』において§３１に到るフレーゲの思考過程を跡づけ，§３１での「意味論」がどう矛盾発生に関わっていたかを考察しよう。

『算術の基本法則』（以下“ＧＧＡ”と略記）では，体系の統一的かつスムーズな展開のために，記号の「意味」（Bedeutung）の観点からの，対象とその表現の一元化が推し進められる。構文論的には文は真理値の名前とされ，通常の対象を表示する固有名と同列に扱われる。文と固有名との，この構文論上の同化と平行して，それらが意味する対象についても一元的な扱いが見られる。真理値は確かに特異な対象ではあるが，対象の一種であることに変わりはない。現実的対象ｖｓ抽象的対象，真理値ｖｓ数といった区別以上に，

対象と関数（それを表示する対象名と関数名の飽和（完結）ｖｓ不飽和（未完結））の区別が，フレーゲにとっては基本的であった。しかし，そのような一元化は何によって保証されるのか？

この時期のフレーゲにとって，対象として（少なくとも論理的対象として）まず考えられるのは真理値である。しかし，もちろん，真理値だけでは算術は展開できない（対象が真理値だけならば，ただ二個の対象だけしか算術の対象が存在しないことになるからだ。）そこで導入されるのが関数の値域（Werthverlauf)である。これは，『概念記法』出版以来の，論理体系としての概念記法への最大の補足である，とフレーゲ自身が語るものである（ＧＧＡⅠ§９）。これにより，アーギュメントの領域が拡張される。「関数Φ（ξ）と関数Ψ（ξ）がすべてのアーギュメントに対して同値となる丁度そのとき，関数Φの値域 ’εΦ（ε）と関数Ψの値域 ’εΨ（ε）は同一である」として，値域は文脈的に定義される（ＧＧＡⅠ§３）。関数が概念（その値が常に真理値である一アーギュメント関数）であるとき，値域は概念の外延と同一視される。法則Ｖ：

$$'\varepsilon f(\varepsilon) = '\alpha g(\alpha) = \forall x\,(f(x) = g(x))$$

は，この値域の定義であり，値域の同一性の基準を与える（ＧＧＡⅠ§20，§47）。それは同時に関数のある種の対象化と読める。「同一性の一般性を値域の同一性に変形する」というフレーゲの言葉は，関数の同一性の，対象の同一性への還元（すなわち関数ないし概念の同一というそれ自身第二階の概念を対象間の同一性という第一階の概念へと還元すること）と受け取れる。対象と関数の区別が，こういう形である種の相対化を被る。（数が存在論的にどのような身分を持つものであれ，数を主題化することが数を対象として扱うことを要求するのと同様に，関数を主題化する――例えばその同一性を問題にする――とき，関数をある形で対象化せざるを得ないからである。）

対象と関数の区別を相対化して，関数の同一性を対象の同一性に帰着させることは，言わば縦の方向での「対象の一元化」であるのに対して，横の方向での一元化，値域がそもそも何であるか，すなわち，

$$\xi = '\varepsilon f(\varepsilon)$$

で“ξ”に値域以外の，文も含む固有名が代入されたときの値は何か，真理値と値域はどう違うか，という問題も，値“das Wahre”（これを〈真〉と表記する）を水平線関数の値域：’ε（――ε）と同一視し，値“das Falsche”（これを〈偽〉と表記する）を ’ε（$\varepsilon = \neg\forall x(x = x)$）と同一視するという便法によってひとまず解かれる（ＧＧＡ

Ⅰ§10）。

２．意味（Bedeutung）の確保

さて，このような，固有名と文の同化，真理値と値域の同化に裏打ちされた「対象の一元化」を背景に，

「正しく形成された名前は何らかの意味（Bedeutung）を持つ」

という指導原理（ＧＧＡⅠ§28）が実際に成り立っていることの説明が，『基本法則』Ⅰ§３１でなされる。§３１での説明の基礎にあるのは，§２９での(i)名前の意味獲得の規約と，§３０での(ii)名前の構成方法である。

(i) 名前の意味獲得の規約は５項目に亙って述べられる。（ＧＧＡⅠ§29）

①固有名（対象名）が意味を持つのは，(a) １アーギュメント第一階関数を表す有意味表現のアーギュメント座にその固有名を代入した結果である固有名が意味を持ち，かつ(b) ２アーギュメント第一階関数の有意味表現のアーギュメント座の一方にその固有名を代入した結果が１アーギュメント第一階関数の有意味表現となる場合である。

②１アーギュメント第一階関数名が意味を持つのは，有意味な固有名をそのアーギュメント座に代入した結果である固有名が有意味である場合である。

③２アーギュメントの第一階関数名が意味を持つのは，二つのアーギュメント座にいずれも有意味な固有名が代入された結果である固有名が有意味である場合である。

④第二種のアーギュメント（すなわち１アーギュメントの第一階関数）を一つとる第二階関数名が意味を持つのは，１アーギュメントの第一階関数が有意味であるという事実から，それを当の第二階関数名のアーギュメント座に代入した結果である固有名が有意味であるということが帰結する場合である。

⑤第三階関数名“$\overset{\mathfrak{f}}{-\!\smile\!-}\mu_{\beta}(f(\beta))$”が意味を持つのは，第二種のアーギュメントを持つ第二階関数名が有意味であるという事実から，“$\overset{\mathfrak{f}}{-\!\smile\!-}\mu_{\beta}(f(\beta))$”のアーギュメント座にその第二階関数名が代入された結果である固有名が有意味であるということが帰結する場合である。

この規約には明らかに循環が見られる。というのは，①で固有名（対象名）の有意味性が

確保されるのは，それが関数のアーギュメント座に代入された結果である固有名が有意味であるという形で関数の有意味性を前提としているのに対して，②，③での関数の有意味性は逆に固有名の有意味性を前提しているからである。フレーゲの意図としては，これらの規約が持つ循環性は，明らかに有意味な固有名や関数名を基本的な有意味表現として確保することによって解消できるものである。ただし，これらの規約は，フレーゲにとって「意味を持つこと」「有意味性」の定義ではない（ＧＧＡＩ§30）。（もしこれらの規約を，『基本法則』の体系の，文法的に正しく構成された表現がすべて有意味であることの帰納的定義と見なし得るとすれば，その基底が与えられねばならない。以下で見るように，それは可能であるとフレーゲは考えた。）

もう一つは，(ii)名前の構成方法である。これには二通りあって，第一の方法は，関数名のアーギュメント座に名前を代入する方法である。例えば，

［Ａ］固有名は，

(1) 固有名と１アーギュメント第一階関数名からか，または

(2) 第一階関数名と１アーギュメント第二階関数名からか，または

(3) 第二種のアーギュメント（＝１アーギュメント第一階関数）を持つ第二階関数名と第三階関数名から，構成される，

といった具合である。関数名も同様に構成される。第二の方法は，固有名（文）から，その構成要素である名前を抜き取ることによる。例えば，“Δ＝Δ”から“Δ”を抜いて“$\xi=\xi$”を構成する。このようにして行われる名前の構成に際して，既存の名前から新規の名前へと有意味性は伝達されると考えられるから，『基本法則』第Ｉ巻§３１で実際に示されることは，原始的関数名についての有意味性を示すことである。原始的な名前として考察される関数名は，次のものである：

第一階関数として，

水平線：“——ξ”

否定：“—┬—ξ”

記述：“$\backslash\xi$”

条件法：“—┬—ξ
　　　　　└—ζ”

同一性：“$\xi=\zeta$”

第二階関数として，

全称化：“$\forall x\phi(x)$”

値域：“$'\varepsilon\phi(\varepsilon)$”

第三階関数として，

（二階の）全称化：“$\forall f\mu_\beta(f(\beta))$”。

この最後のもの，つまり第二階の量化を含む関数名については，第一階の量化を含む“$\forall x\phi(x)$”の場合と同様であるとして，取り立てて説明がない。ここに，フレーゲの第二階量化への無関心が典型的に現れている。

３．パラドクスの起源

ダメットによれば，以上のようなフレーゲの意味＝言語システムと，彼の第二階量化への無関心との結合が，矛盾を誘い込む直接の原因である(5)。第二階量化の有意味性についてのフレーゲの説明はこうである（ＧＧＡＩ§25）：

「$\Omega_\beta(\phi(\beta))$を第二種アーギュメント［＝１アーギュメント第一階関数］を一つ持つ第二階関数とし，そのアーギュメント座が“ϕ”で示されるとせよ。そのとき，$\forall f\Omega_\beta(f(\beta))$が真となるのは，すべての適正なアーギュメントに対してわれわれの第二階関数の値が常に真となる場合である。」

第二階量化子の出現の予備段階として，一つ以上の第一階関数名を文から抜き取って第二階関数名を形成する必要がある。そのようにして形成される第二階関数名が常に意味を持つということは，アーギュメント座に第一階関数名を代入したとき，そのすべての場合において，その結果が意味を持つということ，に外ならない。しかし，任意の第一階関数というとき，第二階の量化が無制限に入り込んで来る余地がある。ここに，誤りの根，パラドクスの起源がある。事実，ダメットが，ラッセルのパラドクスと類似した矛盾がこれによって生じることを示している(6)。それを再構成すると，以下のようになる。

いま，第二階の量化を含む有意味な関数名　$h(\xi)$を取る：

$$h(\xi):\ \forall f(\xi='\varepsilon f(\varepsilon)\supset f(\xi)). \qquad \cdots\cdots(1)$$

これに関連して，第二階の関数名：

$$'\varepsilon h(\varepsilon)='\varepsilon\phi(\varepsilon)\supset\phi('\varepsilon h(\varepsilon)) \qquad \cdots\cdots(2)$$

を取る。この(2) の第二階の量化文を作る：

$$\forall f('\varepsilon h(\varepsilon)='\varepsilon f(\varepsilon)\supset f('\varepsilon h(\varepsilon))). \qquad \cdots\cdots(3)$$

(3) が意味を持つには，(2) のアーギュメント座“ϕ”に任意の有意味な第一階関数を代入した結果が有意味でなければならない。そこで，(1) のh（ξ）で(2) の“ϕ”を充たす：

$$'\varepsilon h(\varepsilon) = '\varepsilon h(\varepsilon) \supset h('\varepsilon h(\varepsilon)). \qquad \cdots\cdots(4)$$

(4) の先件 $'\varepsilon h(\varepsilon) = '\varepsilon h(\varepsilon)$ は常に成り立つから，(4) は次の(5) と同値になる：

$$h('\varepsilon h(\varepsilon)). \qquad \cdots\cdots(5)$$

言い換えると，(3) の有意味性は (5)の有意味性に依存する。ところが，(5) を (1)によって元に戻すと，

$$h('\varepsilon h(\varepsilon)) :$$

$$\forall f('\varepsilon h(\varepsilon) = '\varepsilon f(\varepsilon) \supset f('\varepsilon h(\varepsilon)) \qquad \cdots\cdots(6)$$

となり，(6) は(3) そのものとなる。こうして，(3) の有意味性は (3)自身の有意味性に依存する。ここに，有意味性の循環があり，有意味性の独立した保証が消失する（――ちなみに，h（ξ）の代わりに，$g(\xi) : \forall f(\xi = '\varepsilon f(\xi) \supset \neg f(\xi))$を取ると基本法則Ⅴからラッセルのパラドクスが導かれる。）

こうして，『基本法則』Ⅰ§３１は「無矛盾性の証明」に失敗している[7]。実際，フレーゲにとっては，基本法則から作られる文（固有名）は，当然，すべて値〈真〉を意味する筈であった。そして，推論規則は有意味性を前提から結論へと伝達するから，残る課題は，文を含むあらゆる名前の有意味性を確保する，というＧＧＡⅠ§３１での「証明」であり，このことに成功したら「無矛盾性」が確保される筈であった（もちろん，明からさまにフレーゲがこの§３１で「無矛盾性」を主題としている訳ではないが，インプリシットにそのような含意がある，ということである）。

では，第二階の量化子の出現を除く，第一階の量化子にのみ関わる言語断片についてはどうか。確かに，ラッセルのパラドクスがそのままの形で発生することはなく，従って無矛盾性は確保できよう[8]。しかし，§３１の説明は，値域に関わる同一性関数名の意味決定について，なお不備が残る。フレーゲは，彼の形式言語の対象領域を循環なしに明示的に特定するということを結局はなさないままで，値域の間の同一性条件（基本法則Ⅴ）を定めているように思われる。ところで，値域の同一性：

$$'\varepsilon f(\varepsilon) = '\alpha g(\alpha)$$

の真理値は，そこに現れる関数に関わる（第一階の）普遍量化文：

$$\forall x(f(x) = g(x))$$

の真理値に依存する。この後者の文の真理値は，領域のあらゆる要素の名（その中に値域名も含まれる）を，関数名　f（ξ），g（ξ）のアーギュメント座に代入した結果の真理値に依存する。その際，それらの代入結果は，

$$f('\alpha('\varepsilon h(\varepsilon) = '\varepsilon j(\varepsilon, \alpha)))$$

のような，より複雑な値域間の同一性文を含み得る。それゆえ，フレーゲの規約は十分に基礎づけられてはいない，と言わねばならない。なぜなら，同一性の文の真理値が複雑さのより少ない名前と文の意味にのみ依存している，とは解釈できないからである。こうして，第一階の量化のみを含むフレーゲの部分システムは矛盾を免れているが，「無矛盾性の妥当な証明」を欠いている。

このような形で，『基本法則』Ⅰ§３１の不成功は，そこに到るフレーゲの論理的意味論（哲学的論理学），ひいては論理主義のプログラムを含む彼の全哲学の枠組を疑わしめるに十分であったのである。

註

(1) Michael Dummett, FREGE：Philosophy of Mathematics, Harvard U. P.（1991), p.223.

(2) G. Frege, Wissenshaftlicher Briefwechsel, Felix Meiner（1976)［以下“WB”と略記］SS. 213-14. 英訳：Philosophical and Mathematical Correspondence, Basil Blackwell（1980)［以下“PMC”と略記］pp.130-31.

(3) BW, S.213, PMC, p.132.

(4) Dummett, op.cit. pp.215-6.

(5) Dummett, op.cit. p.218.

(6) Dummett, op.cit. pp.218-9.

(7) R. Heck によると，『基本法則』の「述語的」(predicative)断片は無矛盾である。Richard Heck, “The Consistency of Predicative Fragments of Frege's Grundgesetze der Arithmetik”, History and Philosophy of Logic, 17（1996), pp.209-220.

(8) フレーゲの論理体系の第一階部分が無矛盾であることは，T. Parsonsが証明している。次の文献を参照：Terence Parsons, “On the Consistency of the First-order Portion of Frege's Logical System”, Notre Dame Journal of Formal Logic, 28（1987), pp.161-68.

第VI部　結論に代えて：

他の論者とフレーゲの方法との比較

第１０章　フレーゲ以後の演繹体系について

はじめに

アリストテレス以来，論理学は，妥当な推論をそうでない推論からどのようにして区別するのか，ということを中心的研究課題としてきた。フレーゲ以後現代に到るまで，妥当な推論はいくつかの論理的な演繹体系として整備されており，それらの特徴づけも種々の観点から行われている。本章の目的は，フレーゲの方法との比較において，フレーゲ以後の代表的な論理的演繹体系を概観し，それらの相互関係，論理体系としての役割，それの持つ哲学的含意等を簡潔に要約することである。以下では，四つの演繹体系，すなわち①フレーゲ＆ヒルベルト流体系，②自然演繹，③連式計算，および④タブロー・メソッドを取り上げる。そして最後に（第４節），フレーゲの体系に見られる連式計算的要素に触れる。フレーゲ＆ヒルベルト流体系は，フレーゲに由来し，ラッセル，ヒルベルト等によって継承された公理体系という形での演繹体系であり，真理としての論理法則を組織的に導出することで特徴づけられる。自然演繹体系(natural deduction system)はゲンツェンに由来し，主として数学にインフォーマルな形で現れる推論形式をそのまま「自然な形で」採集することを意図して作られた体系である。連式計算(sequent calculus) もゲンツェンに由来し，「主定理」と呼ばれるメタ定理により，無矛盾性証明といった多くの数学研究（または数学基礎論）に応用される体系である。ダブロー・メソッドは連式計算と解釈上の密接な関連をもつ直観的に見通しの良い体系である。これらの体系はそれぞれの特徴と目的に応じて一長一短があり，一概に優劣をつけることはできない[(1)]。以下，本章では歴史的考察は必要最小限に抑え，もっぱら体系的に（主として構文論的観点から）これらの演繹体系の考察に焦点を絞る。

よって，本章の記述は，フレーゲに直接に関わる内容から大幅に離れる部分を持つが，しかし，その目的は，あくまでも，本論文第Ⅱ部，第２，３章で論じた，フレーゲの「公理体系として論理体系を展開する」という方法と，それ以外の方法を比較する，ということにある。

１．フレーゲ＆ヒルベルト流体系

１．１　公理体系

フレーゲに始まり[(2)]，ヒルベルトにより整備された[(3)]体系（これを「フレーゲ＆ヒルベルト流体系」と呼ぶ）の中心概念は，「証明可能性(provability)」（または「導出可能性」「定理性」）の概念である。フレーゲが論理を真理の公理体系として捉えたことと，「算術の真理は論理的真理である」という彼の論理主義の主張とは密接に関連している。この体系は，まず，いくつかの整式（well-formd　formula)を公理として定め，定理を，公理を含み一定の証明規則[(4)]の下で閉じている整式の最小集合とすることにより，定式化される。証明規則は前提から結論へ移行する推論パターンという形式を取るが，前提が仮定に依存するということはない。

古典命題計算ＣＰＣ（Classical　Propositional　Calculus)の公理系の一つは次の公理図式(axiom　schemata）により与えられる：

（Ａ１）　$\phi \supset (\psi \supset \phi)$

（Ａ２）　$(\phi \supset (\psi \supset \theta)) \supset ((\phi \supset \psi) \supset (\phi \supset \theta))$

（Ａ３）　$(\neg \psi \supset \neg \phi) \supset (\phi \supset \psi)$

ここで，ϕ，ψ自体が整式であるから，三つの公理があるのではなく三種類の無限に多くの公理があることになる。証明規則はモドゥス・ポネンス（ＭＰ）：「$\phi \supset \psi$およびϕが定理ならばψも定理である」である。このとき，定理の明示的定義はこうなる：

１．すべての公理は定理である，

２．$\phi \supset \psi$とϕがともに定理ならば，ψも定理である。

上で与えられた公理系をＦＣＰＣと呼ぶ（‘Ｆ’はＦregeに由来）。メタ変項ϕ，ψ，θの代わりに文変項$p_0, p_1, p_2, \cdots$　に対して（Ａ１）－（Ａ３）の公理を書けば三つの公理を定めたことになるが，次の代入規則が付加されねばならない。

代入規則：定理中の文変項への整式の代入の結果は定理である。

‘$\vdash \phi$’を「ϕはＦＣＰＣの定理である」と読むと，ＭＰ(ﾓﾄﾞｩｽ・ﾎﾟﾈﾝｽ) は

$$\frac{\vdash \phi \supset \psi \qquad \vdash \phi}{\vdash \psi}\,(\mathrm{MP})$$

と表せる。ＦＣＰＣでの「証明」は，根に証明される式（つまり定理），枝（出発点）に公理を持ちＭＰに統御された樹形図となる[(5)]。フレーゲ＆ヒルベルト流体系の欠点の一

つは，証明を遂行することが一般に煩雑だということである。もし枝（出発点）に任意の整式を仮定することが許されるならば，証明は容易になる。いま，Dが，出発点にϕ_1，$\phi_2,\cdots$，ϕ_k を持ちMPによって統御され終式としてϕを持つ整式の有限樹形図のとき，Dは，「仮定$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_k$ からのϕの証明」と言われ，

$$\phi_1,\ \ \phi_2,\ \ \cdots,\ \ \phi_k \vdash\ \phi$$

と書き表す。

1．2　演繹定理

仮定からの証明の概念は，仮定の集合（無限集合でもよい）Γと整式との間の帰結関係(consequence relation)として拡張され，次のように表現される：

$$\Gamma\vdash\phi\ \iff\ \text{ある}\ \{\phi_1,\cdots,\phi_k\}\subseteq\Gamma\ \text{に対して，}\ \phi_1,\cdots,\phi_k\vdash\phi.$$

この概念について，演繹定理と呼ばれるメタ定理が成り立つ。

演繹定理（deduction theorem）：　$\Gamma,\phi\vdash\psi$　ならば　$\Gamma\vdash\phi\supset\psi$.

この定理の証明（正確にはメタ証明）は，仮定Γ，ϕ（正確には$\Gamma\cup\{\phi\}$であるが，このように略記する。以下同様。）からのψの証明Dに‘$\phi\supset$’変形を施した‘$\phi\supset$D’という擬証明樹が，公理（A１），（A２），MPによって，仮定Γからの$\phi\supset\psi$の証明に常に改変できることを示すことにより実行される[6]。このような証明が一般的に行われ得るのは，フレーゲ＆ヒルベルト流体系の「証明」における式変形がMPただ一つに統一されているからである。すなわち，演繹定理が成り立つのは，「仮定の集合からの帰結関係」が「仮定からの証明」により導入され，かつ，

（1）（A１）と（A２）が公理図式であり，

（2）MPが唯一の証明規則である，

という条件が成り立つような，このタイプの任意の体系である。

この第二の条件が重要であることを確認するために，演繹定理が成り立たないか，または成り立つとしてもFCPCのように直接的な仮定からの証明によっては，任意の集合からの帰結関係が導入できない場合を考察しよう。証明樹が仮定からの証明樹へと拡張されるときに生じているのは，MPが「証明規則」から「推論規則」へと事実上変換されているということである。というのは，$\Gamma\vdash\phi\supset\theta$と，$\Delta\vdash\phi$から，$\Gamma,\Delta\vdash\theta$が許されるからである。

そこで，様相命題論理S４を考える。これは，FCPCに文演算子‘□’と（‘&’を$\phi\&\psi$=def.$\neg(\phi\supset\neg\psi)$として定義），以下の公理図式・証明規則を追加して得られ

る：

（A４）　$\Box\phi\supset\phi$

（A５）　$\Box(\phi\supset\psi)\supset(\Box\phi\supset\Box\psi)$

（A６）　$\Box\phi\supset\Box\Box\phi$

必然化（Nec）　$\dfrac{\vdash\phi}{\vdash\Box\phi}$

もし仮定からの証明をMPとNecにより統御された証明樹であるとすると，先のMPの場合と同様に，証明規則Necを，

$$\frac{\Gamma\vdash_{S4}\ \phi}{\Gamma\vdash_{S4}\ \Box\phi}$$

という推論規則に変換することになる。しかし，この規則は，演繹定理を認めるとすると，S４の通常の意味論に対して健全ではなくなる。というのは，

$$\cfrac{\cfrac{\phi\vdash_{S4}\ \phi}{\phi\vdash_{S4}\ \Box\phi}\ (\text{Nec})}{\vdash_{S4}\ \phi\supset\Box\phi}\ (\text{演繹定理})$$

として，$\phi\supset\Box\phi$というS４での非定理が導かれるからである。そこで，このような難点を避けるため，いまの場合，仮定からの帰結の関係は，

$$\Gamma\vdash_{S4}\ \phi\ \iff\ \Gamma\text{におけるいくつかの}\ \phi_1,\cdots,\phi_k\ \text{に対して，}$$
$$\vdash_{S4}\ \phi_1\ \&\ \cdots\ \&\phi_k\supset\phi$$

という形で定義し直される。このやり方で仮定からの帰結の関係を導入すると，FCPCで仮定からの証明を導入する以前の欠点が残る。なぜなら，S４での仮定からの帰結の関係は，「証明可能性」によって定義されているから，それに伴う欠点をすべて持ち越しているからである。しかし，‘$\vdash$’に対する演繹定理は成り立つ。というのは，FCPCで$\phi\&\phi_1\&\cdots\&\phi_k\supset\psi$ が証明可能であるのは，$\phi_1\&\cdots\&\phi_k\supset(\phi\supset\psi)$が証明可能であるとき，かつそのときに限るからである。

1．3　述語論理

次に，等号つき古典述語論理（量化計算）$CQC_=$（Classical Quantification Calculus with identity）で演繹定理が成り立つ場合を考察する。ここで，普遍量化子‘∀’を原始記号とする。整式ψがϕの一般化（generalization）であるのは，いくつかの変項$x_1,\cdots,x_k$ に対してψが　$\forall x_1\cdots\forall x_k\ \phi$　となるとき，かつその時に限る（

k＝0も含む）。公理シェーマは次の8個である。

（Q1）－（Q3）＝def.（A1）－（A3）の事例の一般化

（Q4）　$\forall x\phi\supset\phi^x_t$[7] ……ここでtはφのxに代入可能な[8]項

（Q5）　$\forall x(\phi\supset\psi)\supset(\forall x\phi\supset\forall x\psi)$

（Q6）　$\phi\supset\forall x\phi$　……xがφで自由には出現していない場合

（Q7）　$x=x$

（Q8）　$x=y\supset(\phi\supset\phi')$　……φが原子文で，φ′がφ中の0個以上のxをyで置き換えてφから得られる式である場合

MPは唯一の証明規則

この公理体系を$FCQC_=$とすると，これに対して次のメタ定理が成り立つ。

メタ定理（一般化）：xがΓのいかなる整式にも出現していないならば，

$$\Gamma\vdash\phi \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash\forall x\phi.$$

証明は，公理の一般化がふたたび公理であることと，（Q6）（Q5）を利用することにより行われる[9]。このメタ定理は派生推論規則である。MPのみを証明規則とする，$CQC_=$に対するこのタイプの体系[10]に対して，これと同値な多くの体系がある[11]。

ここで，次節以後の自然演繹，連式計算の体系との関連をつける意味で，フレーゲ&ヒルベルト流体系のゲンツェン寄りのバージョンを考える。まず個体変項として，もっぱら自由変項としてのみ現れる「パラメータ」（a，b，c，…）と，束縛変項としてのみ用いる「変項」（x，y，z，…）を明確に区別して，個体項（individual terms）を改めて定義し直す[12]。論理記号として，&，∨，⊃，⊥，∀，∃をすべて用いるが，否定のみ$\neg\phi$＝def.$\phi\supset\bot$ として‘⊃’と‘⊥’で定義する。整式は通常の仕方で定義されるが，量化子については次の定義文を用いる。

（＊）φが整式，bがパラメータ，xがφに出現していない変項であるとき，∀xφ′，∃xφ′はともに整式である。（ここで，φ′はφ中のすべての‘b’の出現を‘x’で置き換えてφから得られる表現である。）

①パラメータの導入と，②束縛変項を含む整式を再び同じ変項で束縛することの禁止，という二つの変化は，同一の変項が自由変項としても束縛変項としても現れることがないこと，およびいかなる変項も同一の整式中で二度束縛されることがないこと，という結果をもたらす。これ自体はフレーゲ&ヒルベルト流体系にとって重要ではないが連式計算にとっては本質的である。また，これにより言語の表現力が弱まった訳ではない。例えば，∃x（Px&∀xQx）は禁じられるが，同じ意味を持つ ∃y（Py&∀xQx）は認められるからである。（‘Py&∀xQx’のようにパラメータではなく変項が自由変項として現れる表現を，以後，擬整式と呼ぶ。）

1．4　直観主義論理と古典論理

ゲンツェン流の体系に一層接近するために，以下のような等号つき直観主義述語論理のヴァージョン$FIQC_=$（‘I’はIntuitionistic に由来）を考える。命題論理の部分の公理図式は以下のものである：

（A⊃1）　$\phi\supset(\psi\supset\phi)$

（A⊃2）　$(\phi\supset(\psi\supset\theta))\supset((\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta))$

（A&I）　$\phi\supset(\psi\supset(\phi\&\psi))$

（A&Ei）　$\phi_0\&\phi_1\supset\phi_i$（i＝0，1）

（A∨Ii）　$\phi_i\supset\phi_0\vee\phi_1$（i＝0，1）

（A∨E）　$(\phi\supset\theta)\supset((\psi\supset\theta)\supset(\phi\vee\psi\supset\theta))$

ここまでの公理図式で最小論理（Minimal logic)が与えられ，次の公理図式（A⊥）を追加することにより，直観主義論理（Intuitionistic logic）が得られる。

（A⊥）　$\bot\supset\phi$

MP（モドゥス・ポネンス）は（命題論理の部分の）唯一の証明規則である。よって（この部分において），演繹定理が成り立つ。これに量化と等号に関する公理を付け加える：

（A∀E）　$\forall x\phi\supset\phi^x_t$

（A∃I）　$\phi^x_t\supset\exists x\phi$

（A＝I）　$a=a$

（A＝E）　$a=b\supset(\phi^x_a\supset\phi^x_b)$　……ここでφは原子文である.

さらに量化に関する証明規則を二つ加える：

（R∀I）　$\dfrac{\vdash\phi\supset\psi}{\vdash\phi\supset\forall x\psi^a_x}$　……ここでパラメータaはφに出現してはならない.

（R∃E）　$\dfrac{\vdash\phi\supset\psi}{\vdash\exists x\phi\supset\psi}$　……ここでパラメータaはψに出現してはならない.

（これらのパラメータは固有パラメータと呼ばれることがある。）

最後の二つの証明規則に付加されている条件は，これらの規則が健全であるために必要である。$\vdash Pa\supset Pa$ であるが，$Pa\supset\forall xPx$ は論理的に妥当ではないからである。（例えば，個体領域を「人間」，‘P’を「将棋の七冠王を取った」，‘a’を「羽生名人」と解釈すると反例モデルが作れる。）また，（R∀I）が証明規則であることが重要であり，対応する推論規則にはそれ以上の制限条件が必要である。というのは，公理：（A⊃1）とMPにより，

$$Pa\ \vdash\ \forall yQy\supset Pa$$

が成り立つが，これから

$$Pa\ \vdash\ \forall yQy\supset\forall xPx$$

を導くことは許されないからである。（この場合も上と同様の反例モデルが作れる。）そこで，仮定からの証明において（R∀I）を適用するとき必要な制限はこうである：いま，Dを，公理でない式 $\phi_1,\cdots,\phi_k$ を出発点とする，$\phi\supset\psi$ を導く仮定からの証明樹とし，パラメータaが ϕ において出現していないとき，

$$\dfrac{\left.\begin{array}{c}\phi_1,\ \cdots,\ \phi_k\\ \vdots\\ \phi\supset\psi\end{array}\right]\text{D}}{\phi\supset\forall x\psi^a{}_x}$$

が，仮定 $\phi_1,\cdots,\phi_k$ からの $\phi\supset\forall x\psi^a{}_x$ の証明であるのは，パラメータaが $\phi_1,\cdots,\phi_k$ のどの式にも出現しない場合である。（R∃E）を仮定からの証明において適用するときも同様の制限が必要である。

これらの制限を伴うＦＩＱＣの体系では，‘$\phi\supset$’変形（1．2節および註6参照）を用いて演繹定理が成り立つことが示される[13]。

（R∀I）は仮定の帰結関係に関する条件としても書くことができる。すなわち，固有パラメータaがΓおよび θ に出現していないとき，

$$\Gamma\ \vdash\ \theta\supset\psi\qquad\text{ならば}\qquad\Gamma\ \vdash\ \theta\supset\forall x\psi^a{}_x.$$

（R∃E）についても同様である。

以上の直観主義述語論理に，次のいずれか一方を加えると古典述語論理が得られる：

（DN）　$\neg\neg\phi\supset\phi$　　　（‘DN’は二重否定 double negationに由来）

（排中律）　$\phi\vee\neg\phi$

否定記号を原始記号とする場合，直観主義論理を特徴づける公理（A⊥）の代わりに次の

公理を採る：

（A¬I）　$(\phi\supset\psi)\supset((\phi\supset\neg\psi)\supset\neg\phi)$

（A¬E）　$\phi\supset(\neg\phi\supset\psi)$

本節で考察したフレーゲ＆ヒルベルト流体系は，これを外から特徴づける際にある種の単純さを持っている。例えば，「整式」や「証明」が帰納的に定義されるという単純な構造を持っているため，超数学の算術化に適しているといった長所がある。

2．自然演繹

フレーゲ＆ヒルベルト流体系での仮定からの証明と演繹定理は，証明の構成に際してこの体系に伴う過度の負担を軽減しようとする工夫であった。これを，全く異なるタイプの体系を作ることで一層徹底したのがゲンツェンの自然演繹の体系である[14]。ゲンツェンは「数学の証明に含まれる実際の論理的推論をできるかぎり正確に反映した記号体系を作りたい」と書いている[15]。自然演繹の特徴は次の二点に集約できる。第一に，すべての規則は基本的には証明規則ではなく推論規則であり，仮定から何が論理的に推論されるかに関心の焦点があって，証明可能性（定理性）は仮定からの導出の極端な場合と見られる。つまり，フレーゲ＆ヒルベルト流体系が証明可能性を中心とした論理的真理の公理体系であったのに対して，自然演繹は推論規則の体系である。第二に，結合子や量化子等の論理的オペレータは，それらに対する対称的な（symmetric）二種類の規則——すなわち，当該オペレータを主要オペレータとして含む文が結論としてどう導かれるかを述べる「導入」規則と，当該オペレータから何が導かれるかを述べる「消去」規則——により統御されている。

まず，直観主義論理の自然演繹体系ＮＩＱＣ（‘N’は natural deduction に由来）から考察を始める。この体系は，以下の12個（正確には12種類）の推論規則を持つゲンツェンのオリジナルのＮＪのヴァリエーションである[16]。

仮定の規則（A）

&の導入規則（&I）　$\dfrac{\phi\quad\psi}{\phi\,\&\,\psi}$　　　&の消去規則（&E）　$\dfrac{\phi\,\&\,\psi}{\phi}\quad\dfrac{\phi\,\&\,\psi}{\psi}$

∨の導入規則（∨Ｉ）　$\dfrac{\phi}{\phi\vee\psi}\qquad\dfrac{\psi}{\phi\vee\psi}$

∨の消去規則（∨Ｅ）　$\dfrac{\phi\vee\psi\qquad\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}}{\theta}$

⊃の導入規則（⊃Ｉ）　$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\supset\psi}$

⊃の消去規則（⊃Ｅ）　$\dfrac{\phi\supset\psi\qquad\phi}{\psi}$

⊥の規則（⊥）　$\dfrac{\bot}{\phi}$

∀の導入規則（∀Ｉ）　$\dfrac{\phi}{\forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$

ただし，固有パラメータａは
ϕが依存するいかなる仮定に
も出現していない。

∀の消去規則（∀Ｅ）　$\dfrac{\forall x\,\phi}{\phi^{x}{}_{t}}$

∃の導入規則（∃Ｉ）　$\dfrac{\phi^{x}{}_{t}}{\exists x\,\phi}$

∃の消去規則（∃Ｅ）　$\dfrac{\exists x\,\phi\qquad\begin{matrix}[\phi^{x}{}_{a}]\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}}{\theta}$

ただし，固有パラメータａ
は，θが依存する$\phi^{x}{}_{a}$以外
の仮定にもθにも$\exists x\,\phi$に
も出現していない。

ＮＩＣＱでは，整式の「仮定への依存」の関係が重要である。規則（⊃Ｉ）（∨Ｅ）（∃Ｅ）において，結論は，直前の導出が依存していた仮定の総和のうちの，いくつかの仮定にもはや依存しなくなる。結論が依存しなくなる仮定は「解除された」(discharged)仮定と呼ばれるが，「解除」が生じたことを明示するために，解除される式を鈎括弧［ ］で囲んで番号を付け，その同じ番号を解除が生じた推論線の横にも付ける。解除されていない仮定は開いた仮定と呼ばれる。すべての仮定が解除されたときの結論は「証明された」整式である。証明を作るために解除は権利であるが義務ではない。例えば，導出：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[p]}\qquad\overset{2}{[p]}}{p\,\&\,p}\,(\&\mathrm{I})}{p\supset(p\,\&\,p)}\,(\supset\mathrm{I})\ 1}{p\supset(p\supset(p\,\&\,p))}\,(\supset\mathrm{I})\ 2$$

で，二度出現した仮定ｐは，異なる推論において別々に解除されている。一般に，$\phi\supset\psi$を結論とする（⊃Ｉ）の適用において，ϕの形の仮定がすべて解除されるには及ばない。

導出：

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[\phi]}}{\psi\supset\phi}\,(\supset\mathrm{I})}{\phi\supset(\psi\supset\phi)}\,(\supset\mathrm{I})\ 1$$

における最初の（⊃Ｉ）においては，いかなる解除も生じていない。この寛大さによって，自然演繹は適切論理（relevant　logic)には適していない(17)。同じ形のすべての仮定が同一の場所で解除される必要はないゆえに，同じ形をした仮定のうち，同一推論において解除される仮定の出現のみが同じ仮定のクラスに属する，としなければならない(18)。

（∀Ｉ）と（∃Ｅ）の固有パラメータへの制限条件は，１．３節での（Ｒ∀Ｉ），（Ｒ∃Ｅ）の場合と同様に，健全さを維持するために必要である。

２．２　二つの体系の演繹的同値性

自然演繹とフレーゲ＆ヒルベルト流体系とは体系のスタイルの点で大いに異なっているが，演繹の効力と言う点では同値である。直観主義述語論理においてそのことを確認しよう。まず，仮定　$\phi_1,\cdots,\phi_k$ から，あるいは仮定の集合Γから，整式ϕが導出可能であることを

$$\phi_1,\cdots,\phi_k\vdash_N\phi\qquad\text{あるいは}\qquad\Gamma\vdash_N\phi$$

と書く。フレーゲ＆ヒルベルト流体系として，１．４節で扱ったＦＩＱＣを採る。ＦＩＱＣの公理がすべてＮＩＱＣで証明されることは容易に確かめ得る(19)。そこで，ＦＩＱＣで仮定から証明された整式がＮＩＱＣで同じ仮定から導出されることを示すには，自然演繹の体系であるＮＩＱＣがＦＩＱＣの証明規則に関して閉じていることを示せばよい。これも容易に確かめ得る(20)。よって，以下の（メタ）定理が成り立つ。

定理：　$\Gamma\vdash_F\phi\ \Rightarrow\ \Gamma\vdash_N\phi.$

この定理の逆も証明される。その証明を行うには，$\Gamma\vdash_N\phi$であるとして，ϕが１２個のどの推論規則によって仮定Γから導出されていても，ＦＩＱＣで同じ仮定からの証明が作れることを示せばよい。それは，ＦＩＱＣの公理と演繹定理をうまく使うことによってなされる(21)。こうして，次の定理が成り立つ。

定理：　$\Gamma\vdash_N\phi\ \Rightarrow\ \Gamma\vdash_F\phi.$

２．３　標準化定理

ＮＩＱＣでは（Ａ）と（⊥）を除く１０個の推論規則が導入と消去に分類され，これらが対をなして互いに逆の関係にある。これらの規則において，同一のオペレータに対する導入と消去の規則を連続して使うと，ある種の回り道をすることになる。例えば，（＆Ｉ）と（＆Ｅ）を連続して使うと，

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi^1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\,\&\,\psi}\,(\&\,\mathrm{I})}{\phi^2}\,(\&\,\mathrm{E})$$

となる。ϕ^1 と ϕ^2 は出現を異にする同一の整式であるが，ϕ^2 を導くために必要な $\phi\,\&\,\psi$ が既に ϕ^1 を前提している。（＆Ｉ）を使用した直後に（＆Ｅ）を使うことは回り道（つまりは無駄）となる。このように，同じオレベータに関する規則の導入と消去を連続して使用するときの中央の整式（導入の結論，または消去の大前提）は**最大式**(maximum formula) と呼ばれる。しかしこのような回り道は他の導出に置き換えることで取り除かれる。これは還元 (reduction)と呼ばれる。例えば，上の回り道は，

$$\begin{matrix}\vdots\\ \phi^1\end{matrix}$$

により還元される。＆以外の他のオペレータについても同様である。例えば，⊃については，

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}1\\ [\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\supset\psi}\,(\supset\mathrm{I})\ 1\qquad \phi}{\psi}\,(\supset\mathrm{E})\qquad\text{は}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ \phi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}$$

に還元される。∀の場合，

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi\end{matrix}}{\forall x\,\phi^a{}_x}\,(\forall\,\mathrm{I})}{(\phi^a{}_x)^x{}_t}\,(\forall\,\mathrm{E})\qquad\text{は}\qquad\begin{matrix}\vdots\ {}^a_t\\ \vdots\\ \phi^a{}_t\end{matrix}$$

（ϕの導出のすべての場所で，パラメータａをｔで置き換える。）

へと還元される。こうして，すべての最大式は還元により除去され，回り道のない標準的な証明に書き換えることができそうである。ところが，最大式を取り除くことにより新た

な最大式が生じることがある。例えば，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}1\\ [\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\supset\psi}\,(\supset\mathrm{I})\ 1\qquad\begin{matrix}\vdots\\ \theta\end{matrix}}{(\phi\supset\psi)\,\&\,\theta}\,(\&\,\mathrm{I})}{\phi\supset\psi}\,(\&\,\mathrm{E})\qquad\begin{matrix}\vdots\\ \phi\end{matrix}}{\psi}\,(\supset\mathrm{E})$$

で最大式は　$(\phi\supset\psi)\,\&\,\theta$　であるが，これを除去するために，上の導出を

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}1\\ [\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\supset\psi}\,(\supset\mathrm{I})\ 1\qquad \phi}{\psi}\,(\supset\mathrm{E})$$

へと還元すると，新しい回り道が出来，新しい最大式　$\phi\supset\psi$が生じる。しかし，これら二つの最大式　$(\phi\supset\psi)\,\&\,\theta$　と　$\phi\supset\psi$　の複雑さを比べると明らかに前者がより複雑である。還元を行うと，たとえ新しい最大式が生じても，それの複雑度が元の最大式のそれより小さくなることが帰納法により証明できる。よって，次の標準化定理が成り立つ。

標準化定理（normalization　theorem）：

すべての導出は，一連の還元により最大式を含まない標準的導出に変換することができる[22]。

還元と標準化は，タルスキー流の真理概念に基づく意味論に代わる，いわゆる「証明論的意味論」において重要な役割を演じる。ここで，証明論的意味論について論じる余裕はないが，これはウィトゲンシュタインの，ある文脈中での「使用」としての意味の観点に通じる興味深い洞察を含んでいる[23]。

２．４　自然演繹の連式ヴァージョン

自然演繹と連式計算（sequent　calculus)との異同を検討するために，ここで自然演繹の連式ヴァージョンを考察する。すでに述べたように（２．１節参照），自然演繹の体系では導出される整式がいかなる仮定に依存しているか，という「仮定への依存」の関係が重要であった。この関係を明示する形で推論規則を表現するのが，自然演繹の連式ヴァージョンである。Γを整式の有限集合，ϕを整式とするとき，連式は“$\Gamma\vdash\phi$”の形で定義

できる。このとき，例えば，（＆Ｉ）規則は次のように表現される。

$$\Gamma\vdash\phi \quad かつ \quad \Delta\vdash\psi \quad ならば， \quad \Gamma, \Delta\vdash\phi\&\psi.$$

他の規則についても同様である[24]。ここで，仮定を増加することを認めるとする，つまり

$$\Gamma\vdash\phi \quad ならば， \quad \Gamma, \Delta\vdash\phi \qquad \cdots\cdots (※)$$

を認めると，（＆Ｉ）規則は，一般に，

$$\frac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\&\psi}(\&\mathrm{I})$$

として，上の多種の仮定から一元化された仮定に依存する形に表現できる。というのは，$\Gamma\vdash\phi$から「仮定の増加」（※）により，$\Gamma, \Delta\vdash\phi$；他方，$\Delta\vdash\psi$と（※）により，$\Gamma, \Delta\vdash\psi$。新しい規則（＆Ｉ）により，$\Gamma, \Delta\vdash\phi\&\psi$；こうして，上の元の規則は新しい規則によって模倣できるからである。他の規則についても同様である。さらに，仮定の規則を　$\phi, \Gamma\vdash\phi$　という形に一般化し，これをフレーゲ＆ヒルベルト流体系になぞらえて「公理」と呼ぶと，以下のような自然演繹の連式ヴァージョンができる。

公理：　$\phi, \Gamma\vdash\phi$　　　仮定の増加：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma, \Delta\vdash\phi}$

（＆Ｉ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\&\psi}$　　　（＆Ｅ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi_0\&\phi_1}{\Gamma\vdash\phi i} \quad (i=0,1)$

（∨Ｉ）：$\dfrac{\Gamma\vdash\phi i}{\Gamma\vdash\phi_0\vee\phi_1} \quad (i=0,1)$　　　（∨Ｅ）：$\dfrac{\Gamma\vdash\phi\vee\psi \quad \phi, \Gamma\vdash\theta \quad \psi, \Gamma\vdash\theta}{\Gamma\vdash\theta}$

（⊃Ｉ）：　$\dfrac{\phi, \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\supset\psi}$　　　（⊃Ｅ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\phi\supset\psi}{\Gamma\vdash\psi}$

（⊥）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash\phi}$

（∀Ｉ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\forall x\phi^{a}{}_{x}}$　　　（∀Ｅ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\forall x\phi}{\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}}$

（∃Ｉ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\vdash\exists x\phi}$　　　（∃Ｅ）：　$\dfrac{\Gamma\vdash\phi^{a}{}_{x}}{\Gamma\vdash\exists x\phi}$

（ここで，（∀Ｉ）と（∃Ｅ）において固有パラメータａは制限条件を満たしているとする。）

この連式ヴァージョンにおいても，＆，∨，⊃，∀，∃の各オペレータに関する規則は，導入と消去の対称的な形になっている。（これに対して，連式計算の規則は，次節でみるように，導入規則だけから成る。）

３．連式計算とタブロー・メソッド

３．１　連式計算

自然演繹の連式ヴァージョンでは，消去規則がなお存在して‘⊢’の右に位置している。消去規則に対する全く異なるアプローチを採ることでゲンツェンの連式計算が得られる。

導出可能な連式：

$$\phi, \phi_1, \cdots, \phi_k\vdash\theta$$

を考え，この導出可能性を，仮定$\phi, \phi_1, \cdots, \phi_k$から$\theta$へ到る導出樹が構成できることと解釈する。そして，この導出樹を，

$$\begin{array}{c}\phi, \phi_1, \cdots, \phi_k\\ \mathrm{D}\\ \theta\end{array}$$

とする。ここで，ϕは未だ解除されていない（すなわち開いている）。これの導出樹を，（＆Ｅ）を使って，

$$\begin{array}{c}\dfrac{\phi\&\psi}{\phi}(\&\mathrm{E}) \qquad \phi_1, \cdots, \phi_k\\ \mathrm{D}\\ \theta\end{array}$$

に書き換える（ここでϕは仮定からは消える）。すると，連式：

$$\phi\&\psi, \phi_1, \cdots, \phi_k\vdash\theta$$

が導出可能となり，上の解釈に従うと，規則：

$$\frac{\phi, \Gamma\vdash\theta}{\phi\&\psi, \Gamma\vdash\theta}$$

が健全な証明規則となる。これは，（＆Ｅ）により正当化される。よって，（＆Ｅ）を新しい形で構成し直したことに外ならない。同様に，規則（⊃Ｅ）を

$$\frac{\Gamma\vdash\phi \qquad \psi, \Gamma\vdash\theta}{\phi\supset\psi, \Gamma\vdash\theta}$$

という健全な規則として構成し直すことができる。なぜなら，

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi\end{array}\qquad \text{および}\qquad \begin{array}{c}\psi,\ \Gamma\\ \vdots\\ \theta\end{array}$$

という導出樹が与えられているならば，

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi\end{array}\qquad \phi\supset\psi}{\psi}\ (\supset \mathrm{E})\qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \theta\end{array}$$

が（⊃Ｅ）により正当化されるからである。規則（∨Ｅ），（∀Ｅ），（∃Ｅ）についても同様である(25)。

こうして，消去規則を‘⊢’の左辺への導入規則と見ることができる。ゲンツェンのオリジナルの連式計算の記号‘→’にならって，以後，連式を

$$\Gamma\to\theta$$

と書くことにする（ここで，Γは整式の有限集合，θは整式である）。このとき，ゲンツェンの連式計算の公理と規則は次のものとして与えられる。

（公理）$\phi,\ \Gamma\to\phi$

（増）$\dfrac{\Gamma\to\phi}{\Delta,\ \Gamma\to\phi}$

（→＆）$\dfrac{\Gamma\to\phi\qquad\Gamma\to\psi}{\Gamma\to\phi\,\&\,\psi}$

（＆→）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\to\theta}{\phi\,\&\,\psi,\ \Gamma\to\theta}\qquad\dfrac{\psi,\ \Gamma\to\theta}{\phi\,\&\,\psi,\ \Gamma\to\theta}$

（→∨）$\dfrac{\Gamma\to\phi}{\Gamma\to\phi\vee\psi}\qquad\dfrac{\Gamma\to\psi}{\Gamma\to\phi\vee\psi}$

（∨→）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\to\theta\qquad\psi,\ \Gamma\to\theta}{\phi\vee\psi,\ \Gamma\to\theta}$

（→⊃）$\dfrac{\phi,\ \Gamma\to\psi}{\Gamma\to\phi\supset\psi}$

（⊃→）$\dfrac{\Gamma\to\phi\qquad\psi,\ \Gamma\to\theta}{\phi\supset\psi,\ \Gamma\to\theta}$

（→∀）$\dfrac{\Gamma\to\phi}{\Gamma\to\forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$ ただし，aはΓに出現していない。

（∀→）$\dfrac{\phi^{x}{}_{t},\ \Gamma\to\theta}{\forall x\,\phi,\ \Gamma\to\theta}$

（→∃）$\dfrac{\Gamma\to\phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\to\exists x\,\phi}$

（∃→）$\dfrac{\phi^{x}{}_{a},\ \Gamma\to\theta}{\exists x\,\phi,\ \Gamma\to\theta}$ ただし，aはΓ，θに出現していない。

（⊥）$\dfrac{\Gamma\to\bot}{\Gamma\to\theta}$

この体系がカットなしの**直観主義連式計算**（これをＩＳで表す：Intuitionistic Sequent)である。連式：$\Gamma\to\phi$がＩＳで証明可能であるのは，出発点がすべて公理であり，上の規則により統御された証明樹が構成されるとき，かつそのときにかぎる。連式$\Gamma\to\phi$がＩＳで証明可能であることを

$$\vdash_{\mathrm{IS}}\ \Gamma\to\phi$$

で表す。

３．２　主定理

さて，連式計算と２．４節での自然演繹の連式ヴァージョンとの関係を考えよう。まず，

$\vdash_{\mathrm{IS}}\Gamma\to\phi$　ならば，
自然演繹の連式ヴァージョンで　$\Gamma\vdash\phi$が導出可能である……（＊）

（証明は，$\Gamma\to\phi$のＩＳにおける証明の長さに関する数学的帰納法による。）

この（＊）の逆も成り立つ。いま，ゲンツェンが導入した次の規則（ＣＵＴ）を考える。

$$(\mathrm{CUT})\ \dfrac{\Gamma\to\phi\qquad\phi,\ \Gamma\to\theta}{\Gamma\to\theta}$$

これは自然演繹での消去規則をある意味で模倣する規則である(26)。いま，

$$\mathrm{IS}^{+}=\mathrm{IS}+(\mathrm{CUT})$$

とすると，

$\Gamma\vdash\phi$が自然演繹の連式ヴァージョンで導出可能ならば，$\vdash_{\mathrm{IS+}}\Gamma\to\phi$．

が証明できる。そこで，ゲンツェンの主定理：

「ＣＵＴは消去可能である」

が成り立つならば，

$\vdash_{\mathrm{IS+}}\Gamma\to\phi$　ならば$\vdash_{\mathrm{IS}}\Gamma\to\phi$

となるから，上の（＊）の逆が成り立つことになる。

ところで，自然演繹にとってカット（ＣＵＴ）はどのような意味を持つか。カットは，$\Gamma\vdash\phi$　および　$\phi,\ \Gamma\vdash\psi$　から，$\Gamma\vdash\psi$への移行を許す。この移行は（⊃Ｉ）と（⊃Ｅ）を連続して行うことにより実現する：

$$(\supset\mathrm{E})\ \cfrac{(\supset\mathrm{I})\ \dfrac{\phi,\ \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\phi\supset\psi}\qquad\Gamma\vdash\phi}{\Gamma\vdash\psi}$$

ここに，新しい最大式　$\phi\supset\psi$　が生じている。また，導出樹の構成という観点からカッ

トを見ると，

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi\end{array} \quad \text{および} \quad \begin{array}{c}\phi,\ \Gamma\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

から，

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \phi,\ \Gamma\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

を作ることを許すものと解することができる。このとき，φは新しい最大式となっている可能性がある。こうして，カットのない連式計算の導出は，最大式のない標準的導出のみから成る自然演繹の導出に対応する。自然演繹の導出が標準的ならば，（＊）の逆により，その導出はカットのない連式計算ＩＳで証明されることになる。すると，主定理を証明することが，自然演繹と連式計算の同等性を示すのに好都合であることが分かる。

ゲンツェンの主定理の証明は，より複雑なカットをより単純なカットへと還元する一連の手続きを示すことから成る。例えば，

$$\dfrac{(\to\&)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\phi\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\psi\end{array}}{\Gamma\to\phi\,\&\,\psi}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi,\ \Gamma\to\theta\end{array}}{\phi\,\&\,\psi,\ \Gamma\to\theta}\ (\&\to)}{\Gamma\to\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

を，

$$\dfrac{\Gamma\to\phi \qquad \phi,\ \Gamma\to\theta}{\Gamma\to\theta}\ (\mathrm{CUT})$$

へと置き換える。上のカット式φ＆ψよりも，下のカット式φがより単純にものになっている。実際の状況はこれほど簡単なものばかりではないが，このような洞察が基本となっている[27]。

３．３　古典論理の連式計算

さて，古典論理に対する連式計算を考察するために，連式を‘Γ→Δ’という形で表現する。ここで，先件Γは後件Δとともに整式の有限集合であるが，Δは空でないとする。Δが空のとき，‘Γ→　’と書く。また，Γ→｛φ｝の代わりにΓ→φと略記する。

ところで，これまでＩＳ（直観主義連式計算）では‘⊥’を原始記号としたが，これを落として‘¬’（否定）を原始記号とすることができる。そして，規則（⊥）の代わりに

$$\dfrac{\Gamma\to}{\Gamma\to\theta}$$

を採用し，‘¬’に関する規則として，

$$(\to\neg)\ \dfrac{\phi,\ \Gamma\to}{\Gamma\to\neg\phi} \qquad \text{および} \qquad (\neg\to)\ \dfrac{\Gamma\to\phi}{\neg\phi,\ \Gamma\to}$$

を追加する。この新しい定式化をＩＳ′とする。

新しい形式での連式：Γ→Δの解釈について考える。Γのすべての要素が真であるときΔの少なくとも一つの要素が真であるとき，Γ→Δは妥当であると呼ばれ，Γのすべての要素を真とし，Δのすべての要素を偽とすることができるとき，Γ→Δは反証可能であると呼ばれる。これに対応して，規則についても二つの解釈を考えることができる。規則：

$$\dfrac{S_1 \qquad S_2}{S}$$

において，「もし連式S_1とS_2がともに妥当であるならば，連式Ｓも妥当である」という解釈が可能であるとともに，「もし連式Ｓが反証可能であるならば，連式S_1またはS_2の少なくとも一方が反証可能である」という解釈も可能である。この第二の解釈が成り立つことを上のＩＳ′の（¬→）と（→¬）について確認しよう。まず（¬→）である。結論（下の連式）：¬φ，Γ→　が反証可能ならば，¬φとΓをすべて真とすることができる。よって，Γの要素をすべて真，φを偽にし得る。よって，前提（上の連式）：Γ→φが反証可能となる。次に（→¬）である。結論：Γ→¬φが反証可能とする。すると，Γをすべて真，¬φを偽とすることができる。よって，φとΓをすべて真とすることができる。よって，前提：φ，Γ→　が反証可能となる。

ここで，古典論理に対応させるため，ＩＳ′での‘¬’についての規則（→¬）（¬→）を各々一般化して，

$$\dfrac{\phi,\ \Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\ \neg\phi} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma\to\Delta,\ \phi}{\neg\phi,\ \Gamma\to\Delta}$$

とする。すると，各規則の結論（下の連式）の反証可能性の必要十分条件が，少なくとも一つの前提（上の連式）の反証可能性であるような，連式体系を構成することができる。このとき，公理は反証可能ではあり得ない。また一般に，規則の前提の複雑さの度合いはその規則の結論より（量化子に関する規則を除いて）低くなる。よって，結論の反証可能性は，より複雑さの低い反証可能性の条件によって表現され得る。このような連式体系をＣＳ（古典論理連式計算：‘Ｃ’は classicalに由来）と呼ぶ。ＣＳは以下の公理と推論規則から成る：

公理　$\phi,\ \Gamma\to\Delta,\ \phi$

(→&)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \phi \qquad \Gamma\to\Delta,\ \psi}{\Gamma\to\Delta,\ \phi\&\psi}$$

(&→)　$$\frac{\phi,\ \psi,\ \Gamma\to\Delta}{\phi\&\psi,\ \Gamma\to\Delta}$$

(→∨)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \phi,\ \psi}{\Gamma\to\Delta,\ \phi\vee\psi}$$

(∨→)　$$\frac{\phi,\ \Gamma\to\Delta \qquad \psi,\ \Gamma\to\Delta}{\phi\vee\psi,\ \Gamma\to\Delta}$$

(→⊃)　$$\frac{\phi,\ \Gamma\to\Delta,\ \psi}{\Gamma\to\Delta,\ \phi\supset\psi}$$

(⊃→)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \phi \qquad \psi,\ \Gamma\to\Delta}{\phi\supset\psi,\ \Gamma\to\Delta}$$

(→¬)　$$\frac{\phi,\ \Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\ \neg\phi}$$

(¬→)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \phi}{\neg\phi,\ \Gamma\to\Delta}$$

(→∀)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \phi}{\Gamma\to\Delta,\ \forall x\,\phi^{a}{}_{x}}$$
ただし，aはΓ，Δに出現していない。

(∀→)　$$\frac{\phi^{x}{}_{t},\ \forall x\,\phi,\ \Gamma\to\Delta}{\forall x\,\phi,\ \Gamma\to\Delta}$$

(→∃)　$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \exists x\,\phi,\ \phi^{x}{}_{t}}{\Gamma\to\Delta,\ \exists x\,\phi}$$

(∃→)　$$\frac{\phi,\ \Gamma\to\Delta}{\exists x\,\phi^{a}{}_{x},\ \Gamma\to\Delta}$$
ただし，aはΓ，Δに出現していない。

３．４　タブロー・メソッド

最後に，カットなし連式計算の完全性証明の研究から１９５０年代に，Beth，Hintikka，Kanger，Schütteによって独立に発見されたタブロー・メソッド（または意味論タブロー）を考察する[28]。まず，次の定義から始める。

定義：ϕが整式のとき，Tϕ，Fϕはともに記号づけられた整式である。

ここで意図されている解釈は，Tϕが「ϕは真である」，Fϕが「ϕは偽である」ということであり，CSでの反証可能性を徹底することである。こうして，連式$\{\phi_1,\cdots,\phi_k\}\to\{\psi_1,\cdots,\psi_m\}$は記号づけられた整式の有限列：T$\phi_1$,…，T$\phi_k$,F$\psi_1$,…，F$\psi_m$へと変換される。CSでの規則は上下が逆転した形で再解釈され，新たな導出は反証可能性解釈の体系的探索となり，枝分かれする規則は解釈の複数の選択肢ということになる[29]。探索は樹状の形に表現され，探索に成功した場合，連式の妥当性に対する反証が得られたことになり[30]，探索樹が閉じられて反証可能性が存在しないことが判明する場合，元の連式の妥当性が示される[31]。

タブロー・メソッドの体系Tの規則は以下のものである（‘S’は記号づけられた整式の有限集合である）。

F&：　$$\frac{S,\ F\phi\&\psi}{S,\ F\phi \mid S,\ F\psi}$$

T&：　$$\frac{S,\ T\phi\&\psi}{S,\ T\phi,\ T\psi}$$

F∨：　$$\frac{S,\ F\phi\vee\psi}{S,\ F\phi,\ F\psi}$$

T∨：　$$\frac{S,\ T\phi\vee\psi}{S,\ T\phi \mid S,\ T\psi}$$

F⊃：　$$\frac{S,\ F\phi\supset\psi}{S,\ T\phi,\ F\psi}$$

T⊃：　$$\frac{S,\ T\phi\supset\psi}{S,\ F\phi \mid S,\ T\psi}$$

F¬：　$$\frac{S,\ F\neg\phi}{S,\ T\phi}$$

T¬：　$$\frac{S,\ T\neg\phi}{S,\ F\phi}$$

F∀：　$$\frac{S,\ F\forall x\,\phi}{S,\ F\phi^{x}{}_{a}}$$
ただし，aはSに出現していない。

T∀：　$$\frac{S,\ T\forall x\,\phi}{S,\ T\forall x\,\phi,\ T\phi^{x}{}_{t}}$$

F∃：　$$\frac{S,\ F\exists x\,\phi}{S,\ F\exists x\,\phi,\ F\phi^{x}{}_{t}}$$

T∃：　$$\frac{S,\ T\exists x\,\phi}{S,\ T\phi^{x}{}_{a}}$$
ただし，aはSに出現していない。

これらの規則のうち，枝分かれする規則（F&）（T∨）（T⊃）は，反証条件の可能な選択肢の存在を示しており，探索においてはそのすべての選択肢が調べられねばならない。整式ϕのタブローによる証明は，樹の頂点が｛Fϕ｝であり，すべての枝が閉じている形での，記号づけられた式の有限集合から成る有限樹である。

より簡便なタブローは，樹の節を記号づけられた整式の集合ではなく，整式そのものとすることによって得られる。まず，頂点の節：｛Tϕ_1,…，Tϕ_k,Fψ_1,…，Fψ_m｝を縦方向に，

$$\begin{array}{c} T\phi_1 \\ \vdots \\ T\phi_k \\ F\psi_1 \\ \vdots \\ F\psi_m \end{array}$$

と書き，以下の規則を使う：

$$\begin{array}{ccc} & F\phi\&\psi & \\ F\phi & & F\psi \end{array} \qquad\qquad \frac{T\phi\&\psi}{\begin{array}{c}T\phi\\ T\psi\end{array}}$$

$$\frac{F\phi\vee\psi}{\begin{array}{c}F\phi\\ F\psi\end{array}} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & T\phi\vee\psi & \\ T\phi & & T\psi \end{array}$$

$$\frac{F\phi\supset\psi}{\begin{array}{c}T\phi\\ F\psi\end{array}}\qquad\qquad \begin{array}{c}T\phi\supset\psi\\ \swarrow\quad\searrow\\ F\phi\qquad T\psi\end{array}$$

$$\frac{F\neg\phi}{T\phi}\qquad\qquad\frac{T\neg\phi}{F\phi}$$

$$\frac{F\forall x\phi}{F\phi^{x}{}_{a}}$$ ただし，aは枝で新しいパラメータである。

$$\frac{T\forall x\phi}{T\phi^{x}{}_{t}}$$

$$\frac{F\exists x\phi}{F\phi^{x}{}_{t}}$$

$$\frac{T\exists x\phi}{T\phi^{x}{}_{a}}$$ aは枝で新しいパラメータである。

これにより，簡潔な探索樹が得られる[32]。

さらに簡潔なタブローを得るには，‘Fφ’を‘¬φ’に，‘Tφ’を‘φ’に変換することで，記号づけられた整式の規則に替えて，通常の整式の分解規則を定めることである。すると上の規則は次のようになる。

$$\begin{array}{c}\neg(\phi\,\&\,\psi)\\ \swarrow\quad\searrow\\ \neg\phi\qquad\neg\psi\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\phi\,\&\,\psi\\ |\\ \phi\\ |\\ \psi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\phi\vee\psi)\\ |\\ \neg\phi\\ |\\ \neg\psi\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\phi\vee\psi\\ \swarrow\quad\searrow\\ \phi\qquad\psi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\phi\supset\psi)\\ |\\ \phi\\ |\\ \neg\psi\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c}\phi\supset\psi\\ \swarrow\quad\searrow\\ \neg\phi\qquad\psi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\neg\phi\\ |\\ \phi\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\forall x\phi\\ |\\ \neg\phi^{x}{}_{a}\end{array}$$ aは枝で新しいパラメータ

$$\begin{array}{c}\forall x\phi\\ |\\ \phi^{x}{}_{t}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\exists x\phi\\ |\\ \neg\phi^{x}{}_{t}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\exists x\phi\\ |\\ \phi^{x}{}_{a}\end{array}$$ aは枝で新新しいパラメータ

例として，∀x（φ∨ψ）⊃φ∨∀xψ（ここでφにxは出現していない）を，この最後の方式でのタブロー・メソッドで分析しよう。

$$\begin{array}{c}\neg(\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi)\\ |\\ \forall x(\phi\vee\psi)\\ |\\ \neg(\phi\vee\forall x\psi)\\ |\\ \neg\phi\\ |\\ \neg\forall x\psi\\ |\\ \neg\psi^{x}{}_{a}\\ |\\ \phi\vee\psi^{x}{}_{a}\\ \swarrow\qquad\searrow\\ \phi\qquad\qquad\psi^{x}{}_{a}\end{array}$$

二つの可能な枝がともに矛盾を含んで閉じているので，反証は不可能である。よって，∀x（φ∨ψ）⊃φ∨∀xψ　は妥当であることが証明された。

こうして，連式計算から示唆を得て発展したタブロー・メソッドは，反証可能性による整式の妥当性，非妥当性の判定方法を提供する。

４．フレーゲの体系の連式計算的要素

本節では，フレーゲの『算術の基本法則』の論理体系の中での連式計算的要素を探る。本来のフレーゲの論理体系は公理の体系であるが，証明を構成し易くするために，フレーゲは多数の派生推論規則を認め，そこでのメタ法則を利用することを考えている[33]。そこに，フレーゲの連式計算的発想の根を認めることが可能である[34]。

そこで，われわれは第一階述語論理の部分にかぎって，その点を確認することにする。まず，フレーゲの体系を再構成する。第一階述語論理のフレーゲの公理図式（代入規則を省くため公理図式を採用する）は以下の三種類である。

【公理図式】

Ａ１：（ａ）Ａ⊃Ａ

　　：（ｂ）Ａ⊃（Ｂ⊃Ａ）

Ａ２：∀ｘＡ(x)⊃Ａ(a)

Ａ３：¬（Ａ≡¬Ｂ）⊃（Ａ≡Ｂ）

フレーゲの定理は条件法（質料含意）の形をしている：

$$A_1 \supset (A_2 \supset \cdots (A_n \supset B) \cdots).$$

フレーゲは彼の記号法における式の位置に応じて，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を「下の要素」(Unterglieder)，Bを「上の要素」(Oberglieder) と呼ぶが，ここでは前者を先件，後者を後件と呼ぶ。さて，われわれは上の条件法において，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_i$$

を先件と見なし，

$$A_{i+1} \supset (A_{i+2} \supset \cdots (A_n \supset B) \cdots)$$

を後件と見なすことができる（ただし，$1 \leqq i \leqq n$）。従って，条件法そのものと，それを先件と後件とに分析することとは区別せねばならない。いま，条件法を先件と後件に分析したとする。そのとき，その条件法を，先件を論理式の列とし，後件を一つの論理式とする連式（sequent），すなわち，

$$A_1,\ \cdots,\ A_i \rightarrow A_{i+1} \supset (A_{i+2} \supset \cdots (A_n \supset B) \cdots) \qquad \cdots\cdots (※)$$

と解釈することができる。フレーゲの推論規則は，条件法の中での先件と後件に対する操作として定式化されているから，それらの規則は，ある連式を別の連式から導出する規則と見なすことができる。しかし，その際，次の演繹規則を追加する必要がある：

$$R1^* \quad (a)\ \frac{\Gamma,\ A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}\ \text{（移出）} \qquad (b)\ \frac{\Gamma \rightarrow A \supset B}{\Gamma,\ A \rightarrow B}\ \text{（移入）}$$

$R1^*$ の適用は，フレーゲの証明における他の規則の前後に挿入されることになる。Γが空でないときのみ，連式“Γ→A”は条件法を表すが，Γが空のとき，“ →A”はAを表すと理解する。

【規則】

フレーゲの最初の規則は水平線の融合であるが，われわれの再構成ではこれは不要であり，代わりに$R1^*$ が採用される。それ以外の規則は以下の通りである。

$$R2: \quad \frac{A_1,\ \cdots,\ A_n \rightarrow B}{A_{p(1)},\ \cdots,\ A_{p(n)} \rightarrow B}$$

p(i)はi（i=1,2, …,n）に対する任意の置き換え。

$$R3: \quad \frac{\Gamma,\ A,\ \Delta \rightarrow B}{\Gamma,\ nB,\ \Delta \rightarrow nA}\ \text{（対偶）}$$

ただし $\begin{cases} nA = \neg A, & \text{Aが}\neg B\text{の形をしていないとき；} \\ nA = n\neg B = B, & \text{Aが}\neg B\text{の形のとき.} \end{cases}$

われわれはR３をより使い易いように次の形に纏める：

$$R3: \quad (a)\ \frac{\Gamma,\ A,\ \Delta \rightarrow B}{\Gamma,\ \neg B,\ \Delta \rightarrow \neg A} \qquad (b)\ \frac{\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \rightarrow \neg B}{\Gamma,\ B,\ \Delta \rightarrow A}$$

$$(c)\ \frac{\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \rightarrow B}{\Gamma,\ \neg B,\ \Delta \rightarrow A} \qquad (c)\ \frac{\Gamma,\ A,\ \Delta \rightarrow \neg B}{\Gamma,\ B,\ \Delta \rightarrow \neg A}$$

$$R4: \quad \frac{\Gamma,\ A,\ \Delta,\ A,\ \Lambda \rightarrow B}{\Gamma,\ A,\ \Delta,\ \Lambda \rightarrow B}\ \text{（先件の圧縮）}$$

$$R5: \quad \frac{\Gamma \rightarrow A(a)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)}\ \text{（後件の普遍化）}$$

ただし，‘a’は結論の連式に現れない。

$$R6: \quad \frac{\rightarrow A \qquad \Gamma,\ A,\ \Delta \rightarrow B}{\Gamma,\ \Delta \rightarrow B}\ \text{（CUT）}$$

$$R7: \quad \frac{\Gamma,\ \rightarrow A \qquad \Delta,\ A,\ \Lambda \rightarrow B}{\Gamma,\ \Delta,\ \Lambda \rightarrow B}\ \text{（一般CUT）}$$

$$R8. \quad \frac{\Gamma,\ A,\ \Delta \rightarrow B \qquad \Gamma,\ \neg A,\ \Delta \rightarrow B}{\Gamma,\ \Delta \rightarrow B}\ \text{（排中律）}$$

さて，以上のフレーゲの体系と比較するために，改めてゲンツェン流連式計算の体系を記述する。ここでは，後件が空である連式も用いることにして，“Γ→ ”を Γ→¬(A⊃A) で定義する。また，Ωは高々一つの論理式しか含まない論理式の列である。

【公理図式】

RF：A→A

【構造に関する推論規則】

$$I: \quad \frac{\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \rightarrow \Omega}{\Gamma,\ B,\ A,\ \Delta \rightarrow \Omega}\ \text{（交換）} \qquad AC: \quad \frac{\Gamma,\ A,\ A \rightarrow \Omega}{\Gamma,\ A \rightarrow \Omega}\ \text{（圧縮）}$$

$$AT: \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Omega}{\Gamma,\ A \rightarrow \Omega}\ \text{（先件増）} \qquad ST: \quad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A}\ \text{（後件増）}$$

$$C: \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \qquad \Gamma,\ A \rightarrow \Omega}{\Gamma \rightarrow \Omega}\ \text{（CUT）}$$

$$TND: \quad \frac{\Gamma,\ A \rightarrow \Omega \qquad \Gamma,\ \neg A \rightarrow \Omega}{\Gamma \rightarrow \Omega}\ \text{（排中律）}$$

【論理記号に関する推論規則】

SＩ：
$$\frac{\Gamma,\ A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\ (\to\supset)$$

AＩ：
$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma,\ B \to \Omega}{\Gamma,\ A \supset B \to \Omega}\ (\supset\to)$$

SN：
$$\frac{\Gamma,\ A \to}{\Gamma,\ \to \neg A}\ (\to\neg)$$

AN：
$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma,\ \neg A \to}\ (\neg\to)$$

SG：
$$\frac{\Gamma \to A(a)}{\Gamma \to \forall x A(x)}\ (\to\forall)$$

ここで，‘a’は結論の連式（下連式）に現れない。

AG：
$$\frac{\Gamma,\ A(a) \to \Omega}{\Gamma,\ \forall x A(x) \to \Omega}\ (\forall\to)$$

論理記号に関する規則のうち，先件への当該論理記号を含む複合式導入であるA規則は，対応するS規則の逆と同等である：

SＩ⁻ ：
$$\frac{\Gamma \to A \supset B}{\Gamma,\ A \to B}$$

SN⁻ ：
$$\frac{\Gamma \to \neg A}{\Gamma,\ A \to}$$

SG⁻ ：
$$\frac{\Gamma \to \forall x A(x)}{\Gamma \to A(a)}$$

さて，フレーゲの体系も，以上のゲンツェン流の連式もともに完全な述語論理の体系である。ここには，以下のような類似性がある：

ゲンツェン流体系のAＩとSＩ⁻ は，フレーゲの体系のR１* である。

〃　SGは，　〃　R５　〃

〃　Ｉ　は，　〃　R２の特殊ケースである。

〃　ACは，　〃　R４　〃

〃　Cは，　〃　R７　〃

〃　TNDは，　〃　R８　〃。

残りの規則もフレーゲの体系から（R１* も適宜用いて）得られる。

ゲンツェン流体系のATは，フレーゲの体系のA１bとR７から導出される。

〃　SNは，　〃　A１，R３，R７　〃

〃　SN⁻ は，　〃　R３　〃

〃　SG⁻ は，　〃　A２，R７　〃

〃　STは，　〃　A１，R３，R７　〃

〃　SＩは，　〃　R１* そのものである。

〃　ANは，　〃　A１，R７，R３から導出される。

〃　AGは，　〃　A２，R７，R２　〃

逆に，フレーゲの体系の諸規則がゲンツェン流体系の規則またはそれの一般化であることも，容易に確かめ得る。

両者の体系の本質的な違いは，フレーゲが，先件への導入規則の代わりに後件に対する消去規則を述べていることである。主定理を証明するために，ゲンツェンは「導入規則」のみに規則を制限した。それは，証明論的な発想に立つもので，フレーゲには無いゲンツェンの独自な洞察によるものと見なされねばならないだろう。

註

(1) サンドホルムは論理学研究における演繹体系の役割として，以下の事例を挙げている（Göran Sundholm, "Systems of Deduction" in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. I, Reidel, 1983, pp.133-188）。①フレーゲの場合のような数学（フレーゲにおいては算術）の確実な基礎を与えること，②様相論理のいくつかの分野に見られるような，すでに与えられた意味論的帰結関係を構文論的に生成すること，③カットなしのゲンツェン流連式による無限論理の初期の展開に見られるような発見の道具となること，④ヒルベルトの無矛盾性証明の計画に関する伝統的仕事のような，メタ数学の研究対象となること，⑤推論の本性についての哲学的洞察を定式化するときの一つのモデルケースとなること，等において演繹体系が用いられている。尚，本章を準備する過程でこのサンドホルムの論文から多くの貴重な示唆を得た。

(2) フレーゲの体系は『概念記法』に史上最初の論理の公理体系として現れた。Gottlob Frege, Begriffsschrift, Nebert (1879).

(3) ヒルベルトはこの体系を例えば次の書物で採用している。D. Hilbert and P. Bernays, Grundlagen der Mathematik vol.I/II., Springe (1934/39'), 2nd edition (1968/79), 邦訳：D. ヒルベルト／P. ベルナイス（吉田夏彦・渕野昌訳），『数学の基礎』シュプリンガー・フェアラーク東京（1993）は，第2版からの抄訳である。

(4) 通常この体系においても「推論規則」という名称が使われるが，Sundholm に従い「証明規則」という名称を採用する。これは，推論の前提が「定理」であり，単なる「仮定」であってはならないということを暗示するのに都合がよい。

(5) 証明（正確には証明図式）の例として，$\phi\supset\phi$ の証明を描く：

$$\dfrac{\phi\supset(\phi\supset\phi) \qquad \dfrac{(\phi\supset((\phi\supset\phi)\supset\phi))\supset((\phi\supset(\phi\supset\phi))\supset(\phi\supset\phi)) \qquad \phi\supset((\phi\supset\phi)\supset\phi)}{(\phi\supset(\phi\supset\phi))\supset(\phi\supset\phi)}}{\phi\supset\phi}$$

これは，

$$\dfrac{(4) \qquad \dfrac{(1) \qquad (2)}{(3)}}{(5)}$$

という形をしている。(1)と(2)は各々公理（A2）（A1）であり，(3)はこれらを前提としてのMPによる結論である。(4)は再び公理（A1）であり，(3),(4)からMPにより(5)が導かれる。証明が唯一つの移行パターンであるMPにより形成されるという単純さにより，この体系の証明に関するメタ定理（証明の特徴を述べる命題）の発見とその証明（メタ証明）が容易になる。しかし反面，上の最も簡単な例からも分かるように，この体系の証明を遂行するのは頗る煩雑である。出発点が三種類の公理に限られていて（大抵は長大なものになる），しかも一つのパターンでしか移行できないから先の見通しが限られるからである。この欠点は，しかし，以下で述べる演繹定理により，相当程度は解消される。

(6) 証明は概略以下のようになる。定理の仮定により，出発点として $\phi_1,\ldots,\phi_k$（Γの要素）と ϕ という仮定と公理 $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ を取る ψ の証明Dが存在する：

$$\left.\begin{array}{c} \phi,\quad \phi_1,\ \ldots,\ \phi_k,\quad \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_m \\ \vdots \\ \dfrac{\theta\supset\delta \qquad \theta}{\delta}\,(\mathrm{MP}) \\ \vdots \\ \psi \end{array}\right]\mathrm{D}$$

さて，仮定としてΓのみを取る $\phi\supset\psi$ の証明を見出さねばならない。そのために，Dに'$\phi\supset$'変形，すなわちDの各式の右端に'$\phi\supset$'を付加する操作を施して，以下の擬証明樹'$\phi\supset$D'を作る。

$$\left.\begin{array}{c} \phi\supset\phi,\quad \phi\supset\phi_1,\ \ldots,\ \phi\supset\phi_k,\quad \phi\supset\gamma_1,\ \ldots,\ \phi\supset\gamma_m \\ \vdots \\ \dfrac{\phi\supset(\theta\supset\delta) \qquad \phi\supset\theta}{\phi\supset\delta}\,\text{'}\phi\supset\mathrm{MP}\text{'} \\ \vdots \\ \phi\supset\psi \end{array}\right]\text{'}\phi\supset\mathrm{D}\text{'}$$

この'$\phi\supset$D'を改良して，Γだけからの $\phi\supset\psi$ の証明を作ることができることを示

す。（言い換えると，‘$\phi \supset D$’を構成しているすべての式αに対して，$\Gamma \vdash \alpha$であることを示す。）まず擬証明樹‘$\phi \supset D$’の出発点である三種の式の場合である。

（a）$\phi \supset \phi$の場合。註５より証明可能。ゆえに，$\Gamma \vdash \phi \supset \phi$.

（b）$\phi \supset \phi i$（$\phi i \in \Gamma$）の場合。仮定ϕiと公理（Ａ１）$\phi i \supset (\phi \supset \phi i)$を挿入して，

$$\frac{\phi i \qquad\qquad \phi i \supset (\phi \supset \phi i)}{\phi \supset \phi i}\,(\mathrm{MP})$$

を作ることで，$\Gamma \vdash \phi \supset \phi i$が示せる。

（c）$\phi \supset \gamma i$（γiは公理$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$の一つ）の場合。公理$\gamma i$と公理（Ａ１）$\gamma i \supset (\phi \supset \gamma i)$を挿入して，

$$\frac{\gamma i \qquad\qquad \gamma i \supset (\phi \supset \gamma i)}{\phi \supset \gamma i}\,(\mathrm{MP})$$

を作ることで　$\Gamma \vdash \phi \supset \gamma i$が示せる。公理（Ａ１）の存在理由はこの（ｂ）（ｃ）が可能となる点にある。残るは，（ｄ）擬ＭＰ，すなわち‘$\phi \supset$ＭＰ’によって移行している途中の段階を正しいＭＰに復元することである。そのために公理（Ａ２）を使って，$\phi \supset (\theta \supset \delta)$と$\phi \supset \theta$　から$\phi \supset \delta$へのＭＰによる移行を次のように作る（公理（Ａ２）の存在理由はここにある）：

$$\cfrac{\phi \supset \theta \qquad \cfrac{(\phi \supset (\theta \supset \delta)) \supset ((\phi \supset \theta) \supset (\phi \supset \delta)) \qquad \phi \supset (\theta \supset \delta)}{(\phi \supset \theta) \supset (\phi \supset \delta)}\,(\mathrm{MP})}{\phi \supset \delta}\,(\mathrm{MP})$$

帰納の仮定より　$\Gamma \vdash \phi \supset (\theta \supset \delta)$，$\Gamma \vdash \phi \supset \theta$であるから，$\Gamma \vdash \phi \supset \delta$。こうして，$\phi \supset \psi$も，(a)−(d)のいずれかのパターンに当てはまるから，$\Gamma \vdash \phi \supset \psi$。

Ｑ．Ｅ．Ｄ．

(7)‘$\phi^x{}_t$’という表現は，変項xがϕ中で自由変項として現れているとき，xをtで置き換えてϕから得られる表現である。これは次のように帰納的に定義される。

(0) ϕが原子文のとき，$\phi^x{}_t$はϕ中のxをtで置き換えて得られる表現である。

(1) $(\neg \phi)^x{}_t = \mathrm{def.}\ \neg(\phi^x{}_t)$

(2) $(\phi \supset \psi)^x{}_t = \mathrm{def.}\ \phi^x{}_t \supset \psi^x{}_t$

(3) $(\forall y \phi)^x{}_t = \mathrm{def.} \begin{cases} \forall y \phi, & \text{xとyが同一の変項であるとき；} \\ \forall y (\phi^x{}_t), & \text{そうでないとき.} \end{cases}$

こうして，$(x=y)^y{}_x$は$x=x$であり，$\forall x (x=x)^x{}_t$は$\forall x (x=x)$である。

(8) いま，ϕを$\neg \forall y (x=y)$とする。すると，$\phi^x{}_t = \mathrm{def.}\ \neg \forall y (y=y)$，$(\forall x \phi \supset \phi)^x{}_t = \mathrm{def.}\ (\forall x \phi)^x{}_t \supset \phi^x{}_t = \forall x \neg \forall y (x=y) \supset \neg \forall y (y=y)$である。ところが，この最後の式は論理的に妥当ではない。なぜなら，二つ以上の個体を持つ任意の個体領域において，先件は真であるが後件は常に偽だから，反例モデルを作ることができるからである。これが（Ｑ４）に制限条件が必要な理由である。すなわち，xの自由出現がϕ中において，tが持つ自由変項を束縛することになるような変項の作用域に存在しないとき，tはxに対して「代入可能」と言われる（または「xに対して代入可能」の代わりに「xに対して自由」とも言われる）。

これは次のように帰納的に定義される。

(i) ϕが原子文のとき，tはxに対してϕで代入可能である。

(ii) tがxに対してϕにおいて代入可能であるとき，tはxに対して$(\neg \phi)$において代入可能である。

(iii) tがxに対してϕとψにおいて代入可能であるとき，tはxに対して$(\phi \supset \psi)$において代入可能である。

(iv) xが$\forall y \phi$において自由に現れないときか，または，yがtにおいて出現せずtがxに対してϕにおいて代入可能であるとき，tはxに対して$\forall y \phi$において代入可能である。

(9) 証明は以下のようになる。Γからのψの証明樹をＤとすると，Ｄは次の形をしている：

$$\begin{array}{c} \overbrace{\phi_1, \cdots, \phi_k}^{\Gamma}, \qquad \overbrace{\gamma_1, \cdots, \gamma_m}^{\text{公理}} \\ \vdots \\ \dfrac{\theta \supset \psi \qquad \theta}{\psi}\,(\mathrm{MP}) \\ \vdots \\ \phi \end{array}$$

そこで，Ｄ中で出現している各整式δに対して，$\Gamma \vdash \forall x \delta$　を示す。まず，δがＤの出発点である場合：

(i) δが公理$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$の一つであるとき。公理の一般化はすべて再び公理であるから，$\forall x \delta$は公理である。ゆえに，$\Gamma \vdash \forall x \delta$。

(ii)δがΓの要素であるとき。定理の仮定により，Γ中のいかなる式においてもxは自由変項としては出現していないから，当然δにも出現していない。しかるに，公理（Q6）より，$\vdash \delta \supset \forall x \delta$。$\delta$は$\Gamma$の要素だったから，MPにより　$\Gamma \vdash \forall x \delta$。（公理（Q6）の存在理由はこのことが可能となることにある。）

残るはモドゥス・ポネンスを適用する場合である。帰納法の仮定より，$\Gamma \vdash \forall x(\theta \supset \psi)$および$\Gamma \vdash \forall x \theta$。ところが（Q5）より，$\vdash \forall x(\theta \supset \psi) \supset (\forall x \theta \supset \forall x \psi)$，よってMPを2回適用して，$\Gamma \vdash \forall x \psi$。（公理（Q5）の存在理由はここにある。）Q．E．D．

(10)このタイプの体系は，タルスキー，カリシュ&モンタギュー，モンク等の以下の一連の論文で取り上げられている。A．Tarski: “A simplified formulation of predicate logic with identity”，Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung（以下Arch と略記）7，1965，pp.61-79．D．Kalish and R．Montague ： “On Tarski’s formalization of predicate logic with identity”，Arch 7，1965，pp.81-101．D．Monk: “Substitutionless predicate logic with identity”，Arch 7，1965，pp.102-121．

(11)例えば，以下のチャーチやメンデルソンが採用している体系は，（A1）－（A3）（Q4）（同じ制限を伴う）は共通であるが，次の公理を加える：

（Q′5）$\forall x(\phi \supset \psi) \supset (\phi \supset \forall x \psi)$……$x$は$\phi$中に自由には出現しない

この体系（F′CQCとする）では，公理が公理図式の事例のみであり，それらの一般化は公理に含まれない。ただし，次の二つの証明規則によってその効力を確保する：R′1．MP

R′2（一般化）．$\vdash \phi \ \Rightarrow\ \vdash \forall x \phi$

先の体系FCQCでは一般化は派生推論規則であったが，このF′CQCでは原始証明規則である。Cf．A．Church ：Introduction to Mathematical Logic, vol.I, Priceton U．P．1956, E．Mendelson: Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand.

(12)個体項の定義はこうなる：

(i)個体定項は項である。

(ii)パラメータは項である。

(iii) f^jがj項関数記号であり，$t_1,\cdots, t_j$がすべて項ならば，

$f^j(t_1,\cdots, t_j)$は項である。

(13)ポイントは量化に関する証明規則であるから，（R∀I）の場合のみ考える。いま，Dを，仮定ϕ，$\phi_1,\cdots$，ϕ_kからの$\theta \supset \forall x \psi^a{}_x$の証明とする：

$$\left.\begin{array}{c}\phi,\quad \phi_1,\ \cdots,\ \phi_k\\ \vdots\\ \dfrac{\theta \supset \psi}{\theta \supset \forall x \psi^a{}_x}\,(\mathrm{R}\forall \mathrm{I})\end{array}\right]\mathrm{D}$$

（R∀I）に対する制限が満たされているから，固有パラメータaはθにも，仮定ϕ，ϕ_1，…，ϕ_kのいずれにも出現していない。帰納法の仮定により，‘$\phi \supset$’変形によって得られる擬証明樹‘$\phi \supset$D’を改変して，仮定$\phi_1,\cdots$，ϕ_kだけからの　$\phi \supset (\theta \supset \psi)$の証明D′が存在する。このD′に続けて以下の証明樹が作れる：

$$\dfrac{(\phi \& \theta \supset \forall x \psi^a{}_x) \supset (\phi \supset (\theta \supset \forall x \psi^a{}_x))^{**} \qquad \dfrac{\dfrac{(\phi \supset (\theta \supset \psi)) \supset (\phi \& \theta \supset \psi)^{*} \qquad \left.\begin{array}{c}\phi_1,\ \cdots,\ \phi_k\\ \vdots\\ \phi \supset (\theta \supset \psi)\end{array}\right]\mathrm{D}'}{\phi \& \theta \supset \psi}\,(\mathrm{MP})}{\phi \& \theta \supset \forall x \psi^a{}_x}\,(\mathrm{R}\forall \mathrm{I})}{\phi \supset (\theta \supset \forall x \psi^a{}_x)}\,(\mathrm{MP})$$

ここで，‘*’のついた式は公理（A&Ei)と命題論理部分の演繹定理によって証明可能であり，$\phi \& \theta$および仮定$\phi_1,\cdots$，ϕ_kのいずれにも固有パラメータaが出現していないから，（R∀I）の適用は正しく，‘**’のついた式は公理（A&I）と命題論理の部分の演繹定理により証明可能である。

(14)ゲンツェンのオリジナルの論文は次のものである。G．Gentzen： “Untersuchungen über das logische Schliessen”，Mathematische Zeitschrift 39，(1934)，SS.176-210，405-431.

(15)M．Szabo：The Collected Papers of Gerhard Gentzen，North-Holland，(1969)，p.74.

(16)本文中の規則の表現は略式のものである。ここで，煩を厭わず詳しく正確に表現する。

（A）：任意の整式ϕに対して，ϕただ一つから成る木がϕ自身に依存する（つまりϕ自身を仮定とする）ϕの導出となる。

（&I）：$\begin{array}{c}\mathrm{D}_0\\ \phi_0\end{array}$ と $\begin{array}{c}\mathrm{D}_1\\ \psi_0\end{array}$ が，それぞれ，仮定$\phi_1,\cdots$，ϕ_kと仮定ψ_1，…，

ψ_m に依存するϕ_0とψ_0の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D_0}{\phi_0}\qquad\overset{D_1}{\psi_0}}{\phi_0\ \&\ \psi_0}\ (\&\mathrm{I})$$

は，仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k,\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ に依存する$\phi_0\ \&\ \psi_0$ の導出である。

(&Ei)：i =0,1 に応じて二つある。$\overset{D}{\phi_0\ \&\ \phi_1}$ が$\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ に依存する$\phi_0\ \&\ \phi_1$ の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi_0\ \&\ \phi_1}}{\phi_i}\ (\&\mathrm{Ei})$$

は，同じ仮定に依存する　ϕ_i の導出である。

(∨Ii)：i =0,1 に応じて二つある。　$\overset{D}{\phi_i}$　が仮定$\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ に依存するϕ_i の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi_i}}{\phi_0\vee\phi_1}\ (\vee\mathrm{Ii})$$

は同じ仮定に依存する　$\phi_0\vee\phi_1$ の導出である。

(∨E)：$\overset{D}{\phi\vee\psi}$　が仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k$ に依存する$\phi\vee\psi$の導出であり，

$\overset{\phi}{\underset{\theta}{D_1}}$ と $\overset{\psi}{\underset{\theta}{D_2}}$ が，それぞれ，仮定ϕ，$\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ と仮定ψ，$\theta_1,\cdots,$ θ_h に依存するθの導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi\vee\psi}\qquad\overset{[\phi]}{\underset{\theta}{D_1}}\qquad\overset{[\psi]}{\underset{\theta}{D_2}}}{\theta}\ (\vee\mathrm{E})$$

は，仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k,\psi_1,\cdots,\ \psi_m\ ,\ \theta_1,\cdots,\ \theta_h$ に依存するθの導出である。

(⊃I)：$\overset{D}{\psi}$　が仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_m$ に依存するψの導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\psi}}{\phi\supset\psi}\ (\supset\mathrm{I})$$

は，仮定$\phi_1{}^*,\ \cdots,\ \phi_m{}^*$に依存する$\phi\supset\psi$の導出である。ただし，$\phi_1{}^*,\cdots,\phi_m{}^*$は　$\phi_1,\cdots,\ \phi_m$ からいくつかの（0個やすべての場合も含む）ϕの出現を取り除いて得られるリストである。取り除かれたϕの出現は「解除された」と言われる。

(⊃E)：$\overset{D_0}{\phi\supset\psi}$　と　$\overset{D_1}{\phi}$　が，それぞれ，仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k$ と仮定$\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ に依存する$\phi\supset\psi$　と　ϕ　の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D_0}{\phi\supset\psi}\qquad\overset{D_1}{\phi}}{\psi}\ (\supset\mathrm{E})$$

は，仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k,\psi_1,\cdots,\ \psi_m$ に依存するψの導出である。

(⊥)：$\overset{D}{\bot}$　が仮定$\phi_1,\cdots,\ \phi_k$ に依存する$\bot$の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\bot}}{\phi}\ (\bot)$$

は，同じ仮定に依存するϕの導出である。

(∀I)：$\overset{D}{\phi}$　が仮定$\psi_1,\cdots,\ \psi_k$ に依存するϕの導出であり，ϕ中の固有パラメータaがこれらのどの仮定にも出現していないとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi}}{\forall x\,\phi^a{}_x}\ (\forall\mathrm{I})$$

は，同じ仮定に依存する　$\forall x\,\phi^a{}_x$　の導出である。

(∀E)：$\overset{D}{\forall x\,\phi}$　が，仮定$\psi_1,\cdots,\ \psi_k$ に依存する$\forall x\,\phi$の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\forall x\,\phi}}{\phi^x{}_t}\ (\forall\mathrm{E})$$

は，同じ仮定に依存する$\phi^x{}_t$の導出である。

(∃I)：$\overset{D}{\phi^x{}_t}$　が仮定$\psi_1,\cdots,\ \psi_k$ に依存する$\phi^x{}_t$の導出であるとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\phi^{x}{}_{t}}}{\exists x\phi}\,(\exists \mathrm{I})$$

は，同じ仮定に依存する$\exists x\phi$の導出である。

（∃E）：$\overset{D}{\exists x\phi}$　が仮定$\phi_1,\cdots,\phi_k$ に依存する$\exists x\phi$の導出であり，

$\overset{\phi^{x}{}_{a}}{\overset{D}{\theta}}$　が仮定$\phi^{x}{}_{a}$，$\theta_1,\cdots,\theta_m$ に依存するθの導出であり，固有パラメータaが$\exists x\phi$にもθにも，$\phi^{x}{}_{a}$以外のθが依存するどの仮定にも出現していないとき，

$$\dfrac{\overset{D}{\exists x\phi}\qquad \overset{[\phi^{x}{}_{a}]}{\overset{D_1}{\theta}}}{\theta}\,(\exists \mathrm{E})$$

は，仮定$\phi_1,\cdots,\phi_k,\theta_1,\cdots,\theta_m$ に依存するθの導出である。

(17)例えば，次の二つの導出においては（⊃Ｉ）はいずれも「解除」を伴う。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{[P]}\qquad\overset{1}{[Q]}}{P\&Q}\,(\&\mathrm{I})}{P}\,(\&\mathrm{E})}{Q\supset P}\,(\supset \mathrm{I})\ 1}{P\supset(Q\supset P)}\,(\supset \mathrm{I})\ 2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{3}{[P]}}{P\vee(Q\supset P)}\,(\vee \mathrm{I})\quad \overset{1}{[P]}\quad \dfrac{\overset{2}{[Q]}\quad\overset{1}{[Q\supset P]}}{P}\,(\supset \mathrm{E})}{P}\,(\vee \mathrm{E})\ 1}{Q\supset P}\,(\supset \mathrm{I})\ 2}{P\supset(Q\supset P)}\,(\supset \mathrm{I})\ 3$$

しかし，これらは回り道のある，標準的（normal）でない導出になっている点で，適切とは言い難い。自然演繹の体系の中で「適切性」を確保するためにはいくつかの条件が必要となる。それについては，D．Prawitz：Natural　Deduction，Almqvist &Wiksells，1965，pp.81-87 参照。

(18)Cf.D．Leivant：“Assumption　classes　in　natural　deduction”，Zeitschrift　für　mathematische　Logik　und Grundlagen　der　Mathematik 25，1979，SS.1-4.

(19)（A⊃１）についてはすでに扱った。（A⊃２）については，以下のように証明できる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[\phi]}\qquad\overset{3}{[\phi\supset(\psi\supset\theta)]}}{\psi\supset\theta}\,(\supset \mathrm{E})\qquad \dfrac{\overset{1}{[\phi]}\qquad\overset{2}{[\phi\supset\psi]}}{\psi}\,(\supset \mathrm{E})}{\theta}\,(\supset \mathrm{E})}{\phi\supset\theta}\,(\supset \mathrm{I})\ 1}{(\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta)}\,(\supset \mathrm{I})\ 2$$
$$\dfrac{(\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta)}{(\phi\supset(\psi\supset\theta))\supset((\phi\supset\psi)\supset(\phi\supset\theta))}\,(\supset \mathrm{I})\ 3$$

ＦＩＱＣの他の公理：（A&Ｉ），（A&Ei），（A∨Ii），（A∨E），（A⊥），（A∀Ｉ），（A∃E），（A∀Ｉ）についても同様である。

(20)ＦＩＱＣの証明規則は（R∀Ｉ）と（R∃E）の二つである。これらをいま推論規則とみて，仮定からの証明を考える。（R∀Ｉ）の場合。仮定$\psi_1,\cdots,\psi_k$ からの$\phi\supset\psi$の導出を　$\overset{D}{\phi\supset\psi}$　と表す。（R∀Ｉ）により，$\phi\supset\forall x\psi^{a}{}_{x}$の導出が許されるが，（固有パラメータaに関する制限条件により）aはϕに出現しておらず，（自然演繹での推論規則としての条件に合致する意味で）仮定$\psi_1,\cdots,\psi_k$ にも出現していないとみなしてよい。このとき，以下の導出により，同じ仮定に依存して　$\phi\supset\forall\psi^{a}{}_{x}$　が導出される。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D}{\phi\supset\psi}\qquad\overset{1}{[\phi]}}{\psi}\,(\supset \mathrm{E})}{\forall x\psi^{a}{}_{x}}\,(\forall \mathrm{I})}{\phi\supset\forall x\psi^{a}{}_{x}}\,(\supset \mathrm{I})\ 1$$

（R∃E）も同様：

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{[\exists x\phi]}\qquad \dfrac{\overset{1}{[\phi^{x}{}_{a}]}\qquad\overset{D}{\phi^{x}{}_{a}\supset\psi}}{\psi}\,(\supset \mathrm{E})}{\psi}\,(\exists \mathrm{E})\ 1}{\exists x\phi\supset\psi}\,(\exists \mathrm{E})\ 2$$

ここで，固有オペレータaは，ψにも，仮定$\psi_1,\cdots,\psi_k$ にも出現していないから，（∃E）適用に伴う制限条件は守られている。

(21)$\Gamma\vdash_N\phi$を確立する最終推論規則が（&Ｉ）と（∃E）の場合を考える。他の場合は類比的に実行できる。

(i)(＆Ｉ)の場合。$\phi_1,\cdots,\ \phi_k \vdash_F \phi_0$ および $\psi_1,\cdots,\ \psi_m \vdash_F \psi_0$ と仮定する。

１．４節のＦＩＱＣの公理（Ａ＆１）により，$\vdash_F \phi_0 \supset (\psi_0 \supset (\phi_0 \& \psi_0))$。仮定 $\phi_1,\cdots,\ \phi_k, \psi_1,\cdots,\ \psi_m$ の下でＭＰを二度使って，$\phi_1,\cdots,\ \phi_k, \psi_1,\cdots,\ \psi_m \vdash_F \phi_0 \& \psi_0$。規則（＆Ｅ）の場合は公理（Ａ＆Ｅi)を，規則（∨Ｉ）の場合は公理（Ａ∨Ｉi)を，規則（∨Ｅ）の場合は公理（Ａ∨Ｅ）を，規則（⊃Ｉ）の場合は演繹定理を，規則（⊥）の場合は公理（Ａ⊥）を使って同様に証明でき，規則（⊃Ｅ）はＭＰそのものであるからトリヴィアルに成り立つ。

(ii)(∃Ｅ)の場合。$\Gamma \vdash_F \exists x \phi$ を示す仮定からの証明Ｄと，$\Delta,\ \phi^a{}_x \vdash_F \theta$ を示す仮定からの証明 D_1 があるとする。ただし，固有パラメータａは，$\exists x \phi$ にも Δ にも θ にも出現していないとする。このとき，

$$\dfrac{D\left\{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \exists x \phi\end{array}\right. \qquad \dfrac{\dfrac{\left.\begin{array}{c}[\phi^a{}_x] \quad \Delta\\ \vdots\\ \theta\end{array}\right\}D_1}{\phi^a{}_x \supset \theta}\,(\text{演繹定理})}{\exists x \phi \supset \theta}\,(R\exists E)}{\theta}\,(MP)$$

（Ｒ∃Ｅ）…パラメータａの制限条件は守られている。

によって，$\Gamma,\ \Delta \vdash_F \theta$ が示される。

同様に，規則（∃Ｉ）の場合は公理（Ａ∃Ｉ）を，規則（∀Ｅ）の場合は公理（Ａ∀Ｅ）を，規則（∀Ｉ）の場合は証明規則（Ｒ∀Ｉ）を，それぞれ使って示すことができる。

(22)この定理の証明はＤ．Ｐrawitzの前掲書（Natural Deduction）で与えられている。

(23)Ｃｆ．Ｇ．Sundholm：“Ｐroof Ｔheory and Meaning”，Handbook of Philosophical Logic vol.Ⅲ, Reidel, 1986, pp.471-506.

(24)規則は次ぎのように表現される。

(0) $\phi \vdash \phi$ …仮定の規則

(i) $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma,\ \Delta \vdash \phi$ …「仮定を増やしてよい」という規則。これは暗黙のうちに認められていたものを明示的に表したものである。

(ii) $\Gamma \vdash \phi$ かつ $\Delta \vdash \psi \Rightarrow \Gamma,\ \Delta \vdash \phi \& \psi$ …(＆Ｉ)

(iii) $\Gamma \vdash \phi_0 \& \phi_1 \Rightarrow \Gamma \vdash \phi_i \ (i=0,1)$ …(＆Ｅ)

(iv) $\Gamma \vdash \phi_i \Rightarrow \Gamma \vdash \phi_0 \vee \phi_1 \ (i=0,1)$ …(∨Ｉ)

(v) $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ かつ $\phi,\ \Delta_1 \vdash \theta$ かつ $\psi,\ \Delta_2 \vdash \theta \Rightarrow \Gamma,\ \Delta_1, \Delta_2 \vdash \theta$ …(∨Ｅ)

(vi) $\phi,\ \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi \supset \psi$ …(⊃Ｉ)

(vii) $\Gamma \vdash \phi$ かつ $\Delta \vdash \phi \supset \psi \Rightarrow \Gamma,\ \Delta \vdash \psi$ …(⊃Ｅ)

(viii) $\Gamma \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \phi$ …(⊥Ｉ)

(ix) $\Gamma \vdash \phi$ かつ ａがΓ中に出現していないならば，$\Gamma \vdash \forall x \phi^a{}_x$ …(∀Ｉ)

(x) $\Gamma \vdash \forall x \phi \Rightarrow \Gamma \vdash \phi^x{}_t$ …(∀Ｅ)

(xi) $\Gamma \vdash \phi^x{}_t \Rightarrow \Gamma \vdash \exists x \phi$ …(∃Ｉ)

(xii) $\Gamma \vdash \exists x \phi$ かつ $\phi^x{}_a,\ \Delta \vdash \theta$ かつ ａが $\exists x \phi,\ \Delta,\ \theta$ に出現していないならば，$\Gamma,\ \Delta \vdash \theta$ …(∃Ｅ)

仮定の増化の規則を加えたため，規則がＮＩＱＣの場合より一つ増えて１３個になっている。

(25)規則（∨Ｅ）により，

$$\dfrac{\phi,\ \Gamma \vdash \theta \qquad\qquad \psi,\ \Gamma \vdash \theta}{\phi \vee \psi,\ \Gamma \vdash \theta}$$

が正当化される。また，（∀Ｅ）により，

$$\dfrac{\phi^x{}_t,\ \Gamma \vdash \theta}{\forall x \phi,\ \Gamma \vdash \theta}$$

が正当化される。最後に，（∃Ｅ）により，

$$\dfrac{\phi^x{}_a,\ \Gamma \vdash \theta}{\exists x \phi,\ \Gamma \vdash \theta}$$

が正当化される。（ただし，パラメータａはΓ，θに出現していない。）

(26)規則（ＣＵＴ）と他の規則または公理を組合わせることにより，消去規則と同じ効力を発揮させることができる。‘⊢’の代わりに‘→’で表現する。

（＆Ｅ）の場合

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to \phi \& \psi\end{array} \qquad \dfrac{\psi,\ \Gamma \to \psi\ (\text{公理})}{\phi \& \psi,\ \Gamma \to \psi}\,(\&\to)}{\Gamma \to \psi}\,(CUT)$$

（∨Ｅ）の場合

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to \phi \vee \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi,\ \Gamma \to \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi,\ \Gamma \to \theta\end{array}}{\phi \vee \psi,\ \Gamma \to \theta}\,(\vee\to)}{\Gamma \to \theta}\,(CUT)$$

(∀E) の場合

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\forall x\,\phi\end{array} \qquad \dfrac{\phi^{x}_{t},\ \Gamma\to\phi^{x}_{t}\ (\text{公理})}{\forall x\,\phi,\ \Gamma\to\phi^{x}_{t}}\,(\forall\to)}{\Gamma\to\phi^{x}_{t}}\,(\mathrm{CUT})$$

(∃E) の場合

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\exists x\,\phi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi^{x}_{a},\ \Gamma\to\theta\end{array}}{\exists x\,\phi,\ \Gamma\to\theta}\,(\exists\to)}{\Gamma\to\theta}\,(\mathrm{CUT})$$

(27)Cf. Gentzen [1934] (本章註14), Szabo [1969] (本章註15)。

(28)ここでは，R. Smullyan : First- Order Logic, Springer, 1968,に従う。

(29)例として，$\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$（ここでxは$\phi$に出現していない）の反証可能性を考える。

$$F(\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi)$$

とする。これの必要十分条件は，

$$T\forall x(\phi\vee\psi),\qquad F(\phi\vee\forall x\psi)$$

であり，これらが成り立つための必要十分条件は，

$$T\forall x(\phi\vee\psi),\qquad F\phi,\qquad F\forall x\psi$$

である。$\forall x\psi$を反証するには，あるaについて ψ^{x}_{a} を偽化せねばならない。よって，

$$T\forall x(\phi\vee\psi),\qquad F\phi,\qquad F\psi^{x}_{a}$$

が反証条件である。$\forall x(\phi\vee\psi)$が真であることから，特に，$\phi\vee\psi^{x}_{a}$が真となる。よって，

$$T\forall x(\phi\vee\psi),\quad T(\phi\vee\psi^{x}_{a}),\quad F\phi,\quad F\psi^{x}_{a}$$

（ここで，ϕにxが出現していないことが使われる。）

が反証条件である。$\phi\vee\psi^{x}_{a}$を真にするには選言肢の一方が真であればよいから，反証条件が二つの可能性に分かれる。

①第一の可能性：$T\forall x(\phi\vee\psi)$，$T\phi$，$F\phi$，$F\psi^{x}_{a}$；

これは反証条件とはならない。なぜなら，同一の整式ϕが同時に真であり偽であることは不可能だからである。よって，探索は閉じられる。

②第二の可能性：$T\forall x(\phi\vee\psi)$，$T\psi^{x}_{a}$，$F\phi$，$F\psi^{x}_{a}$；

これもψ^{x}_{a}が真であり偽であることを要求しているから反証条件にはなり得ない。よって探索は閉じられる。ここで，反証可能性のすべての可能性が尽くされている。よって，$\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$ は反証不可能である，つまり妥当である。以上の探索は探索樹として次のようにまとめられる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi)}{T\forall x(\phi\vee\psi),\ F(\phi\vee\forall x\psi)}}{T\forall x(\phi\vee\psi),\ F\phi,\ F\forall x\psi}}{T\forall x(\phi\vee\psi),\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}}}{T\forall x(\phi\vee\psi),\ T(\phi\vee\psi^{x}_{a}),\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}}}{T\forall x(\phi\vee\psi),\ T\phi,\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}\ \mid\ T\forall x(\phi\vee\psi),\ T\psi^{x}_{a},\ F\phi,\ F\psi^{x}_{a}}$$

(30)反証に成功する例として，$\exists x\phi\supset\forall x\phi$を採る。

$$\begin{array}{ll} F(\exists x\phi\supset\forall x\phi) & \\ \hline T\exists x\phi,\ F\forall x\phi & \\ \hline T\phi^{x}_{a},\quad F\forall x\phi & \text{……aは枝で新しいパラメータとする。} \\ \hline T\phi^{x}_{a},\quad F\phi^{x}_{b} & \text{……bはaとは異なる，枝で新しいパラメータとする。} \end{array}$$

$V(a)\neq V(b)$，$V(\phi^{x}_{a})=T$，$V(\phi^{x}_{b})=F$となる付値関数Vを与えることで反証モデルを構成できる。

(31)反証に失敗し，元の連式の妥当性が示される例としては註29を参照。

(32)$\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi$ の探索樹は以下のようになる：

$$\begin{array}{c} F\quad\forall x(\phi\vee\psi)\supset\phi\vee\forall x\psi \\ | \\ T\quad\forall x(\phi\vee\psi) \\ | \\ F\quad\phi\vee\forall x\psi \\ | \\ F\phi \\ | \\ F\forall x\psi \\ | \\ F\psi^{x}_{a} \\ | \\ T\phi\vee\psi^{x}_{a} \\ \diagup\qquad\diagdown \\ T\phi\qquad\qquad T\psi^{x}_{a} \end{array}$$

(33)GGA I §15, §48.

(34)本節の記述は以下の論文に負う：Franz von Kutchera, "Frege and Natural Deduction", in Matthias Schirn (ed.),Frege : Importance and Legacy, de Gruyter (1996), pp.301-4.

第１１章　フレーゲとヒルベルトの論争

はじめに

本章では，フレーゲとヒルベルトの間に交わされた往復書簡の中に端を発し，後にフレーゲの幾何学の基礎についての二種類の連作論文に発展した主題，すなわち公理・定義の位置づけ，無矛盾性と独立性の証明といった公理的方法を巡る問題を取り扱う(1)。

１９世紀の公理的方法の発達は，非ユークリッド幾何学の発見(2)に刺激されて始まったさまざまな幾何学研究の進展とともに生じたが，その基礎は未だ完全ではなかった。世紀が替わろうとする頃に（１８９９年）ヒルベルトの『幾何学の基礎』(3)が出現して，公理体系の基礎づけに関する知見は大いに進歩した。この本は，ユークリッド幾何学に対する最初の厳密な諸公理を立てたものであり，それらの公理の無矛盾性と独立性の証明を含んでいた。ヒルベルトのこの仕事は，後の有限主義的な「ヒルベルトの計画」(4)の発端となるもので，２０世紀の数学・論理学・哲学に甚大な影響を及ぼした。

フレーゲはヒルベルトの公理論に対しては不満であり，さっそくヒルベルトとの文通を開始した(5)。ヒルベルトが文通を中断した後，「幾何学の基礎について」と題する二種類の論文(6)を発表して，ヒルベルトの方法を批判するとともに，無矛盾性と独立性についての自らの見解を発表した。彼自身の「哲学観」のゆえに，フレーゲはヒルベルトの方法の持つ「革新性」を十分に理解し得なかったふしがある。しかし，その後の数学・論理学の世界ではヒルベルトの影響が強まり，今回もフレーゲの見解はほとんど黙殺されてしまった(7)。

本章の目的は，フレーゲとヒルベルトの論争に現れる論点を再度検討し，ヒルベルトの側に傾きすぎた評価を，より公平な所まで復元することである。フレーゲは古典的な公理論に固執している点があるとは言え，数学における公理と定義についての役割についての洞察は極めて厳密で正確であり，「陰伏的定義」（implicit definition）についての混乱はむしろヒルベルトに跡づけられる。「厳密な証明を求める」という形で典型的に現れたフレーゲの数学に対する「厳密さ」の要求は，数学の公理体系を考察する場合にも，その徹底ぶりをいかんなく発揮していることが示されよう。

１．公理的方法

理論を演繹的に展開させるとき，証明なしで使用される原理や仮定は予め明示的に述べねばならない，といった公理的方法の一般的な定式化において，フレーゲとヒルベルトは相当の部分において一致した見解を持っていた。両者とも，無制限に公理を追加して新しい理論を増殖させる「生成的方法」には批判的であった。また，証明を機械的にチェックすることができるような理論の完全な形式化という，当時の「革命的」な理念も，両者は基本的に受け入れていた。しかし，公理的方法に対する二人の哲学的動機には，かなりの相違が見られた。フレーゲが数概念の分析を最終目標として，その分析の正しさを証拠立てるために『算術の基本法則』の論理体系を必要としたのに対して，ヒルベルトは無矛盾で独立した幾何学の公理体系を見つける，という数学的課題に促されて公理的方法を考察した。フレーゲの場合に言わば手段であった公理的方法は，ヒルベルトの場合は目的の一部であった。公理的方法に対する両者の動機の違いが，両者の哲学的な態度の違いに結びついているように思われる。

公理の地位は，当時の問題の一つであった。証明できない原理としての公理はどのようにして正当化されるのか？フレーゲの解答は伝統的なものであった。証明における循環を避けるために，公理はもはや証明できないものと見なさねばならないが，幾何学の公理の真理性の起源はわれわれの直観に求められる，というのがフレーゲの見解である(8)。さらに，公理は真でなければならないのみならず，ある種の「自明性」を持たねばならないと考えているように見える。特に，幾何学の公理の場合の「自明性」はわれわれの空間的直観に求められる。われわれは直観に反するような幾何学（非ユークリッド幾何学）を理解できるが(9)，それは概念的思考によって概念的に把握されるのであるから，フレーゲにとって直観によって支えられる「自明性」を欠くことになろう。

公理の地位に関するヒルベルトの独創的な見解は，非ユークリッド幾何学の発見による，緊張を強いられた数学的思考から生み出されたものであった。公理は無矛盾でさえあれば，公理の真理性に対する独立した根拠は必要がないという彼の見解は，数学全体の重心を真理の問題から演繹上の関係に移行させた。「実在」を反映するという重荷から解放された公理は，無矛盾という最低限の紳士協定を守りさえすれば，新しい数学理論を創造することに躊躇なく利用され得るのである。しかし，そのような見解は，哲学的には，ある種の規約主義に通じる（ヒルベルト自身が規約主義者であった訳ではない）。ヒルベルトは，

数学理論の創造という点では画期的な思考を切り開いたが，無矛盾性が真理にとって十分であるという彼の主張によって生み出される哲学的問題には，目を向けなかったように見える。

定義もまた，両者が論争を行った頃は不明瞭な主題であった。真理の観点からと同様，意味の観点からも循環は避けられねばならないということは認められていた。フレーゲは，ヒルベルトがなした以上に，はるかに明確で精密な「定義論」を有していた[10]。フレーゲにとって，算術の法則は論理法則による定義の変形連鎖によって得られるから，定義はある種の省略表現だった[11]。フレーゲは言う：

> 「数学で定義と言われるものは，通常，言葉または記号の意味（Bedeutung）の規約である。定義は，これまでいかなる意味も持たなかったが，今やそれによって意味を得るところの言葉または記号を含むという点で，他の数学的命題とは異なる。」

フレーゲはまた，定義が消去可能性と非創造性の要求を充たすことを確保するための，定義の形式的な規則も正確に提示した[12]。ヒルベルトとともにフレーゲは，すべての定義が，もはや定義されず当該の体系内部でいかなる定義も不可能であるような究極的な表現，すなわち体系の原始語に到ることをよく理解していた。

そうすると，どのようにしてそのような原始語は意味を得るのか，という問題が生じる。フレーゲの解答は，原始語は非形式的に解明されねばならない，すなわち意味の説明が与えられねばならない，というものである。

> 「これ［解明（Erläuterung）］は，科学者たちがお互いに理解し合い，科学を伝達することができるようにと用いられるものである。それは予備学の一部と見なされねばならない。それは科学の体系の中にはいかなる場所も占めない。…解明の目的は実践的なものであって，その目的が達成されたならば，人はそれに満足せねばならない。これを行うに際して，われわれは理解と示唆が相半ばする善意に訴えねばならない。比喩の使用がなければわれわれは何処にも到達しないだろう。しかし，われわれは解明する人には次のことを要求する，すなわち，彼は自分の意図することを確実に知っていること，（たとえ善意に出会ったとしても）誤解の可能性が生じたならば，彼の解明をもっと完成したもっと完全なものにする用意がなくてはならない，ということを。」[13]

フレーゲは解明そのものについては正確な概念を提示している訳ではないが，定義と解明

の区別は厳格に行った。定義だけが公理的理論の一部分と見なされねばならず，従って厳格な形式を充たさねばならない。こうして，フレーゲは一方において，ユークリッドの「点は部分を持たないものである」といった定義を拒否しながら，他方でそれを解明として受け入れる余地も残していた。

ヒルベルトの原始語へのアプローチは，フレーゲよりはるかにラディカルで画期的なものであった。公理は（部分的）に原始語を定義する，なぜなら，

> 「明らかに，すべての理論は，相互の必然的関係を伴う諸概念の枠組または図式にすぎず，基本要素［原始語］をどれにするかを任意に決めてよいからです。」

というのがヒルベルトの見解であった[14]。これは確かに独創的な見解であり，形式化という理念に大きな刺激を与えるものであり，現代的公理論の発展を生み出す原動力となった。しかし，にも関わらず，ヒルベルトの立場は，そのままでは明確化を必要とするものである。どのようにして公理が定義となるのか？もし公理が導入する語彙を公理は一義的に決定できないとすれば，それはどんな種類の定義となるのか？これらの疑問が，フレーゲのヒルベルト批判の根底に横たわっている。

2．公理と定義

フレーゲは，ヒルベルトの『幾何学の基礎』の草稿となった講義ノート[15]の中に，公理と定義についてのヒルベルトの混乱した取り扱いを見出した。一方で，ヒルベルトは，公理が「われわれの直観の基本的事実」を表現しているとしながら[16]，他方で，公理が“間”という語によって表現される関係や“線分”という語によって表現される概念を「定義する」と述べている[17]。しかも，「定義」と題された一節が別にあって，そこでは“間”や“線分”といった術語に通常の明示的で名辞的（ノミナル）な定義が与えられている[18]。フレーゲは，ヒルベルト宛の手紙で，公理や定義のこのような「逸脱した」用法についての適切な説明がないと批判し[19]，講義ノートを送ってくれたH．リーブマンには「このヒルベルトの仕事は全体として失敗であり，十分な批判無しには使えないもの」と書き送った[20]。目前の資料となる講義ノートだけから判断すれば，フレーゲの批判は当たっていたと言えよう。

厳密さを重んじる点ではフレーゲにひけを取らないと自覚していたであろうヒルベルト[21]は，彼の公理についての考えを理解するための示唆をフレーゲに与えた。第一に，公

理は公理体系全体として，公理の中に現れる語の完全な定義を与えること[22]，第二に，彼の公理はただ一つの概念を一義的に決定することはないが，このことは数学の公理体系がさまざまな理論に応用されるということを意味するから，欠点となるどころか利点であること[23]，をヒルベルトは主張した。実際に，公理は，原始語と当該体系の概念の間での適切な一対一写像のもとで，その公理を充たすさまざまな概念体系を決定する。フレーゲも言及している論文「数概念について」の中で，ヒルベルトは，実数が，例えば基本列やデデキント切断である必要はなく，その相互関係が公理によって与えられるところの事物の体系にすぎない，と述べた[24]。ヒルベルトはその論文で，当時行われていた「生成的方法」ではなく，彼の「公理的方法」を幾何学にも数論にも適用することを提唱したのである。

ヒルベルトから送られたこの「数概念について」を読んだフレーゲは，ヒルベルトの意図が幾何学を直観から解放し，算術と同様に論理的な学にすることにあることを了解した，とヒルベルトに書き送った[25]。これは，公理を証明されない真理としてではなく，定理が成り立つための条件と解することを意味する。Ａを公理の連言とし，Ｔを定理とすれば，定理は正確には，

$$A \supset T$$

という条件命題として表現されねばならない[26]。定理Ｔの真理性の問いは，Ａ⊃Ｔの証明可能性という論理的な問いに置き換えられる。こうして，幾何学の原始語は述語変項と見なされ，幾何学はその応用を直接の帰結として持つような純粋論理の一部となる。

しかし，ヒルベルトの定義としての公理の地位の問題は未だ依然として不明確である。例えば，公理によって少なくとも二つの点がすべての直線上に存在することが定められるとすると，その点は定義によって存在するのか？フレーゲにとって量化子は第二階の述語であった。それに対して，「点」「直線」「間」は第一階の述語である。ヒルベルトの公理には，これら第一階の述語と量化子という第二階述語が含まれる。そこでフレーゲはヒルベルトの公理を，第一階の述語変項の性質を記述する第二階の述語を定義していると解釈する。例えば，公理の連言において，「点」「直線」「平面」「間」「合同」という語が文字（述語変項）“F”，“G”，“H”，“I”，“J”で置き換えられた結果である表現を

$$A(F, G, H, I, J)$$

とする。そのとき，ヒルベルトの公理は，ユークリッド的「構造」，すなわちＦ，Ｇ，Ｈ

がクラスで，Ｉが三項関係，Ｊが二項関係で，その間にA（Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉ，Ｊ）が成り立つような順序五組：

$$\langle F, G, H, I, J\rangle$$

を定義しているものと解釈できる。それは丁度，群論の公理が，Ｄを領域，ｆを二項演算とするとき，Ｄとｆが群論の公理を充たすような順序対〈Ｄ，ｆ〉として「群」を定義する，と解釈するのと同様である[27]。しかし，そのようにしても，公理の真理性は何ら保証されず，具体的な対象について公理は決定できない，とフレーゲは考える。直線上の二つの点の「存在」は，「点」「直線」「の上にある」といった概念と関係の二階の関係を示すのみであり，具体的な点を与える訳ではない。それは丁度，

公理１．任意の自然数ａにつき，任意の自然数ｍを法として，ａはそれ自身と合同である：$a \equiv a \pmod{n}$

公理２．任意の自然数ａ，ｂ，ｃにつき，ａがある自然数ｎを法としてｂと合同であり，ｂが同じ自然数を法としてｃと合同ならば，ａは同じ自然数を法としてｃと合同である：$a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \supset a \equiv c \pmod{n}$

という二つの公理だけからは，$2 \equiv 8 \pmod{3}$かどうかを決定できないのと同様である，とフレーゲは主張する[28]。

以上のような批判的意見を含むフレーゲからの第二信を受け取ったヒルベルトは繁忙を理由に文通を打ち切る。そこで，フレーゲは，公理のいわゆる「陰伏的定義」(implicit definition) に関する彼独自の解釈を含む考察，すなわち「幾何学の基礎について」と題する二種類の論文を発表することになる。ヒルベルトの公理について，それを第二階関係を定義したものとするフレーゲの解釈の正しさを，後にベルナイス（Ｐ．Bernays）がフレーゲの書簡が出版されたときの書評で認めている[29]。しかし，フレーゲは全体としてのヒルベルトの仕事の意義を正当に評価してはいない，と考えざるを得ない。後に見るように，フレーゲはヒルベルトの独立性の証明を，真正の公理ではなく定義条件を扱ったものにすぎないという理由で認めていない。算術を論理に還元しようとしたフレーゲが，ヒルベルトによる公理理論の論理への還元（既述のようにフレーゲはヒルベルトの仕事の意味をこう解釈した）を全体として認めないというのは，理解に苦しむ所である。

それを理解する手掛りの一つは，すでに触れた幾何学的認識についての両者の見解の相違にある。フレーゲはユークリッド幾何学が空間についての直観を記述したものと考えたのに対して，ヒルベルトはそのような考えを意図的に避けた。さらに一般的に言えば，両

者の数学的真理と存在に対するアプローチに相当の隔たりがあった，ということである。フレーゲは問題の多い数学的実体は存在が確実である実体によって基礎づけられねばならない，という意味での還元主義を採用した。算術の命題を論理法則と定義から導くというフレーゲの論理主義も，確実で基本的な土台の上に建物を立てるというメタファーに導かれている。それに対して，ヒルベルトは公理体系全体がある抽象的な構造を定義するという全体論（反還元主義）を採用しているように見える。二人の論争の間には，彼らのこのような哲学の相違が横たわっていた。だが，フレーゲの批判の矛先はヒルベルトの哲学にではなく，その方法論に向けられた。フレーゲから見れば，ヒルベルトの方法論は，心理主義とともに彼が批判の的とした形式主義の方法論に類似していたのであろう。

3．無矛盾性の証明

フレーゲは，もし真正の公理が設定されていればそれが偽であることはそもそも不可能であるから，公理の無矛盾性証明は不要であると言う：

「公理が真理であるということから，公理が互いに無矛盾であることが導かれます。それ以上の証明は何ら必要ではありません。」(30)

ヒルベルトは，これに真っ向から対立する意見を返した：

「あなたの［上記の］文を拝読しまして，私［ヒルベルト］は大いに関心を持ちました。なぜなら，そのような事柄について考え，書き，講義したかぎりで，私は常に正反対のことを主張してきたからです。任意に置かれた公理がそれらの多数の帰結とともに互いに矛盾し合わなければ，それらの公理は真であって，公理によって定義される事物が存在します。そのことが私にとって，真理と存在の規準なのです。」(31)

これに対して，フレーゲは，ヒルベルトのいう「公理」が実際には真理の保証を持たない条件の定義にすぎないという理由で，それの無矛盾性を証明する必要は認めた。しかし，フレーゲの考えでは，条件の集合の無矛盾性を確立するには，それらの条件を充たすある事物を生み出せば十分である。しかし，その逆は成り立たない。そうすると，ヒルベルトの規準は無効になる，なぜなら，その場合，循環に陥るからだ。もしヒルベルトの規準を受け入れるならば，それは「存在論的証明」の一変形（ヴァージョン）となろう。つまり，もし，条件：

Ａは知的存在者である，

Ａは偏在する，

Ａは全能である，

が無矛盾ならば，それらをすべて充たす対象を具体的に見出さなくとも，全能で偏在する知的存在者の存在が導かれることになる(32)。これは，フレーゲにとって納得しがたいことである。こうして，フレーゲは次のように結論する：

「私は無矛盾性から真理性を導くような推論方法を受け入れることはできません。おそらく，あなたもこういうことを意図しておられる訳ではないのでしょう。いずれにしろ，もっと正確な定式化が必要であると思われます。」(33)

ヒルベルトの言葉は，それを文字どおりに受け取れば，以上のようなフレーゲの批判から免れることはできない。考えられるヒルベルトの真意は，

もし公理の集合が演繹的に無矛盾ならば，公理がそれについて成り立つような事物の領域が存在する，

といったものであろう(34)。このヒルベルトのアイディアは，後に「無矛盾な命題の集合にはモデルが存在する」という意味での完全性定理に発展するものである。しかし，ヒルベルトはこの時点で，まだどんな公理体系の構文論的無矛盾性も直接に証明してはいなかった。『幾何学の基礎』で用いられた証明はモデルを用いるものであった。

ヒルベルト流の無矛盾性証明に対するフレーゲの批判は，このモデルの使用にあるのだろうか。すでに述べたように，フレーゲ自身が考える可能な無矛盾性証明の形態は，条件（ヒルベルトの公理）を充たす対象を見出すことである(35)。フレーゲが考えるそのような対象は，条件の意味が一義的に要求する対象であり，ヒルベルトのモデルとは異なるものであろうか。いずれにせよ，フレーゲは，条件を充たす対象（モデル？）の存在は条件の無矛盾性にとって十分条件ではあるが，必要条件ではないと考えていたらしい。すなわち，

条件（公理）を充たす対象が特定できるならば，その条件は無矛盾である，

ということは常に正しいが，

条件（公理）が無矛盾であれば，それらを充たす対象が特定できる，

ということは必ずしも成り立たない（成り立つならば証明を要する）と，フレーゲは考えていたらしい。『算術の基礎』において，フレーゲはこれに類比的な考えを概念の無矛盾性に関して述べていた。すなわち，

「概念はたとえその定義特徴が矛盾を含んでいても許容される。禁じられるのは，

その概念に何かが帰属すると前提することである。」(36)

「もちろん，厳密に言えば，その概念に何かが帰属することを証明しさえすれば，概念が無矛盾であることは確立される。しかし，その逆は偽であろう。」(37)

レスニクによれば，フレーゲの無矛盾性証明に対するこのような態度は，数学的真理に対する還元主義的アプローチと，真正の公理は偽ではありえない，という主張に由来する(38)。相対的な無矛盾性の証明が，問題を先送りにするものでしかないとすれば，形式体系の絶対的な無矛盾性証明に到らねばならない。そのような絶対的な証明があるとすると，そこでの「絶対性」は用いられる原理の真理性に根拠を持つであろう。それはどのようにして確保されるのか，ヒルベルトの説明は不明確である。１９２０年代にヒルベルトは「有限主義」の立場からの「証明論」を定式化していくが，そこで考えられる証明のギリギリの根拠は，ある有限的領域（形式言語の項の領域や自然数の領域）の存在と，そこでの基本原理の真理性である。しかし，論争の頃のヒルベルトは未だそのような突き詰めた考察を有してはいなかったのであり，フレーゲの不満もそこにあったのである。

４．独立性の証明

フレーゲは，ユークリッドの公理の独立性証明についても否定的な評価を下した。しかし，これは大部分，フレーゲの誤解に基づいていたと言わざるを得ない。フレーゲは，ヒルベルトの証明が真正の公理をではなく，定義づけの条件（フレーゲの言葉では擬似公理Pseudoaxiom）を取り扱っていると主張して，ヒルベルトの見解を退けた(39)。彼はまた，ヒルベルトの方法を真正の公理に適用することにも反対した。ヒルベルトの独立性の証明は，一つを除くすべての公理が真となるような公理の解釈を見出すことによって行われる。フレーゲにとって，真正の公理はそもそも真であるから，そのような公理が偽となる解釈を見出すことなどはできない。そのような公理の再解釈は，数学のタームの意味の曖昧さを助長するゆえ有害である。本来，公理は文というより，一定の文によって表現された思想であって，確定した意味を有しているはずであるから，それを再解釈することは無意味である(40)。

このような一見頑迷とも思えるヒルベルトに対する否定的評価を下した後，フレーゲは公理の独立性に関する自らの方法を提示する。彼によれば依存性（非独立性）は次のように把握される：

「真なる非論理的思想が真なる非論理的思想の有限集合に依存するのは，その思想が有限個の推論規則によってそれらの思想の集合から導出されるとき，かつそのときにかぎる。」(41)

次にフレーゲは，独立性を確立するための彼自身の一般的な方法を提案する(42)。それは以下のようなものである。

Ｇが思想であり，Ωが真なる思想の集合であり，ＧとΩがともに言語Ｌで定式化できると仮定する。次に，ＬからＬ自身への一対一の上への写像を考える。その写像は，論理的表現と構文論的タイプは保存するが非論理的表現は保存しないと仮定する。言い換えると，この写像は論理形式のみを保存する。もしΩが真の思想の集合Ω′に写像されるが，Ｇが偽の思想Ｇ′に写像されるならば，そのときＧはΩから独立している。

独立性を証明するにはこのような写像を見つければよい。こうして，フレーゲは意味を再配分する写像の概念を利用して独立性を確保しようとした。（ただし，フレーゲはこの方法を実際に幾何学に応用することはしていないようである。）

このフレーゲの独立性証明の定式化は，それ自体としては正確なものであり，彼自身，このような考察の新しいメタ数学的性格を自覚していたようである(43)。しかし，フレーゲは，ヒルベルトの『幾何学の基礎』に暗に含まれていた（有限的に公理化された）第一階公理体系を扱う原理の考察に失敗した。この原理によれば，

命題Ｇが命題の集合Ωから独立であるのは，¬Ｇが量化の観点からΩと無矛盾であるとき，かつそのときにかぎる。

これは，ＧとΩを表現する量化図式を手に入れ，これらの図式のモデルを示すことで確立される。しかし，フレーゲはこの問題を第一階の言語で見ようとはしない。フレーゲは，ヒルベルトが公理の中の述語文字を普遍量化により一般化し，それから真の代入例を見出すことによって無矛盾性と独立性を証明しようとしている，と解釈した(44)。確かに，“Ｆａ”の真理性は可能的に“∀ｘＦｘ”を確証するが“Ｆｂ”の真理性を含意しない。しかし，“Ｆａ”の真理性は図式としての“Ｆｂ”の無矛盾性を確立する。ヒルベルトの無矛盾性の議論において，フレーゲはこの観点を見誤っている。同様の誤りが，ヒルベルトの独立性の証明に対しても見られる。

このようなフレーゲの誤解は，一つには，彼の推論に関する見解に由来するように見える(45)。今日，推論の説明は推論規則の概念に基づいて行われる。一つまたはそれ以上の

言明（推論の前提）から一つの新しい言明（推論の結論）への移行が正しい推論規則であるのは，すべての前提が真となるモデルで結論も真となるようなパターンであるとき，かつそのときにかぎる。フレーゲの場合，推論は前提の真理性の認識から結論のそれへの移行である：

「推論は記号の領域に属するのではなく，以前になされた判断に基づいて論理法則に従って行われる判断の表明（Urteilsfällung)である。各前提は真と認められた確定した思想であり，結論も真と認められた確定した思想である。」(46)

そうすると，推論を行う場合，その真理性を承認していない前提に基づかせることはできないことになる(47)。証明は推論の連鎖であるから，証明も真である前提に基づかねばならないことになる。公理は，すべての数学的証明の基礎であるから，当然，真でなければならない。無矛盾性と独立性に関するフレーゲの見解の中に，このような推論についての見解が暗に影を落としている。

フレーゲの推論に対する見解の反論としては，条件的または間接的証明における推論のケースが考えられる。そのような証明において，われわれは真であることが未だ確定していない前提を仮にそれが真であると仮定した上で，推論を始める。しかし，フレーゲは，そのようなスタイルの証明が正統的なものではなく，誤解を招き易いものであると考えたようである。フレーゲは言う：

「しかし，真であるという判断をせずに，純粋に仮設的に一定の思想から演繹を行い得る，と反論するかもしれない。…しかし，そのような疑わしい思想は推論の前提とはならない。むしろ，［その場合の］前提は，問題の思想を先件として含む一定の仮設的思想である。最後の結果においても，そのような疑わしい思想は条件として生じなければならない。従って，それらは実際には前提として使われていたのではないのである。というのは，もし前提として使われていたのであれば，それらは最後の結果において消去されていたであろうからである。もしそれを残していたとすると，彼は単に誤ったのにすぎない。問題の思想の一つが真であると認められて初めて，先件としてそれを［最後の結果から］落とすことができる。このことが生じるのは，今や真と認められた思想が前提となっているような推論にかぎられる。」(48)

フレーゲの見解は，公理論的に定式化された論理体系における演繹定理を思い起こさせる。演繹定理が成り立つ論理体系では，

もしＢが仮定Ａから導出可能ならば，Ａ⊃Ｂは定理である，

ということが成り立つ。演繹定理は，ＡからＢへの演繹が即座に，例えば“Ａ⊃”をその演繹の各論理式に加えてＡ⊃Ｂからの証明が作れるような論理体系でのみ成り立つ（本論第１０章１．１節参照）。真なる公理だけから出発する演繹のみを証明とするフレーゲにとって，条件化やそれに類似の規則は，真理性の単純な移行とは見なせない操作を含むゆえに，確実なものとは思えなかったのかもしれない。前章で見た，ゲンツェンの自然演繹や連式計算は，真理性の伝達を含むより広範囲の推論規則を，数学上の自然な慣行として扱っていた。フレーゲは，その意味で，正しい推論に関する彼の「理念」にこだわりすぎた側面があったと言えよう。

＊　　＊　　＊

フレーゲとヒルベルトの論争の中に，われわれは何を学び取るべきであろうか。両者の論争を通じて，論理の概念や数学の方法論についての意義深い明晰化が得られたことは確実である。ヒルベルトは，数学の哲学と分析的知識についての理論に対して，現代的な公理論による新鮮な観点，すなわち，数学は永遠で唯一の数学的対象を発見するのではなく，無矛盾性を唯一の判定規準とする多様な解釈による多様な構造を探究するものであるという観点を提供した。その際，後の証明論・モデル論へと発展するような方法論上の新機軸を打ち出した。他方，フレーゲの貢献は，独創的なものではなかったかもしれないが，ヒルベルトの見解の批判と分析を通して，公理と定義の役割の明確な定式化という，方法的批判の典型を提供した。独立性証明を巡ってのフレーゲの議論の中に，新しいメタ数学的アプローチが自覚されていることも特筆に値する（それは，１９２０年代に形をとるヒルベルトの有限主義的証明論の萌芽とも読める）。

ただ，フレーゲの余りに強烈な哲学的・数学的理念がヒルベルトを辟易させたのか，ヒルベルトの突然の文通中断によって，両者の論争から得られることが期待されたより多くの果実が成熟の時を迎えるに到らなかったのは残念なことである。しかし，論理と数学の哲学に関する両雄の議論は，現代において通例とされている思考態度や方法論が，いかに多くの混乱や思い過ごしから次第に洗練されていくものであるかということの，貴重な実例を提供してくれるものである。

註

(1) 本章を準備する過程で次のレスニクの仕事が参考になった：Michael D. Resnik, “The Frege-Hilbert Controversy”, Philosophy and Phenomenological Research, vol.xxxiv (1974), pp.386-403. この論文は，H. Sluga, Philosophy of Frege 2, Logic and Foundations of Mathematics in Frege's Philosophy, Garland (1993) に再録されている。

(2) 非ユーリッド幾何学がいかにして受入れられたかという観点から，19世紀の幾何学の主要な流れを論じた，つぎのフロイデンタールの簡便な概観を参照：Hans Freudenthal, “The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19th Century”, E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski (eds.), Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford U. P. (1962), pp.613-633。また，非ユークリッド幾何学の発見については，Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford U. P. (1972) の第36章を参照。

(3) David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, in Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Teubner (1899).

(4) 「ヒルベルトの計画」の持つさまざまな現代的な側面については，デトレフセンの次の書物を参照：Michael Detlefsen, Hilbert's Program, An Essay on Mathematical Instrumentalism, D. Reidel (1986)。

(5) ヒルベルトとの往復書簡は，次の書物に纏められている：G. Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel, Felix Meiner (1976), SS.55-80 [以下，この書物をWBと略記する]。英訳：G. Frege, Philosophical and Mathematical Correspondence [：PMC], Basil Blackwell (1980), pp.31-52.

(6) 第一シリーズは次のものである：“Ueber die Grundlagen der Geometrie” Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung [JDMVと略記] 12(1903), SS.319-324, “Ueber die Grundlagen der Geometrie II” JDMV 12(1903), SS.368-375.これらは，各々次の書物に再録されている：G. Frege, Kleine Schriften [KSと略記], Georg Olms (1990), SS.262-266, 267-280.

第二シリーズは次のものである：“Ueber die Grundlagen der Geometrie I, II und III” JDMV 15 (1906), SS.293-309, 377-403, 423-430. これらは KS SS.281-323 に再録されている。両シリーズの英訳が，G. Frege, On the Foundations of Geometry and Formal Theory of Arithmetic [FGと略記], translated with an Introduction by Eike-Henner W. Kluge, Yale U. P. (1971) および，G. Frege, Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy [CPと略記], ed. by Brian McGuiness, Basil Blackwell (1984) にある。

(7) 上記の註(2) のフロイデンタールはフレーゲを見下したような評言を書いている：「なぜ，彼 [フレーゲ] が今日そのように高く評価されるのか，私 [フロイデンタール] には理解できない。」H. Freudental op.cit. p.618.

(8) ヒルベルトとの論争の発端となったヒルベルト宛の最初の手紙（1899年12月27日付）でフレーゲは，（幾何学の）公理が直観に支えられていると言っている。「私 [＝フレーゲ] が公理と呼ぶのは，真ではあるが，空間的<u>直観</u>とでも呼ぶことのできる，論理的根拠とは異なる認識根拠からその認識が導かれているゆえに，証明されないところの命題です。」（強調は筆者），KS S.409, BW S.63, PMC p.37。また，「幾何学の基礎について」の第一シリーズの第一論文では，こう述べている：「古来より，公理と呼ばれるのは，推論連鎖によって証明されることがなくともその真理性が確実であるところの思想（Gedanke）である。……ここで私は，公理を真であると見なすことの正当性が何に基づくかという問題に立ち入ることはしない。幾何学の場合，その起源としてはたいてい<u>直観</u>が与えられる。」（強調は筆者），KS S.262, FG p.23, CP p.273.

(9) 『算術の基礎』の§14で，フレーゲは概念的思考の上での非ユークリッド幾何学を認めているように見える。本論第III部第4章§5(114頁) 参照。

(10) ここで，フレーゲの「定義論」を全面的に扱う余裕はないが，次のクッチェラの本に簡潔な概観がある：Franz von Kutschera, Gottlob Frege, Eine Einführung in sein Werk, de Gruyter (1989), SS.140-161.

(11) 「幾何学の基礎についてI」（第一シリーズ），KS S.262, FG p.23, CP p.274.

(12) 『算術の基本法則』（GGAと略記）I, §33, SS.51-52.

(13)「幾何学の基礎についてⅠ」（第二シリーズ），ＫＳ S.288，ＦＧ p.59，ＣＰ p.300-301.

(14)ヒルベルトのフレーゲ宛の返事（1899年12月29日付），ＫＳ S.412，ＢＷ S.67. ＰＭＣ p.40.

(15)フレーゲはイエナ大学の同僚Otto Liebmann の息子で当時のゲッチンゲン大学でヒルベルトの講義を聞いた数学者Heinrich Liebmann から，「ユークリッド幾何学の基本」という題目のヒルベルトの講義録の写しを送ってもらっていたらしい。ＢＷ S.147，ＰＭＣ p.90 の編者解説参照。

(16)「幾何学の公理は五個の群に分けることができる。これらの公理群のおのおのは，ある互いに関連した直観上の基本的事実を表現している」『幾何学の基礎』§１。

(17)「この群の公理は“間”の概念を定義するもので，この概念に基づいて直線上の点，平面内の点，および空間内の点の順序づけが可能になる」（太字強調は原文，下線筆者）『幾何学の基礎』§３。

(18)『幾何学の基礎』§３の最初の「定義」は「一つの直線上の点は互いにある関係にある。この関係を述べるために特に間という言葉を用いる」であり，次の「定義」は「一つの直線ａ上に二点Ａ，Ｂを考える。この二点Ａ，Ｂの組を線分と言い，これをＡＢまたはＢＡで表す。…」となっている（太字強調はいずれも原文）。

(19)「なによりも先ず必要なことは“解明”“定義”“公理”といった表現の理解であると私には思われます。それらの表現においてあなたは慣例の用法からも私のそれからも著しく逸脱しておられます。そのことによって，これらの表現をあなたの説明から切り離しては考えられないし，その論理的構造を十分明確に知ることも困難です。」ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1899年12月27日付），ＫＳ S.410，ＢＷ S.64，ＰＭＣ p.38.

(20)「多くの点で才気に満ちたものであるが，全体としては失敗であり，十分な批判無しでは使えないものだと私は考えます。」Ｈ．リーブマン宛のフレーゲの手紙（1900年７月29日付），ＫＳ S.397，ＢＷ S.147-148，ＰＭＣ p.90.

(21)例えば，１９００年パリでの国際数学者会議でヒルベルトが行った講演「数学の諸問題」の前文に「証明の厳密さ」についての言及がある。Cf.David, Hilbert, “Mathematische Probleme”, Gesammelte Abhandlungen, Springer (1935), Band Ⅲ, SS.290-329.

(22)「…私の考えでは，三行で点の定義を与えることは不可能です，むしろ公理体系全体が完全な定義を与えるのですから。」フレーゲ宛のヒルベルトの手紙（1899年12月29日付），ＫＳ S.412，ＢＷ S.66，ＰＭＣ p.40.

(23)「私の概念，例えば“点”や“間”が一義的に決定されない，とあなたは言われます。…すべての理論は常に，無限に多くの基本要素の体系に応用されます。…，電気の理論の全主張は，もちろん，磁性，電子性といった概念に代置される他の事物のすべての体系に当てはまります，…要求される公理を充たしさえすれば。しかしながら，ここに示したような事態は理論の欠点ではなく，＊むしろ反対にそれは大いなる利点です［この部分は註の形で書き足してある：筆者］，ともかく避けるべきものではありません。」同上の手紙，ＫＳ S.412-413，ＢＷ S.67，ＰＭＣ p.40-41.

(24)「…実数全体を考えるということは，基本列の各項を引き続き作ってゆくあらゆる法則の全部を考えるなどということではなくて，〈有限個の閉じた〉公理体系Ⅰ－Ⅳで規定されるところの関係を相互に持つある対象の集まりを考えることであって，これらから有限個の推論によって導かれる結論だけが，定理として導かれるのである。」Ｄ．Hilbert, “Ueber den Zahlbegriff”, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd.8 (1900), SS.180-184. この論文は『幾何学の基礎』第７版に付録として再録されている。

(25)ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年 1月 6日付），ＫＳ S.413，ＢＷ S.70，ＰＭＣ p.43.

(26)Resnik, op.cit. p.392 f.。レスニクによれば，フレーゲは条件法Ａ⊃Ｔを第二階量化条件法と解釈した。「点」「線」等の原始語は変項に置き換えられ，それらを束縛する量化記号は条件法全体の前に置かれる。公理に対する「モデル」に関わる定理は普遍例化とモドゥス・ポネンスを適用して得られる。これとは対照的に，ヒルベルトは原始語としての「点」や「線」は図式（Schema)と見たように思われる。

(27)Resnik, op.cit. p.393.

(28)ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年 1月 6日付），ＫＳ S.415，ＢＷ S.72-73，ＰＭＣ p.45.

(29)Journal of Symbolic Logic 7 (1942), pp.92-93.

(30)ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1899年12月27日付），ＫＳ S.409，ＢＷ S.63，ＰＭＣ p.37.

(31)フレーゲ宛のヒルベルトの手紙（1899年12月29日付），ＫＳ S.411，ＢＷ S.66，
ＰＭＣ p.39.

(32)同上，ＫＳ S.417，ＢＷ S.75，ＰＭＣ p.47.

(33)同上，ＫＳ S.418，ＢＷ S.75，ＰＭＣ p.48.

(34)これは「数学の諸問題」（上の註21参照）の第２節「算術の公理の無矛盾性」から，ヒルベルトに好意的に現代的視点から推測される彼のアイディアである。

(35)ヒルベルト宛のフレーゲの手紙（1900年 1月 6日付），ＫＳ S.414，ＢＷ S.71，
ＰＭＣ p.43.

(36)Die Grundlagen der Arithmetik（＝ＧＬＡ）§ 94.

(37)ＧＬＡ§95.

(38)Resnik, op.cit. p.397.

(39)“Ueber die Grundlagen der Geometrie Ⅱ”（第二シリーズ),ＫＳ S.317，
ＦＧ p.102，ＣＰ pp.332-333.

(40)“Ueber die Grundlagen der Geometrie Ⅰ”（第一シリーズ），ＫＳ S.266，
ＦＧ pp.28-29，ＣＰ pp.277-278，Ｉbid Ⅱ（第二シリーズ），ＫＳ SS.313-314，
ＦＧ pp.96-98，ＣＰ pp.328-330.

(41)Ｉbid Ⅲ（第二シリーズ），ＫＳ S.318，ＦＧ pp.103-104，ＣＰ pp.333-334.

(42)Ｉbid Ⅲ（第二シリーズ），ＫＳ SS.321-23，ＦＧ pp.107-110，ＣＰ pp.337-39.

(43)Ｉbid Ⅲ（第二シリーズ），ＫＳ S.320，ＦＧ p.107，ＣＰ p.336.

(44)H. リーブマンへの手紙（1900年 7月29日付），ＫＳ S.398，ＢＷ S.148，ＰＭＣ
p.91.

(45)Ｃｆ. Resnik, op.cit. p.400 f.

(46)“Ueber die Grundlagen der Geometrie Ⅱ”（第二シリーズ），ＫＳ S.303
-304，ＦＧ p.82，ＣＰ p.318.

(47)「推論の前提となるのは真なる思想のみである。」Ｉbid Ⅲ（第二シリーズ），ＫＳ
S.319，ＦＧ p.105，ＣＰ p.335.

(48)Ｉbid Ⅲ（第二シリーズ），ＫＳ S.319，ＦＧ pp.105-106，ＣＰ p.335.