

フレーゲの論理哲学

田畑, 博敏

<https://doi.org/10.11501/3135134>

出版情報 : 九州大学, 1997, 博士 (文学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :



第Ⅲ部 新規巻き直し：数の理論

第4章 算術命題の本性に関する諸家の見解 のフレーゲによる批判的考察 —『算術の基礎』第Ⅰ部研究—

はじめに

本章の目的は、『算術の基礎』^①（以後『基礎』と略記）第Ⅰ部の読解を通して、①数学の哲学の一般的問題として、算術命題の本性についてのフレーゲの見解を明らかにし、さらに②フレーゲ解釈の問題として、彼の論理主義のプログラムの中での『基礎』の役割を理解するための準備作業をすること、である。

フレーゲは『基礎』の序文で、「数の概念」の一般的定義はおろか、最も基本的な研究対象である「数1」の満足のいく定義もなされていない、という（フレーゲの頃の）数学＝算術の状況を嘆いている。それと同時に、その最も基本的部分（論理の形式化と一般系列理論）を『概念記法』で完了させたところの、算術を論理によって基礎づけるという彼のプログラムの本来の意図が、当時の数学者や哲学者には理解されていない、ともフレーゲは考えた。そこで彼は、特に数の概念の定義を求めることの数学的・哲学的意義に焦点を当てた書物を書く必要を感じて、『基礎』を著わしたのである。『基礎』の第Ⅰ部でフレーゲは、数概念の本格的考察の準備として、算術命題の本性に関する諸家の見解を批判的に考察している。本章は、先にのべた①、②の目的から、主題の展開に沿って『基礎』第Ⅰ部を研究する。

さて、ここで考えられている「算術命題」とは、個々の数を扱う数式、個々の数の定義、および数一般に成り立つ法則の三種類である。そして、これらがいずれも分析的な性格を持つことが論じられる。そこで本章の梗概は以下のようになる。まず第1節では、『基礎』§1－§4でのフレーゲの議論を追跡することにより、『基礎』全体の数学的動機（解析学の厳密化の動き）と哲学的動機（算術の真理は分析的か総合的か、^{ア プリオリ} 先天的か後^{ア ポステリオリ} 天的かという問題）を確認する。第2節で、算術命題の一部である数式が、数の一般法則と個々の数の定義から証明可能であることについて、カントを批判し、ライブニッツを援用するフレーゲの議論を検討する。引き続き第3節で、ミルの数式に関する見解についてのフレーゲの批判を扱う。第4節で、ミルの批判を中心とした、算術法則（数の一般法則）が帰

納的ではないことの議論を取り上げる。最後に、第5、6節で、算術法則の分析性を問題にする。

1. 背景と動機

『算術の基礎』第I部の叙述を始める前に、フレーゲは『基礎』§1-§4で、『基礎』全体を構成するに至った背景と動機について述べている。われわれも、第I部の十全な理解のために必要と考えられる限りで、この部分(§1-§4)を検討することから始めたい。(本論文第II部第3章でも触れているが、煩を厭わず改めて考察し直したい。)

1.1 19世紀数学の厳密化の運動と数学的動機(『基礎』§1, 2)

フレーゲによれば、主としてギリシア人によって作られてきた幾何学においては、厳密な推論方法を用いることが伝統として今日まで伝えられているが、その方法や概念がインド起源である算術においては、大雑把な思考方法が引き継がれた、という。18世紀以来の高等解析の発明はこの傾向を促進したにすぎず、主題の厳密な扱いに対して立ちはだかった困難を克服しようとする努力も、報われることが少なかった。しかし、その後の数学の発展は、ますます厳密な証明を要求する方向に進んだ。フレーゲは、厳密な証明によって数学の諸命題の妥当性を限界づけるという試みの背景を説明するために、当時なされつつあった、関数・連続性・極限・無限といった解析学の基礎概念を厳密に定義しようとする動きに言及している。

そこで、われわれも例として、極限概念の定義の厳密化をめぐる動きの要点を瞥見することにする⁽²⁾。極限概念の定義は、導関数の概念の理解に必要なものとされた所にその起源を持っている。導関数(derivative)は、ある運動する対象の位置が時間の関数として与えられたとき、ある時点でのその対象の速度の計算を、その関数から導くという問題として典型的に現れる。 x 軸を時間軸、 y 軸を空間軸とすると、その対象の運動はグラフとして表現できる。そのとき、運動する対象の一定時点での速度は、関数の変化の割合となる。関数が一次関数のとき、グラフは直線となり、変化の割合は一定で、直線の傾きとして表される。こうして、任意の点 x_0 での速度は、この点を含む短い時間間隔(区間)での速度を考察することで与えられる。区間 $[x_0, x]$ でこれを計算するには、時点 x と x_0 における関数の値の差(その区間に移動した距離)を、 x と x_0 の差(経過時間)で割ればよい：

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

しかし、変化の割合が一定ではない(速度が各時点で変わる)場合の計算はもっと難しい。一つの戦略は、変化の割合が一定に近いほど小さい、その時点の周辺の区間を考えることである。導関数の初期の定義は、一時点の近傍の無限に小さい区間内で関数の変化率を計算することが可能である、という仮定に基づいてなされた。この戦略には無限小、すなわち無限に小さいがゼロではない数の概念の使用が含まれる。1820年代にコーシー(Augustin-Louis Cauchy)が与えた導関数の定義は、極限概念を用いることで、無限小の使用にまつわる問題を回避するものと期待された。コーシーの極限の定義は以下のようなものであった：

「同じ変数に次々と割り当てられた値が、望むだけわずかに一定の値と異なったまままで終わるという仕方で、その一定値に無限に近づくとき、この最後の値は他のすべての値の極限と呼ばれる。」⁽³⁾ [強調はコーシー]

そのとき、関数 f の x_0 における導関数は、 x_0 における f の値と $x_0 + h$ における f の値との差を h で割った結果の、 h が0に近づくときの極限值、すなわち

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

として定義された。

しかし、このコーシーの定義も十分に厳密なものではなかった。値の系列が「一定値に無限に近づく」とはどういうことか、一定値と「望むだけわずかに異なる」とはどういうことか、は明確ではなかった。極限の定義をもっと単純な用語で定義し、今日も使われる形に表現したのはワイエルシュトラスであった⁽⁴⁾。その定義によれば、 x が x_0 に近づくときの関数 $f(x)$ の極限が L に等しいのは、われわれが選ぶ任意の正の数 ε に対して、それがどんなに小さくとも、 x_0 から δ より遠くないどんな x に対しても $f(x)$ が L から ε よりは遠くない、そういう正の数 δ が存在するとき、そのときにかぎる。言い換えると、 x が十分に x_0 に近づくことを確かめることによって、 $f(x)$ がわれわれの望むだけ、どれほどでも L に接近し得るような x を見つけることができる。こうして、系列が一定の値に近づきながら、しかも望むだけわずかにその値とは異なるという、コーシーの定義に未だ潜んでいた曖昧さが消され、正確な表現が得られた。

フレーゲが言及している解析学における厳密化への動きは、抽象的な理念に動かされた

というより、いわば現場からの要求により生じたのであった。ワイエルシュトラスによる極限概念の正確な定義は、数学研究において生じた問題や混乱を解決するのに必要とされたのであった。逆に言えば、現場の数学者が厳密さを求めるのは数学研究における問題や混乱の解決に直接関わるものに限られており、そういったものに直接関わらない問い、例えば「数概念とはなにか」といった問いに厳密さを求めることはほとんど無かった、ということである。この点に、彼の同時代の現場の数学者からフレーゲを隔てる発想の違いがあるように見える。フレーゲは、厳密さの要求をさらに先に進めて、算術の領域にまで到達させようとする。彼は言う：

「この道〔極限やそれに関連する解析学の諸概念の厳密な定義の要求へと数学者を導いた道〕をさらに先に辿れば、われわれは、全算術の基礎を形成する、数の概念と、正の整数について成り立つ最も単純な命題とに、導かれるにちがいない。」（『基礎』§2）

フレーゲにとって、算術は厳密さの最終的な基礎にはなり得なかった。個々の数の間の関係を主張する数式や、任意の数において成り立つ一般法則も、証明可能な場合には証明されねばならないのである。

1. 2 哲学的動機（『基礎』§3, 4）

算術の基礎を問うという数学的な問いの動機は、同時に、算術の真理の本性についての哲学的問いに裏打ちされている、とフレーゲは考える。算術の真理の本性についての哲学的問いとは、算術の真理が分析的であるか総合的であるか、ア・プリオリであるかア・ポステリオリであるか、という問いである。これらの問いに関連する概念自体は哲学に属するが、数学の手助けが無ければ、それらの問いに決定的な答えを与えることはできない、とフレーゲは考える（『基礎』§3）。

ところで、フレーゲによれば、これらの哲学的問いは、判断の内容（Inhalt）にではなく、真または偽という判断をなすことの正当性（Berechtigung）に関わる。算術の場合、判断の正当性は証明によって与えられる。従って、算術の真理の正当化は、その真理の厳密な証明がなされて初めて達成される。厳密な証明において、われわれは、透き間のない推論連鎖を辿ることにより、その真理の真理性の根拠である原真理（Urwahrheit）に至る筈である。この厳密な証明過程を吟味することによって初めて、われわれは先の哲学的な問い、すなわち、算術の真理が分析的であるか総合的であるか、ア・プリオリであるかア・

ポステリオリであるかも、決定される。フレーゲはこれらの問いに現れる概念をつぎのよう

- に規定し直す⁽⁵⁾：
- (1) 当の真理の厳密な証明の遂行過程で、論理法則（logische Gesetze）と定義（Definitionen）にしか出会わないならば、その真理は分析的（analytisch）である。
 - (2) 一般的・論理的本性を持たず、ある特別な学問領域に関連する真理を用いることなしには（ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf besonderes Wissensgebiet beziehen）証明できないとき、その真理は総合的（synthetisch）である。
 - (3) 事実に訴えることなしには（ohne Berufung auf Thatsachen）、証明できないとき、その真理はア・ポステリオリ（a posteriori）である。
 - (4) 証明が、それ自身はもはや証明可能ではなく証明の必要もない一般法則だけからなされるとき、その真理はア・プリオリ（a priori）である。

フレーゲは、数学的動機とともに、これらに関する問いを問うという哲学的動機から、『算術の基礎』全体の意図を、数の概念と算術法則の本性の探究へ向かうもの、と規定する（『基礎』§4）。これらの課題が遂行されるのは『基礎』第IV部においてであるが、その準備として、フレーゲは先行する諸家の見解を批判的に考察する。これは3つの部分からなり、第I、II、III部に対応している。すなわち、算術命題の本性に関する、および数の概念に関する、および単一性と数1に関する、先行諸家の見解の考察である。以下、本章は、第I部の算術命題の本性に関する諸家の見解の批判的吟味を取り扱う。

2. 数式は証明可能か？

さて、算術命題において、個々の数を扱う $2+3$ のような数式と、すべての正の整数について成り立つ一般法則を区別することから、フレーゲは始める。何人かの哲学者たちは、数式が公理のように直接に自明であり、証明できないものと考えた。（ここで、名前が挙げられるのは、ホッブズ、ロック、ニュートンである。）特に、カントは、算術の数式が証明不可能であり、総合的であるとみなした、とフレーゲは理解する。フレーゲは、『基礎』§5を、主としてカントの見解（とフレーゲに考えられる見解）が不十分であることを示すことに捧げる。

フレーゲがここで念頭においてるのは、 $7+5=12$ という数式が、ア・プリオリで

はあるが分析的ではなく総合的であり、直観によってその正しさが示される、というカントの周知の議論である⁽⁶⁾。しかし、フレーゲ自身の例は、その自明性においてカントの数式よりはるかに劣る、

$$1\ 3\ 5\ 6\ 6\ 4 + 3\ 7\ 8\ 6\ 3 = 1\ 7\ 3\ 5\ 2\ 7$$

という数式である。この「自明性の無さ」がこのような数式の「総合性」の例証となるとカントは考えた、とフレーゲは論じる。しかし、これが自明でないならば、何を根拠にしてこの数式の真であることは示されるか？証明によってでなければ、何によってか？カントであれば、直観によるであろう、とフレーゲは言う。そして、カントの指や点について

のわれわれの直観に訴える説明を引いている。

このようなカントの説明が不十分であることを、フレーゲは二つの論点から指摘する。第一は、算術命題がア・プリオリで総合的であるというカントの公式見解にも関わらず、指や点の直観に訴えることにより、算術命題が経験的命題であり、従ってア・プリオリでなくなる危険をカントが冒している、という論点である。というのは、3 7 8 6 3本の指の直観が経験から全く無縁の純粋な直観ではあり得ないだろうからだ。10本の指の直観すら、配置の変化により異なり得る。だとすると、そのような直観が客観的基準になるか？なりそうもない。そもそも、1 3 5 6 6 4個といった多数の指または点の直観を持ちうるか？持てたとして、別に3 7 8 6 3個の指または点の直観と、1 7 3 5 2 7個のそのような直観から、証明に代わる、上の数式の正しさの直観による説明がどのようなものか、明らかではない。

第二の論点は、カントが小さい数の場合だけを考えていて、大きい数の間の数式は考えていなかったようだ、ということである。確かに、 $7 + 5 = 12$ のような比較的小さい数を扱う数式の説明では、指や点の直観に訴えることが可能であろう。しかし、数式としては、大きい数と小さい数の場合を分けることは意味がなく、そもそも、どこで大と小を分けるか、その境界も判然としない。

このようなカント批判がそれ自体としての的を射たものであるか、あるいは批判の仕方は公平であるのか、という問題は残るかもしれない。しかし、ともかく、フレーゲにとって、数式がそれ自体で証明の必要のない直観的自明性を持つ、という考えは不十分なものであった。フレーゲにとって数式も証明されねばならない。そこで、彼は§6において、数式の証明が可能であるとする哲学者・数学者の説を検討する。その代表として、ライプニッツの $2 + 2 = 4$ の「証明」を以下のように引用する：⁽⁷⁾

$$\text{定義：(1) } 2 = 1 + 1$$

$$(2) \ 3 = 2 + 1$$

$$(3) \ 4 = 3 + 1$$

公理：同等なものを[同等なもので]置き換えても、同等なままである。

$$\text{証明：} 2 + 2 = 2 + 1 + 1 \quad (\text{定義(1) による})$$

$$= 3 + 1 \quad (\text{定義(2) による})$$

$$= 4 \quad (\text{定義(3) による})$$

$$\therefore 2 + 2 = 4 \quad (\text{公理による})$$

フレーゲによれば、この証明は定義と公理だけから導かれたように見えるが、実は括弧の省略による透き間が一行目と二行目の間にあって、証明としては不備である。実際の、ここでの数の定義によれば、“ $2 + 1 + 1$ ”という表現は許されず、“ $2 + (1 + 1)$ ”か“ $(2 + 1) + 1$ ”が許されるだけである。そして、定義(1)と(2)によって、

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1),$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1$$

である。よって、 $2 + 2 = 3 + 1$ であることを導くには、

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

を示さねばならない。これは、加法の結合法則：

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

の事例である。よって、透き間のない証明は

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) \quad (\text{定義(1) による})$$

$$= (2 + 1) + 1 \quad (\text{加法の結合法則による})$$

$$= 3 + 1 \quad (\text{定義(2) による})$$

$$= 4 \quad (\text{定義(3) による})$$

となろう⁽⁸⁾。

ここでのフレーゲの指摘の要点は、透き間のない証明によって数式を証明するために、加法の結合法則のような算術の一般法則が必要である、ということである。証明が必要である、ということはその式または命題が原真理ではない、ということの意味する。フレーゲにとって、証明は真理を原真理まで連れ戻すことである。すると、すべての数式が証明できるということを示すためには、何が確認されるべきか、という問いが現れよう。まず第一に、すべての数が、1と、「1だけ増やす」という操作とによって、定義される必要

がある。すなわち、

$$2 = 1 + 1,$$

$$3 = (1 + 1) + 1, \quad \dots$$

という形で数の無限集合を確保する必要がある。これを表現する命題としての定義は一つの省略表現を規約する命題であり、一旦その規約が承認されると、その命題が論理的な分析命題となることに問題はない。第二に、数式の中の数表現が、すべてこのような、数1と1だけ増やすという操作からなる表現による定義に置き換えることができる。例えば、

$$2 + 2 = 4$$

は、

$$(1 + 1) + (1 + 1) = ((1 + 1) + 1) + 1$$

に置き換えることができる。そして、このような数式が数の一般法則を使って証明できることを示せばよい。すると、第三に、数の一般法則がどのように証明されるのか？数の一般法則の身分はいかなるものであるか、が問題として残る。フレーゲ自身の見解では、数の一般法則も論理的に証明される必要があり、これは『算術の基本法則』で実行される。しかし、『基礎』第I部ではこの問題に関しても諸家の見解が吟味される（『基礎』§9以下、本章第4節以下）。それに向かう前に、個々の数を経験的に定義しようとするミルのやり方が検討される。

3. 数の定義についてのミルの見解の批判

前節で確実であろうことが示されたのは、数式が個々の数の定義と数に関する一般法則から証明可能である、ということである。しかし、これに関してはJ. S. ミルが異論を述べている。フレーゲは『基礎』§7, 8で、数の定義についてのミルの見解を検討する。

フレーゲによれば、ミルも一見すると、ライブニッツ（およびフレーゲ自身）と同様な個々の数の定義を与えることにより、算術を数の定義の上に基礎づけようとしているが、すべての知識が経験的であるというミルの偏見によって、それが台無しにされている、という（『基礎』§7）。フレーゲが引用している『論理学体系』のある箇所⁽⁹⁾でミルは、

「各々の〔自然〕数は、大きさにおいてその次に小さい数に一つの単位を加えることによって形成され则认为られる、…」〔括弧〕による補足は田畑。以下同様）

と述べる。しかし、同時にミルは、

「他のいわゆる定義と同様に、これら〔数の定義〕も二つのものから作られている、すなわち名前の説明と事実の主張からである。… 数の定義において主張される事実は物理的事実である。」⁽¹⁰⁾

「もしそうしたければ、われわれは“3は2と1である”という命題を数3の定義と呼んでもよいし、幾何学に関して主張されたように、算術は定義に基礎づけられた科学である、と主張してもよい。しかし、それらは幾何学的な意味で定義なのであって、論理的な意味では定義ではない。〔それらは〕用語の意味を定めているだけではなく、それと共に、観察された事実をも主張している。」⁽¹¹⁾

とも述べる。ここで、フレーゲにとって反論すべきミルの議論の中心は、数の定義の内容が、言葉の意味の定義であるのみならず、事実の、それも観察された事実・物理的事実の主張をも含む、という論点である。フレーゲにとって、算術命題の一つである数の定義の内容が経験的事実の主張を含む、という見解は、算術命題をア・ポステリオリな命題であるという結論を導くことになるゆえに、見過ごせないのである。フレーゲは、例としてミルが続けて述べている、数3の定義が含意するとされる観察事実を攻撃する。ミルはこう述べる：

「こうして、われわれは“3は2と1である”を3の定義と呼んでよい。しかし、その命題に基づく計算は定義そのものから導かれるのではなく、むしろそこで前提されている算術的定理、すなわち、対象の集まりが存在しており、それらは感覚に^{oo}。という印象を刻む一方で、例えば^{oo}。というように二つの部分に分離される、という定理から導かれる。」⁽¹²⁾

3の定義がそれに基づくという事実が^{oo}。という感覚印象を与えるものだとする、それらが釘づけにされて固定されていなくて幸いである、なぜなら、もし固定されて、^{oo}。という印象を与えるような分離が不可能であれば、 $2 + 1$ は3とはならないだろう、とフレーゲは皮肉る。また、味覚の場合、このような視覚的印象を与えることはないから、甘さと酸っぱさと苦さを3つの感覚と呼ぶこともできなくなる、ともフレーゲは言う（『基礎』§7）。

数の定義の〈内容〉が経験的事実の主張を含むとすることに反論した後、フレーゲは、これらの定義の〈正当性〉に関しても、事実の観察が不要であることを論じる（『基礎』§8）。フレーゲによれば、 $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, … といった定義は、

これらがそれに基づくミルが主張するような観察事実がなくとも、正当化される。集積と分離を観察せずとも、 $3 = 2 + 1$ と定義できる。なぜなら、この定義が $2 + 1$ に何の意味も与えない訳ではないからだ。あらゆる数の定義において、観察された事実の存在が必須の条件だとすると、数0は定義できなくなる。誰も0個の小石を見たことがないからだ。観察事実の要請を拒絶すると、ミルの考え方では、0を使う計算において、0が何の意味もないただの記号であり、計算は意味のないゲームである、という結論に導かれることになろう、とフレーゲは考える。しかし、フレーゲによれば、そのようなことはない。計算は意味のないゲームではなく、数0にも重要な意味が与えられ得る（ただし、そのことの本格的な考察は『基礎』の第IV部で行われる）。

考えられるミルの側からの反論は、感覚によって対象の識別ができなければ、算術は不可能ではないか、というものであろう。しかし、これは算術命題の真理性に影響を及ぼすかどうかという意味での命題の正当性に関する問いではない。むしろ、算術命題の内容を知るために観察を行わねばならないのではないか、という命題の内容に関わる問いである。このような問いが出されるのは、算術命題、特に数の定義の内容に感覚的・経験的内容が含まれている、という前提があるためである。ところが、そのような前提をそもそも取らないのであるから、答える義務から免れる、というのがフレーゲの応答であろう。

4. 算術法則は帰納的真理か？

これまでの議論で、数式が、個々の数の定義と数に関する一般法則とから証明されること、また個々の数の定義が観察される事実を主張しているのではなく、それらの定義自身の正当性のために事実を前提とするのでもない、ということが示された、とフレーゲは考える。そこで、次に考察されるべきことは、数についての一般法則の本性、それらの身分の問題である。フレーゲはここで（『基礎』§9-10）、算術法則を帰納的なものと見なすミルを批判する。

ミルは、 $5 + 2 = 7$ の証明が、数の定義と、「等しいものの和は等しい」という包括的な法則によってなされると主張する⁽¹³⁾。その証明とは、以下のようなものである：

$$5 + 1 = 6 \quad (\text{数6の定義による})$$

$$\therefore 5 + 1 + 1 = 6 + 1 = 7 \quad (\text{当該法則と数7の定義による})$$

$$\text{ところで } 2 = 1 + 1 \quad (\text{数2の定義による})$$

$$\therefore 5 + 2 = 5 + 1 + 1 = 7 \quad (\text{当該法則による})$$

この証明も、ライブニッツの $2 + 2 = 4$ の証明（本章第2節）と同様、括弧の省略による結合法則の使用が見過ごされているが、ここで問題なのはその点ではない。ミルは、「等しいものの和は等しい」という法則が、「部分から成り立つものは、それらの部分の部分からも成り立つ」という原理と同等であり、この真理は帰納的真理であって、最高位の自然法則である、と言う。このような位置づけが問題である。まず、フレーゲは、「等しいものの和は等しい」という法則が、ライブニッツの「同等なものを[同等なもので]置き換えても、同等なままである」という公理（本章第2節）の代理物であることを指摘し、これを自然法則とは呼べないと主張する。一般に、算術の法則が自然法則であると言えるためには、それらの真理が持たない意味をそれらに付加せねばならない。

フレーゲは、算術の真理を自然法則と呼ぶミルの見解が、算術に現れる記号、例えばプラス記号（+）の経験的解釈——物理的物体や体積の諸部分の全体に対する関係を表現したものとする解釈——に裏打ちされていることを指摘する。 $5 + 2 = 7$ は、2単位体積の液体を5単位体積の液体に注ぎ込むとき、7単位体積の液体が得られる、ということの意味するのではない。そのような意味が与えられるのは、 $5 + 2 = 7$ という算術の真理が、化学的作用により体積が変化しないとき、液体を混ぜ合わせるという操作に応用される場合である。プラス記号は、多くの応用において体積の合成に対応するであろう。しかし、そのことがプラス記号に意味を与えるのではない。物理的物体の体積に何ら関係しない別の応用もあるからである。例えば、出来事の数数える場合がそうである。また、部分の全体に対する関係を、ミルのように物理的物体の間の関係に限定することもできない。元首殺害は殺害一般の部分であるが、これは論理的な従属（logische Unterordnung）の意味での、部分の全体に対する関係である。よって、加法は、一般に、物理的関係に対応することはなく、加法の一般法則も自然法則ではない。（『基礎』§9）

算術法則が自然法則ではないとしても、ミルが主張するように、帰納的真理であるという可能性は残る。そこで、フレーゲはこの問題の検討に移る（『基礎』§10）。

もし加法の結合律のような算術法則が帰納的真理であれば、その持つ一般性に到達するにはどのような事実から出発すべきか？この出発点はおそらく数式であろう。しかし、数式は、個々の数の定義と数の一般法則から導かれることがすでに示された。すると、これは循環に陥ることになるのではないか？なぜなら、帰納によって数の一般法則に到達するための出発点である数式が、再び数の一般法則に依存しているからだ。この循環を一旦

断ち切り、数式が数の一般法則から導かれることを無視し、数式から一般法則が帰納されるという側面だけを考察しよう。この場合にも、フレーゲによれば、帰納が成り立つ基盤がそもそも欠けていることが指摘できる。その基盤とは、数という同一の類に見られるべき斉一性 (Gleichförmigkeit) である。フレーゲは、それに関連するライブニッツの言葉を引用する⁽¹⁴⁾：

「そのこと [斉一性を持つこと] は、時間や直線については言えるが、しかし、図形については決して言い得ないし、まして、単に大きさにおいて異なるのみならず類似性も無い数の場合は、なおさら言えない。偶数は、二つの同一部分に分割され得るが、奇数はそれができない。3と6は三角数であり、4と9は平方数であり、8は立方数である、等々。そして、このことは、図形においてよりは、数において一層よく生じる。というのは、同じでない二つの図形は互いに完全に類似し得るが、しかし、二つの数はそうはならないからだ。」

われわれが、数を同種のものとして扱うことに慣れ、それらの間に斉一性があると思ひ込みがちであるのは、数の一般法則を多数知っていることに起因する、とフレーゲは言う。空間の点、時間の各瞬間は、それ自体として、差異や特徴を持つ訳ではなく、条件が同じであれば、他の場所、他の時間においても、それらの間の法則はいつでも成り立つ。つまり、それらの間に斉一性が成り立っている。しかし、個々の数の場合は、そうではない。数は時間・空間において存在するのではなく、数列におけるそれらの位置は、空間における位置とは価値が異なる。従って、帰納法が成り立つための基盤である、数の間の斉一性の欠如によって、数の法則を帰納によって得ることの正当性は見出せない。

それでは、数の一般法則はどのようにして得られるのか？ここでのフレーゲの示唆（あくまで示唆に留まるものであるが）は、数の回帰性 (recursiveness)、すなわち繰り返すということ、に注目することである。数の諸特性は、個々の数の定義、すなわち、数1と1だけ増やすという操作の繰り返しにより与えられたから、そのような繰り返しのに基づいて導き出される筈である。よって、数の一般法則についても、すべての数に共通するような数の創出方法に基づいて証明されるであろう。

いずれにせよ、数の一般法則が帰納的な真理ではないことが以上の考察において示された、とフレーゲは考える。そこで、彼は、哲学的動機からの算術命題の身分への問い、すなわち、算術命題が分析的か総合的か、ア・プリオリかア・ポステリオリかという問いへと向かう。

5. 算術法則は総合的でア・プリオリか？

フレーゲは『基礎』第I部の最後の数節 (§ 12-17) で、算術命題の哲学的位置づけの問題に向かう。二種類の対立項、すなわち分析的と総合的およびア・プリオリとア・ポステリオリを組み合わせると4つの組み合わせが生じる。そのうち、〈分析的でア・ポステリオリ〉という組み合わせは在り得ない。命題が分析的であれば、その証明は定義と論理的な一般法則にしか依存しないが、それらは経験的な事実とは無関係だからである。また、ミルの見解が否定されたことに対応して、〈総合的でア・ポステリオリ〉という組み合わせも算術法則には相応しくない。従って、残る組み合わせは、〈総合的でア・プリオリ〉と〈分析的でア・プリオリ〉である。このうち、フレーゲによる分析性の定義に従うと、ある命題が分析的ならば必ずア・プリオリであるから、フレーゲは後者の組み合わせを〈分析的〉で代表させる。すると、問題は次のように整理される：

算術法則は総合的でア・プリオリか、それとも分析的か？

フレーゲは § 12-14 で、算術法則が総合的でア・プリオリではないことを示そうと試みる。フレーゲの戦略は、もし算術法則が総合的でア・プリオリならば、カント（そしてこの説を支持する大部分の論者）の見解によれば、その認識根拠として直観を考えねばならないが、その根拠が算術の基礎づけには不適切であることを示すことで、間接的に、算術法則が総合的でア・プリオリであることを否定する、というものである。彼は数、あるいは一般に量 (Größe) に直観はなじまない、とする。カントは直観について、『論理学』でこう定義している：

「直観とは個別的表象であり、概念とは一般的または反省的表象である。」⁽¹⁵⁾

そして、カントによれば、感性なしでは直観は働かない。『純粹理性批判』でカントは述べる：

「感性によってわれわれに対象が与えられるだろう。そして、感性のみがわれわれに直観をもたらす。」⁽¹⁶⁾

だとすると、例えば100, 000を直観と呼べることになるが、この意味での直観は算術法則を基礎づけることはできない、とフレーゲは言う（『基礎』 § 12）。

フレーゲは、幾何学の一般命題が直観から得られる点についてはカントおよびライブニッツと見解を同じくする。しかし、算術の場合はそうではない。幾何学の対象である点、線、面といったものは個別的なものではなく、それ自体で類の代表となる。それゆえ、そ

これらの表象の直観がそのままそれらに関する一般命題を基礎づけることができる。しかし、個々の数の持つ特徴は個別的であり、それらの表象の直観は数の一般法則を導くには多様すぎる。§ 13, 14で、フレーゲは、直観に関連させて幾何学と算術の相違を次のように述べる：

「幾何学的点は、それ自体で考察されるとき、どんな他の点とも区別されはしない。同じことは直線や平面にも当てはまる。…… 幾何学においては、一般命題が直観から得られる場合、そのことは以下のことから説明がつく。すなわち、直観された点、直線、平面は本来、決して個別的なものではなく、それゆえ、それらの類全体の代表とみなされ得る。数の場合は、事情が別である。各々の数は、その特徴を持っている。どの程度まである一定の数が他のすべての数を代表できるのか、どこでその特殊性が有効なものとされるのかを予め言うことはできない。」（『基礎』§ 13）

フレーゲによれば、どんなに空想的な物語を考えようとも直観に止まるかぎり、われわれは幾何学（ユークリッド幾何学）の公理に縛られる。概念的思考だけが、例えば、四次元空間や正の曲率の空間を仮定して、ある程度、幾何学の公理から自由になる。そして、概念的思考によって、幾何学の公理に反する、つまり直観に反する命題を仮定でき、しかも、それにより矛盾に陥らない。これは幾何学の公理が相互に独立であり、そして論理の法則からも独立であることを意味する。しかし、数の理論の基本命題については、このようなことは言えない。もし、算術の基本命題に反することを仮定すればすべてが混乱に陥り、そもそも思考することさえできないだろう。フレーゲは、算術の基礎は他のすべての科学より深い部分の基礎を形作っている、と考える。それは、人間の思考そのものに関わる。フレーゲは、算術と思考との関わりをこう説明する：

「算術の真理は、数えうるものの領域を支配する。これは、最も広範囲な領域である。というのは、現実的なものや直観的なものばかりがその領域に属する訳ではなく、すべての思考可能なものがその領域に属するからである。従って、数の法則は思考の法則と最も緊密に結びついている筈ではないか？」（『基礎』§ 14）

算術の真理がすべての思考可能なものを支配するとすれば、それは特殊科学の真理であると考えすることはできないだろう。すなわち、算術の真理は総合的ではなく分析的であると考えねばならない。こうして、フレーゲの議論は、直観が算術を基礎づけることの不可能性を示して、算術法則の総合性を間接的に否定することから、算術が思考と関わることを

示したことで、算術法則の分析性を直接に問題にする方向へと踏み出す。

6. 算術法則の分析性とその評価

『基礎』第I部の最後の三節（§ 15-17）で、フレーゲは、算術の真理（数式と法則）とが分析的である、ということを支持するライプニッツの議論を補強し、ミルの反論を批判し、自らの議論を展開する。

ライプニッツは不十分ながら、数の法則が分析的であることに気づいていたようである。ライプニッツにとって、ア・プリオリであることと分析性は一致した。また彼は、代数は論理という高度な技術から利点を得ている、と考えていた。ライプニッツは、必然的真理である算術の真理は証明されるか、または同一性に還元される、と言う。しかし、他方で、ライプニッツはすべての真理の証明可能性を考えてたようであり、これが彼の分析性の捉え方を一面的なものにしている、とフレーゲは見なす。数の科学の成長を考えると、数の真理が単なる同一性に根ざすと見ることは困難である。論理の形式がそのような豊かな内容を生み出したことの説明が、それによつては十分にできないからだ。

ミルの帰納による算術法則の基礎づけという見解において、彼の論点の中心は、算術法則が経験的事実により支持されるという点である。もしそのような支持がなければ、ミルによれば、数学者は空虚な記号のゲームを為しているにすぎないことになる。しかし、そのように考える必要はない、とフレーゲは反論する。数学者は記号でもって、何か感覚的に知覚可能なものや直観的なものを理解していなくとも、計算を実行できる。その場合、特定の知覚可能な内容を記号の意味に盛り込む必要はなく、別の応用により別の内容を盛り込むことが可能である。応用と本来の意味とは異なるのである。それでは、数法則の分析性はどのようなものであり、経験的事実との関係はどのように捉えられるのか？

フレーゲが考える分析性の形式は、結論を当の算術法則とする推論系列である。それはある思考系列である。結論である算術法則に、応用という場面で経験的事実の意味が含まれているならば、そのような事実を成り立たせる前提は、その内容を推論の条件として、結論である法則に随伴させる。こうして、思考系列においてすべての事実の前提を条件で置き換え、帰結が条件の系列に依存するという形で結論が導かれる。この真理は、事実そのものとは切り離し、思考のみにより、「言語の技術」（ミルの言い方）だけにより根拠づけられる。数の法則はこのような類の真理として捉え直すことができる。このとき、数

の法則は分析判断となる。なぜなら、推論の出発点は思考の法則としての一般的論理法則かまたは定義であり、事実（または特殊な領域）との結び付きは、条件付きの法則という形で結論に随伴するから、それらが証明の根拠とはならないからである。この分析性は、真理の相互の依存関係に光を当てることに貢献する。こうして、算術の真理は、将来の使用のための全推論系列を圧縮された形でそれ自身の中に含む。一旦、証明がなされたなら、もはや個別的な推論を行う必要はなく、全系列の結果について述べることができる。これらが、推論系列という形に分析された数法則に与えられた利点であり、純粋論理の不毛さという根拠のない先入見の反証となるものである。フレーゲは算術法則の分析性をこのような形で考え、それを以上のように評価した。

* * *

ここで、暫定的な結論を述べよう。フレーゲは、諸家の見解を批判的に考察することにより、算術命題の分析性を、言わば間接的に示した。算術命題のうち、個別の数を扱う数式は直観的に明らかなのではなく、個々の数の定義と数の一般法則から証明されねばならない。他方、数の一般法則は、数概念の論理的定義と論理の一般法則から導かれる筈である。これが、技術的な側面も含めて詳細に実行されるには、『算術の基本法則』を俟たねばならない。われわれが本章で検討した『算術の基礎』第Ⅰ部においては、その準備として、自らのプログラムの哲学的動機に光を当てている。特に、カント、ミル、ライプニッツといった哲学者たちの見解との対比において、算術命題の位置づけに関する彼の独自の観点を出そうと務めている。先行の論者の批判を主な目的とするこの第Ⅰ部では、それらの観点の十分な展開は抑制され示唆に止まっているものも多いが、それらを押さえておくことは、以後の『基礎』第Ⅳ部での具体的な展開への必要な一段階であったのである。

- (1) 『算術の基礎』のテキストとしては、Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel, Felix Meiner (1986), およびオースティンによる独英対訳本である, G. Frege, The Foundations of Arithmetic, Translated by J. L. Austin, 2nd. rev. ed. Northwestern U. P. (1953) を用いる。
- (2) 以下の記述は, Joan Weiner, FREGE in Perspective, Cornell U. P. (1990) のPart.I の1, 特に 24-26頁に負う。
- (3) “Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.” この定義は, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821) のPréliminaires (以下の復刻版の4頁) にある。この『解析学教呈』と呼ば慣らわされる書物は全集 Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Sér.1. 12 vols.; Sér.2, 15 vols, Paris (1882-1974) のSer.2の3にある。テキストとしては次の復刻版を用いた: A. L. Cauchy, Analyse Algébrique, Gabay (1989)。
- (4) Cf. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford U. P., (1972), p.952.
- (5) 分析的と総合的, ア・プリオリとア・ポステリオリという伝統的な哲学用語をここで使用することに関して, フレーゲは, これらに新しい意味を付与しようとする意図はなく, これまでの著述家, 特にカントがこれらの言葉によって考えていたことを正確に言おうとしているにすぎない, と『基礎』§3の脚注で断っている。
- (6) フレーゲがここで(『基礎』§5) 引用しているのは, 『純粋理性批判』のⅠ: 先験的原理論第二部門: 先験的論理学, の第一部: 先験的分析論, 第二篇 原則的分析論第二章: 純粋悟性のすべての原則の体系, 第三節 純粋悟性のすべての総合的原則の体系的表示, 1. 直観の公理, の部分である (Immanuel Kant, Kritik der Reinen Vernunft, B204-205, hrsg. I. Heidemann, Reclam (1966), S.240.

邦訳：カント／篠田英雄訳『純粋理性批判』岩波文庫、239頁）。ここで、カントは、「あるものがどれくらい大きいか」という問いの答である量についての命題が総合的命題で、しかも直接に確實（unmittelbar gewiß）である、つまり論証できないものである（indemonstrabilia）が公理ではない、と述べる。また、「等しい量に等しい量を加えればそれぞれの和は等しい」といった命題は分析的命題であって、これも公理ではない、という。カントにとって、

「公理は、ア・プリオリな総合的命題でなければならない。これに反して、数的関係を表わす明白な（evident）命題は、確かに総合的命題ではあるが、しかし幾何学の命題のような一般命題ではない、まさにそれ故に、このような命題は公理ではなく、数式と呼ばれてよい。例えば（ $7+5=12$ ）という命題は、分析的命題ではない。というのは、私は7の表象においても、5の表象においても、あるいはこの両数の合成の表象においても、数12を考慮することができないからである（私がこの両数の加法において、数12を考慮すべきだ、ということは、ここでは問題にならない。というのは、分析的命題の場合は、私が主語の表象において実際に述語を考えているかどうか、ということだけが問題だからである。）」（篠田訳を一部改変、強調は原文）

ここで、フレーゲとカントにあっては、分析性や証明可能性に関する基本的な見解の相違が存在すること、に気づかざるを得ない。数式が「明白である」または「直接に確實である」ゆえに論証できない・証明できないとする点で、カントの見解はフレーゲのそれと基本的に異なっている。しかし、カントは、「直接に確實である」ことの根拠をこの箇所では明示していないように思える。むしろ、ここでは、 $7+5=12$ といった数式が総合判断であるということが論点である。そして、総合判断であるとする根拠は、数7の表象にも、数5の表象にも、両数の和（ $7+5$ ）の表象にも、数12の表象が含まれないからである。括弧の中でカントが付け加えていること、すなわち「両数の加法 $7+5$ において12という数を考える」ということに、この数式を証明可能とみなすというフレーゲの見解への接近の可能性が見出されるが、結局、「主語の表象に述語の表象が含まれるか否か」という基準の外にカントは出なかったようである。従って、カントにとって、 $7+5=12$ が「直接に確實である」ということの根拠は別に求めざるを得ない。それは「直観」である。『純粋理性批判』緒言のV「理性に基づく一切の理論的な学にはア・プリオリな総合判断が原理として含まれ

ている」（Kant, op.cit. B 15-16, S.64, 前掲邦訳70頁）では、こう述べられる：

「12の概念は、私が7と5の結合を考えるだけで、すでにそれによって考えられているというわけにはいかない。……ところで、この両方の数の一方に対応する直観（Anschauung）、例えば、五本の指、あるいは（…）五個の点というような直観に頼って、この直観において与えられた五個の単位を7という概念に一つずつ順に付け加える場合は、7と5という両方の概念の外に出なければならない。というのは、まず数7を取り、それから、5の概念の代わりに直観としての私の手の五本の指に頼ることにより、数5を構成するために予め纏めておいた五個の単位を、その私の像を用いて順次に数7に加えていくと、ここで数12が生じるのが判るからである。」（同）

結局、ここで $7+5=12$ という数式が「直接に確實である」ことの根拠は、直観に明らかと思われる指の表象を一つずつ具体的に足し合わせる、という操作の結果である。概念を分析しても、 $7+5$ から12は出て来ない。すなわち（Kant, op.cit. S.65）：

「7に5が加えられねばならぬということを、なるほど私は和（ $7+5$ ）の概念において考えたが、しかし、この和が12に等しいということは考えなかった。従って、算術命題は、常に総合的命題である。」（同）

概念的思考では $7+5=12$ の「直接に確實である」ことが知られないが、表象を用いた直観では明らかである、とするカントの主張に対して、フレーゲは以下の議論で、直観に明らかとは思えない「大きな数」を用いて反論する。しかし、カントは、むしろ大きな数の方が自らの主張を支持する、と言う（Kant, op.cit. s.65）：

「このこと〔算術命題の総合性〕は何かもっと大きな数を使ってみれば一層はつきりする。実際、これら両数の概念をいくらひねくり廻したところで、直観を援用しないかぎり、これらの概念を分析するだけでは、その和〔が何であるか〕が決して見出せない、ということは明らかに納得されるからだ。」（同）

(7) Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, 5, hrsg. von C. J. Gerhardt, Berlin (1882); Nachdr. Olms (1978), S.394. （邦訳：ライプニッツ『人間知性新論』米山優訳、みすず書房(1987), 419-20頁）

(8) もう少し細かく言えば、①一般法則から数式を導出することを許す代入操作が前提さ

れていなければならないし、②証明の第一行目は、 $a = a$ という（論理の）一般法則からの代入例： $2 + 2 = 2 + 2$ に、「公理」とよばれている同一性の推論規則 $a = b$, $F(a) \therefore F(b)$ を適用して導かれたものとしなくてはならず、さらに③結論を出すときの「公理」の使用において、 $a = b$, $b = c \therefore a = c$ という規則を適用しているが、これも公理、つまり同一性の推論規則から導かれる。フレーゲは『算術の基本法則』では、もちろん、これと同水準の厳密さを保持している。

- (9) John Stuart Mill, A System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connective View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation, J. M. Robson (ed.), Collected Works of John Stuart Mill, vol. VII, University of Toronto Press (1974), Book III, ch.xxiv, §5, p.612.
- (10) J. S. Mill, op. cit. p.610.
- (11) J. S. Mill, op. cit. Book II, ch. vi, §2, p.257.
- (12) J. S. Mill, op. cit. p.257.
- (13) J. S. Mill, op. cit. Book III, ch. xxiv, §5, p.610.
- (14) フレーゲはバウマンの本 (Baumann, Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik, Berlin (1868)) に引用してあるライプニッツの言葉を孫引きしているようであるが、ライプニッツのオリジナルの箇所は以下である：Leibniz, op. cit. Liv. II, ch.xvi, §5, p.143. (邦訳：ライプニッツ『人間知性新論』128 頁) 本文の翻訳は、フレーゲの『基礎』のテキストのドイツ語から筆者が訳した。
- (15) "Die Anschauung ist eine einzelne Vorstellung (repraesentatio singularis), der Begriff eine allgemeine (repraesentatio per notas communes) oder reflectirte Vorstellung (repraesentatio discursiva)." Immanuel Kants Logik, ein Handbuch zu Vorlesungen, ed. Gottlob Benjamin Jäsche, A 139, Akad.- Ausg. IX S.91.
- (16) "Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns Anschauungen;" KRV B33, S.80. (強調はカント)

第5章 数と単位をめぐるフレーゲの批判的考察

—『算術の基礎』第II, III部研究—

はじめに

『算術の基礎』⁽¹⁾ (以下『基礎』と略記) の第I部で、フレーゲは、算術命題の本性を哲学的な観点から考察したが (本論文第4章)、引き続き第II部で、数の概念が何でないか、どういうものとして理解されてはならないかを論じ、それに関連して第III部で、数詞「一」や単位の理解にまつわる諸困難を検討している。その目的は、数や単位に関するこれまでの代表的な見解の不十分な、または誤った点を指摘し、訂正することによって、十全で妥当な数の一般的定義に到達するための準備とすることである。『基礎』第III部の最後の数節で、フレーゲは、数が概念に対して与えられる、という彼自身の暫定的提案 (数の文脈的定義) を行い、これによってそれまでの諸困難がどのように解決されるかを見通しを述べている。不十分で誤った議論を解きほぐすことは、フレーゲにとって、以後も出現しうであろう同様に欠陥のある理解の代表的パターンを示して、不毛な議論の出現を予め防ぐという目的を持っていた。それは、自らの最終的な解答が決定的なものであることを説得的に示すために必要な一段階であった。本章の目的は、『基礎』第I部を扱った前章⁽²⁾ に引き続き、『基礎』第II, III部の議論を追跡することによって、フレーゲ自身の本格的な理論展開 (それは第IV部で実行される) の布石となる数の文脈的定義がどう導かれたか、を明らかにすることである。

フレーゲは『基礎』第II部の冒頭 (§18) で、数とは何であるかの解答である、数の一般概念 (数の一般的定義) がなぜ必要であるか、を説明している。『基礎』第I部では、算術命題のうち、個々の数を扱う数式と、加法の結合律のような任意の数の間に成り立つ一般法則とが区別され、数式の証明においては個々の数の定義と数の一般法則が両方とも必要であることが示された (『基礎』§6)。そして、個々の数の定義は、数1と「1だけ増やす」という二つの要素によって実現できると見なされた (同)。しかし、数1と「1だけ増やす」ということと自体が明確にならないかぎり、これらの定義が十全であることの説明も明確にはならない。よって、数1というものの本性が一般的な数概念から説明さ

れる必要がある。さらに、数の一般法則も、その一般性のゆえに、個々の数の定義から説明されることは期待できない。それゆえ、数の一般法則も数の一般概念から導かれる必要がある。そのような訳で、個々の数ではなく、数の一般概念、数の一般的定義の探究が必要となるのである。

それでは、数とは何か、数とは一般にどのようなものとして把握されるべきであろうか？

1. 数は外的事物の特性か？

数とは何かという問いの答としてしばしば候補となるのは、数は外的事物の特性 (Eigenschaft der äußeren Dinge) である、というものである。この解答が正しくない、ということを手レーゲはさまざまな観点から論じていく (『基礎』§ 21 - § 25)。本節ではその議論の中心点を追う。

まず、数を外的事物の特性とする理解の由来は言語の現象に求められる、ということが指摘される。数は「二枚の葉」「三本の筆」のように、形容詞または付加語として現れ、その点で「堅い」(hart)「重い」(schwer)「赤い」(rot)等の外的事物の特性を表す語の働きと類比的である。このような数言語の言語上の振る舞いから、数そのものを外的事物の特性とする理解が導かれることは容易に分かる。しかし、例えば、外的事物の特性の一つとしての色が数と同列に置かれるのか？

数学が外的世界の対象の考察から始まる、というかぎりでは数学を経験科学と見なすM. カントール⁽³⁾はそうのように考えるかもしれない。彼にとって数は対象からの抽象によってのみ生じるからである。また、E. シュレーダー⁽⁴⁾は、事物の単位が数1によって模写されることにより、数が現実 (Wirklichkeit) を模範として、現実から取り出されたものと見なす。すなわち、現実から色や形を度外視して単位の出現の頻度 (Häufigkeit) のみに注目することにより、数が抽象される。こうして、シュレーダーは頻度を数と同一視し、数を色や形と同水準の事物の特性と見る (『基礎』§ 21)。

数を外的事物の特性とする見解に反対する論者として、手レーゲは、外的事物が厳密な単位を表現することはなく単位に区切るのはわれわれの理解である、とするパウマン⁽⁵⁾を引用する (『基礎』§ 22)。実際、事物を単位に区切るのは思考の中でのわれわれの理解に拠るように思われる。ホメーロスの『イリアス』は一篇の詩とも、二十四篇の歌曲とも、あるいはもっと多数の詩行とも見ることができる。一つの事物の色や形を変えるこ

とはできないが、それに異なる数を与えることはできる。また、千枚の緑の葉を持つ樹木があったとして、葉の一枚一枚に「緑」を当てがうことはできるが「1000」を当てがうことはできない。樹木全体の葉を「葉」という名の下に統合すると、その統合された葉の全体は緑であるが1000ではない (千枚の葉ではあるが1000ではない)。すると、数1000は何の特性であり、何に当てがわれるのか？一枚一枚の葉か、葉全体か？どちらでもない。外的世界の外的事物に数は本来与えられないのではないか？

さらに別の例を手レーゲは持ち出す。トランプのカードの束があったとしよう。「これの数を決めよ」と言って誰かにその束を手渡しても、彼は何と答えていいかわからない。求められている数がカードの全枚数なのか、五十二枚完全に揃った一組みのカードの数 (組の数) なのか、何かのゲームの役札の数なのか、彼にはわからない。何を事物の単位とするかは我々の恣意的理解に依存して決まる。それに対して色は、われわれの恣意とは独立に事物の表面に属するように見える。色は一定の光線を跳ね返し、他の光線を吸収する力であり、われわれの把握の仕方に左右されることはない。しかし、トランプのカードの束に数1や数52等が本来認められる、とは言えない。

こうして、われわれの恣意的取り決めや理解の仕方との関連ではじめて、事物に数が割り当てられる。トランプの束を「一組」と呼ぶのはわれわれの恣意的取り決めの結果であって、束自体はそれについて何も関知しない。そして、数を事物に割り当てるとき、単純に述語として割り当てることはできない (葉の全体は千枚とは言えるが、1000とは言えない)。こうして、数を外的事物の特性とすることは正しくないように見える。

物理的・感覚的な仕方では数を外的事物の特性と考える論者の代表格は、手レーゲが常にその見解に注目していたJ. S. ミルである。ミルは言う：

「すると、数の名で暗示されるものは何であるか？もちろん、その名でわれわれが呼ぶところの事物の集まりに属するある特性である。そして、その特性とは、その集まりが [全体へと] 作り上げられ、部分に分割されうる、その特徴的なやり方 (the characteristic manner) である。」⁽⁶⁾ (補足は筆者)

つまり、ミルにとって、数とは事物の集まりの特性であり、その集まり方が数に外ならない。しかし、the characteristic manner (その特徴的なやり方) というミルの語句中の定冠詞の使用は間違いである、と手レーゲは言う (『基礎』§ 23)。集まり方や分解の仕方は一通りに決まることなくさまざまであって、数を決定するのにその事は無関係である。百個の砂粒の山にも百本の麦藁の束にも、種々の異なる集まり方と分解の仕方が

あるが、その何れに対しても同一の数を与えられる。集まり方は数の決定とは無関係なのである。数えるために、あるいは数を与えるために集める必要はなく、集まり方を問題とするにも及ばない。「ドイツ国中の目の不自由な人々」という語の意味を確定するのに、目の不自由な人々をドイツ全土から一堂に集める必要がないのと同様、千個の小麦の粒は一山に集めてもバラバラに撒いても、千個であることに変わりはない。事物がどのように集まっているかは、数の決定にとって問題にならない。事物の集まり方を問題にするのは、数を外的事物の特性とする見解から導かれるのであり、その見解がそもそも正しくないのである。

数を色のような外的事物の特性と同列に置かない別の根拠は、数の適用範囲の広さである（『基礎』§24）。数は外的事物をはるかに超えて適用される。数は非物質的なもの、非感覚的なものにも適用される。自然現象を超えた多くのものが数えられる。もし数が外的事物から抽象された感覚的特性だとすると、それが非感覚的なもの（例えば、出来事、観念、概念）に適用されるとき、意味の変容を伴うだろう。例えば、

「痛みのある出来事」「青い観念」「塩辛い概念」「堅い判断」

といった語句は、感覚的特性が非感覚的なものに適用された例であるが、比喩的な言い方ではないとすると、このような言い方は理解し難い。少なくとも、「痛みのある」「青い」「塩辛い」「堅い」といった感覚的特性を表す語は、上の適用において意味の変容を余儀なくされる。もし数が同様の特性ならば、

「二つの出来事」「三つの観念」「四つの概念」「五つの判断」

といった数詞の使用においても、上の場合と同様にこれらの数詞は理解し難いものになるか、意味の変容を蒙る筈である。しかし、そのようなことは生じていない。従って、数を事物の感覚的特性と見なすことはできない、と結論しなければならない。

こうして、数を外的事物の特性と見なすことはきわめて難しいことが示された、とフレーゲは考える。

2. 数は主観的なものか？

前節では数を事物の特性と考えることは難しいことが示された。二個のリングと三個のリング、二頭の馬と三頭の馬はそれぞれ異なる視覚的・触覚的現象を作り出す物理的なものであるが、そのことから2と3が同様に物理的なものであると結論することはできない。

眼に見え触って感じられる同一の現象を生む同じ事物が、一對の長靴とも二個の長靴とも見なされる。ここに、物理的には何も対応するものの無い数の特徴がある。だが、そうすると数は、われわれの恣意的な理解の中にのみ存在するのか？数とはわれわれの主観に依存するものなのか？確かに、パークリーは言う：

「数は、実際に事物そのもののの中に存在する確固たるものでは全くない。……数は完全に精神の創造物である。精神が観念を変化させつつ組み合わせると、単位が変わる。そして単位がそのように変化するに従って、その単位の集まりに外ならない数もまた変化する。窓を一と呼ぶならば、多くの窓を持つ家も一と呼べる。多くの家々が一つの町を作り上げる。」⁽⁷⁾

パークリーの主張通り、数がわれわれの精神の創造物であり、主観的なものであるならば、数の説明においてわれわれの心理過程の記述が重要となるが、そのようなものは数の概念規定に代わることはできない、とフレーゲは言う（『基礎』§26）。フレーゲにとって数は客観的なものであり、その客観性は、例えば北海の存在の客観性と変わるところはない。地理的・地質学的な存在としての北海がそうでないのと同様に、数も心理学の対象でも、心理過程の結果でもない。なるほど、地球の水面のある一部分を他の部分と区別して「北海」という名で呼ぶことには恣意的選択の余地があるが、そのことは、「北海」の名で呼ばれ確保された海域が厳として客観的に存在することに影響しない。数も同様に客観的である。

フレーゲにとって客観性は、手で握み得るとか空間的であるという意味での現実性（Wirklichkeit）を必ずしも含意しない。地軸や太陽系の重心は、地球が現実的である（wirklich）のと同様の意味では現実的ではないが客観的である、とフレーゲは言う（『基礎』§26）。地球の赤道も恣意的に創作された線ではなく、客観的なものである。地軸や太陽系の重心や赤道は思考によって生み出されたもの、精神過程の産物というよりは、（感覚によってではなく）思考によってのみ把握され知られるものである。しかし、それらは主観的なものではなく客観的なものである。

数の客観性を説明するために、フレーゲはさらに「客観的」ということを「直観」との対比によって論じる。フレーゲは、空間が現象界に属し、直観の形式としてわれわれの認識の側にある、というカントの説を、議論の出発点として一先ず承認する。その場合、現象としての空間は他の理性的存在者に対して、われわれとは全く別の姿で現れることが可能となる。一人の人間に空間がどのような現象として直観されるか、というその感性的直

観内容（線がどう曲がって見え、面がどう歪んで見えるか等）は他の人間には知ることができない。それを知るには、一人の人間の空間的直観を別の人間に移し替えねばならないが、それは不可能だからである。直観の形式としての空間にはある客観的なものが含まれる。それは数学的にはユークリッド幾何学によって記述される空間の構造である。そのような客観性は概念により捉えられ、判断され、言葉で表現されるものである。フレーゲにとって純粋な直観は伝えられることはできない。直観によらず概念（または言葉）により空間の構造が伝えられるもっと明瞭な場合を、フレーゲは射影幾何学（projectivische Geometrie）を例に取って説明する。思考実験として、射影的特性と射影的關係しか直観できない理性的存在者の存在を仮定する。彼らは、「点」や「平面」に対してわれわれが有するユークリッド的直観は持たず、三点が直線上にあるとか、四点が平面上にあるという関係しか直観しない。しかも、一方の存在者に点として直観されるものは、他の存在者には平面として直観され、その逆も成り立つ、とする。そして、一方の存在者にとって点と点を結ぶ線であるものが、他方の存在者にとっては平面と平面の切断線であるように、常に空間構造が双対的に（dualistisch）対応している、とする。このような場合、彼らは直観の違いに気づかないにも関わらず、十分に意思の疎通が可能である。なぜなら、射影幾何学では双対の原理により、双対的な空間構造の一方が成り立てば必ず他方も成り立つからである。よって、幾何学的定理に関して、彼らは完全に一致する。「点」という言葉に一方はある直観を結びつけ、他方はまったく違った直観を結びつけたとしても、混乱は起こらない。彼らは直観は異なったままで言葉だけ翻訳する。しかし、「点」に関する幾何学的定理は彼らにとって客観的である。彼らにとって「点」が客観的であるのと同様、地軸や太陽系の重心はわれわれにとって客観的である。数もこのような意味で客観的である。

このような思考実験による客観性の説明の要点は、数が感覚や表象（観念）や直観といった主観的なものではなく、伝達可能な概念的なものである、ということの強調にある。フレーゲは言う：

「私〔フレーゲ〕は、客観性という言葉で、われわれの感覚、直観、表象からの、および以前の感覚の記憶による内的像の形成からの独立性、を意味する。しかし、それは理性からの独立性ではない。というのは、どういう事物が理性から独立であるのか、という問いに答えることは、判断せずに判断すること、湿らせずに毛皮を洗うこと、に外ならないからだ。」（『基礎』§26）

フレーゲにとって、数はこのような意味での客観性を持つものでなければならない。

3. 数詞“Ein”は対象の特性を表現するか？

前節までにおいて、数が外的事物の特性ではなく、主観的なものでもないこと、が論じられた。以後、『基礎』第Ⅲ部でフレーゲは、単位（Einheit）や数詞「一」（Ein）と関連した数の規定について検討する。というのは、数を単位の集まりである、とする見解は根強く支持されているからである。

さて、数を単位の集まりとする考えは、既にユークリッドに見られる。『原論』第7巻の冒頭でユークリッドは単位と数を次のように定義している⁽⁸⁾：

「単位とは存在するものの各々がそれによって1と呼ばれるものである。」

Μονάς ἔστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων
ἐν λείγεται.

「数とは単位から合成された多である。」

Ἀριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκεκείμενον
πληθός.

フレーゲは、このユークリッドの単位（μονάς）の定義に、数えられる対象と言う意味と、そういった対象の特性という意味の両方の混在を認め、それが Einheit（単位）というドイツ語の多義性に対応している、と言う（『基礎』§29）。そこには、事物を単位という一つのまとまりと捉え、それら単位の集まりを数と見なすという考え方がある。同時に、事物を単位と命名することによって、その事物に〈一つのもの〉という特性が与えられた、と考える。これは言語の現象の理解と対応した理解である。すなわち、「一つの都市」（Eine Stadt）を「賢い男」（weiser Mann）と類比的に捉え、「賢い」が「男」の特性を表すように、「一つの」が「都市」の特性を表すと見なされる。ここで、単位は〈一つ〉という特性がそこに認められる対象である。しかし、あらゆる事物が何らかの観点から見えて一つのまとまりを持っているゆえに、〈一つ〉という特性を持つと言いうるが、そのような対象の規定は役に立たない、とフレーゲは言う（『基礎』§29）。「賢くない」という可能性があつて初めて、「ソロンは賢い」という規定が意味を持つのであって、あらゆる事物を一つと見なすことは、対象の詳しい規定に寄与しない。

数詞“Ein”（一、一つの）を特性の表現と見なして、「一人の人間」（Ein Men-

sch)を「賢い人間」(weiser Mensch)と同様な仕方で理解するならば、“Ein”は述語としても用いられよう。よって、「ソロンは賢かった」(Solon war weise)と同様、「ソロンは一であった」(Solon war Ein)または「ソロンは一人であった」(Solon war Einer)とすることができる、と考えねばならない。しかし、最後の表現は、仮に文法的に正しいとしても、例えば「ソロンは一人の賢い人であった」(Solon war ein Weiser)のように文脈から補完されなければ、それ自体としては理解し難い、とフレーゲは言う。“Ein”(一、一つの)をそれだけで述語と見なすことが難しいのは、複数形の場合に明らかとなる。一方で、「ソロンは賢かった」と「タレスは賢かった」は

「ソロンとタレスは賢かった」

と一つの文に纏めることができるのに対して、

「ソロンとタレスは一であった」(Solon und Thales war Ein)
とは言えない。もし「賢い」と同様に、「一つ」がソロンとタレスの特性を表現しているのであれば、この不可能性は理解し難い。ある言語現象は、数詞“Ein”が事物の特性を表すことを支持するが、そうではない言語現象も存在するのである。

事物を一まとまりのものと見なすところに、単位や数詞「一」の起源があることは確実であるが、「一まとまり」と見なすということはわれわれの恣意的理解に依存するのか？どのような観点であれ「一まとまり」と見なすことが可能でさえあれば、それによって単位や一が成り立つのか？それとも、そこに何か客観的な基準や特徴が見出されるのか？パウマン⁽⁹⁾は概念〈一〉の特徴として分割不可能性(Ungetheiltheit)と分離限定性(Abgegrenztheit)を考えているようである。しかし、そのような特徴は事物の特性であり、動物でさえ見分けることができる、とフレーゲは言う(『基礎』§31)。犬は他の犬や自分の主人を見分け、身を守るべき敵が多数の犬か一匹の犬かを区別するが、犬はそれらの区別を外的・物理的な特徴を手掛かりとして得た分割不可能性と分離限定性に基づいてなすであろう。しかし、例えば、より大きな犬から咬まれる場合と、一匹の猫を追いかける場合において、それらに共通する〈一〉という意識を犬が持てるか否かが問題である。それは難しい、とフレーゲは見なす。いずれにせよ、分割不可能性や分離限定性は事物の特性でしかなく、〈一〉という概念の本質的特徴ではない、とフレーゲは考える(『基礎』§31)。

なるほど、分割不可能性・分離限定性と概念〈一〉および単位との結びつきは、言語においても支持されるように見える。数詞「一」(Ein)から「統一した」(einig)が言語

的に導かれるのは容易に分かる。そして、後者は、内部での相違が外部との相違より重要でなくなり、思考において外に対して分離限定された状態を表すであろう。しかし、国の政治的単一[統一](politische Einheit des Landes)や芸術作品の単一性[統一性](Einheit des Kunstwerks)について語られるとき、Einheit(単位・単一性・統一性)は「統一された」(einig)や「統一的」(einheitlich)と結びつく一方で、〈一〉との結びつきは希薄となるように見える。また、「地球は月を一つ持つ」(Die Erde hat Ein Mond)と言うとき、月は分離限定され、分割不可能なものとして説明されているというより、金星や木星や火星に生じている状況(月がない、多数の月、一つの月等)と比較されている、とフレーゲは言う。こうして、概念〈一〉と分割不可能性・分離限定性との結びつきは絶対的なものではない、と考えられる。

分割不可能性を原理的な分解不可能性にまで高め、分解できないものを個体(ein Einzelnes)と呼び、数えられるべき諸個体を諸々の「一」(Einse)と見なすという行き方がある(『基礎』§33)。この場合、個体としての「一」は単位(Einheit)の意味で使われる。その単位が恣意的理解から独立した「一つのまとまり」に根ざしたものであることにより、この試みは単位の客観性を確保しようとする試みと理解される。しかし、事物の特性の中に原理的な分割不可能性があることがどのように保証されるのか疑問である。この場合も、「原理的に分割不可能と考えられる」という形で、われわれの恣意的理解に退却せざるを得ないのではないか？こうして、事物の特性としての分割不可能性を概念〈一〉の本質的特徴とすることは難しい、とフレーゲは診断する。

4. 単位は互いに同一か、異なるか？

さて前節において、数詞「一」(Ein)を対象の特性(Eigenschaft)の表現と見なすことはできそうにない、ということが明らかとなった。「一」を対象の特性の表現とする考えは、一まとまりの事物を単位と捉えることによって、その事物に〈一つ〉という特性を与える、という理解に基づいていた。そこで、再び、単位について、事物は何らかの仕方で単位と見なせるのか、なぜ事物をわざわざ単位と呼ぶ必要があるのか、と改めて問い直されよう。

シュレーダー⁽¹⁰⁾は、事物が数えられるために「事物」(Ding)や「対象」(Gegenstand)と呼ばれるだけでは不十分で「単位」と呼ばれねばならないのは、「数え得る対象

が同一でなければならない」からだ、と主張する。しかし、なぜ数え得る対象が同じものでなければならないのか？ホップズ⁽¹¹⁾は、「数学において、絶対的な意味での数は、その構成要素として同一の単位を前提している」からだと答える。ヒューム⁽¹²⁾も「数と量の構成要素をまったく同種のもの」と見なし、トマエ⁽¹³⁾も「単位は互いに同一だ」と言う。

しかし、単位が何から何まで同一であればそれらをどのようにして区別するのか？単位が多数あると言い得るには、単位の間は何らかの差異がなければならないだろう。多数性は事物の相違から発生するように思えるからだ。ジェヴォンズは言う⁽¹⁴⁾：

「しばしば、諸単位は、それらが互いに完全に類似しているかぎりで単位である、と言われる。しかし、……それらは少なくとも一つの点で異なっていないなくてはならない。さもなければ、多数性の概念が単位に適用できない。もし三つの硬貨が同じ時間に同じ空間を占めるほど似ているならば、それらは三枚の硬貨ではなく一枚の硬貨となろう。」

しかし、単位が異なるものである、という見解も困難を孕む。なるほど、単位は区別されなければ数えられない。1 + 1 が 1 ではなく 2 であるためには、最初の「1」と二番目の「1」が区別されねばならない。ジェボンズは、「5 という記号を書くとき、本来は

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

を意図しており、これの単位「1」が互いに異なることは明らかだから、その差異を明示するため

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

と書いてもよかった」と言う⁽¹⁵⁾。しかし、もしそのように単位が互いに異なることが本質的に重要なことならば、なぜ、上の表記法に変えて、もっと明確に

$$a + b + c + d + e$$

と書かないのか、とフレーゲは疑問を呈する（『基礎』§36）。一方で、単位がまったく同一であれば、数えられない、または多数性の説明不可という困難が生じるが、他方で、単位がある程度異なりある程度類似している、という説明も役には立たない。単位という概念に伴う「同一」と「差異」、これらをいかに調停すべきかが問題である。

そこで、混乱の根を断つために、単位と数 1 を区別する必要がある（『基礎』§38）。数 1 (die Zahl Eins) は、定冠詞を伴うその言語形式に示されるように、唯一の対象である。さまざまな 1 があるのではなく唯一の 1 があるだけである。しかし、単位はどうか

？「単位」は 1 (Eins)⁽¹⁶⁾ と異なり、複数を許す概念語と理解される。困難が生じるのは、単位の集まりとして数を捉えようとする場面においてである。多数の単位を考えると、差異を表現しようとして、例えばジェヴォンズ流に単位を表す「1」にプライムを付すとする。そして、3 - 2 を

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$$

と表現する。しかし、単位が基本的に互いに区別されるべきであれば、

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')$$

と書くべきだ、とも言えよう。しかし、後者が何を意味するかは理解し難い。いずれにせよ、二つの 2、すなわち

$$1'' + 1'''$$

と

$$1'''' + 1'''''$$

が現れているように見える。これは、単位の差異を事物の差異と同様に扱い、数を事物の積み重なりのようなものと捉えてはならない、ということを教える。異なる対象を、異なる特徴を残したままで統合しようとしても数は得られない。対象の集積はそのまま数とはならないからである。しかし、完全に同一なるものを統合しても常に同一なままであり、多数性へは至らない。このディレンマをどう解くべきか？何がこのディレンマをもたらしているのか？

フレーゲの考えでは、単位と（唯一で同一なものとしての）数 1 が知らず知らずのうちに同一視されてしまうことによって、このディレンマはもたらされ、そして「単位」という語の多義性によりそのことが覆い隠されている（『基礎』§39）。数え得る対象を単位と呼ぶ場合、対象の差異性は引き継がれる。しかし、概念語としての「単位」は、ある「一まとまり」という観念と結びつき、「統合」「連合」等の意味がプラス記号と結びついて、いつの間にか固有名「1」へと変化する。こうして、単位 (Einheit) が（唯一にして同一の）1 (Eins) と同一視されることで、単位にまつわる矛盾が生じる。しかし、これは真の矛盾ではなく、見掛けの矛盾である。上のディレンマは解かれる筈である。そのための第一歩として、概念語としての「単位」と固有名としての「1」が区別されねばならない。

5. 困難を克服しようとするフレーゲ以前の試みの不十分さ

数の一般概念をどう捉えるか、単位の持つ同一性と差異性をどう調停するかがこれまでの課題であった。『基礎』§45以下のフレーゲ自身の解決策を論じる前に、本節では、これらの困難を克服しようとする、フレーゲ以前のこれまでの試みを二点に絞って検討し、それらが未だ不十分であることを確認する。

まず、「単位」という語のもつ多義性に結びついた、単位の持つ同一性と差異性をどう調停するかの問題である。単位に区切るときの手段として、数えられる事物の時間・空間上の特性に訴えるということが、例えばホップズやトマエにより提案されている。すなわち、「数えられるものの空間における異なる位置と時間におけるそれらの互いに異なる継起が単位を区別する特徴(Merkmal)となる」⁽¹⁷⁾というのである。しかし、これに対しては、数えられるものは空間的・時間的なものに限られるのか、という疑問が生じる。フレーゲは、すでにライブニッツが非物質的事物に数は適用できないというスコラ哲学者の見解に反駁している⁽¹⁸⁾ことを指摘し、多数性の源である事物の差異は時間・空間の相違ではなく事物の持つ性質にあることを説くSt.ジェヴォンズ⁽¹⁹⁾を引用する(『基礎』§40)。フレーゲによれば、時間は数概念とは直接の関係はない。なるほど、われわれが数えるという操作を実行するためには時間と空間が必要である。そこで、非時間的・非空間的なものを時間点と空間点で代表させることは、数えることの実行にとって有効な方法である。しかし、そのとき、数概念が非時間的・非空間的なものに適用され得る、ということが前提されている。問題は、そのような適用がなぜ可能かが説明できるような数と単位の定義を与えることである。時間的・空間的な特性によって単位を区切るというやり方では、そのような定義は与えられないし、単位の持つ同一性と差異性の調停という課題も残される。

単位に関する以上のような試みは、事物の空間的・時間的な識別特徴から数を抽象するという議論と結びつく。しかし、このような数の抽象理論は、数えられるものの数の決定と数そのものの確定とを混同している、とフレーゲは診断する(『基礎』§44)。具体的な時間・空間内の事物、例えば月から数1(地球の衛星である月は唯一のものだから)へは、どのようにすれば抽象によって到達するのか? 以下のような抽象の系列を考えよう

： 月→地球の衛星→惑星の衛星→固有の光を持たない天体→天体→物体→対象

この系列中には数1は出現しそうにはない。数1は月という対象が帰属する概念ではないからだ。(「月は一である」とは言えない。)さらに、数ゼロの場合、抽象の出発点である対象が存在していないから抽象そのものが成り立たなくなる。抽象理論では、「いくつ?」という問いに答えるものとして数を捉えている。「この惑星はいくつの衛星を持っているか?」という問いに対して、2, 3という答えが抽象によって与えられるとしても、数ゼロが与えられることは難しい。すると、数ゼロが数から除外されねばならない。しかし、そのような帰結を持つ数の説明は、数の説明としては失格であると見なければならぬだろう。

6. 困難の解決へ向けて

さて、これまでの議論をフレーゲに従って⁽²⁰⁾まとめてみよう。

- (1) 数は、色・重さ・堅さ等とは異なり、事物から抽象された事物の特性(Eigenschaft)ではない。(本章第1節)
- (2) 数は事物の積み重なりのような物理的なものではなく、表象や観念のような主観的なものでもない。(本章第2節)
- (3) 数詞“Ein”(「一」)は対象の特性を表すことはなく、分割不可能性、分離限定性および分解不可能性は「一」で表現されるものの有用な特徴にはならない。(本章第3節)
- (4) 数えられる事物が単位であるならば、単位が完全に互いに同一であるということは誤りであるが、ある観点から単位は異なるということも説明としての価値はない。こうして、単位は同一性と差異性という矛盾する特徴を持たざるを得ない。この困難を解くために、単位(Einheit)と数1(Eins)とを区別すべきである。(本章第4節)

フレーゲは、『基礎』§46で、これらの困難の解決へ導く方法として、数詞の本来の用法が現れる判断という関連(文脈)で数を考察すべきである、といういわゆる「文脈原理」を採用する。そして、同一の現象が、「これは一群の木である」とも「これは五本の木である」とも表現でき、また「ここに四つの会社がある」とも「ここに五百人の人がいる」とも表現できることを例として挙げ、この言い方の変化が概念の置き換えに基づくことを指摘することにより、数に関する言明には概念についての陳述が含まれる、というこ

とを主張する。すなわち、

《数は概念に対して与えられる》

言い換えると、

《数を担うのは概念である》

ということ、フレーゲは主張する。これは、「数とは何か」という数の一般的定義を直接に与えるものではないが、数が何でないかを説明し、数が何であらねばならないかを示す方向へ大きく前進する提案である。以下、このフレーゲの提案が、上の(1)～(4)の四項目をどのように説明し、そこに含まれる困難をどう解決するかを観ることにする。

まず、数に関する言明が概念についての主張である、ということを確認しよう（『基礎』§46）。例えば、

「金星は零個の月（衛星）を持つ」

という言明に対応して、それについて何事かが主張される月や月の集まりは存在しない。この言明で主張されているのは、「金星の月」という概念に一つの特性（Eigenschaft）、すなわち〈何物もその下に包含しない〉（nichts unter sich zu befaßen）という特性が与えられる、ということである。同様に、言明：

「皇帝の馬車は四頭の馬によって牽かれている」

において、概念「皇帝の馬車を牽く馬」に数4が与えられている。これによって、上の第一の項目、(1) 数は事物の特性ではない、ということが説明し直される。すなわち、数が概念に対して与えられるということは、概念にある特性が与えられる、または概念が高次の概念（第二階の概念：『基礎』§53）に帰属する、ということに対応する。

さらに、上の第二の項目である、(2) 数が物理的なものでも主観的なものでもないということも、数が概念に与えられるものである、ということにより説明できる。数概念、一般に概念を表象ないし観念のような主観的なものと考えすることはできない。われわれが〈物体〉という概念を〈重さを持つもの〉という概念に従属させるとき、また、概念〈鯨〉を概念〈哺乳類〉に従属させるとき、主観的なものが介入する余地は何も無い。なるほど、後者の事態を言語によって表現した文：

「すべての鯨は哺乳類である」

(※)

は、一見すると、概念についてではなく動物について何事かが主張されている文のように見えるかもしれない。しかし、そうだとすると、どの動物についての主張なのか判然としない。目前にある動物がいるとして、それについて哺乳類であると主張されている訳では

ない。それどころか、この文(※)は目前の動物について、それが鯨であるとも鯨でないとも主張しないのである。対象について何事かを語るには、それを名づけたり指示したりする必要がある。この文(※)が個別的な動物の観察を通してしかその真偽を判定できないとしても、この文(※)の主張内容は、個別的な動物を主題とするものではない。そして、概念についての陳述は、その概念が客観的なものであれば、客観的なもの・事実的なものを含むのである。

数の真の担い手が概念であるとすれば、数の担い手を事物または対象としたことから生じた間違った印象、例えば同一の事物に異なる数が認められる（属する）、といった印象は払拭される（『基礎』§48）。同一のトランプの束が与えられたとき、それらを一組と見なすことにより数1がそれに認められ、それらを一枚一枚のカードの集まりと見ることにより数52が認められる。（そこから、数が主観的であるという見解も導かれる。）この場合、実際には、事物そのものにではなく、事物が帰属する別々の概念、つまり概念「（カードの）組」と概念「（一枚一枚の）カード」という相異なる概念に、別々の数が与えられたのである。

また、数が事物からの抽象であるとする数の抽象理論（本章第5節）が唱えられる理由も説明できる（『基礎』§48）。事物の抽象によって得られるのは概念である。そしてわれわれは概念において数を見出す。こうして、抽象は数についての判断形成に先立たねばならない。ところが、そのようにして得られた概念語と固有名がしばしば混同される。概念について、何らかの対象がそれに帰属するかどうかを問うことは有意義であるのに対して、固有名が表すものにそれを問うことは意味がない。概念語を個々の事物の名とすることは不適切である。しかし、概念語を固有名と混同することにより、概念に見出される数が対象（固有名が表現するもの）に見出されるかのような印象が作られる。つまり、数が事物の特性であるような印象が作られるのである（『基礎』§51）。

最後に、本節冒頭でまとめられた項目(3)と(4)、すなわち数詞「一」は対象の特性を表さないこと、および単位の持つ同一性と差異性の調停の問題に対してどのような光が当てられるか、を確認しよう。

フレーゲは、数についての言明の主語を単位と呼ぶことを提案する（『基礎』§54）。フレーゲによれば、数の本来的な担い手は概念であった。そこで、その概念を単位と呼ぶのである。それにより、単位や数詞“Ein”（「一」）にまつわる困難が解消する。まず、数を担うに相応しい概念は、その下に帰属する対象を確然と限界づけ、いかなる恣意的分

割も許さないような、そういう概念でなければならない。そのような概念だけが有限数に関連した単位である。例えば、概念「語 Zahl の文字」は、“a”を“Z”から区別し限界づけ、“h”を“a”から限界づけ、等々により、“Z”“a”“h”“l”という四つの文字のみをそれに帰属させる。概念「語 Zahl の音節」は、分割不可能なものとして“Zahl”だけを自らに帰属させる。しかし、「赤いもの」はそのような帰属すべき対象を鋭利に限界づける概念ではない。このような、自らに帰属させるべき対象を鋭利に限界づけ得る概念だけを単位と呼ぶとすると、単位との関連で数詞“Ein”（「一」）に要求されていた分割不可能性と分離限定性が新しい意味を持って単位と結びつく。

また、単位をこのように理解することにより、単位が持つ同一性と差異性の調停の問題も解決される。つまり、「単位」という語は二重の意味で用いられていたのである。数の担い手たる概念が単位である、という上で述べられた理解において、単位は同一なものである。例えば、文：

「木星は四つの衛星を持つ」

において主張されているのは、木星の衛星の数が4であること、すなわち概念「木星の衛星」に数4が与えられるということである。よって、単位についての上のような理解に従うと、ここでの単位は「木星の衛星」ということになる。そのとき衛星Ⅰ、衛星Ⅱ、衛星Ⅲ、衛星Ⅳはすべて同一の概念「木星の衛星」に帰属する。ここで同一の概念「木星の衛星」が単位となることにより、単位の「同一性」が確保される。しかし、単位の「差異性」が強調されるとき、単位そのものではなく、単位である概念に帰属する事物の「差異性」が考えられていたのである。つまり、衛星Ⅰの衛星Ⅱ、Ⅲ、Ⅳとの差異、衛星Ⅱの衛星Ⅰ、Ⅲ、Ⅳとの差異、等々が考えられていたのである。単位の持つ同一性と差異性の調停の問題はこれで解決された。単位が同時に同一性と差異性を持つという矛盾は実は見掛けの矛盾であった、ということがこれによって説明できたのである。

＊ ＊ ＊

すでに述べたように、数についての言明は概念に関する陳述を含む（または、数は概念に対して与えられる）という提案は、フレーゲにとって「数とは何か？」の最終的な解答ではない。数とは何であるかが最終的に答えられるには、個々の数が対象であると見なされるべき場面を考慮に入れた数の定義が提案されねばならない。どのような理由でそういった場面が考慮されねばならないか、またそれにはどのような概念の洗練が必要であるか、等の細かい議論は『基礎』の第Ⅳ部で実行される（本論文第6章）。われわれが検討した

『基礎』第Ⅱ、Ⅲ部の議論はそれに向かうための準備であった。しかし、練り上げられた最終的な解答ではないとはいえ、文脈的に数を概念の特性、すなわち第二階の概念と捉えることは、先行の諸家が与えた不十分な見解に伴う困難を統一的に解くために相当に貢献できた。よって、このような数の把握について論じることは、数の定義を求めるフレーゲの探究の過程において、通過せねばならない必要な一段階であったのである。

- (1) 『算術の基礎』のテキストとしては, Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel, Felix Meiner (1986), およびオースティンによる独英対訳本, G. Frege, The Foundations of Arithmetic, Translated by J. L. Austin, 2nd. rev. ed. Northwestern U. P. (1953) を用いる。
- (2) 本論文第Ⅲ部第4章「算術命題の本性に関する諸家の見解のフレーゲによる批判的考察——『算術の基礎』第Ⅰ部研究——」参照。
- (3) Moritz Cantor, Grundzüge einer Elementararithmetik als Leitfaden zu academischen Vorträgen, Bangel und Schmitt (1855), S.2f.
- (4) Ernst Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende, Teubner (1873), S.6, 10 u. 11.
- (5) Johann Julius Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluß dargestellt und beurtheilt, I. Band, Reimer (1868), II. Band, ibid (1869) Bd. II, S.669.
- (6) John Stuart Mill, A System of Logic Ratiocinative and Inductive, in J. M. Robson (ed.), Collected Works of John Stuart Mill, vol. VII, University of Toronto Press (1974), Book III, ch. xxiv, §5, p. 611.
- (7) George Berkley, A New Theory of Vision, Nelson (1948), §109.
- (8) EVCLIDIS ELEMENTA, vol. II, hrsg. von I. L. Heiberg, Teubner (1970), p. 103.
- (9) Baumann, op.cit. Bd. II, S. 669.
- (10) E. Schröder, op.cit. S. 5.
- (11) Thomas Hobbes, Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae, in Opera philosophica quae latine scripsit omnia, ed. by G. Molesworth, vol. IV, Scientia (1961), p. 18.

- (12) David Hume, An Enquiry concerning Human Understanding, Sect. XII, Pt. III, §131.
- (13) Johannes K. Thomae, Elementare Theorie der Analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, Nebert (1880), S. 1.
- (14) William Stanley Jevons, The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method, Macmillan (1874), p. 157.
- (15) W. St. Jevons, op.cit. p. 162.
- (16) フレーゲのドイツ語の“Eins”を「1」または「数1」で翻訳し, “Ein”を「一」と表して区別する。フレーゲは, <数>としての「1」を強調するときに“Eins”を用い, 特性を連想させる述語・付加語としては“Ein”を用いて, 両者を区別しているように見える。なお「数」に関して, フレーゲは, 通常「基数」(cardinal number)と翻訳される“Anzahl”, および「数」と翻訳される“Zahl”の両方を用いている。いままでの議論では, この両者の区別が重要な鍵を握る文脈はなかったし, 以後もないと考えられるので, 本論では「数」で一貫する。オースティンの前掲書2°頁のオースティンによる脚註を参照。
- (17) J. Thomae, op.cit. S. 1.
- (18) Gottfried Wilhelm Leibniz, Dissertatio de Arte Combinatoria, in Die Philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, 4, hrsg. von C. J. Gerhardt, Olms (1978), S. 35.
- (19) W. St. Jevons, op.cit. p. 157.
- (20) フレーゲは『基礎』§45で本論よりもっと細かく分けているが, あまりに煩瑣になりすぎているきらいがあるので, 筆者は, 基本的に重要であると判断されるかぎり本文のように四項目に纏めることにする。

第6章 数の理論

—『算術の基礎』第IV部を中心に—

はじめに

われわれはあらゆる事物を数えてその大きさを比較する。個々の人間の個数を数えて国力のバロメーターとし（国勢調査）、計算機の計算速度を測って能力を査定する。しかし、そもそも数とは何か？数に関わる概念はその他の概念群の中でどのような位置を占めるのか？本章の目的は、『概念記法』における関連する理論にもう一度触れた後、『算術の基礎』におけるフレーゲの数の理論を彼の論理主義との関連で跡づけ、さらに数学の哲学という一般的文脈から彼の数の理論の意義を検討することである。フレーゲは「一般系列理論からのいくつかの話題」と題された『概念記法』第III部で、算術を論理によって導くという彼の論理主義の実行に着手した。そこで彼は、算術の展開に必要な一般系列に関する4つの概念を定義し、それに関するいくつかの定理を導いている。『概念記法』第III部は自然数系列の理論を展開するための準備であり、そもそも数とは何か、自然数（有限数）とは何か、個々の自然数はどのようにして定義されるのか、といった問題には正面からは答えていない。数学者がこのような問いに無関心であることは（数学という）学問の恥だ、とフレーゲは言う⁽¹⁾。フレーゲ自身の解答は『算術の基礎』の第IV部で与えられる。彼の戦略の基本方針はそれらに対して論理的な定義を与えることである。無論、矛盾を含むという点でそのままの形（すなわち『算術の基本法則』の全体系を含む形）での彼の「論理主義」は容認できないものであるとしても、成功した部分に関してのフレーゲの分析は、今日の観点から見ても十分注目に値するものである。

以下では、まず『概念記法』での一般系列理論を簡単に復習し、数学的帰納法が系列理論の定理として導かれることを確認する（第1節）。次に『算術の基礎』での数の間の同一性と数の定義がどのような議論の脈絡でなされるかを検討し（第2節）、個々の自然数の定義を追跡する（第3節）。最後に、対象としての数の構成が彼の論理主義とどう関わるかに焦点を当てる（第4節）。

1. 準備：『概念記法』における一般系列理論

フレーゲは「数とは何か」という問いに正面から答える前に、言わばその準備として、『概念記法』第III部で一般的な系列に関する四つの概念を論理的な概念によって定義している。彼が念頭においているのは自然数の系列であり、自然数において成り立つ法則としての数学的帰納法であるが、『概念記法』ではより一般的な見地からそれを取り扱っている。以下、フレーゲが与えている四つの概念の定義を順に追跡する。

1. 1 まず第一に、「特性Fがf系列において遺伝する」ということを定義する。任意の二項関係fを考える。例えば、「親と子」の関係（親の子に対する関係）、あるいは自然数nのその後者S nに対する関係のようなものが予想される。この関係を満たす対象の系列をf系列と呼ぶ。このとき、

特性Fはf系列において遺伝する $\iff$ def. 特性Fを持つ対象とf関係にあるような
任意の対象が、Fを持つ …… [1]

$$\text{Herf}(F) \iff \text{def. } \forall x \forall y [F x \wedge x f y \supset F y]$$

と定義される（『概念記法』[以下BSと略記] §24定義69）。この意味は、対象xが対象yに対してf関係を満たすことを $x \circ \rightarrow \circ y$ と図式化するとき、xがF、すなわち $\cdots x \bullet \rightarrow \circ y \cdots$ ならば、yもF $\cdots x \bullet \rightarrow \bullet y \cdots$ となることである。要するに矢 $\rightarrow$ の出発点が特性Fを持てば矢の到達点はすべてFを持つということである。ここで重要なことは、f系列を構成する対象の構造には何の制限もなく⁽²⁾、またこの定義において数学に固有な概念は何も使われていないということである。

1. 2 第二に、上の定義を使って、「bはf系列においてaに後続する： $a f^* b$ 」（モデルとしては、bはある家系でaの子孫である、言い換えるとaはある家系でbの祖先である）という概念を定義する。それは以下のようなになる（BS §26定義76）。

bはf系列においてaに後続する $\iff$ def. 特性Fが、f系列で遺伝し、かつaとf
関係にあるすべての対象が持つような任意の特
性ならば、そのときbはFを持つ。 …… [2]

$$a f^* b \iff \text{def. } \forall F [\text{Herf}(F) \wedge \forall x (a f x \supset F x) \supset F b]$$

この定義の意図は、「f関係の系列にあってbがaから一代以上下る」ということを論理的に定義することである。このaとbとの関係は「aはbの固有祖先である」と呼ばれるが、それは次のようなモデルを考えるからである。『創世記』5章のアダムの後継者の系

図によれば、

$\frac{\text{アダム} \rightarrow \text{セト} \rightarrow \text{エノシュ} \rightarrow \text{ケナン} \rightarrow \text{マハラルエル} \rightarrow \dots}{a} \rightarrow \frac{\text{ノア}}{b} \rightarrow \dots$

と続く。このとき、セト以下のアダムの子孫は「この系列でアダムに後続する（この家系でアダムの子孫である）」が、それは、彼らがアダムのすべての子供（後継者でないカインやアベルも含めて）が持つ、この家系で遺伝する任意の特性（例えば「人間の父を持つ」といった特性）を伝えられているからだ、と考えられる。しかし、この場合、祖先a自身は遺伝する特性Fを持つ必要はない（アダムは人間の祖先であるが「人間の父を持つ」という彼のすべての子孫が持つ特性を彼自身は持っていない）。そこで、aから始まる系列にbが属する（言い換えると、人間の父によってではなく神によって創られた特別な人間であるとはいえアダムaは人間には違いなく、その人祖アダムに始まる人間の系列にノアbが属する）ことを言うには、別の定義が必要である。

1. 3 そこで、第三の定義として、「bはaに始まるf系列に属する： $a f^* = b$ 」をこう定義する（BS §29定義99）。

bはaに始まるf系列に属する $\iff$ def. bはf系列でaに後続するか

または $b = a$ [3]

$a f^* = b \iff$ def. $a f^* b \vee a = b$

モデルとして、アダムに始まる（分岐する）「人間の系列」を考えればよい。「人間の父を持つ」という遺伝する特性をアダム自身が持たなくても、bがアダムaに始まる人間の系列の一員であると言う必要があれば、「bは（aが持たないかもしれない）遺伝する任意の特性Fを持つか、またはbはaと同一人物である」と言えよ。ところで、人間は多くの子供を持ち得る。それが人間の系列（家系）が分岐する理由である。しかし、自然数の系列では分岐は起こらない。丁度、アブラハムがイシマエルを退けてイサクを後継者として選び、イサクがエサウではなくヤコブを後継者としたように、0の後者(successor)はS0以外になく、S0の後者はSS0以外になく、…等々である。

1. 4 そこで、f系列上の任意の対象xがただ一つの対象に対してのみ関係fである、すなわち関係fが多対一であること（ $FN(f) : \text{function}$ ）を確保するために、フレーゲは次の第四の定義を与える（BS §31定義115）。

関係fは多対一である $\iff$ def. 任意の対象x, y, zにおいて、もしxがyとzに対してf関係にあれば、yとzは同一である [4]

$FN(f) \iff$ def. $\forall x \forall y \forall z (x f y \wedge y f z \supset y = z)$

1. 5 以上の『概念記法』第三部での四つの定義により与えられる概念は、いずれも算術を展開するのに必要なものであるが、これらがすべて「論理的に」定義されている（とフレーゲは考える）。例えば、通常、算術に特有な推論原理と考えられる数学的帰納法も、フレーゲの一般系列理論の定理の特殊例と見ることができる。実際、『概念記法』§27の定理81から数学的帰納法が以下のようにして導かれる。まず定理81は、

$[F x \wedge (F \text{が} f \text{系列で遺伝する}) \wedge (y \text{は} x \text{に後続する})] \supset F y$... [81]

である。ここで、f系列を構成するf関係を自然数の間の後者関係とする。すなわち、

$x f y \iff y = S x$(*)

定理81で、“x”に“0”を代入し、遺伝性の定義[1]と命題論理により、

$[F 0 \wedge \forall x \forall y (F x \wedge x f y \supset F y)] \supset (y \text{は} 0 \text{に後続する} \supset F y)$... (*)

いま、二つのことを仮定する：

$F 0$, および $\forall x (F x \supset F S x)$ (仮定)

ここで、 $F x \supset F S x$ は

$\forall y (F x \wedge y = S x \supset F y)$

と同値である。よって、第二の仮定は、 $\forall x \forall y (F x \wedge y = S x \supset F y)$ と同値になるから、従って(*)により、

$\forall x \forall y (F x \wedge x f y \supset F y)$

と同値になる。すると、いま(*)の先件部分を仮定していることになるから、後件：

$y \text{は} 0 \text{に後続する} \supset F y$ (#)

が導かれる。ところで、yを任意の自然数とすると、yは0であるかまたは0に後続する。y=0ならば仮定F0よりFy, y≠0のときは、yは0に後続するから(#)よりFyである。よって、0を含むすべての自然数がFである。こうして、

0はFである(F0),

および、

Fである任意の自然数の後者もFである($\forall x (F x \supset F S x)$)

という二つの仮定から、

すべての自然数はFである($\forall y F y$)

が導かれた。つまり、定理81から、その特殊例として（自然数上の）数学的帰納法が導かれた。

2. 数の同一性と定義

繰り返して言えば、前節での算術展開の準備（概念の定義と定理の導出）はすべて「論理的に」行われている、とフレーゲは考えた。しかし、数系列のようなものが存在するのか、そもそも数とは何か、そういった問題については『概念記法』では何も触れられていない。そこで次の課題は、数を定義し、個々の数を構成し、有限数（自然数）が無限に存在することを証明することである。この課題は『算術の基礎』で遂行される。

2. 1

『算術の基礎』（以下『基礎』と略記）§ 55で、先行する諸家の見解の批判的吟味から得た結論としてフレーゲは、「木星は四つの衛星を持つ」といった数に関する言明が、概念に関する言明であることを指摘する。そして、いかなる対象も帰属しない概念に数ゼロが属し、丁度一つの対象が帰属する概念に数1が属するという仕方で、数に関する言明を概念についての特性記述（概念の類別概念）として、数を第二階概念で置き換える方法を提示する⁽³⁾。しかし、直ちに彼は、この方法の限界を示唆する（『基礎』§ 56）。この置き換えの方法には、数が自立的対象であることが反映しておらず、数は何であるかという根本的な疑問に答えられない、とフレーゲは言う。極端な例として、数ユリウス・カエサルがある概念に属するかどうか、この有名なガリアの征服者がそもそも数であるのか否か（いわゆる「ユリウス・カエサル問題」）、を上の方法では決定できない、と彼は言う。彼が提案する方法は、まず数の同一性を確定する方法を探すことである。

2. 2

出発点は概念間の一対一対応を数の同一性の必要十分条件とみなすヒュームの原理、すなわち、

（概念Fに属する数）＝（概念Gに属する数） $\Leftrightarrow$ （FとGの間に一対一対応がある）

という原理である（『基礎』§ 63）⁽⁴⁾。フレーゲは幾何学からのアナロジーに訴えるという戦略を採用する。直線Lと直線Mが平行であることが、Lの方向とMの方向が同一であることの必要十分条件であり、三角形Aが三角形Bと相似であることが、Aの形とBの形が同一であることの必要十分条件であるが、それでは、概念Fに属する数と概念Gに属する数が同一であるための必要十分条件は何か？フレーゲはこれに対して、概念Fと概念Gの間に一対一の対応関係が存在すること、すなわち、

Fに帰属するすべての対象aがGに帰属するただ一つの対象bに対して関係fに

あり、逆にGに帰属するすべての対象bに対してFに帰属するただ一つの対象a

が関係fにあるような、そういう関係fが存在すること、

と答える。しかし、数の同一性の基準を提示するだけでは、「そもそも数とは何か」「ユリウス・カエサルは数か」という問いには答えられない、という反論⁽⁵⁾が予想される。そこでフレーゲは別の方法で数そのものの定義を試みる。

2. 3

彼のアプローチは、直線aの「方向」を「直線aと平行な直線」という概念の外延と見なす、という方法⁽⁶⁾を数に適用するものである。すなわち、概念Fと概念Gが一対一に対応することを

「FとGは同数である（gleichzahlig）」

と呼ぶとき、概念Fに属する数を

「概念Fと同数である」という概念の外延

と定義する（『基礎』§ 68）。例えば、数2は、「丁度二つの対象が帰属する概念と同数である」という（第二階）概念の外延であり、「5以上9以下の素数」「4と12の公約数で1より大きいもの」「水星と火星の間に位置する惑星」といった概念に属する数である。こうして、フレーゲの数（これを〈数〉と表す）はある二階の概念の外延として定義されるが、これが通常の数と同じものであることはどのようにして示されるのか？

2. 4

フレーゲは、通常の数を持つと考えられる特性を彼の〈数〉も持つことを示すことによって答える。すでに述べたように、フレーゲにとって、通常の数が現れる文脈は概念についての言明である。すなわち、5以上9以下の素数の個数が水星と火星の間に位置する惑星の個数と同数であるとき、

概念「5以上9以下の素数」に属する数

は

概念「水星と火星の間に位置する惑星」に属する数

と同一である。フレーゲの分析によれば、

5以上9以下の素数の個数が水星と火星の間に位置する惑星の個数と同数であるのは、

「5以上9以下の素数」という概念が「水星と火星の間に位置する惑星」という概念と同数である（つまり一対一の対応関係にある）

とき、かつそのときにかぎる。よって、一般に、

概念Fと概念Gが同数であれば、概念Fに属する数=概念Gに属する数

となる。これをいま、

$$F \approx G \Rightarrow \text{Num}(F) = \text{Num}(G) \quad \dots\dots[5]$$

と表現する。フレーゲの〈数〉の場合にも[5]が成り立つか？

フレーゲの〈数〉の定義により、概念Fに属する数：Num(F)とは、「概念Fと同数である」という概念の外延であった。これを $'\phi(\phi \approx F)$ と表す。すると[5]は以下のように表現できる。

$$F \approx G \Rightarrow '\phi(\phi \approx F) = '\phi(\phi \approx G) \quad [6]$$

[6]が成り立つことを証明すれば、フレーゲの〈数〉が通常の数を持つ一般的特性を受け継いでいることを示したことになる。フレーゲはこのことを『基礎』§73で示している。証明の概略は次のようになる。

【証明】

まず、“ $\approx$ ”が同値関係であることに注意する⁽⁷⁾。そして $F \approx G$ と仮定する。示すべきことは、 $'\phi(\phi \approx F) = '\phi(\phi \approx G)$ であるが、後に『算術の基本法則』で(悪名高い)基本法則Vとして定式化される原理：

$$' \phi(\phi \approx F) = ' \phi(\phi \approx G) \Leftrightarrow \forall \psi (\psi \approx F \Leftrightarrow \psi \approx G)$$

すなわち、(二階の)概念の外延の同一性は概念の同値性と必要十分の関係にあるという原理により、 $\forall \psi (\psi \approx F \Leftrightarrow \psi \approx G)$ を示せばよい。いま、任意の概念 ψ を取って $\psi \approx F$ とすると、 $F \approx G$ の仮定と、同値関係 $\approx$ の推移性により $\psi \approx G$ 。逆に $\psi \approx G$ とすると、仮定 $F \approx G$ と $\approx$ のユークリッド性により、 $\psi \approx F$ 。こうして、 $\forall \psi (\psi \approx F \Leftrightarrow \psi \approx G)$ 。

(証明終)

さらに、[6]の逆：

$$' \phi(\phi \approx F) = ' \phi(\phi \approx G) \Rightarrow F \approx G$$

も成り立つことが確認される(『基礎』§73)。(証明は略する。)

こうして、フレーゲは、彼の数的一般的定義が正しいことが示されたと考えた。

3. 個々の数の構成と数の無限性

数の一般的定義を与えた後、フレーゲは個々の数(自然数)を構成するための定義を提示する。本節では、『算術の基礎』§74以下の議論を追跡する。

3.1 数〈0〉の定義(『基礎』§74)

数〈0〉は、それに帰属する対象が存在しない概念(空な概念)に属する数である。帰属する対象を持たない概念のうちで、単純で論理的なものとして「自分自身と同一でない： $\xi \neq \xi$ 」という概念を取ることができる。よって、数〈0〉は次のように定義される：

〈0〉 = 「概念 $\xi \neq \xi$ と同数である」という概念の外延。

さて、いかなる対象も帰属しない二つの概念は互いに同数であることが示され得る⁽⁸⁾。事実、Fが空でGが非空の概念であるとき、FとGは同数ではあり得ない⁽⁹⁾。

3.2 後者関係の定義(『基礎』§76)

フレーゲは、「nは自然数系列でmに直接に後続する」、すなわち「nはmの後者(successor)である」という関係を次のように定義する。

概念Fに属する〈数〉がnであり、

「Fであるがxと同一でない」という概念に属する〈数〉がmであるような、

概念F、およびFに帰属する対象xが存在する。 $\dots\dots(\pi)$

$$\exists F \exists x [F x \wedge \text{Num}(F) = n \wedge \text{Num}(\{y : F y \wedge y \neq x\}) = m]$$

この定義が「後者(successor)」(直接の後続者)の通常の意味になっていることを確かめよう。いま、nとmが〈数〉であり、nがmの、ここで定義された意味での後者(successor)であるとする。すると、定義により、ある空でない概念Fが存在して、

$$n = \text{Num}(F) = \text{概念Fと同数であるという概念の外延}$$

である。Fが空ではない根拠となるある対象aがFに帰属するとする： $F a$ 。よって、

$$m = \text{Num}(\{y : F y \wedge y \neq a\})$$

とおくことができる。ここで、概念「Fであるがaと同一ではない」を考える。この概念には、a以外のFである対象が帰属する(もしこの概念が非空ならば)。さて、〈数〉の定義により、

概念「Fであるがaと同一でない」に属する〈数〉

= 「概念「Fであるがaと同一でない」と同数である」という概念の外延

である。よって、この〈数〉は、概念Fと同数であるという概念の外延(すなわちn)よ

りも、帰属する対象が丁度一つ少ない外延を持つ概念に属する〈数〉である。ところで、この〈数〉は m に外ならない。よって、 m は n の前者（ $=n$ がその後であるもの： $n = Sm$ 、または $n = m + 1$ ）である。言い換えると、 n は通常の意味での m の後者となっている。

3.3 その他の自然数の定義（『基礎』§77）

さて、以上の〈0〉および後者（successor）の定義を使って、〈1〉とそれに後続する自然数が定義される。まず、概念「0と同一である」には、ただ一つの対象、すなわち数〈0〉が帰属する。（ここで、数〈0〉は対象として把握されている。）この「0と同一である」という概念に属する〈数〉が〈1〉でなければならない。このことは、上の二つの定義から次のようにして導かれる。まず、後者（successor）の定義（ $\bar{n}$ ）において存在が主張されている“F”に「0と同一である」を、“x”に0を代入すると、

概念「0と同一である」に属する〈数〉が n であり、

「0と同一であるが0と同一でない」という概念に属する〈数〉が m である、となる。「0と同一であるが0と同一でない」という概念は矛盾を含むから帰属する対象を持たない概念であり、概念「自分自身と同一でない」と同数である。よって、これらの概念に属する〈数〉は同一である。ところで、数〈0〉の定義より、概念「自分自身と同一でない」に属する〈数〉は〈0〉であった。従って、概念「0と同一であるが0と同一でない」に属する〈数〉は〈0〉、つまり $m = \langle 0 \rangle$ である。こうして、〈0〉の後者が n 、すなわち、概念「0と同一である」に属する〈数〉である。この、〈0〉の後者を、〈1〉と名づける。すなわち、

〈1〉 = 〈概念「0と同一である」に属する数〉

以下同様に、

〈2〉 = 〈概念「0または1と同一である」に属する数〉

〈3〉 = 〈概念「0または1または2と同一である」に属する数〉

⋮

〈 n 〉 = 〈概念「0または1または … または $(n-1)$ と同一である」に属する数〉

と定義できる。

フレーゲは『概念記法』で一般的な系列を二項関係 f を満たす関係項の連鎖と考えていたが、〈0〉に始まり後者関係（successor relation）を満たす〈数〉の系列として、自

然数の系列が特定された。

3.4 自然数の無限性（『基礎』§82-3）

自然数の系列：0, 1, 2, 3, … には最後の項は存在しない、すなわち自然数は無限に存在する。この自然数の無限性の証明が「すべての自然数が後者を持つこと」を示すことによって実行可能であるとフレーゲは指摘し、その証明の概略を与えている。まず、第一段階として、一般的議論がなされる必要がある。すなわち、「 d 以下の自然数」（フレーゲの語法では「 d で終わる自然数系列に属する」）という概念に属する数が d の後者（successor） Sd だとすると、「 Sd 以下の自然数」という概念に属する数も Sd の後者となる、ということが示されねばならない。次の段階として、0に関して、概念「0以下の自然数（すなわち0そのものである）」に属する数（つまり1）が0の後者である、ということが示されねばならない。こうして、すべての自然数が後者を持つことが示されることになる。

4. 算術と論理

以上のようなフレーゲの数の理論はフレーゲの論理主義とどう関わり、また数学の哲学一般にとってどのような意味を持つのかを手短かに検討しよう。

4.1

まず、数の本質、数とは何かの定義において用いられる概念は、フレーゲの考えではすべて論理的な概念である。〈「概念Fと同数である」という概念の外延〉という数の定義に現れる「対象」、「概念」、「同数である」、「外延」という語彙はすべて論理的であり第二階述語論理によって表現できるからである。しかし、このことから直ちに、フレーゲの「論理」は矛盾を含むような強すぎるものではなかったか、という反論が生じるであろう。しかし、ブーロスによれば対象と概念に関わる無矛盾な断片を『算術の基礎』において取り出すことができる⁽¹⁰⁾。その断片部分においては、対象、（対象が帰属したりしなかったりする）第一階概念、（第一階概念が帰属したりしなかったりする）第二概念が存在する。この「対象」「第一階概念」「第二階概念」は、一見するとタイプ理論での「個体」「集合」「クラス」と類比的である。しかし、タイプ理論が数を集合の集合として定義するのに対して、フレーゲは第二階概念として数を定義してはいない。フレーゲの数は、「（ある）概念Fと同数である」という第二階概念の外延であって、その論理的身分

はあくまでも対象である。この場合、フレーゲは、すべての第一階概念Fに対して、Fと同数であるすべての第一階概念が、かつそれらのみが帰属する第二階概念の外延である唯一の対象が存在する：

$$\forall F \exists ! x [x = ' \phi (\phi \approx F)]$$

ということを仮定するのである。

4. 2

さらにフレーゲは、第二階概念を直接に扱う必要はなかった。フレーゲにとって必要だったのは、第一階の概念と対象との間のある関係、すなわち「概念…に対象(数)…が属する(対応する)」(zukommen)という原始的関係を導入し、第一階概念Fに対して、任意の第一階概念Gにxが属する(‘ $G \eta x$ ’と表す)のはFとGとが同数であるときかつそのときにかぎるような唯一の対象が存在する：

$$\forall F \exists ! x \forall G (G \eta x \Leftrightarrow F \approx G)$$

という仮定であった。そして、まさに「概念Fに属する数」というこの対象こそ彼の数であった。(これにより、正面から外延を扱うことを避けることで、「外延」にまつわる疑問も避けて通ることができる。)

フレーゲは自然数が無限に多く存在することを、「すべての自然数は後者を持つ」ことにより証明できることを示唆している(本章第3節)。この証明は数が対象であること、対象としての自然数0, 1, 2, … がすべて異なるということに基づいている。実際、数0と数1が異なるということの議論はこう進行する。まず、数0が概念「それ自身と同一でない」に属する数と定義され、それから概念「0と同一である」に属する数として数1が定義される。前者の概念にはいかなる対象も帰属しないが、後者の概念には数0というただ一つの対象が帰属するから、二つの概念は同数ではない。よって、ヒュームの原理により数0と数1も同一ではない。この議論が有効であるには、数0が概念「0と同一である」に帰属する対象であることが仮定されていること、これが決定的に重要である。(タイプ理論では集合の集合が下位の集合の要素になることは禁じられているから、このような議論は展開できない。)

4. 3

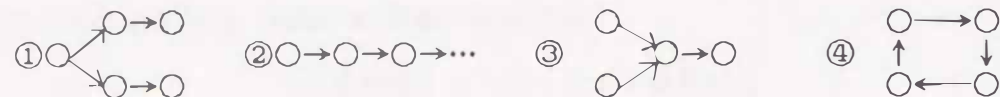
フレーゲの数学の哲学をめぐる最近の議論の中で、ヒュームの原理から自然数の無限性、すなわち「任意の自然数は(それと異なる)後者を持つ」こと(後のペアノの公理系の第二公理)のフレーゲによる証明(ブーロスにより「フレーゲの定理」と呼ばれている)が

再評価されている⁽¹¹⁾。その議論によれば、フレーゲは集合論やタイプ理論に訴える必要もなく、また(矛盾を含む恐れのある)外延(後の「値域」)についての理論に訴えることもなくその証明を遂行することができる(しかもフレーゲの議論を辿ることでその証明の再構成ができる)という⁽¹²⁾。だとすると、フレーゲは、無限集合にあらさまには言及していないヒュームの原理という「無限公理」を発見し、そこから自然数の無限性を導き出したと言える。

これらの議論は、フレーゲの数学の哲学が古めかしく時代遅れのものという印象を一挙に拭い去るほどのものである⁽¹³⁾。少なくとも、矛盾を含まない部分での数の概念のフレーゲによる論理的分析と算術の展開、すなわち部分的論理主義の遂行とでも呼べるものは、今日なお数学の哲学に関わるスリリングな知見と問題⁽¹⁴⁾をわれわれに提供してくれるのである。

- (1) 「… [数1といった] 最も手近に存し、明らかにきわめて単純である考察対象について不明であることは、学問にとって恥すべきことではないか？数とは何かについてはなおのこと語り得ることは望めない。偉大な学問の基底に存する概念が難点を曝け出しているならば、それをより厳密に研究しその難点を克服することが、避けられない課題である。」 G L A. II. 『算術の基礎』から引用する場合のテキストとしては、J. L. Austin の独英対訳本である、Gottlob Frege, The Foundations of Arithmetic, Northwestern U. P. (1950¹, 53²) を用いる。

- (2) 例えば、以下の①～④のどの構造を持つ f 系列においても「遺伝性」は意味を持つ。



- (3) すなわち、概念 ϕ に数 n が属することを “ $\phi \eta n$ ” と表すと、

$$\phi \eta 0 \Leftrightarrow \forall x \neg \phi x$$

$$\phi \eta 1 \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \phi x \wedge \forall x \forall y (\phi x \wedge \phi y \supset x = y)$$

という仕方で、左辺での明示的な数への言及を、右辺での概念の類別概念で置き換えるものである。

- (4) フレーゲは A Treatise of Human Nature I, III, 1, 第5パラグラフから次のヒュームの言葉を引用している：「二つの数が、一方の数のどの単位も他方の数の [ただ一つの] 単位に対応するという仕方で結合しているとき、われわれはそれらの数を同等であると呼ぶ」。なお、「ヒュームの原理」という名称はブーロスの以下の論文等で使われてから流布している。George Boolos, “The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic”, “The Standard of Equality of Numbers”, in W. Demopoulos (ed.), Frege’s Philosophy of Mathematics, Harvard University Press, 1995.

- (5) 数の同一性の基準の提示からは数の本質の定義は導かれないという反論（ユリウス・カエサル問題）の一つが『算術の基本法則』I §10にある。その論証は単純化すると次のようなものである。a = 概念Fに属する数, b = 概念Gに属する数とし、

$$(1) a = b \Leftrightarrow F \text{ と } G \text{ は一対一の対応関係にある,}$$

とする。さて、f を対象から対象への関数で、異なるアーギュメントに対して異なる

関数値を取り ($a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$) , アーギュメントと関数値は異なる ($f(a) \neq a, f(b) \neq b$) と仮定する。このとき、

$$(2) a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)。$$

よって、(1)(2)より、

$$(3) f(a) = f(b) \Leftrightarrow F \text{ と } G \text{ は一対一の対応関係にある。}$$

ところでいま、f(a) と f(b) が関数の値と受け取られない表現法で、例えばそれぞれ「c」, 「d」という名前で与えられていたとする。

$$(4) c = d \Leftrightarrow F \text{ と } G \text{ は一対一の対応関係にある。}$$

このとき、c = 概念Fに属する数, d = 概念Gに属する数、としてよいか？「よい」とすると、a = 概念Fに属する数 = c = f(a) , $\therefore f(a) = a$ となって、アーギュメントと関数値が異なるという仮定に反する。

なお、『基礎』§66で、q が方向か否かを決定できないと「q = b の方向」という同一性命題の真偽も決定できないという上の論証と類似の論点が、(予想される)疑問の一つとして提示されている。

- (6) つまり、直線 a の方向 = $\{x : a // x\}$ である。「平行」という同値関係によって「方向」をその同値類 $\{x : a // x\}$ として定義する方法は、後に抽象的定義と呼ばれて一般化する定義法である。同値関係である二項関係を $x \equiv y$ で表し、 $\{x : a \equiv x\} = |a|$ とおくと、 $a \equiv b \Leftrightarrow |a| = |b|$ が成り立つことにより、ある特定対象と同値関係をなすすべての対象のクラスとして、新しい対象を定義できる。数の場合は「特定概念と同数である」という同値関係を用いることになる。ただし、フレーゲは、同値クラスにではなく、外延という「論理的に」既知なもの（とフレーゲが考えるもの：『基礎』§68の註参照）に訴えている。これは数を対象と見なすという主張と関連する（本章第4節参照）。

- (7) “ $\approx$ ” が同値関係であることに関しては次の文献を参照。C. Wright, Frege’s Conception of Numbers as Objects, Aberdeen University Press, 1983, pp.105-6.

- (8) 概念FとGが帰属する対象を持たない（空である）概念だとする。 $\forall x \neg Fx, \forall y \neg Gy$ であるから、f をある二項関係とすると、トリヴィアルに次の二つの条件法が成り立つ。

$$\forall x [Fx \supset \exists y (Gy \wedge \forall z (x f z \supset z = y))]$$

$$\forall y [Gy \supset \exists x (Fx \wedge \forall w (wf y \supset w = x))]$$

よって、FとGは同数である。

- (9) Fが空、Gが非空な概念でありながら、FとGが同数だとする。FとGが同数だからGに帰属する対象aに対して、Fに属するただ一つの対象bがある関係fにある。すると、Fは空ではなくなり、Fが空であるという仮定に矛盾する。よって、Fが空、Gが非空な概念ならば、FとGは同数ではあり得ない。

- (10) G. Boolos, "The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic" 参照。また、本章註4も参照。

- (11) 「フレーゲの定理」をめぐる議論の流れのデモブーロスによる簡潔な要約が、註4で挙げた彼の編になるアンソロジーの中に「導入」として収められている。

- (12) 註4で挙げたブーロスの二番目の論文: G. Boolos, "The Standard of Equality of Numbers" でそれに関する詳細な議論が展開され、その付録に、ヒュームの原理からのペアノの第二公理「すべての自然数は後者を持つ」の、『概念記法』と『基礎』の定義と定理だけからの証明が再構成されている。なお、すでにC. ライトは上記の本(註7参照)の最終節(xix)で『基礎』§§70-83から、ヒュームの原理を公理として追加した『概念記法』の第二階述語論理によって五つのペアノ公理の導出を素描している。ペアノの第二公理の導出にはヒュームの原理が必要であるが、この原理が無矛盾であることをライトは仮定している。バージェスは以下註13で引用するライトの本の書評でヒュームの原理のモデル(その対象領域は $\{0, 1, 2, \dots, \aleph_0\}$)を示してこの原理の無矛盾性を示唆している。ブーロスも基本的に同じモデルを用いている。

- (13) 註4で挙げたデモブーロスのアンソロジー参照。フレーゲの数学の哲学を巡るこのような最近の活発な議論の先鞭をつけたのは註7で引用したC. ライトの著作であるが、この本の書評の末尾でバージェス(J. Burgess)は「M. ダメットによる“古めかしい”(archaic)というフレーゲの数学の哲学の特徴づけを完全に拒否するもの」と位置づけている。The Philosophical Review, XCIII No.4 (1984) pp.638-40 参照。

- (14) デモブーロスによれば(前掲書「導入」参照)、①どの程度までフレーゲの「無限公理」としてのヒュームの原理は数の分析を生み出すのか? ②どのくらい安全にヒュームの原理は単称名辞の指示対象を固定できるか? ③ヒュームの原理が真であることの

知識がわれわれの経験や直観から独立だとどのような正当化により言い得るか? と

いった問題は未だオープンである。

第IV部 発展

第7章 論理的意味論と体系の完成

はじめに

本章では、フレーゲがいよいよ論理主義を立証することを目標として構築した『算術の基本法則』（Grundgesetze der Arithmetik, 以下GGAまたは『基本法則』と略記）の体系の基礎的部分（第I巻の「I記号の説明」）と、『基本法則』第I巻出版の直前の数年に現れた論理的意味論について考察する⁽¹⁾。これらは、いずれもフレーゲの論理的思索の頂点をなす業績である。『基本法則』の多くの部分は、文字通り、概念記法による論理法則と定義からの算術の導出から成り立つが、同時にその基礎の部分において、体系に現れる諸記号の役割と意味が説明される。そのための入念な準備となるのが、論理的意味論の古典となったいくつかの論文である。

そこで先ず、フレーゲの論理的意味論の核となる(i)関数と対象の区別（第1, 2節）および(ii)意義と意味の区別（第3節）に考察の焦点を絞り、最後に『基本法則』の論理体系を再構成する（第4節）。

1. 関数

「関数」とは何か？関数についてのいくつかの説明⁽²⁾の中で、基本的な事柄として常にフレーゲが強調することは、関数がそれだけでは補完を要する(ergänzungsbedürftig)不完全で(unvollständig)不飽和な(ungesättigt)ものである、ということである。このことは、関数を表現する関数名——例えば「 ξ の父」「 ξ の首都」「 $\xi^2 > 1$ 」等——が空白部分“ ξ ”⁽³⁾を持つという表現形態上の特徴に止まるものではなく、関数そのものの本性に根ざすとフレーゲは考えている。フレーゲにとって基本的な論理的単位は語ではなく判断(Urteil)であった。判断とは、文(Satz)で表現された思想(Gedanke)が実際に成立している、すなわち真である、ということの宣言である。そして、そのような判断可能な内容(Inhalt)としての思想は固有名(eigen Name)で名指される対象と同様に、それ自体で完結した(abgeschlossen)、飽和した(gesättigt)ものである。この完結・未完結、飽和・不飽和の区別は、ある種の比喩であるとはいえ、フレーゲにとって、関数と

対象を比較対照する際の根本的な手がかりとなるものである。

こうして、関数は何らかの「アーギュメントの」関数である。関数は数学の歴史上、①演算（計算）法の進歩と、②アーギュメントと関数値になり得るものの拡大、という二つの方向で発展してきた。フレーゲはその関数概念の拡張を一層押し進めながら、関数に自らの体系での中心的な役割を与える。ここで、その拡張の行方を整理する。関数の出発点は、数学における数である。“ $2+3$ ” および “ 2^3 ” はいずれもある数を表している。このとき、“ $2+3$ ” は例えば “ 2 ” と “ $()+3$ ” に、“ 2^3 ” は例えば “ 2 ” と “ $()^3$ ” に分解できる。この分解は、

$$2+3, 3+3, 4+3, \dots$$

および

$$2^3, 3^3, 4^3, \dots$$

といった事例の集積からの法則性の抽出にその起源が考えられるが、ともあれそのような分解が可能であることの発見が関数概念の発見と発展に不可欠である。さてここで、“ 2 ” がそれ自体で完結した対象としてのアーギュメント数二の名前であり、“ $()+3$ ” または “ $()^3$ ” という補完を要する部分が関数の名前である（以後フレーゲに従って、“ $\xi+3$ ”、“ ξ^3 ” と表記する）。アーギュメントの名 “ 2 ” が別のアーギュメントの名 “ 3 ” に置き換えられると、“ $3+3$ ”、“ 3^3 ” という新たな関数値の名が得られる。このように、関数において、アーギュメントと関数値は最初は数であり、関数そのものは「 3 を加えること」や「 3 乗すること」といった演算（計算）であった。さて、フレーゲの関数の拡張は、例えば $\langle \xi > 2 \rangle$ を関数と見なすことによって始められる。関数 $\langle \xi > 2 \rangle$ のアーギュメント座に “ 2 ”、“ 3 ”、“ 4 ” というアーギュメントの名を代入すれば

$$“2 > 2”, “3 > 2”, “4 > 2”$$

という表現が得られるが、これらはそれぞれ、偽なる文、真なる文、真なる文の名である。こうして関数 $\langle \xi > 2 \rangle$ の関数値は真理値として把握される。関数 $\langle \xi+3 \rangle$ が数 $2+3$ から出発し、数 5 で終わったのに対して、拡張された関数 $\langle \xi > 2 \rangle$ は言語レベルでは文 $3 > 2$ から出発して文で終わり、関数のアーギュメントと関数値という観点では、文の意味としての真理値を出発点として真理値で終わる。

ここで、次の二点が注目されねばならない。第一に、ここでなされた関数の拡張が「述語の関数化」になっているということである。すなわち、真理値を関数値とする関数を導入することによって、関数が「概念」や「関係」といった論理的概念の共通な基盤となっ

たことである。関数 $\langle \xi > 2 \rangle$ はアーギュメント $\langle 3 \rangle$ に対して $\langle 3 > 1 \rangle$ 、すなわち $\langle \text{真} \rangle$ という値を取るが、これは論理的には、「数三が $\langle \text{数二より大きい} \rangle$ という概念に帰属する (fallen unter)」という表現によって表される事態に他ならない。また関数 $\langle \xi > 2 \rangle$ がアーギュメント $\langle 3 \rangle$ 、“ 2 ” に対して値 $\langle \text{真} \rangle$ ($3 > 2$) を取ることは、論理的には、「数三と数二とが $\langle \text{より大きい} \rangle$ という関係にある」という表現によって表される事態に他ならない。概念と関係を関数の一種と見なすこと（述語の関数化）こそ、まさに、主語・述語に代わるアーギュメント・関数による文の分析を徹底し、述語論理の意味論を完成させる重要な観点である。

第二は、意義 (Sinn) と意味 (Bedeutung) の区別⁴⁾ が、関数に関わる意味論の整備に伴って現れるということである。文 “ $3 > 2$ ” と文 “ $4 > 3$ ” とはともに $\langle \text{真} \rangle$ という同一の真理値を持つが、各々の文の思想の内容は異なっている。文において、文が表現する思想が文の意義 (Sinn) であり、文の持つ真理値が文の意味 (Bedeutung) である。これにより、二つの関数 $\langle (x+1)(x-1) \rangle$ と $\langle x^2 - 1 \rangle$ の表現の内容の違いが意義の違いとして説明され、任意のアーギュメントに対する関数値の一致が、関数のアーギュメント座を同一のアーギュメント名で補完した表現の意味の一致（つまり、表現 “ $\langle (2+1)(2-1) \rangle$ ” と “ $2^2 - 1$ ” の意味の一致）として、統一的に説明される。

関数の拡張は更に続けられる。述語の関数化によって関数の値として真理値が考えられるようになったが、これまでのアーギュメントは数・人・都市等の対象であった。フレーゲは今度は、真理値をアーギュメントに取る関数を考える。文は思想を表現するが、表現されたその思想は常に $\langle \text{真} \rangle$ または $\langle \text{偽} \rangle$ という真理値を取らねばならない。そのことによって初めて、文は言語の外に出る。フレーゲは既に『概念記法』において、真なる思想であるという判断（主張）であることを示す記号（断定記号）“ $\vdash$ ”を導入していた。A を文とするとき、“ $\vdash A$ ” は「‘A’は真である」という判断を表現するが、このとき、“ $\vdash A$ ” から垂直線 “ $\perp$ ”（判断線：Urteilsstrich）を取り除いた結果生じる表現：

$$“\text{---}A”$$

は、判断内容（思想）を表す。従って、“ $\text{---}A$ ” という記号が意味するものは、常に $\langle \text{真} \rangle$ $\langle \text{偽} \rangle$ いずれかの真理値でなければならない。換言すれば、

$$“\text{---}\xi”$$

は関数、すなわち関数値として真理値を取り、アーギュメントとしては任意の対象および真理値を取る関数である⁵⁾。〈例えば “ $\text{---}3 > 2$ ” は $\langle \text{真} \rangle$ であり、“ $\text{---}2$ ” と

“—— $2 > 3$ ”は〈偽〉である。) フレーゲは『概念記法』において否定と条件法によって命題論理を公理化したが、その際“—— ξ ”のアーギュメント座“ ξ ”に代置可能な表現は「判断可能な内容」を持つものでなければならなかった。『基本法則』において関数〈—— ξ 〉が改めて考察し直された背景に、関数はあらゆる対象を可能なアーギュメントとする、というフレーゲの体系上の統一という考慮がある。否定と条件法は真理関数としての性格を明瞭に与えられるようになったが、真理関数のアーギュメントには真理値以外の対象も考えられるという点で、フレーゲの真理関数は通常のそれより広い。同時に、可能なアーギュメントの領域に真理値が含まれたことにより、真理値をも対象と見なすという観点が開かれた。

こうして、関数のアーギュメントと関数値に真理値をも含むあらゆる対象を考えることにより、フレーゲの〈関数〉は数学における通常関数よりはるかに一般的で多様なものに拡張されたのである。

2. 関数と対象

ところで、フレーゲは、自らの関数を数学者の言う「関数」より論理的に先なるものだと考える⁽⁶⁾。フレーゲによれば、数学者の言う「関数」は関数の値域(Werthverlauf)に相当する。例えば、関数：

$$y = x^2 - 4$$

の場合、解析幾何学の手法(=デカルト座標の使用)により、アーギュメントに関数値がどう対応しているかというその対応の有様が、放物線という図形として直観的に表現される。任意のアーギュメント x_0 とそれに対応する関数値 y_0 との組み合わせは、座標上の図形の一部である一点、すなわち実数 x_0, y_0 の順序対 (x_0, y_0) として与えられる。こうして、図形を構成する点の集合、すなわち方程式 $y = x^2 - 4$ を満たす実数 x, y の順序対 (x, y) の集合が関数そのものと見なされる。ここに、数学者が関数を「対象」として扱うことの典型例がある。しかし、フレーゲの関数は対象とは根本的に異なるものである。対象はそれ自体で完結した論理的単位であるのに対して、関数は補完を要する未完結なものである。このような論理的に重要な区別をしばしば曖昧なものにする数学の傾向に対して、フレーゲは批判的な視点から眺めている。

この関数と対象との根本的区別は、関数値として真理値を取る関数である概念と対象と

の区別にもそのまま持ち越される。文「ソクラテスは人間である」によって表現される事態は、対象〈ソクラテス〉が概念〈人間〉に帰属するということであり、文「人間は動物である」は、概念〈人間〉に帰属する任意の対象は概念〈動物〉に帰属という事態を表現する。ここに、「対象が概念に帰属する」という基本的な論理的関係がある。ところで、「概念“馬”は概念ではない」という見かけのパラドクスが提示された。これは、Kerryという人物がフレーゲを批判する際に示唆した、と論文「概念と対象について」(Ueber Begriff und Gegenstand)でフレーゲが論じているパラドクスである。概念〈馬〉は概念の一つであるにも関わらず、「概念〈馬〉」という言語表現は不飽和な部分を持たないゆえに対象の名前と見なさざるを得ない。そのいみで「概念〈馬〉」は概念を意味してはいない、すなわち「概念〈馬〉は概念ではない」。フレーゲはこのパラドクスを「言語の生硬さ」に由来する見せ掛けの背理として処理する。つまり、「概念〈馬〉は概念でない」という言い方自体に問題があるのであって、正確には「表現“概念〈馬〉”は概念語としては用いられていない」と言うべきである。ここにはパラドキシカルな要素は何も含まれない。従って、Kerryが示唆することは、概念と対象の根本的区別を揺るがすものではなく、言語のある種の欠陥を指摘したにすぎない。フレーゲはこう考えた。

ところがここに、概念と対象、関数と対象という基本的区別を揺るがすかに見える観点がある。それは、関数(およびそれに関連して量化)に現れるレヴェル(Stufe: 階)の差という観点である。第一階関数において、アーギュメントおよび関数値がともに対象であったのに対して、第二階関数においてアーギュメントは関数である。概念の場合、第一階の概念に対象が帰属するというのが基本的図式であったが、第二階概念の場合、(第一階)概念について何かが語られるがその概念が高次の概念(第二階概念)に帰属する訳ではない。(むしろ、第二階概念はアーギュメントとして第一階概念を取り、関数値として真理値を取る。)第一階量化では束縛変項が対象変項であるのに対して、第二階量化では束縛変項は述語(概念)変項である。第二階関数の例として、例えば定積分：

$$\int_1^2 \phi(x) dx$$

がある。この場合、 $\phi(\quad)$ がアーギュメント座であり、アーギュメントとして例えば、 $\langle 2\xi + 1 \rangle$ という第一階関数を与えると、関数値として $\langle 2 \rangle$ が得られる(：

$$\int_1^2 (2x + 1) dx = 2$$

$$\exists x \phi(x)$$

がある。この場合、アーギュメント座は $\phi(\quad)$ であり、アーギュメントとして例えば、

第一階概念〈 x は素数である〉を取れば、関数値として真理値〈真〉が得られる。このように、第二階の関数や概念のアーギュメントは第一階の関数や概念である⁽⁷⁾。しかし、本来アーギュメントは、関数に対立する対象でなくてはならない。そして、関数が未完結・不飽和なものであったのに対して対象は完結したものであった。従って、アーギュメントとして関数や概念を認めるということは、関数がある意味で対象化することにならないか？関数と対象、概念と対象の鋭い対立という観点と、第二階の関数・概念の導入という観点は矛盾なく説明できるのか？

フレーゲはこの点についてはきわめて楽観的であり、何の矛盾もないと考えていたようである。確かに、例えば第二階概念は、次の点で第一階概念と異なる。一方で、第一階概念〈 x は素数である〉は対象が概念に帰属するという図式を取る。例えば、

〈7は素数である〉

は、対象としての数〈7〉が概念〈素数〉に帰属するという主張である。他方、第二階概念〈 $\exists x \phi(x)$ 〉は、概念について何かを述べるという図式を取るが、対象が概念に帰属するという図式にのっとって述べる訳ではない。例えば、

$\exists x (x \text{は素数である})$ (=少なくとも一つの素数が存在する)

は、「素数である」という概念が、帰属する対象を持たないというみで空な概念ではないということを主張しているのであって、対象が概念に帰属するのと全く同じいみで概念が高次の概念に帰属すると述べているのではない。

フレーゲは、第二階概念のアーギュメント、すなわち第一階概念が文の中で依然として述語的性格を持つことを根拠として、概念と対象の区別が基本的であることを確保しようとする⁽⁸⁾。例えば、

“ $\exists x (x \text{は素数である})$ ”

を第二階関数 $\exists x \phi(x)$ の値の名と見るとき、そのアーギュメントは〈 x は素数である〉であるが、これは述語的性格(すなわちアーギュメント座“ x ”という空白部分があること)を持つという訳である。フレーゲ自身も、このわれわれの疑問と類似の疑問(むしろ反論)——Kerryの「概念も主語となる」という反論——を“Ueber Begriff und Gegenstand”で取り上げている。この疑問に対するフレーゲの解答は、ラッセル⁽⁹⁾に従ってまとめるならば次のようになる。

(1) 主語としてのみ登場する語(term)がある。

(2) (イ) 概念は高次の概念に帰属する。ただし、概念そのものではなくて概念の名

が帰属する。従って、概念〈馬〉は概念ではなく事物(thing)である。

(ロ) 概念は、それについて概念が述べられたとしてもなお述語的性格を持つ。

概念について語られる主張は、対象には相応しくない。対象が第一階概念に、そして第一階概念が第二階概念に帰属と言われるとき、これらの関係は似ているが異なる。

ラッセルは(1)には同意するが、(2)の(イ)と(ロ)が両立しないのではないかと指摘する。(2)の(イ)にラッセルの解釈が入っているとはいえ、この指摘は的を射ていると思われる。

仮に、フレーゲの主張通りに、第二階の関数と概念とが「関数・概念の対象化」にはならないとしても、第二階量化はどのような形で認められるのか？これに対してはいくつかの対案が有り得よう。例えば、論理学を単なる機械的記号操作と見なすことなく、テクニカルな問題の基底に常に哲学的思考の顕現を認める論理学者クワインは、量化の問題こそ、存在問題と論理の結節点であるという観点に立つ⁽¹⁰⁾。すなわち、クワインにとっては、量化を受ける変項として何を考えるかということが、存在者として何を認めるかと言うことに等値である。量化によって束縛されるものを、どういうタイプの変項であると見なすかが、そのまま「存在論的関与」(ontological commitment)となる。このonticな量化の説明の基底には、量化の領域を言語から独立な存在者の集合と見なすという観点がある。アーギュメントとなる「対象」はそのような言語外の領域のメンバーである。このような量化の解釈の下に、クワインは束縛変項を、極力、個体変項に限定して論理学を展開しようとする⁽¹¹⁾。述語を束縛変項の値とすることは、クワインにとっては概念・関数などの普遍の実体化となる。そこで、彼の「ゆるやかなノミナリズム」⁽¹²⁾に残されたオッカムの剃刀は、普遍の実体化を招来することになる述語変項の量化をも切り捨てることになる。フレーゲの量化の理解はクワインほどonticな方向に傾いている訳ではない。しかし、束縛変項の領域のメンバーは、単に対象の名ではなく、対象そのもの、しかもあらゆる対象の全領域と理解される。その点で、フレーゲの場合も量化を考えると何らかの形で、「対象」とは何か、「存在者」として何を認めるかといった問いに直面せざるを得なくなる。そこで、第二階の量化、すなわち述語変項の量化が認められるとすれば述語の意味(つまり関数・概念・関係)の領域を認めることになる。

「対象」ないし「存在者」の問題を保留するとしても、別の観点からの困難がある。述語を無制限に束縛するということは、あらゆる概念と関係の全体を認めることにつながる。しかし、第V部で詳しく論じるように、あらゆる概念の全体などというものは自己矛盾を

含む危険を孕むものである。というのは、あらゆる概念の全体の中には、「あらゆる概念の全体」という概念自体も含まれるであろう。従って、自分自身の定義の中に自分自身の引照を含まざるを得ないだろう (vicious circle)。ここからパラドクスまではほんの数歩である。

しかし、われわれは少し先を急ぎ過ぎたようである。少なくともこれまでの考察で言えることは、フレーゲの関数と対象の峻別は、彼の算術体系の構成の意味論的基礎として重要なものであり、それに関する彼の主張は一貫しているが、高次の関数・概念・関係の解釈に伴って、「対象領域」「量化」といったより広い視点から眺めるとき、これらとの調和的説明に関して問題が残るということである。ところで、グメット⁽¹³⁾によれば、フレーゲの場合、「対象」は大まかに言って指示(ないし意味)と量化という二つの局面で問題となる。そこで、フレーゲの論理的意义論において、もう一つの重要な観点である意義と意味(指示対象)の区別を考察する。

3. 意義と意味

『算術の基本法則』での説明によれば⁽¹⁴⁾、関数を巡る考察の地平において、すでに意義(Sinn)と意味(Bedeutung)の区別の必要が生じる。例えば、関数 $\langle \xi^2 = 4 \rangle$ と $\langle \xi > 1 \rangle$ において、 $\langle 2 \rangle$ という同一のアーギュメントに対応する関数値は、いずれの場合も $\langle 真 \rangle$ である。しかし、両方の関数のアーギュメント座“ ξ ”に $\langle 2 \rangle$ を代入して得られる文 $\langle 2^2 = 4 \rangle$ と $\langle 2 > 1 \rangle$ が持つ思想内容は大いに異なっている。フレーゲはそれを、文 $\langle 2^2 = 4 \rangle$ と文 $\langle 2 > 1 \rangle$ の「意義」の違いであると説明する。従って、文の意義(Sinn)とは文の思想内容、すなわち「思想」(Gedanke)である。しかし、思想は、それが表現する内容がその通りに成り立っているという主張を含む訳ではない。思想が実際にそうであるという主張(すなわちフレーゲの言う判断)となるには、それが真でなければならない。文が判断となるとき、その文は真実の思想内容を表現していると認定されたのである。すなわち、その文の意味は真理値 $\langle 真 \rangle$ である。そして、関数 $\langle \xi^2 = 4 \rangle$ のアーギュメント $\langle 2 \rangle$ に対する値(関数値)は、文 $\langle 2^2 = 4 \rangle$ の意義=思想(つまり「2に2を掛けた結果が4に等しい」こと)ではなくて、意味(つまり $\langle 真 \rangle$)なのである。

「意義と意味について」(Ueber Sinn und Bedeutung)において、フレーゲが固

有名の意義と意味を区別し、意味以外に意義というものを考えるに至ったのは、同一性を主張する言明の認識価値を説明することを契機としてであった。名“明けの明星”と“宵の明星”との持つ意義は両者において異なるが、いずれも金星という同一の惑星を意味している。同一性を主張する文：

“明けの明星=宵の明星”

が認識的価値を持つのは、異なった意義を持つ二つの名が同一の対象を意味しているという主張内容による。ここで、名の意義は意味を提示する仕方(Art des Gegebenseins)、あるいは意味に到達する認識ルートとして考えられている。これにより、同一性を算術内部で証明することの認識的価値が与えられ、同時に同一性の原理、すなわち、確立された、または仮定された同一性：

$$a = b$$

および、等号“=”の一方である“a”を含む文：

(... a ...)

から、そこでの“a”のいくつかの出現を“b”で置き換えて得られる結果：

(... b ...)

を導くことができる、という推論規則を体系内部で確保するための基礎が与えられる。しかし、“Ueber Sinn und Bedeutung”ではフレーゲは「意義」の定義を正面切って定義づけてはいない。ただ、語の「意義」とはそれが属する言語の使用に習熟している人ならば誰にでも理解され得るものとして、「意義」のいみの目安を示しているにすぎない。そこで、改めて、フレーゲの「意義」とは何かが問われねばならない。

固有名の意義に、その名の意味(その名の担い手)への認識ルートという側面があることはフレーゲも認めている。しかし、この認識的側面を過度に厳格に受け取って、固有名や述語の意義を、例えば、意味への到達の具体的手段、あるいは文の真偽の検証条件と見なすことはできないであろう。名“最大の素数”(the greatest prime number)の意義を、そのような素数の発見の方法だとすると、この名は意味のみならず意義をも持たなくなる。しかし、それはフレーゲの意図に反するであろう。また、文(ゴールドバッハの予想)：

“4以上の偶数は二つの素数の和として表現できる”

の意味(真理値)をわれわれは現在のところ手に入れていないが、意義は与えられている。従って、意義の認識的側面を、われわれ人間の実際の「認識手段」という観点から見る

ことはできない。意義が、「認識手段」あるいは「認識への到達手段」という側面を持つとしても、それをわれわれ人間による有限的手段の構成可能性まで含むものと見なすことはできないであろう（「神の認識手段」とは言えるかもしれないが）。

フレーゲは、固有名に、そしてそれを拡張して文にも、またおそらくは述語にも、意義（Sinn）と意味（Bedeutung）を区別する。しかも、単に区別するだけではなく、あらゆるタイプの表現が通常の使用において、意義と意味の両面を持つと考えているように思える。この場合、特に問題とし得るのは、

(i) 文の意味としての真理値、

(ii) 固有名の持つ意義、

(iii) 述語の持つ意義と意味、

である。順次、検討していこう。

まず、(i) 文の意味としての真理値である。文（平叙文）の意義とは、フレーゲによれば文の内容＝思想である。しかし、文の意味が真理値であるとはどういうことか？ 固有名の意味としてその名の担い手（例えば、人物・建物・天体等）を理解するのと類比的に、文の意味を考えることは、一見困難であるように思える。文の意味としての真理値を直接的な指示の対象とすることはできないからだ。だが、われわれはこう理解できよう。文の意義＝思想は、ある種の可能な事態である。〈太陽が西から昇る〉ことや〈最大の素数が存在する〉ことを、実際にそのようなものであるかどうかを調べる前に、われわれはそのような事態を想像できるし、理解できる。この可能な一個の事態が実際に起こっている事態であるとき、この事態を表現する文は〈真〉という真理値を付与される。こうして、文が実際に起こっている事態を叙述しているといういみで、文は〈真〉を意味している（bedeuten）と言われる。換言すれば、文は真理値を持つとき実在に触れる⁽¹⁵⁾。従って、例えば、間接文を含む文で対象に関する同一性の原理が成り立たないのは、間接文の意味が真理値でなく意義であって、間接文が意義によって文全体の真理値決定に寄与するからである。フレーゲが“Ueber Sinn und Bedeutung”の後半の大部分を、信念文の文節や様相文脈といったいわゆる不透明な文脈（opaque context）での意味と意義の関連を詳述しているのは、真理値を文の意味とすることの一見したところの例外的ケースをいかに解きほぐし、それが同一性の原理の貫徹とどう調和するかを示すためであった。

次に、(ii) 固有名の持つ意義とは何か、である。フレーゲは確定記述などの記述を含む表現も固有名のカテゴリーに分類する。記述も含めた固有名の持つ意義がその記述内容で

あるとしても、通常の、例えば「アリストテレス」といった純然たる固有名の意義は何か？ 確かに、フレーゲは、一つまたは数個の記述でもって固有名の意義を与えうると考えているふしがある⁽¹⁶⁾。クリプキは『名指しと必然性』において⁽¹⁷⁾、固有名を記述ないし記述の束に置き換え得るとする説（＝記述説。この説を採る論者の一人として彼はフレーゲを挙げる）が、固有名の本来の機能——すなわち、固有名の指示対象（個体）を固定する（fix）指示子（クリプキの術語では rigid designator: 固定指示子）としての機能——を固有名から奪うことになるとして、記述説を批判する。クリプキによれば、記述説はその根底に、個体を特性（property）の束とする考え方を潜ませており、「起源（origin）」や「種（species）」といった言わば本質的特性とそうでない特性を混同し、「起源」や「種」までも変わる空想的可能性を考えることになる。厳格な記述説では、「アレクサンドロス大王の家庭教師である」という特性を持たない可能世界でのアリストテレスは、アリストテレスであること自体を止めてしまうし、緩やかな記述説では、アリストテレスが芋虫になったりピタゴラスの息子だったりする可能世界が認められることになる。クリプキは独創的な様相論理の意味論（いわゆる可能世界モデル）を構築し、その観点から、個体性を起源や種といった本質的特性に支えられながら各可能世界を貫く原理とみなす、個体性先行型の「様相」説を採る。認識ルートとしての固有名の意義の役割は、クリプキの場合、歴史的・社会的な固有名使用の因果連鎖の信任という形で固有名からはずされる。クリプキは、固有名の担い手（意味）の認識方法とその存在とは全く別のことと考えている。クリプキのフレーゲ批判に対する反批判はゲメットが詳細に述べている⁽¹⁸⁾ゆえに、ここでは、次の点を確認するに止める。

それは、クリプキのフレーゲ批判は、ある極端な形でのフレーゲ理解、特に固有名の意義についての理解（または誤解）に基づいているらしいということである。すでに述べたように、フレーゲの「意義」（Sinn）には「意味（Bedeutung）の提示様式」「意味への到達のルート」という認識的要素がある⁽¹⁹⁾。しかし、この「認識ルート」を、〈われわれの実際の・有限的認識手段〉、すなわち〈確実に意味（指示対象）に到達しそれを実際に同一指定できる認識手段〉という形に狭くとり、この重い荷を固有名の「意義」に負わせることは、フレーゲの意図ではない。クリプキの本質主義は、名の意味の「認識」の問題を、名の「意義」を切り捨てることによって、名から分離した。名は、クリプキによって、「認識」という荷を意義もろとも降ろされた。名は、対象を名指すという役割を確保したならば、それによって、確固として世界を貫く個体に達していると思われる。本当に

達していることはどのようにして知られるのか、どのようにしたら達し得るのか、という（神ではなく）われわれの認識の問題は、名が対象を名指すのに成功しているものとして使用してきた慣習などの歴史・社会的使用連鎖に任せればよい。クリプキの立場から見ると、フレーゲは固有名の意義を記述として与えることによって、意味への到達のためのわれわれの認識ルートを固有名自身に背負わせた。クリプキはフレーゲをそのように解釈しているように思われる。しかし、フレーゲから見れば、クリプキの立場は、意義の問題、そして認識の問題を、社会的因果の連鎖に委ねるという仕方、言語の外に追いやってしまったことになろう。確かにフレーゲにとって、基本的に「意義」は「理解」や「認識」の概念と結びついている。しかし、フレーゲが「意義」に負わせた「認識ルート」という荷は、クリプキが考えているほどに決定論的なものではなかった。名「アリストテレス」をわれわれは「アレクサンドロス大王の家庭教師」という記述の助けを借りて、ある人物を意味する（名指す）名として理解する。名「クルト・ゲーデル」を、「算術の不完全性を発見した人」という形で、ある人物を意味する（名指す）名として理解する。名「アリストテレス」の「意義」をかくかくという記述で与えたとして、その意義が、その名の意味（名指された対象）の提示方法であり、認識ルートであるとしても、その認識ルートは、実際にわれわれがその名指された対象に到達する手立て、さらに到達したことを確認する手立てをも含むような強い条件を負った認識ルートではない。ある特定の三角形の重心の「意義」を、ある特定の二直線の交点として与えるとしても、（定規を使うかレーザー光線を使うかいずれの器具を用いるにせよ）実際に（effectively）重心に到達し得る手段の構成を、その「意義」が含意している訳ではない。また、実際に当該の点を同一指定できる手段をその記述以外に含意している訳でもない。そのような点が実際に存在しているということが、前提されているのか、証明を要することなのかは、文脈や話者の意図に左右されることであり、フレーゲの「意義」に直接要求できることではない。むしろ、フレーゲが完全な言語体系として構想した算術体系で、そのような意味を欠いた表現の存在を認めないということは確かである。しかし、ともかくフレーゲの「意義」に意味への認識ルートという側面があるにせよ、この認識ルートは、われわれの実際的認識手段という強い条件を含まず、まして意味（指示対象）の同一指定の方法を含意するのでもない、と言わねばならない。

最後に、(iii) 述語の持つ意義と意味、の問題に移る。フレーゲは、「概念と対象について」（Ueber Begriff und Gegenstand）において、対象とはある分析様式によって

作られた文の主語の意味するものであり、概念とはそのような文の述語の意味するものである、と述べている⁽²⁰⁾。もし、意味を欠いた述語や固有名が一掃された完全言語があるとすれば、ダメットの言うように⁽²¹⁾、任意の述語 $G(x)$ について

$$\exists f \forall x [f(x) \equiv G(x)]$$

（ G と同値な概念 f が存在する）

が成り立ち、任意の固有名 b について、

$$\exists x (x = b)$$

（ b と同一な対象が存在する）

が成り立つであろう。このことから、述語

$$\langle \phi(x) \rangle \text{ は概念である}$$

が、

$$\exists f \forall x [f(x) \equiv \phi(x)]$$

として定式化されること⁽²²⁾は不自然ではない。しかし、そうなると、「概念である」という第三階の述語の定義の中に、第二階の量化を含むことによって、前節でも述べたように、クワイン流に言えば、概念の存在を認めるという ontological commitment（存在論的関与）を為していることになる。ダメットによれば、クワインと違ってフレーゲは量化を考える以前に述語の意味を認めているが、それは述語が量化されることを正当な可能性として認めることである、という⁽²³⁾。そして、このような形で考えることは、フレーゲを余りにクワインに引きつけて解釈しすぎているのかと自問している。確かに、束縛変項の値を存在論的関与と直結させることがフレーゲの意図に沿うかどうかという点は別にしても、概念の意味と量化に関連する問題は、ラッセルのパラドクスによるフレーゲのショックを思い合わせるならば、フレーゲの意味論と存在論の肯綮に当たる問題であると筆者には思われる。しかし、それについての考察は第V部に廻す。

次に、述語の「意義」とは何か。差し当たり、概念（＝一座述語の意味）の場合、ある対象がその概念に帰属する条件であると言えよう。この場合もわれわれは、帰属する条件（「意義」）の認識的側面を過度に狭くとるべきではない。例えば、デリクレの関数⁽²⁵⁾——すなわち、アーギュメントが有理数のとき値が1で、無理数のとき値が0となる関数——を有有限な（特定して言えば帰納的〔回帰的〕 recursive）演算の組み合わせとして、この関数におけるアーギュメントと値の対応の仕方をわれわれは表現できない。だからと言って、この関数に「意義」が無いとは思えない。これと類比的に、「 x は素数である」という述語の意義は、ある数 n が概念〈素数〉に帰属する条件であるが、この条件（真理条

件)として、われわれの有限的認識手段(例えば有限的な形式的証明の可能性)といった強い条件をフレーゲは要求していない⁽²⁶⁾。また、「算術を含む形式的体系は無矛盾である」という文はゲーデル数化により数論の言明に翻訳できるが、この言明を形式的体系内部で形式的に証明することはできない(Gödelの第二不完全性定理)。しかし、述語「 ε は無矛盾である」に「意義」が無いとは言えないであろう。

以上、関数と対象の区別と意義と意味の区別という、フレーゲの円熟期における論理の意味論の基本的なアイデアとそれに伴う問題を考察してきた。すでに述べたように、フレーゲがこのような意味論の整備を企てた理由は、なによりも、算術が論理から導けるといふ論理主義の確証を滞りなく行うためであった。そこで、以下の節で、その論理主義遂行の見本である『算術の基本法則』の体系を第I巻において瞥見する。

4. 『算術の基本法則』の体系

本節では、フレーゲの『算術の基本法則』第I巻の体系の基本的部分を扱う⁽²⁷⁾。ここでの論理体系は、『概念記法』の論理体系の大部分を受け継いでいるが、次の三点において、それよりも一層包括的で強力なものになっている。

- (1) フレーゲは値域(Werthverlauf)を新たに導入している。
- (2) 一貫して文を真理値の名前と見なし、文論理は通常のを一般化している。
- (3) 構文論と意味論を『概念記法』におけるものより一層正確に定義している。

以下、フレーゲの主著の論理体系を、構文論、意味論、論理の公理体系の順に再構成する。

4.1 構文論

まず、『基本法則』の言語である。論理記号として、次のものが使用される。

$\equiv$: 同一性(対象の間の同一性のみならず、関数および文の間の同一ないし同値をも表す)

— : 内容関数(または「真」関数)

$\neg$: 否定(以下今日の「 $\neg$ 」も併用する)

— : 条件法[質料含意](以下「 $\supset$ 」も併用する)

$\forall$: 全称演算子(以下「 $\forall$ 」も併用する)

$\mathcal{V}$: 値域抽象子

$\backslash$: 特徴づけ[確定記述]

さらに、ラテン小文字が自由変項を表すために用いられる。

$a, b, \dots$: 対象自由変項

f, g : 一または二座の第一階関数を表す自由変項

M, N : 一または二座の第一階関数に対して定義された一座の第二階関数を表す自由変項

束縛変項として、次が使われる。

$a, b, \dots$ (ドイツ文字) ; $\alpha, \beta, \dots$: 対象束縛変項

f, g (ドイツ文字) : 一または二座の第一階関数を表す束縛変項

β, γ : 標識束縛変項、すなわち第二階の関数表現において、アーギュメントとなる第一階関数のアーギュメント座を表示する束縛変項

それ以外に、説明のためのメタ言語の中で、 Γ, Δ は(真理値も含む)対象を表し、 Φ , Ψ は第一階関数を表し、 $\xi, \zeta, \beta, \gamma$ は第一階関数のアーギュメント座を、 ϕ, ψ は第二階関数のアーギュメント座を表す。また、自由変項は一般性の表現として働くが、それらを名前または関数表現である記号で置き換えることができる。更に、主張[断定](Behauptung)を表現するための記号である断定記号(判断記号) : $\vdash$ を用い、定義による規約を表現するための記号 : $\vdash$ を用いるが、これらは『概念記法』の用法を受け継いでいる。

『基本法則』では、文も真理値という対象の名であるから、通常の論理式や文は(真理値を含む)対象を表す表現、すなわち項(term, Term)である。フレーゲの規約に従うと項は以下のように帰納的に(recursively)定義できる。

【項の定義】

(1) 自由対象変項は項である。

(2) s, t が項ならば、 $\text{—}s, s=t, \text{—}s, \text{—}t, \backslash s$ も項であり、

f が一または二座の第一階関数自由変項のとき、 $f(s), f(s, t)$ も項である。

(3) $S[a]$ が項であり、 a が自由対象変項、 a と α が $S[a]$ に出現しない束縛

対象変項のとき、 $\text{—}^a S[a]$ および $\text{—}^{\alpha} S[\alpha]$ は項である。

(4) $S[f]$ が項であり、 f が一または二座の第一階関数自由変項、 f が $S[f]$ 中に出現しない f と同じ座数を持つ一または二座の第一階関数束縛変項のとき、

$\overline{\text{f}}$ S [f] は項である。

- (5) S [a], S [a, b] が項, a, b が自由対象変項, β, γ が S [a] にも S [a, b] にも出現しない標識束縛変項, M が一または二座の第一階関数をアーギュメントとするアーギュメント座を持つ第二階関数自由変項のとき, $M\beta S [\beta]$, および $M\beta, \gamma S [\beta, \gamma]$ は項である。

フレーゲは、括弧の作用域に関する以下の規則を定めている⁽²⁸⁾。

- (1) 内容線 [水平線] の作用域は、それに続く表現全体である。
- (2) = の左作用域は最も近い内容線までの全表現である。= の右作用域は最も近い = までの表現である。(従って, $a = b = c = d$ は $((a = b) = c) = d$ のいみに読まれねばならない。)
- (3) 二つのアーギュメントの間に立つ等号以外の二座の関数記号 (その例は以下の定義 D 6. での ' $\wedge$ ' である) の場合, 左作用域は最も近い判断記号または = にまで達し, 右作用域は最も近い二座関数記号にまで達する。
- (4) そのアーギュメントの左側に立つ一座の関数記号の場合, 作用域は最も近い二座関数記号まで達する。

また, フレーゲが定める⁽²⁹⁾ カテゴリーを再構成すると以下ようになる。

- 0 : 名前 (Name) のカテゴリー
 (0) : 名前から名前を生み出す, 一座の第一階関数表現のカテゴリー
 (0, 0) : 二個の名前から一つの名前を生み出す二座の第一階関数表現のカテゴリー
 ((0)) : 一座の第一階関数表現から一つの名前を生み出す, 一座の第二階関数表現のカテゴリー
 ((0, 0)) : 二座の第一階関数表現から一つの名前を生み出す, 一座の第二階関数表現のカテゴリー

このカテゴリーを使って上記の項の定義を書き直すこともできる (これは略する)。

次に, いくつかの基本的な論理記号と関数の定義に移る⁽³⁰⁾。(ただし, 表記法は一部現在使用されているものに改める。)

【定義】

$$D 1. \quad \text{---} s = \text{def.} \quad s = (s = s)$$

$$D 2. \quad s \vee t = \text{def.} \quad \neg s \supset t$$

$$D 3. \quad s \wedge t = \text{def.} \quad \neg (s \supset \neg t)$$

$$D 4. \quad s \equiv t = \text{def.} \quad (s \supset t) \wedge (t \supset s)$$

$$D 5. \quad \exists x A(x) = \text{def.} \quad \neg \forall x \neg A(x)$$

$$D 6. \quad s \frown t = \text{def.} \quad \backslash ' \alpha \exists g [t = ' \varepsilon g(\varepsilon) \wedge g(s) = \alpha]$$

この最後の定義 D 6 の意味はこうである。まず, $\backslash s$ は, s が唯一の対象が帰属する概念の外延 (= 値域) であるとき, その唯一の対象を表す。すなわち, $s = ' \varepsilon (\varepsilon = a)$ のとき, $\backslash s$ は対象 a である。 s がそのような概念の外延でないとき, すなわち任意の対象 a につき $s \neq ' \varepsilon (\varepsilon = a)$ のとき, $\backslash s$ は s そのものを表す。従って,

$$s \frown t = \begin{cases} (i) & t \text{ がある関数 } g \text{ の値域のとき, アーギュメント } s \text{ に対するその関数 } g \\ & \text{の値 } g(s), \\ (ii) & t \text{ がいかなる関数の値域でもないとき, あらゆるアーギュメントに対して } \langle \text{偽} \rangle \text{ を配分するような関数の値域 } ' \varepsilon (\varepsilon \neq \varepsilon) \text{ }^{(31)}, \end{cases}$$

である。

4. 2 意味論

フレーゲは『基本法則』では, 解釈というものを組織立てて述べている訳ではなく, 論理演算子等に意味論的規約を与えているにすぎない。従って, 記号に対して帰納的に (recursively) その意味を配分する解釈を, フレーゲの論理体系に対してあからさまには定義できない。しかし, 構文論との対比上, 帰納的な付値関数を用いて再構成を試みる。フレーゲは, 値域と真理値を基本的な論理的对象と見なすので, 解釈の領域にはそれらが含まれる。

4. 2. 1 解釈 A

真理値 $\langle \text{真} \rangle$ (以後 'T' と略記) と真理値 $\langle \text{偽} \rangle$ (以後 'F' と略記) を含む解釈の基本領域 $\mathcal{U}$ 上での, カテゴリー τ の記号の可能な外延の集合 $E_{\tau, \mathcal{U}}$ を次のように規約する。

$$E_{0, \mathcal{U}} = \mathcal{U}; \\ E_{(\tau_1, \dots, \tau_n)} = E_{0, \mathcal{U}} \times \dots \times E_{\tau_n, \mathcal{U}}$$

『基本法則』の言語の, $\mathcal{U}$ 上の解釈とは, 次のような関数 (付値関数) V である:

$$1) \text{ カテゴリー } \tau \text{ のすべての定項 } a^\tau \text{ に対して, } V(a^\tau) \in E_{\tau, \mathcal{U}}.$$

$$2) V(F(s_1, \dots, s_n)) = V(F)(V(s_1), \dots, V(s_n))$$

$$3) V(s = t) = \begin{cases} T(\text{真}), & V(s) = V(t) \text{ のとき;} \\ F(\text{偽}), & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

$\vdash F$ (偽), それ以外のとき。 (GGA I, S.11)

4) $V(\neg s) = \begin{cases} F, V(s) = T \text{ のとき;} \\ T, \text{ それ以外のとき。} \end{cases}$ (GGA I, S.10)

5) $V(s \supset t) = \begin{cases} F, V(s) = T \text{ かつ } V(t) = F \text{ のとき;} \\ T, \text{ それ以外のとき。} \end{cases}$ (GGA I, S.20)

6) $V(\lambda s) = \begin{cases} a, V(s) = ' \varepsilon (\varepsilon = a) \text{ のとき;} \\ s, \text{ そうでないとき。} \end{cases}$ (GGA I, S.19)

7) $V(\forall x A(x)) = \begin{cases} T, \forall x A(x) \text{ に出現しない自由対象変項 } a \text{ について,} \\ a \text{ についてのみ } V \text{ と異なりうる付値 (以後この下線の条件を} \\ \text{満たす関数を } V'a \text{ と表現する) のすべてに対して,} \\ V'a(A(a)) = T \text{ のとき;} \\ F, \text{ そうでないとき。} \end{cases}$ (GGA I, S.12)

8) $V(' \alpha A(\alpha)) = ' \alpha A(\alpha)$ に出現しない自由対象変項 a につき, 任意の $V'a$ に対して $f(V'a(a)) = V'a(A(a))$ であるような関数 f の値域 (ただし, $f \in E_{(o)}$) 。

すべての記号列に対して, 一意的にその外延の意味を配分するような付値関数 V が常に存在するか否かは, 実は不明である。体系が矛盾しているならばそれは成り立たないことになる。

ところで, この意味論と関連してフレーゲは, すべての対象が値域であると前提していた訳ではないが, 少なくとも, 論理的对象は値域と真理値に限るとし, しかも, 真理値を値域によって定義しようとする (GGA I, § 10, S.17)。すなわち, 次の定義を置く:

D 7. T (真) = def. $' \varepsilon (\text{---} \varepsilon)$

D 8. F (偽) = def. $' \varepsilon (\varepsilon = \neg \forall x (x = x))$

そして, フレーゲはこう論じる (以下は GGA I § 10 の議論である)。まず, 値域は次の二つの原理により規定される。

(a) あらゆる関数 Φ に対して, 値域 $' \varepsilon \Phi(\varepsilon)$ が存在する。

(b) $(' \varepsilon \Phi(\varepsilon) = ' \alpha \Psi(\alpha)) = \forall z (\Phi(z) = \Psi(z))$

このことから, $(\neg \Phi(\eta) \text{ を } \Phi(\eta) \text{ の疑似値域とすると}) \neg \Phi(\eta) = ' \alpha \Phi(\alpha)$ が導かれなくても, $\forall x (\Phi(x) = \Psi(x))$ が成り立てば,

$$\neg \Phi(\eta) = \neg \Psi(\eta)$$

が成り立つに十分である, ということを取り決めることができる。さて, M と Λ が,

$\neg \forall x (M(x) = \Lambda(x))$ が成り立つような関数だとする。そのとき,

$$X(a) = \begin{cases} T \text{ (真)}, & a = \neg M(\eta) \text{ のとき;} \\ F \text{ (偽)}, & a = \neg \Lambda(\eta) \text{ のとき;} \\ \neg M(\eta), & a = T \text{ のとき;} \\ \neg \Lambda(\eta), & a = F \text{ のとき;} \\ a, & \text{ それ以外のとき。} \end{cases}$$

として関数 $X(\xi)$ を定義することができる。そのとき,

$$a \neq b \text{ のとき } X(a) \neq X(b),$$

および

$$[X(\neg \Phi(\eta)) = X(\neg \Psi(\eta))] = \forall z (\Phi(z) = \Psi(z))$$

が成り立つから, $X(\neg \Phi(\eta))$ も上の (a), (b) の条件を満たす。従って, (a), (b) と矛盾することなく, $X(\neg \Phi(\eta))$ を $\Phi(\xi)$ の値域と見なすことができる。それゆえ, $T = X(\neg M(\eta))$, $F = X(\neg \Lambda(\eta))$ を, それぞれ $M(\xi)$ と $\Lambda(\xi)$ の値域と捉えることも可能である。よって, 任意の二つの異なる値域を $\langle \text{真} \rangle$ および $\langle \text{偽} \rangle$ と見なすことができる。

以上の議論はかなり人工的な印象を与え, その妥当性もいま一つ判然としない。値域が論理的に単純であるゆえに, 他の概念によって定義できないことは認められるとしても, 唯一の規定の条件である (a)(b) から, 「任意の二つの異なる値域を $\langle \text{真} \rangle$ $\langle \text{偽} \rangle$ と同一視する」という結論は説得力に欠ける。値域が論理的に単純だとはいえ, 真理値と同一視することは対象の多様性を消去はしまいか, 真理値と値域は別種の対象とみなすべきではないか。この論法を押し進めると, すべての対象が値域であるという所まで行きかねない (事実フレーゲは GGA I, § 10, S.18 の脚注でその可能性を示唆して, それに関して議論しているが, 結局は全面的にそれを支持するには至っていないようである。) そこで, 真理値を値域と同一視することを放棄し, 真理値を通常の対象の一部と見なす意味論の再構成が考えられる。ここでは D 7, D 8 の定義も考慮されない。

4. 2. 2 解釈 B

新しい解釈は, 三つ組 $\mathfrak{U} = \langle U, W, V \rangle$ で, 以下の条件が成り立つ。

(1) U : 対象の非空の集合

(2) W : U の非空の部分集合 (真理集合)

(3) V : 以下のことが成り立つ付値関数

(a) カテゴリー τ のすべての定項 a^τ に対して, $V(a^\tau) \in E_{\tau, U}$

$$(b) V(F(s_1, \dots, s_n)) = V(F)(V(s_1), \dots, V(s_n))$$

$$(c) V(s = t) \in W \Leftrightarrow V(s) = V(t);$$

$$V(s) = V(s') \text{ かつ } V(t) = V(t') \text{ ならば } V(s=t) = V(s' = t')$$

$$(d) V(\neg s) \in W \Leftrightarrow V(s) \notin W;$$

$$V(s) = V(s') \text{ ならば } V(\neg s) = V(\neg s')$$

$$(e) V(s \supset t) \in W \Leftrightarrow V(s) \notin W \text{ または } V(t) \in W;$$

$$V(s) = V(s') \text{ かつ } V(t) = V(t') \text{ ならば } V(s \supset t) = V(s' \supset t')$$

$$(f) V(\lambda s) = \begin{cases} \alpha, & V(s) \text{ が関数 } \alpha = \xi \text{ の値域のとき (ただし } \alpha \in U); \\ V(s), & \text{ そうでないとき。} \end{cases}$$

$$(g) V(\forall x^T A(x^T)) \in W \Leftrightarrow \forall x^T A(x^T) \text{ に出現していない } a^T \text{ につき, 任意の } V'a^T \text{ に対して } V'a^T(A(a^T)) \in W;$$

$$\text{もしすべての } V'a^T \text{ に対して } V'a^T(A(a^T)) = V'a^T(A'(a^T)) \text{ ならば, } V(\forall x^T A(x^T)) = V(\forall x^T A'(x^T)).$$

$$(h) V(' \varepsilon A(\varepsilon)) \text{ は } ' \varepsilon A(\varepsilon) \text{ に出現していない } a \text{ につき, すべての } V'a \text{ に対して } \alpha(V'a(a)) = V'a(A(a)) \text{ であるような関数 } \alpha (\alpha \in E_{(o), u}) \text{ の値域である。}$$

(ここで、(c) ~ (e) および (g) における付加条件は、同一物の代入可能性を確保するため、言い換えると、 $=$, $\neg$, $\supset$, $\forall$ の意味が関数 V に対して保存されるために必要である。)

4.3 公理体系

次に、フレーゲの論理の公理体系を見よう。これは、公理に当たる基本法則 (Grundgesetze) と推論規則 (Regeln) から成る。

《公理 (基本法則)》 (GGA I, §47)

$$A I a: a \supset a$$

$$A I b: a \supset (b \supset a)$$

$$A II a: \forall x f(x) \supset f(a)$$

$$A II b: \forall f M\beta(f(\beta)) \supset M\beta(f(\beta))$$

$$A III: g[a=b] \supset g[\forall f (f(a) \supset f(b))]$$

$$A IV: \neg(\neg a = \neg b) \supset (\neg a = \neg b)$$

$$A V: (' \varepsilon f(\varepsilon) = ' \alpha g(\alpha)) = \forall a (f(a) = g(a))$$

$$A VI: a = \lambda ' \varepsilon (a = \varepsilon)$$

《推論規則》 (GGA I, §48)

R 1: 融合規則 (Verschmerzungsregeln)

$$\frac{}{\neg \neg s \vdash s}$$

$$\frac{}{\neg \neg s \vdash \neg \neg s}$$

$$\frac{}{\neg s \vdash \neg s}$$

$$\frac{}{s \supset t \vdash s \supset t}$$

$$\frac{}{s \supset \neg t \vdash s \supset \neg t}$$

$$\frac{}{\neg (s \supset t) \vdash s \supset t}$$

$$\frac{}{\forall x \neg s(x) \vdash \forall x \neg s(x)}$$

$$\frac{}{\neg \forall x s(x) \vdash \forall x \neg s(x)}$$

いま、条件文: $s_1 \supset (s_2 \supset \dots \supset (s_n \supset t) \dots)$ において、 $s_1, s_2, \dots, s_n$ を先件部分 [または下部要素: Unterglieder], t を帰結部分 [または上部要素: Oberglieder]

と呼び、この条件文全体を $C(s_1, \dots, s_n, t)$ と略記する。

R 2: 先件部分の交換

$$\text{特殊例: } s \supset (t \supset u) \vdash t \supset (s \supset u)$$

$$\text{一般: } C(s_1, \dots, s_n, t) \vdash C(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(n)}, t)$$

ここで π は添字 $1, \dots, n$ の置換 (permutation) を表す。

R 3: 対偶:

$$\text{特殊例: } s \supset t \vdash \neg t \supset \neg s \text{ または } \neg t \supset \neg s \vdash s \supset t$$

$$\text{一般: } C(s_1, \dots, s_n, t) \vdash C(s_1, \dots, s_{i-1}, \neg t, s_{i+1}, \dots, s_n, \neg s_i)$$

$$\text{ただし, } n s = \begin{cases} \neg s, & s \text{ が } \neg u \text{ という形をしていないとき;} \\ u, & \text{ そうでないとき。} \end{cases}$$

R 4: 同一先件の縮約

$$\text{特殊例: } s \supset (s \supset t) \vdash s \supset t$$

$$\text{一般: } C(\dots, s, \dots, s, \dots, t) \vdash C(\dots, s, \dots, t)$$

R 5: 普遍汎化

$$\text{特殊例: } s(a) \vdash \forall x s(x)$$

$$t \supset s(a) \vdash t \supset \forall x s(x)$$

$$s(F) \vdash \forall f s(f)$$

$$t \supset s(F) \vdash t \supset \forall f s(f)$$

ここで、 a 、 F は結論[‘ $\vdash$ ’の右辺]には出現していない。

一般： $C(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i(a), s_{i+1}(a), \dots, t(a))$

$\vdash C(s_1, \dots, s_{i-1}, \forall x C(s_i(x), \dots, t(x)))$

F と $\forall f$ に対しても同様。

R6：肯定式(modus ponens)の一般化

特殊例： $s, s \supset t \vdash t$

一般： $s_i, C(s_1, \dots, s_n, t) \vdash C(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n, t)$

R7：条件法の推移性

特殊例： $s \supset t, t \supset u \vdash s \supset u$

一般： $C(s_1, \dots, s_n, t), C(u_1, \dots, u_i, t, u_{i+1}, \dots, u_m, v)$

$\vdash C(s_1, \dots, s_n, u_1, \dots, u_m, v)$

R8：排中律

特殊例： $s \supset t, \neg s \supset t \vdash t$

一般： $C(\dots, s, \dots, t), C(\dots, \neg s, \dots, t) \vdash C(\dots, t)$

R9：置き換え規則

$t(a) \vdash t(s)$ 、 s が項の場合；

$t(F) \vdash t(u)$ 、 u が F と同じカテゴリーの第一階関数表現の場合；

$t(M) \vdash t(B)$ 、 B が M と同じカテゴリーの第二階関数表現の場合。

R10：束縛変項改名規則1(ドイツ文字)

R11：束縛変項改名規則2(ギリシア母音小文字)

R12：定義引用

$s = \text{def. } t$ と定義されているならば、 $s = t$ が成り立つ。

4.4 いくつかの重要な定義

最後に、集合論に相当する部分と数の理論の展開に必要ないくつかの重要な定義を見ておきたい。

D9： $I p = \text{def. } \forall e \forall d \forall a (e \wedge (d \wedge p) \wedge e \wedge (a \wedge p) \supset d = a)$

(GGA I, §37)

フレーゲは二重値域(Doppelwerthverlauf)： $a \wedge (b \wedge p)$ により、関係の外延を表現する(GGA I, §36)。これにより、D9によって「関係 p が多対一である」ということが定義される。

D10： $\rangle p = \text{def. } \alpha' \varepsilon [I p \wedge \forall d (d \wedge \varepsilon \supset \exists a (d \wedge (a \wedge p) \wedge a \wedge \alpha))]$

(GGA I, §38)

定義D10は、「写像 p の外延」(または「ある概念に帰属する対象のすべてを他方の概念に帰属する対象に多対一に対応づける関係 p の外延」)を定義している。

D11： $\mathbb{U} p = \text{def. } \alpha' \varepsilon (\alpha \wedge (\varepsilon \wedge p))$

(GGA I, §39)

これは関係 p の逆関係の外延の定義である。すなわち、関係： $\text{---} \xi \wedge (\zeta \wedge \mathbb{U} T)$ 、または $\text{---} \xi \wedge (\zeta \wedge \alpha' \varepsilon (\alpha \wedge (\varepsilon \wedge T)))$ は、関係： $\text{---} \xi \wedge (\xi \wedge T)$ と同じことを意味する。

D12： $\mathbb{Q} u = \text{def. } \varepsilon \exists g [u \wedge (\varepsilon \wedge \mathbb{U} g) \wedge \varepsilon \wedge (u \wedge g)]$

(GGA I, §40)

これは u -概念(その外延が u である概念)と同数的である概念(すなわち、ある写像が存在して、それを u -概念へと写像しその逆写像が u をそれへと写像するようなそういう概念)の外延、すなわち、u概念の数(『算術の基礎』での“概念に属する数”に対応)を定義する。こうして、数は値域、すなわち対象として定義される。

D13： $\mathbb{Q} = \text{def. } \mathbb{Q}' \varepsilon (\varepsilon \neq \varepsilon)$

(GGA I, §41)

それ自身と同一でないという概念、すなわち、いかなる対象も(論理的に)帰属しない概念の数を数ゼロと定義する。

D14： $\mathbb{1} = \text{def. } \mathbb{Q}' \varepsilon (\varepsilon = \mathbb{Q})$

(GGA I, §42)

ゼロと同一であるという概念の数を数1と定義する。

D15： $f = \text{def. } \alpha' \varepsilon \exists u \exists a [\mathbb{Q}' \eta (\eta \wedge u \wedge \eta \neq a) = \varepsilon \wedge a \wedge u$

$\wedge \mathbb{Q} u = \alpha]$

(GGA I, §43)

概念 u に帰属する対象 a につき、 u には帰属するが a ではないという概念の数に(数系列において)概念 u の数が直接に後続するという関係、すなわち「直接に後続する(後者である)」という関係の外延が f である。

D16： $\angle q = \text{def. } \alpha' \varepsilon \forall F [\forall d \{F d \supset (\forall a (d \wedge (a \wedge q)) \supset F a)\} \wedge$

$\forall a (\varepsilon \wedge (a \wedge q) \supset F a) \supset F \alpha]$

(GGA I, §44)

q 関係上で遺伝する任意の特性を、 ε と q 関係にあるすべてのものが持てば、 α もその特性を持つという関係、すなわち「 q 系列上で後続する」(または「関係の真の祖先」)という関係の外延がD16で定義される。

D 17: $\bigcup q = \text{def. } ' \alpha ' \varepsilon [\varepsilon \wedge (\alpha \wedge \leq q) \vee \alpha = \varepsilon]$

α は ε で始まる q 系列の一員である (または「関係の擬祖先」) という関係の外延が D 17 で定義される。

最後の二つの定義は数系列の構成に関連する「関係の真の祖先」および「関係の擬祖先」の一般化を与えるものであり、すでに『概念記法』で第二階述語論理の形式で与えられていたものの再定義である。このようにして、フレーゲは基数 (または有限数) の定義を与え、『算術の基本法則』の第 II 巻では、さらに実数の定義へと進むことになる。しかし、われわれはひとまず『基本法則』の論理体系の概観を終えることにする。

註

- (1) 『算術の基本法則』のテキストとしては Georg Olms 社からの次の復刻版 (I, II 巻合本) を用いる: G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, Band I, II (Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Jena 1893, 1903), Olms (1966)。また、解説を伴う第 I 巻の抄訳である, M. Furth, Gottlob Frege, The Basic Laws of Arithmetic, University of California Press (1964) を参照する。論理的意味論の諸論文, 「関数と概念」 (Funktion und Begriff), 「意義と意味について」 (Ueber Sinn und Bedeutung), 「概念と対象について」 (Ueber Begriff und Gegenstand) 等のテキストは, G. Frege, Kleine Schriften [KS], Georg Olms (1967¹, 1990²) に収録されたものを用い, 英訳論文集: B. McGuinness (ed.), Gottlob Frege, Collective Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy, Basil Blackwell (1984), および P. Geach & M. Black (eds.), Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege, Basil Blackwell (1952¹, 1960², 1980³), および邦訳論文集: 藤村龍雄訳『フレーゲ哲学論集』岩波書店 (1988) を参照する。
- (2) GGA I § 1-4, “Funktion und Begriff” (1891), “Ueber Begriff und Gegenstand” (1892), “Was ist eine Funktion” (1904) 等。
- (3) ギリシア語子音を表す小文字 ‘ξ’ はここで単にアーギュメントの入る場所 (argument-place) を指示するためにのみ使用されている。よって, 「() の父」「() の首都」「() ² > 1」の様に記してもよいが, 二つ以上のアーギュメントの座を区別する必要等のために複数のこのような文字が用いられる。
- (4) 論文 “Ueber Sinn und Bedeutung” で一般的な観点から詳述されるこの区別は『基本法則』では関数の説明に用いられる。GGA I, § 2。
- (5) GGA I, § 5。
- (6) “Funktion und Begriff” SS. 129-130, 邦訳「関数と概念」9-10頁。
- (7) GGA I, § 21-23。
- (8) フレーゲは GGA I, § 25 で, 第一階概念について第二階概念が語られるという方式が, 対象が第一階概念に帰属するという方式に還元できると述べ, その具体策として, いくつかの概念を同 § 34-§ 37 で定義している。対象が概念に帰属するとい

うことを基本として、第二階概念が第一階概念について語られるということを言えば派生的なものとなすフレーゲの技術的な根拠はここにあるようである。

- (9) Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics*(1903), Appendix A : The logical and arithmetical doctrines of Frege, 481.
- (10) Willard Van Orman Quine, *From A Logical Point of View* (1953), I. "On what there is", VI. "Logic and the reification of universals", 邦訳: W. V. O. クワイン/飯田隆訳『論理的観点から』類草書房 (1992), I. 「なにがあるのかについて」, VI. 「論理学と普遍者の物化」。
- (11) このような観点から書かれた論理学書が彼の *Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, 1950¹, 1959², 1972³ (邦訳: クワイン/中村秀吉・大森荘蔵・藤村龍雄訳『論理学の方法』原書第3版・岩波書店 1978)である。
- (12) クワインは集合を存在者と認めている点でラディカルなノミナリストではない。Cf. Quine, *Set Theory and its Logic*, Harvard U. P. (1963¹, 1969²), 邦訳: クワイン/大出晃・藤村龍雄訳『集合論とその論理』岩波書店(1968)。
- (13) M. Dummett, *FREGE: Philosophy of Language*, Harper & Row (1973¹) Harvard U. P. (1981²), ch.14, p.474.
- (14) GGA I, § 2.
- (15) Cf. Dummett, op.cit, ch.12,13.
- (16) 例えば, "Ueber Sinn und Bedeutung" の註2などにそれが伺える。そこでは, 「アリストテレス」のような固有名に対して結びつけられる記述の違いによって意義の揺れがあり得ることを認めつつも, 意義が意味を確定できるかぎり, 意義の揺れ(相違)は我慢できるものである, とされている。そして, そのような揺れは『基本法則』のような完全な証明体系では(体系が完全な言語体系でもあるかぎり)で存在してはならないものとされている。KS, S.144, 『哲学論集』61頁参照。
- (17) S. Kripke, *Naming and Necessity*, Harvard U. P. (1972¹, 1980²)
- (18) Dummett, op. cit. ch.5 Appendix p.110 ff.
- (19) この点は特に, 九州大学の菅豊彦氏に示唆を与えられた。ダメットも基本的にこの線で解釈しているようである。Dummett, op. cit. ch.7 p.240 等参照。
- (20) "Ueber Begriff und Gegenstand" S. 168, 172, usw., 邦訳 67, 72頁等。
- (21) Dummett, op.cit. ch.7 p.219 ff.

(22) 同様に, $\langle \xi \text{ は対象である} \rangle$ は $\exists x (x = \xi)$ と定式化される。

(23) Dummett, op. cit. ch.7 p.226.

(24) Dummett, op. cit. ch.7 p.225.

(25) "Funktion und Begriff" S.131, 邦訳 12 頁。

(26) ただし, $\langle \xi \text{ は素数である} \rangle$ という述語は, $\xi \neq 1 \wedge \forall x [\exists y (x \cdot y = \xi) \supset x = \xi \vee x = 1]$ と表現できるから, 原始帰納的 (primitive recursive) な述語であって与えられた対象がこの述語の意味する概念に帰属するか否かは有限的手段で決定でき, 文「a は素数である」が真であるときこの文の形式的証明も可能である。

(27) 本節の記述に当たり, いちいち断らないが, Furthの解説と, Kutscheraの以下の著作を参照した: Franz von Kutschera, *Gottlob Frege*, de Gruyter (1989).

(28) GGA I, § 48, S. 64.

(29) GGA I, § 23, S. 40 f.

(30) GGA I, § 10, S. 16 f.

(31) t が値域でないとき, 任意の a について

$$\exists g [t = ' \varepsilon g (\varepsilon) \wedge g (s) = a]$$

は偽となるから

$$\forall x [\exists g [t = ' \varepsilon g (\varepsilon) \wedge g (s) = x] = (x \neq x)]。$$

よって, 基本法則Vにより,

$$' \alpha \exists g [t = ' \varepsilon g (\varepsilon) \wedge g (s) = \alpha] = ' \varepsilon (\varepsilon \neq \varepsilon)$$

が成り立つからである。