

フレーゲの論理哲学

田畑，博敏

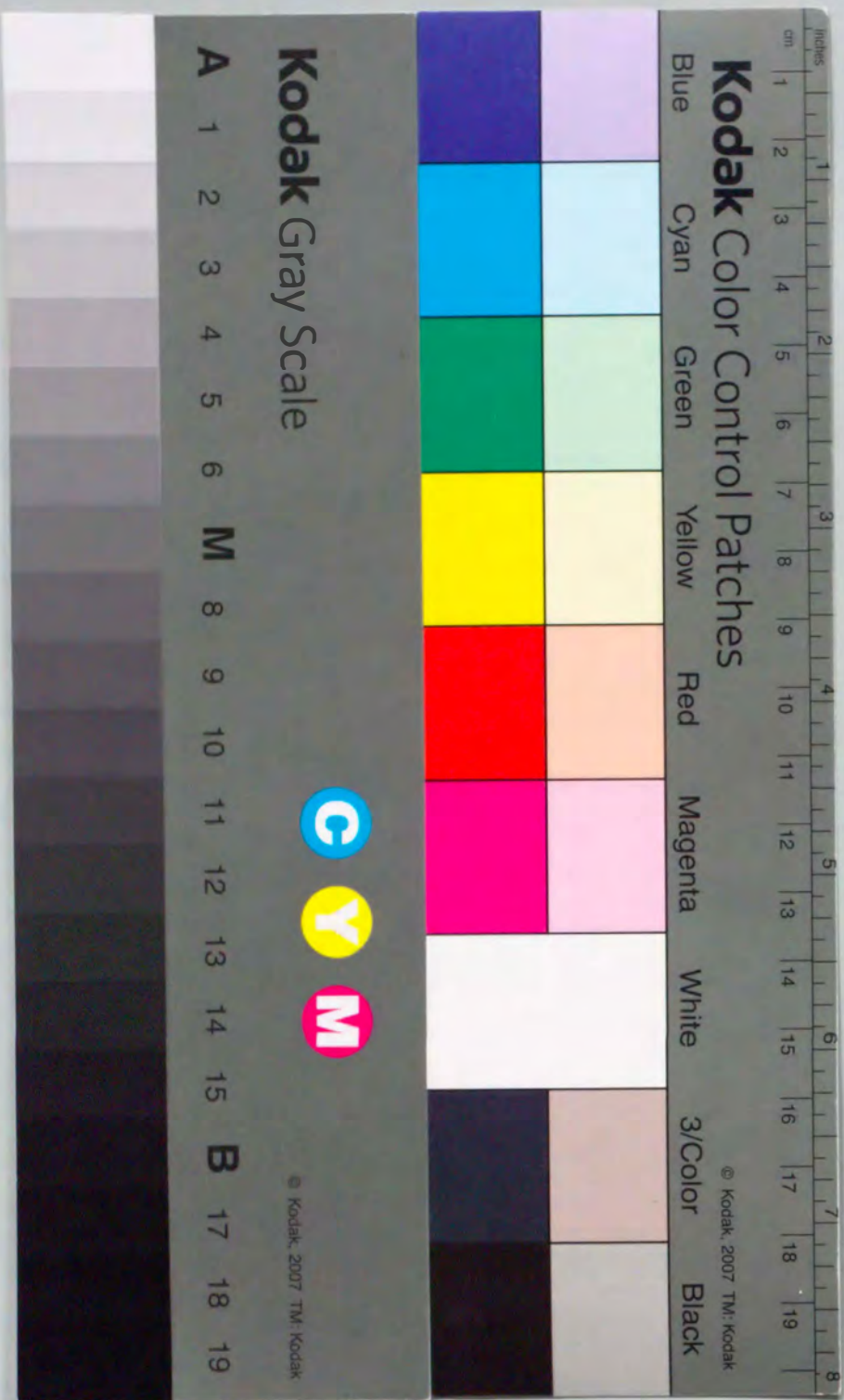
<https://doi.org/10.11501/3135134>

出版情報：九州大学，1997，博士（文学），論文博士
バージョン：
権利関係：



フレーゲの論理哲学

田 畑 博 敏



①

フレーゲの論理哲学

田 畑 博 敏

目 次

第Ⅰ部 序	3
第1章 フレーゲの論理哲学の全体像	4
第Ⅱ部 出発点：概念記法	30
第2章 論理学の刷新——『概念記法』第Ⅰ，Ⅱ部研究——	31
第3章 一般系列理論——『概念記法』第Ⅲ部研究——	67
第Ⅲ部 新規巻き直し：数の理論	100
第4章 算術命題の本性に関する諸家の見解のフレーゲによる批判的考察 ——『算術の基礎』第Ⅰ部研究——	101
第5章 数と単位をめぐるフレーゲの批判的考察 ——『算術の基礎』第Ⅱ，Ⅲ部研究——	121
第6章 数の理論——『算術の基礎』第Ⅳ部を中心に——	140
第Ⅳ部 発展	156
第7章 論理的意味論と体系の完成	157
第Ⅴ部 破綻：パラドクス	184
第8章 ラッセルのパラドクスと論理主義の再構成	185
第9章 パラドクスの起源	210
第Ⅵ部 結論に代えて：他の論者とフレーゲの方法との比較	219
第10章 フレーゲ以後の演繹体系について	220
第11章 フレーゲとヒルベルトの論争	260

第Ⅰ部 序

第1章 フレーゲの論理哲学の全体像

はじめに

本章の目的は、第2章以後で詳述するフレーゲの論理哲学のいくつかの主題の全体的な見取り図を描くことである。現代的観点からフレーゲを見るとき、次の三つの視点が重要である：

- (1) 現代論理学の礎石を置いたという視点、
- (2) 言語哲学の祖、分析哲学の源流という視点、
- (3) 数学の哲学への貢献という視点。

本論文は、(1)の視点を中心に据えながら、必要なかぎり(2)の視点を取りつつ、(3)の視点をも重視する、という立場からフレーゲを捉えたい。1950年代から始まり、1970年代に隆盛となったフレーゲ再評価は、主として(2)の視点を強調するものであり、それはダメットの大冊『フレーゲ：言語の哲学』⁽¹⁾に代表される解釈であった。しかし、最近のフレーゲ解釈で最も活発に論じられているのは、むしろ(3)の視点であるように思われる。80年代のC. ライトの仕事をきっかけに、T. パーソンズ、ダメット、ブーロス、ハックなどによるフレーゲの論理・数学の斬新な再発見が現在進行中である⁽²⁾。本論文は、これらの仕事に刺激を受けながら、フレーゲのオリジナルの発想を見直すことを試みる。もとより、フレーゲの思想は包括的であって、(1)(2)(3)の三つの視点は緊密に関連しているゆえに、いずれかの視点のみを切り離して取り扱うことはできない。だが、(2)の視点が強調される余り、従来影が薄かった(1)と(3)の視点を取り戻すことは、フレーゲの全体像を描く上でいま必要なことと考えられる。

そこで、学問的履歴を中心とする生涯と著作の概観から始めて、個々の主要な著作の検討を通じて、フレーゲの論理哲学の全体像に迫ることにする。

1. 生涯と著作の概観

まず、フレーゲの年譜を確認することから始める⁽³⁾。

《『概念記法』出版以前》

1848年11月8日、フリードリヒ・ルートヴィヒ・ゴットローブ・フレーゲ (Friedrich Ludwig Gottlob Frege) は、カール・アレクサンデル・フレーゲ (Karl Alexander Frege : 1808-66) を父とし、アウグステ・ビアロブロツキー (Auguste Bialloblotzky : ?-1878) を母として、メッケンブルク州の港町ヴィスマールに生まれる。ゴットローブという名は祖父クリスティアン・ゴットローブ・エマヌエル・フレーゲ (Christian Gottlob Emanuel Frege : 1779-1811) に因んで名付けられたという。

1864年ギムナジウム入学。私立女学校を創設し校長を務めていた父が1866年に死去、母がその後を継ぐ。1869年、アビトゥーアに合格してギムナジウムを卒業し、同年、イエナ大学に入学、4学期間をイエナで過ごす。1871年ゲッティンゲン大学に移り、1873年までの5学期間をゲッティンゲンで過ごす。大学生の頃のフレーゲについては余りよく分からない。ゲッティンゲン大学でフレーゲが取ったコースの記録が残っていて、「解析幾何」「射影幾何」「複素関数論」「宗教哲学 (Lotze)」「実験物理 (Weber)」「弾性理論」「多変数微積分」「電磁気学」などを学んでいる。フレーゲの論文に出てくる比喩や事例が自然科学から多く引かれることを思い合わせると、フレーゲの教養が主としていわゆる「理系」の学問により形成されたと分る。1873年12月12日、論文「平面上の虚図形の幾何学的表現について」⁽⁴⁾によって数学の学位を取得する。1874年5月、イエナ大学の数学の私講師に採用され、同年夏学期から講義を開始した。採用の際に参考にされた大学教授資格論文 (Habilitationsschrift) 「量概念の拡張に基づく計算方法」⁽⁵⁾を、フレーゲを推したエルンスト・アベ (Ernst Abbe) は高く評価していたという。1918年に引退するまで、フレーゲは44年間をイエナで過ごす。1878年、母、死去。

《『概念記法』の出版と反響》

1879年、『概念記法』(Begriffsschrift) を出版、論理学を刷新する(述語論理と一般系列理論)。7月員外教授に昇進。『概念記法』は無視された訳ではないが、評判は芳しくなかった。そのためフレーゲは、後に見るように(第2節)、『概念記法』の新しさとその応用範囲の広さを知らしめるための論文、および先駆者ブールの論理体系より自らのそれが優れていることを示すための論文を著して応戦する。

《『算術の基礎』の出版とその後1893年まで》

1884年、『算術の基礎』を出版して、数概念の論理的な定義を与える。この中で、

当時支配的であった心理主義・経験主義・形式主義の数学の哲学を批判する。『算術の基礎』の出版直後に出た三つの書評は、いずれも内容自体もその意義も十分に理解したものではなかった。しかし、後には、フッサールはこれを重要なものとして『算術の哲学』の中で取り上げ（1891年）、デデキントは『数とは何か、何であるべきか？』第二版の序でこれに触れ（1893年）、ペアノも『算術の基本法則Ⅰ』の書評で取り上げた（1895年）。1887年3月14日、マルガレーテ・リーゼブルク（Margarete Lieseburg:1856-1905）と結婚。

『算術の基礎』に続く時期は、フレーゲが論理主義の実行を開始し、それに伴う体系の拡張や論理的意味論の整備を精力的に行った、多産な時期である。フッサールやペアノとの文通が始まる。論理的意味論の古典である「関数と概念」(1891)、「概念と対象について」(1892)、「意義と意味について」(1892)がいずれもこの時期に生まれた。そして、1893年に『算術の基本法則』第Ⅰ巻の出版によりフレーゲの論理主義の最初の成果が現れた。

《『算術の基本法則』第Ⅰ巻以後1903年まで》

1896年5月名誉正教授に昇進。1899-1900年ヒルベルトとの文通（いわゆるフレーゲ＝ヒルベルト論争）。1902年6月、ラッセルからの手紙で『算術の基本法則』の体系中に矛盾があることを知らされる。1903年『算術の基本法則』第Ⅱ巻を、付録に矛盾の防止策として基本法則Ⅴを制限することを追加して出版する。同年、「幾何学の基礎について」（第一シリーズ）。

《1903年以後-1918年まで》

この時期はパラドクスの発見と妻の死（1905年）に象徴されるような、フレーゲにとって不運な時期である。1906年「幾何学の基礎について」（第二シリーズ）。1907年枢密顧問官（Hofrat）の称号を授与される。1910年、この頃、R. カルナップがフレーゲの講義に出席する。1911年、L. ウィトゲンシュタインがイエナを訪れ、フレーゲの勧めでケンブリッジのB. ラッセルの下に赴く。1914年、「数学における論理」。1906-1918年はフレーゲにとって非創造の時期である（ダメット）。

《1918年-晩年まで》

1918年、論文「思想」「否定」——「論理学研究」のシリーズの開始。同年、イエナ大学を定年退官。イエナを離れ、故郷ヴィスマールに近いバート・クライネンに帰る。この頃、算術の論理主義的基礎づけを最終的に諦めたい。1923年、「複合思想」。1925年7月26日、バート・クライネンで76歳の生涯を閉じる。

2. 『概念記法』とそれへの反響

2.1 『概念記法』の目的

フレーゲが最初の著書である『概念記法』（以下BSと略記することがある）を書いたとき、彼の念頭にあったのは算術の真理の論理的基礎づけという問題意識であった。彼は、『概念記法』の序言で論理的（分析的）真理と経験的真理を区別する：

「われわれは基礎づけを必要とするすべての真理を二種類に分ける。一方は、その証明が純粹に論理的に進行する真理であり、他方は、その証明が経験的事実に基づく真理である。」（BS S.IX）

算術の真理は、フレーゲにとって前者に属する筈であり、それを論証するには、実際に算術の真理の論理的な証明を作ることで遂行する以外にない。しかし、ここで問題なのは日常言語の不備ということである。そこで厳密な証明を表現する手段として「概念記法」が構想された。この間の事情をフレーゲはこう説明する：

「さて、算術の判断はこれら二種類の真理のどちらに属するか、という問いを提出することによって、私はまず最初に、あらゆる個別性を超えた思考の法則に支えられながら、推論のみによって算術でどれほど遠くまで到達できるか、を探究せねばならなかった。この場合の歩みはこうであった：まず私は、数概念へと進むために系列における配置〔順序〕（Anordnung in einer Reihe）の概念を論理的後続（logische Folge）の概念に還元しようと試みた。ここで、直観的なものが気づかれずに侵入できないようにするためには、すべては推論連鎖に透き間が無いことに掛かっている。この要求をきわめて厳格に満たそうと努めるうちに、言語の不十分さが障害となっていることに気づいた。すなわち、表現することが困難な事柄が生じている場合に起こる言語の不十分さであり、〔表現すべき〕関係が複雑であればあるほど、一層、私の目標が求める正確さが達成されにくくなるのである。この必要性から、これから提示する概念記法の構想が生まれた。従って、概念記法は、推論連鎖の適切さを最も確実な方法で調べるために、また推論連鎖の起源を探究しうるように、気づかれずに忍び込もうとするあらゆる前提を明示するために、用いられることになろう。」（BS S.X）

また、後にペアノの記号言語と自らの概念記法を比較した論文⁽⁶⁾の中で、次のように述べている：

「私〔フレーゲ〕が概念記法の必要性を感じるようになったのは、全数学がそこに基づく、もはや証明できない基本命題または公理を探していたときである。この問いに答えて初めて、この学問がそこからくみ取る認識源泉を成功裡に跡づけることが望める。この問いが大部分は哲学に属するものであっても、尚、それは数学的な問いであると認めねばならない。その問いはもはや古いものである。というのは、すでにユークリッドがその問いを立てたように思われるからである。にも関わらず、もしそれが十分には答えられていないとすれば、その理由は、われわれの言語が論理に関して不完全であることの中に求められねばならない。公理のリストが完全なものであるかどうかを調べたいならば、それに関連する学問分野のすべての証明をそれらから導くように試みなければならない。その際、純粋に論理的な法則だけに基づいて推論を行うように注意せねばならない。というのは、そうでないと、公理として立てられるべきであったものが、気づかれずに紛れ込むかもしれないからである。日常言語がこの目的に余りそぐわない理由は、しばしば表現が曖昧であるということにのみあるのではなく、特に推論に適した固定した形式を欠いているということにもある。「よって」「従って」「なぜなら」といった言葉は、確かに推論がなされていることを示唆はするが、推論が根拠とする法則については何も語らず、論理的に正当化された推論が生じていない場合にも、言葉の作法によって用いられる。しかしながら、私がここで念頭に置いているような研究においては、数学において通常満足されているような、結論の真理性を確信することだけが重要なのではない。むしろ、この確信が何によって正当化されるのか、いかなる原法則にそれが基づいているかを知らねばならない。このためには、推論がそこで動く堅固な軌道が必要である。そして、そういったものは日常言語においては形成できない。」(KS S.221)

こうして、フレーゲの「概念記法」は、日常言語(自然言語)の不備を補い、推論の構造を正確に分析するために必要に迫られて作られたのである。それは次のような要求を満たすものとして構想された。

- (1) 曖昧さ・多義性がなく、記号(結合)は同じ文脈では意味を保持する;
- (2) すべての仮定・前提は明確に述べられ、暗黙の前提があってはならない;
- (3) 推論の形式はできるだけ単純でかつ少なくする;
- (4) 見通しのよさのために二次元の広がりを持つ記号を用いる。

2.2 『概念記法』の内容

こうして、フレーゲは、言わば「行きがかり」で論理学者となり、アリストテレス以来の「論理学の革命」⁽⁷⁾を成し遂げた。バイナム⁽⁸⁾はこの「革命」の内容を11個挙げている:

- ①論理的関数(真理関数と述語関数)の発見,
- ②量化理論の発見,
- ③初めての第一階述語計算の定式化,
- ④論理的(および論理主義的)方法の最初の応用,
- ⑤公理体系としての「命題計算」の最初の定式化,
- ⑥関係の「祖先」の最初の定義,
- ⑦数学的帰納法(またはリカーション)の最初の定式化,
- ⑧(実質的な)「真理表」の最初の使用,
- ⑨論理体系での「質料含意」(material implication)の最初の使用,
- ⑩変項(variable)の概念についての最初の明確で矛盾のない説明,
- ⑪公理と推論規則の最初の明確な区別。

藤村龍雄は、フレーゲの業績のポイントを、伝統的論理学の比較した上で、特に言語論的な側面に注目して四つに纏めている⁽⁹⁾。それによると、フレーゲの論理学の新しさは、

- (1) 伝統的論理学と異なり、判断(命題)が一つのまとまった全体として扱われる場面が与えられたこと,
- (2) 伝統的論理学において軽視されていた単称判断(単称命題)に対して一つの独立した位置が与えられたこと,
- (3) 限量記号(量化子)の導入により、多重限量が可能となったこと,
- (4) これらを組織的に体系化した(広範な論理体系の統一的観点からの組織化)こと,

にある。

しかし、このような革命的な業績である『概念記法』は、出版当時、必ずしもその意義が十分には理解されなかった。『概念記法』に対する反響を論じる前に、ともあれ、この小冊子の内容目次を一瞥しておく。それは次のようなものである:

算術の式言語に倣って作られた、純粹思考のための式言語

内容

I. 諸記号の解明

§ 1. 文字とその他の記号

判断

- § 2. 内容の判断可能性, 内容線, 判断線
- § 3. 主語と述語
- § 4. 全称・特称判断; 否定・定言・仮言・選言判断; 必然・肯定・可能判断.

条件法

- § 5. 「ならば」, 条件線
- § 6. 推論, アリストテレス的推論方法

否定

- § 7. 否定線, 「または」「どちらか一方」「そして」「しかし」「ない」「どちらも…ない」
- § 8. 内容の同一性を表す記号の必要性, そのような記号の導入

関数

- § 9. 「関数」と「アーギュメント」という言葉の説明, 多数のアーギュメントを持つ関数
- § 10. 関数記号としての文字の用法, 「Aは特性Φを持つ」, 「BはAに対してΨ関係にある」, 「Bは手続きΨの対象Aに対する適用結果である」, アーギュメントとしての関数記号

一般性

- § 11. ドイツ文字, 内容線のくばみ, ドイツ文字の代入可能性, それらの作用域, ラテン文字
- § 12. 「いくつかの…ないものがある」「いかなる…も存在しない」「いくつかの…が存在する」「任意の」「すべての」, 因果連関, 「いかなるものも…ない」「いくつかのものは…ない」「いくつかのもの」「…ということが可能である」, 論理的対当表

II. 純粹思考のいくつかの判断の提示と導出

- § 13. 導出による提示の利点
- § 14. 条件法の最初の二つの基本法則
- § 15. それらの帰結
- § 16. 条件法の第三の基本法則とその帰結
- § 17. 否定の第一の基本法則とその帰結
- § 18. 否定の第二の基本法則とその帰結
- § 19. 否定の第三の基本法則とその帰結
- § 20. 内容の同一性の第一の基本法則とその帰結
- § 21. 内容の同一性の第二の基本法則とその帰結
- § 22. 一般性の基本法則とその帰結

III. 一般系列理論からのいくつかの話題

§ 23. 導入的言明

- § 24. 遺伝性, 判断の二重化, ギリシア小文字
- § 25. 諸帰結
- § 26. 系列における後続
- § 27. 諸帰結
- § 28. 更なる諸帰結
- § 29. 「zはxに始まるf系列に属する」, 定義と諸帰結
- § 30. 更なる諸帰結
- § 31. 手続きの多対一性, 定義と諸帰結

後に詳しく見るように、「諸記号の説明」と題された第I部では、記号と判断についての語用論的・意味論的説明、条件法と否定の（実質上の）真理関数的機能、そして主語と述語に代わる「アーギュメント」と「関数」による命題の分析、そして量化記号に関連した一般性の説明がなされている。これらの説明は現代的観点から見ても極めて正確なものである（本論第2章参照）。そして、「純粹思考のいくつかの判断の提示と導出」と題された第II部では、否定と条件法による命題論理および第一階述語論理の完全な公理体系が与えられている（本論第2章参照）。そして、「一般系列理論からのいくつかの話題」と題された第III部で、遺伝性、関係の祖先、関係の一意性といった、自然数の算術を論理的に展開するための概念の定義と定理の導出が、第二階述語論理の枠組みにおいてなされる（本論第3章参照）。

2.3 『概念記法』に対する反響

出版当時、指導教授から同僚となったアベ（E. Abbe）は、フレーゲの仕事の独創性を認めつつも、理解者が少ないのではないかと懸念したという⁽¹⁰⁾。それが不幸にも的中する結果となる。しかし、フレーゲの最初の著書は決して無視されたのではない。少なくとも次の六人の学者が右の諸誌に書評を書いたのである⁽¹¹⁾。

Lasswitz (歿:1848-1910), Jenae Literaturzeitung 6 (1879), SS.248-9.

R. Hoppe (歿:?-?), Archiv der Mathematik und Physik, 1st ser. 63 (1879), Literarischer Bericht, SS. 44-45.

C. Th. Michaelis(?), Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft 12 (1880), SS.232-40.

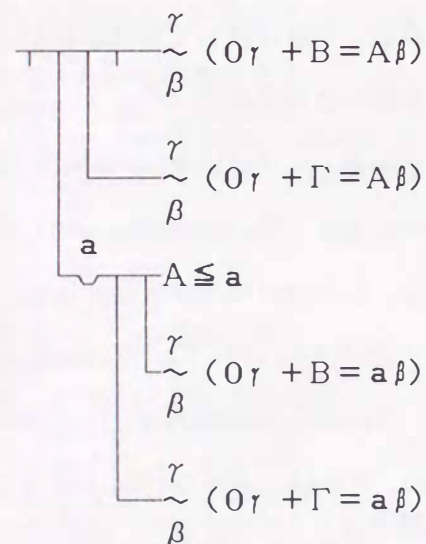
P. Tannery (歿:1843-1904), Revue Philosophique 8 (1880), pp.108-9.

John Venn (歿:1834-1923), Mind 5 (1880), p.297.

E. Schröder (歿:1841-1902), Zeitschrift für Mathematik und Physik 25 (1880), SS.81-94.

六人の評者のうち上の三名はフレーゲに同情的な理解を示してくれたが、「高名な」下の三名は、積極的な理解を示さなかった。タンヌリは、「算術の式言語に倣って作られた」筈のフレーゲの記号法は「代数のそれとは本質的に異なっていて、二つの計算法で共通なものは文字の使用以外にない」と言い、式や重要な結果についての「説明は不十分で、記号法は極端に複雑である」から「彼の記号法はそれが目指している特別な研究以外では使えない」と評している⁽¹²⁾。シュレーダーは、十数頁にわたる長い書評を書き、『概念記法』7頁の間違いを指摘したりしているが、内容に関しては「概念記法」はブールの式言語の模倣であり、形式に関してはブールの仕事を無視して独立に作られたものにすぎず、本の表題は内容に対応しないと言う⁽¹³⁾。結局、シュレーダーにとっては、フレーゲの仕事の中に「独創性」を読み取ることはできなかった。

『概念記法』の不評に対して、フレーゲは批判に答える内容の論文をいくつか書く。まず、「ブールの計算論理と概念記法」という長い論文⁽¹⁴⁾を用意し、ブールの記号法がある限定された論理形式の計算法にすぎないのに対して、自らの式言語があらゆる概念を表現しうる普遍言語の性格をもつ点でより優れていることを強調する。三つのジャーナルにこの論文の掲載を申し出た⁽¹⁵⁾が、いずれからも拒否され、結局、生前は未出版のままで終わった。この論文では、概念記法で表現しうる具体的な例が数論や解析から採られている。例えば、「AはBとΓの最小公倍数である」，すなわち「BとΓのすべての公倍数はA以上に大きく、かつAもBとΓの公倍数である」は、次のように表現される⁽¹⁶⁾：

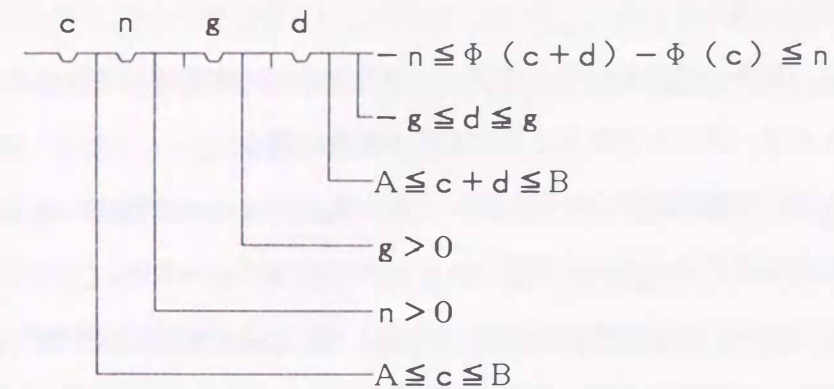


現代の記法では、

$$\exists z(z \cdot \Gamma = A) \wedge \exists y(y \cdot B = A) \wedge \forall a[\exists z(z \cdot \Gamma = a) \wedge \exists y(y \cdot B = a) \supset A \leq a]$$

となる（ここで $\sim_{\beta}^{\gamma} (O\gamma + N = M\beta)$ は「MはNの正の倍数である」を意味する）。

また、例えば、「実変数xの実関数φ(x)は区間[A, B]の到る所で連続である」は

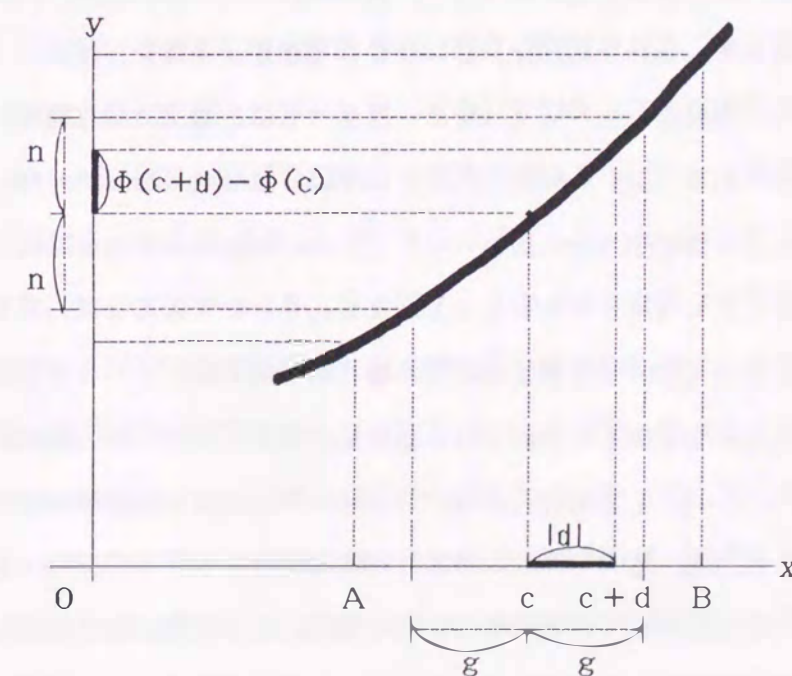


となる（ここで，“≤” “>” は実数の間に成り立つ関係の表現と仮定する）⁽¹⁷⁾。現代の記法では、次のようになる：

$$\forall c [A \leq c \leq B \supset \forall n \{n > 0 \supset \exists g (g > 0 \wedge$$

$$\forall d (A \leq c+d \leq B \wedge -g \leq d \leq g \supset -n \leq \phi(c+d) - \phi(c) \leq n)\}]$$

「AとBの間の区間の任意の実数cを取るとき、任意の正実数nに対して、正実数gが存在して、dが、その絶対値がgの幅に収まり、cとの和が区間に収まるような任意の実数であれば、cにdを増分したc+dに対する関数値φ(c+d)と、cに対する関数値φ(c)との差φ(c+d) - φ(c)の絶対値は、nの幅に収まる」



このような例を挙げることにより、フレーゲは

「これまで言葉によってのみ表現可能であったきわめて広範囲の数学的関係を提示するのに、少数の新しい記号だけで十分である」⁽¹⁸⁾

ことを示そうとする。そして、この論文の最後で自らの概念記法の特徴を、ブールの記号法と比較して、六項目に纏めている：⁽¹⁹⁾

- ①概念記法は、算術や幾何の記号と結びついたときその内容を提示できることを目指している点で、ブールの記号より広範囲の目的に適う；
- ②内容を度外視して純粹論理の分野に限っても、概念記法は一般性の記法〔つまり量子〕のおかげでブールの式言語より広い領域をカバーする。
- ③概念記法は、ブールの論理のように二つの部分（概念間の関係を示す第一命題と判断間の関係を示す第二命題）に分かれることを避ける。
- ④ブールの式言語に見られる積と和というどちらかと言えば貧弱な結合様式とは対照的に、概念記法は、科学で実際に必要な概念形成を表現する。
- ⑤概念記法は、論理的関係を表すのにより少ない原始記号しか、従ってより少ない原始法則しか必要でない。
- ⑥概念記法は、ブールが取り組んでいる類の問題の解決に応用可能であり、しかも計算のためのより少数の規則を用いることでそれが可能である。

概念記法とブールの記号法を比較したこの長い論文が雑誌に載らなかったのも、これを短くし、記号も複雑なものは使わずに言葉で説明した論文「ブールの論理的式言語と私の概念記法」⁽²⁰⁾を書くが、これも投稿した雑誌から掲載を拒否された⁽²¹⁾。

しかし、これらの掲載拒否にもめげず（！）、フレーゲは、論文「概念記法の学問的正当性について」を執筆する⁽²²⁾。これは『哲学・哲学批評誌』（Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik 81, SS.48-56）に掲載された。ここで、彼は概念記法を算術の式言語を補完するものとして捉える。フレーゲによれば、既存の算術の式言語は言葉の介在なしで算術の内容を正確に表現できる点で優れているが、論理形式を表現できないという欠点も持っている。それに対して、ライプニッツの伝統に繋がるブール、R. グラスマン、S. ジェヴォンズ、E. シュレーダーといった近年の記号言語は、論理形式を表現できる反面、算術や解析の内容を的確に表現する受け皿がない（ブールの記号は数学のさまざまな領域の内容を盛り込む余地を欠いている）。真の概念記法と呼べる記号言語は、①論理的関係を表す単純でマスターしやすい表現方法を持ち、②表現内容との緊密な結びつきに適うものであり、③見通しの良さのために二次元的表記法が利用されるものでなければならない（フレーゲは視覚の優れた情報把握力に訴える空間言語の、音の一次元的時間系列に訴える音声言語に対する優位性まで論じている）。「算術の式言

語に倣って作られた純粹思考のための式言語」という『概念記法』のサブ・タイトルを引用しながら、このような望ましい特性を持つ概念記法を生み出すため、内容表現の能力を生かしつつ算術の式言語を論理的関係を表す記号によって補完したものが、自らの概念記法である、とフレーゲは主張する⁽²³⁾。

さらに、「概念記法の目的について」⁽²⁴⁾を書いて、自らの仕事の意義の普及に努めた。この中で彼はシュレーダーの上述の書評に答えることを意図して、ブールの記号をなぜ使わなかったかを説明している。ブールは論理演算を表現するのに算術固有の記号、例えば“+”を借用するが、それらの記号は通常の算術の演算を表現するのに必要だから、論理に関する新しい記号を作った、と彼は言う。その目的は、ブールのような“calculus ratiocinator”（推理計算）ではなく、“lingua characteristica”（記号言語）であり、彼の概念記法なしでは『概念記法』第Ⅲ部に登場するような命題を的確に表現できない、とフレーゲは主張する。

3. 『算術の基礎』とその受容

1884年、『概念記法』の不評の原因の一つが彼の記号言語であったことを考慮して、フレーゲはドイツ語で『算術の基礎』（Die Grundlagen der Arithmetik, 以後GLAまたは『基礎』と略記することがある）を書いた。「数の概念についての論理・数学的研究」(Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl)という副題を持つこの書物の中で、フレーゲは「数」を定義すると同時に、ライプニッツ、カント、ホッブズ、ロック、ヒューム、ミル、ジェヴォンズ、シュレーダー、カントール等を取り上げ、彼らの数学の哲学を批判的に論じた。というのも、当時は、フレーゲに言わせれば、「自然数」はおろか「数1」の概念すら満足に与えられてはおらず、諸家の定義は曖昧で一致していなかったからである。彼は言う：

「[数1とは何かといった] そういった問いに対しては、おそらく、大部分の数学者たちも十分な答えを何ら用意してはいないだろう。その最も手近に存し、明らかにきわめて単純である考察対象について不明であることは、学問にとって恥ずべきことではないか？数とは何かについては、なおのこと、何も言うことはできないだろう。偉大な学問の基底に存する概念が難点を曝け出しているならば、それをより厳密に研究し、その難点を克服することが、避けられない課題となろう。

とりわけ、算術の全建築の基礎への理解がなお不十分であるかぎり、負数、小数複素数については、より十分な明確さに到ることは難しいであろう。」⁽²⁵⁾

そして、他の論者の説を検討することの意義について、フレーゲはこう述べる：

「さて、正の整数に関して、そこには何の困難も存在せず一般的合意が支配しているという幻想を打破するには、ここで問題となっている問いに関する哲学者や数学者の意見をいくつか論評するのがよい、と私には思われた。彼らの意見の一致はきわめて僅かであって、まさに正反対の言葉が現れるほどであることが分かるだろう。例えば、ある人々は、単位が互いに同等であると言い、別の人々は、それらは異なると考えている。そして、両者とも自らの主張に対して容易には退け難い論拠を有している。このために私は、より厳密な研究の必要性を呼び覚ますよう求める。それと同時に、他の人々によって表明された意見を予め解明することによって、私自身の見解の基盤を明らかにしたい。それによって、他のやり方は目的地に導かれないこと、私の意見は多くの同等に正当化される意見の一つではないこと、が予め納得される。それによって、私は、少なくともその主要な点において、その問いを最終的に解決したいと望んでいる。」⁽²⁶⁾

つまり、フレーゲは、数の論理的な定義を与えることによって算術の論理的基礎づけを完成させるという自分のプログラムが決定的であることを示すために、他の見解を批判的に検討するのである。特に、フレーゲが批判の対象としたのは、数学の哲学における当時の支配的学説である以下の三つの考え方である：

- ①心理主義：「数」は心的構成物であり、心的過程の記述は、そのまま数学的命題の証明である；
- ②形式主義：「数」とは、結局は数詞であり、算術は記号操作の規則にすぎない（後のヒルベルトによる洗練された「形式主義」とは区別されるもの）；
- ③（極端な）経験主義：数学の命題はすべて経験からの帰納(induction)の産物にすぎない（フレーゲはこれをG L Aの序で菓子パンと小石の算術と揶揄した）。

ところで、すでに前節でも見たように、フレーゲが考える「論理」の実質はブールのそれよりはるかに広範囲であり強力であって、カントールの「集合論」に対応するものを含んでいた。実際、『基礎』の§85-§86にカントールの無限数についての好意的な言及がある。カントールの「濃度」(Mächtigkeit, power)をフレーゲは自らの基数と同じもの

と考えており、フレーゲの「論理主義」のテーゼはこれを完全に論理的に定義することを要求していた。事実、両者の定式化の道具には次のような対応があると考えられる：

カントール		フレーゲ
(1) クラスまたは集合	↔	概念の外延
(2) メンバー・シップ “ $\in$ ”	↔	対象の概念への帰属
(3) 1対1対応(写像)	↔	1対1対応の関係

フレーゲは『算術の基礎』の受容を期待したが、今度も期待は裏切られる。『基礎』の出版直後に出た三つの書評、すなわち、R. Hoppe と Lasswitz と G. Cantor の書評のいずれも好意的ではなかった⁽²⁷⁾。ただ、既に触れたように、フッサールが『算術の哲学』(Philosophie der Arithmetik 1891)で取り上げ、デデキントが『数とは何か、何であるべきか?』(Was sind und was sollen die Zahlen?)の第二版(1893)でこの書に言及していることは、フレーゲにとって救いであっただろう。

先の三つの書評のうち、カントールの批評は誤解に基づいているようである。カントールは数学の基礎としての算術の基礎を新しい方法で探究するフレーゲの試みを一応評価するものの、「概念の外延」という「学校論理学」でいうようなものに数概念を基礎づけることは「正当性の転倒」であり、またフレーゲの「基数」と自分の「濃度」とは見掛けは同じかもしれないが、その背後にある考え方の違いにより異なるものと見なければならぬ、と論じている⁽²⁸⁾。これに対してフレーゲもすぐ短い応答をした⁽²⁹⁾。しかし、ここでも彼はカントールとの違いには無頓着であるようである。しかし、後に、カントールの一連の実無限についての論文、特に1890年に一冊にまとめられた哲学的論文⁽³⁰⁾を読んでからは、「概念の外延」とカントールの集合(Menge)が同じであるという見解を修正し、カントールのMengeには不確かな所があるようになる。フレーゲはこれを「カントールの超限理論の書評」⁽³¹⁾で述べている。

もう一人の評者ホッペ(Hoppe)は、バイナムによれば『数学物理学論集』(Archiv der Mathematik und Physik)の編者(1873-1900)であり、影響力も大きく尊敬もされていた、という⁽³²⁾。彼は「心理主義」を提唱しており、フレーゲの批判を個人攻撃と受け取り、感情的な批評をした。他の学者も自分と同意見で、フレーゲの理論に価値を認めないだろう、と予言すらした。不幸なことにそれが的中し、『基礎』は15年間(1900年頃ラッセルが注目するまで)、一部の例外的場合を除いて、一般には無視された。

今日、分析哲学の古典的作品と目される『算術の基礎』がこのような処遇を受けたとい

うのは不可解とも言える。その理由として、バイナムは次の四点を挙げている⁽³³⁾。

- (1) フレーゲの見解は精妙であり、彼のアイディアを理解するのは大抵の人にとって難しいという一般的な側面；
- (2) 第一冊目の『概念記法』の奇妙な記号の印象が強すぎて敬遠させたこと；
- (3) フレーゲが批判する「心理主義」「形式主義」「経験主義」は、いずれも十九世紀の「数学の哲学」の手強い相手であること；
- (4) 三つの国の五人の有力学者（すなわち、J. ヴェン、E. シュレーダー、R. ホッペ、G. カントール、P. タンヌリ）がフレーゲに冷たかったこと。

4. 論理的意味論・『算術の基本法則』・パラドクス

『算術の基礎』(1884)から『算術の基本法則』第I巻(1893)までの時期は、フレーゲにとってきわめて充実した時期であり、「論理主義」の遂行のために必要となった論理の意味論の整備と、『算術の基本法則』の論理体系の構築が始められた。1885年に彼は同僚へ向けての講演「算術の形式的理論について」の中で⁽³⁴⁾、①論理と算術の間には境界がないこと、②論理の一般法則に還元できない算術の推論様式はないこと、③算術が個別なものから分離されるべきであるならば、その基本概念もそうすべきであり、「クラス」に代えて「概念」を採用するのは論理での慣用に従うためであること、等を述べる。「形式主義」の批判がこの論文の主眼点であるが、前半では認すべき算術の形式的理論とし1、算術を定義と論理法則から導くという「論理主義」の理念が明確に述べられている。

さて、この時期になされた論理の意味論の整備と論理の拡張は次のようなものである。まず「関数」の概念が拡張される。関数と対象とが判然と区別され、任意の対象が関数のアーギュメントになりうることを確認される。対象にはレベル（階：Stufe）の区別はないが、関数にはその区別が設けられる。第一階の関数がアーギュメント（項）として対象を取るのに対して、第二階の関数はアーギュメントとして第一階関数を取る、といった具合である。これに伴い、概念が常に真理値を値とする関数と見なされる。さらに、概念の外延の一般化としての関数の「値域」(Werthverlauf)が導入される。『概念記法』で内容の同一性を表す記号とされた“≡”が“=”に統一される。以前の記号（または語）の「内容」(Inhalt)が意義(Sinn)と意味(Bedeutung)という二つの局面に分けて捉えられる。同一性“a=b”は、“a”と“b”という表現が異なる仕方での指示対象を

いみすること、と解釈される。“a”と“b”の表現の相違は指示の仕方、つまり意義(Sinn)の相違を含むが、指示対象、つまり意味(Bedeutung)が同一であることが、この同一性が真であることを保証するのである。そして、文が表現する意義が思想(Gedanke)であり、文の意味が真理値となる。また記述子“\xi”が導入され、形式主義と一線を描くための使用(use)と言及(mension)の区別、通常文脈と非通常文脈(oblique context)の区別なども考察される。このような、現代の言語哲学の基盤となる考えが、この時期の論文「関数と概念」「意義と意味について」「概念と対象について」等⁽³⁵⁾で詳細に検討される（本論第7章参照）。

このような内的な充実とは裏腹に、フレーゲの主著である『算術の基本法則』は外的な事情によって産みの苦しみを味わう。つまり、記号の多用からの印刷上の困難と財政上のリスクのために本屋に出版を躊躇^{ためら}わせたのである⁽³⁶⁾。結局、イエナのヘルマン・ポール(Hermann Pole)が二分冊にすることで出版を引き受けるが、第I巻は第II巻の評価次第ということだったらしい。こうして、『算術の基本法則』第I巻が1893年に出版される。この中でフレーゲは、厳密に一部の透き間もない証明によって算術を論理法則と定義から導出するという、年来の「論理主義」の遂行を果たす。こうして、厳密さに関しては十分の自信があったが、ただ一つ基本法則V：

$$\text{'}\varepsilon F(\varepsilon) = \text{'}\alpha G(\alpha) \quad = \quad \forall (F x = G x)$$

（概念Fの値域と概念Gの値域が同一であるのは、FとGが同一の対象に当てはまるとき、かつそのときにかぎる）

に懸念が残った。これだけが、他の基本法則ほど明快でないと思われた。しかし、この法則無しでは、事実上、数の理論を展開できないと思われる。これが純粹論理の法則であることは、誰にも反対できないことだ、とフレーゲは信じた。しかし、この基本法則こそ、後にフレーゲがパラドクスの元凶と見なすものである。

『算術の基本法則』第I巻に対しては、二つの余り好意的ではない書評が出たにすぎなかった。それを除くと、全くの無視・沈黙が学界の反応だった。当然、出版社は二巻目の出版を躊躇う。しかし、フレーゲは諦めず、一先ず二巻目の出版を延期する。そして、十年後の1903年に自己負担で出版する。二つの書評のうち、R. ホッペのものは、たった三行しかなく、しかも不正確な要約がなされている代物で、ほとんど書評の体をなしていないものだった⁽³⁷⁾。もう一つの書評はベアノのもので、これも好意的ではないが、重要である。というのは、フレーゲとベアノの実りある文通のきっかけとなったからである。

それによって、1900-1901年頃、ラッセルがフレイゲを読むことになる。ペアノもフレイゲと類似した発想によって数学の言明を論理的に分析するための記号論理を開発していた。ペアノの書評の主眼は、フレイゲを取り上げるというよりは、自分の記号法が優れていることの宣伝にあった⁽³⁸⁾。ペアノはフレイゲをライヴァルと見たが、フレイゲの著作を詳しく研究した訳ではないので誤解も多かった。そこで、フレイゲはペアノに対する厳しい返答「ペアノ氏の概念記法と私自身のものについて」を書く⁽³⁹⁾。

『算術の基本法則』（GGA）第Ⅰ巻の出版(1893)以後、ラッセルのパラドクスが知られるまで(1902)の九年間も、フレイゲにとって実り多い時期であった。この時期の後半に、GGA第Ⅱ巻の草稿が完成し、彼の忍耐強い努力がいく分かは報われた。1896年にフレイゲは名誉正教授（ordentlicher Honorarprofessor）に昇進している。多分、正教授の地位も提供されたのであろうが、彼はそれを辞退したのか？バイナムは管理的雑務の多い「正教授」の地位よりはこちらを選んだのかもしれない、と推測している⁽⁴⁰⁾。フレイゲの同僚のE. アベも辞退したという。「名誉正教授」は給与の点でも条件が悪かったというが、フレイゲはアベがその顧問をしていたカール・ツァイス財団から援助を受けたらしい⁽⁴¹⁾。ともかく、彼はこの時期、充実していた。彼がフッサールの『算術の哲学』の書評を書いて（1894年）、フッサールを心理主義から論理主義へ改宗させたのもこの頃である。GGA第Ⅱ巻の完成が近い頃、彼は算術が論理の一分野であることを最終的に証明した、と確信した。フレイゲのものより優れていると主張するペアノの記号論理やシュレーダーのそれを論破したと考えた。

この幸福の頂点で、イギリスの若い論理学者バートランド・ラッセル（Bertrand Russell）から送られてきた1902年6月16日付の手紙は、フレイゲに大きな衝撃を与えるものだった。それは、フレイゲの体系の中に論理的な矛盾（後に発見者の名に因んで「ラッセルの矛盾」と呼ばれるようになるもの）——概念の外延＝値域に関する矛盾——が発見されたことを知らせる手紙だった。フレイゲは、1902年の夏、ラッセルと文通を続けて矛盾を解消しようとするが上手くいかない。『基本法則』第Ⅱ巻の印刷の完成が迫っていた。結局、付録に、ラッセルの発見を讃え、基本法則Vを制限してパラドクスの出現を何とか食い止める策を追加して、翌1903年に出版する。制限された基本法則でどれだけ算術が展開できるか、それをチェックする余裕はなかった。またその当座の防止策が万全なものであるのかも、明らかではなかった。

ラッセルも『数学の諸原理』でこの矛盾を取り上げた（1903年）。今日、われわれ

は修正された体系からも矛盾が出ることを知っている（本論第8、9章参照）。しかし、フレイゲがその点に気づいていたのかどうか、は分からない。長い間、彼は困難は克服され得る、と信じていたらしい。実際、1913-14年、彼はイエナ大学で論理主義のプログラムに基づく講義を行っている（「数学における論理」⁽⁴²⁾）。しかし、『基本法則』第Ⅱ巻出版の後、彼は何年間も論理や算術の基礎に関する仕事を公表しなかった。しかし、その間、フレイゲの影響はラッセル、ウィトゲンシュタイン、カルナップといった若い世代に強く現れるようになる。ラッセル自身が「フレイゲの仕事は1901年に自分が発見するまでは全然知られていなかった」といった説を流布させたが、これは誇張であるばかりか事実誤認を含む。フレイゲの仕事が全く知られていなかったということはなかった。フレイゲの仕事は、ヴェン、シュレーダー、カントール、フッサール、ペアノによって論評され批判されている。『概念記法』はすでに述べたように六人の論者から批評され、ペアノの仕事に引用され、ヴェンの著書でも言及された。そして、フッサールもペアノもフレイゲに注目しフレイゲから影響を受けた。

ラッセルはフレイゲを「発見した」最初の人ではないが、フレイゲが論理や数学で成し遂げた「革命的進歩を理解した」最初の人ではある。『数学の諸原理』を皮切りに、ラッセルは新しい論理学を哲学的問題に応用することの生産性を喧伝するが、フレイゲの名前がその際にしばしば引かれることになる。すなわち、ラッセルを通じて、フレイゲに始まる分析哲学が成長し始める。しかし、新しい記号論理学の方面では、ラッセルとホワイトヘッドの『数学原理』の名声の陰に隠れて、彼らのものにひけを取らぬ厳密さと明晰さを備えた『算術の基本法則』の記号法は無視された。

5. パラドクス以後

『基本法則』第Ⅱ巻出版（1903年）以後、フレイゲはどちらかと言えば不幸な生活を送る。ラッセルはフレイゲを「失望の人」とする神話を流布させたが、実際には、少なくとも1914年頃までは、論理主義の遂行が可能である、とフレイゲは考えていたようである⁽⁴³⁾。問題は、彼の健康問題と、1905年に妻マルガレータを亡くし、幼い養子アルフレート（Alfred）がフレイゲの手元に残されたことである。さらに、ヒルベルトとの論争、ヒルベルトの代弁者コルセルト（A. Kolselt）との論争がある（ただし、ヒルベルトがコルセルトと全く同意見であったかどうかは疑問である）。1899年に出版さ

れるヒルベルトの『幾何学の基礎』の講義草稿の写しを読んだフレーゲは、いくつかの疑問を自らの考えを述べながら手紙で問う形でヒルベルトとの文通を始める。フレーゲは、「公理」と「定義」の公理体系における位置づけの点でヒルベルトの見解が不満であった。ヒルベルトは論争の始まった手紙の二信目から多忙を理由に文通を打ち切っている。後に詳しく検討するように（本論第11章）、フレーゲの論点は一つ一つを取り上げるならば正しいものであるが、ヒルベルトの意図と彼の試みの新しさを十分に評価できなかった。もちろん、ヒルベルトの公理論もこの時点ではまだ曖昧な所があり（例えばいわゆる陰伏的定義の扱い等）、1920年代に形をなす「証明論」のプログラムは未だ荒削りな素描の状態であった。しかし、ユークリッド幾何学を初めて近代的な観点から厳密に公理化して、モデル論的な観点から公理の無矛盾性と独立性を証明するという、ヒルベルトの『幾何学の基礎』に端を発する新しい方法論は、二十世紀数学の大きな潮流を形作る。抽象的な構造の学としての数学、という観点に与えたヒルベルトのこの著書の影響は甚大である。しかし、フレーゲは、幾何学があくまで直観によって支えられるものであり、ヒルベルトのように幾何学を純粹論理学に還元すること（フレーゲはヒルベルトの仕事をこのように理解した）には無理がある、と考えた。

いずれにせよ、フレーゲは、1918年の引退まで活発に研究活動を続けたらしい。確かに、パラドクスの出現のせいで、算術の論理的基礎づけに関する公表された成果はこの時期少ない。しかし、『概念記法』の新しい応用を考え、数の基礎についての他の学者の説を批判的に研究している。カルナップは「実際の年齢より老けて見えた」と書き残しているが⁴⁴⁾、研究意欲は依然として旺盛であった。事実、失われたレーヴェンハイムとの文通からも、ヒルベルトに受け入れられるような形式的算術の構成可能性を考えていたことが伺えるという⁴⁵⁾。カルナップの報告によれば、カルナップは1910年秋、フレーゲの「概念記法」の講義Ⅰに出席した。「彼の新しい論理学が全算術の構成に使われる」というフレーゲのコメントに興味を覚えて、再びカルナップはフレーゲの講義「概念記法Ⅱ」に出る。さらに、カルナップはフレーゲの別の講義も受講した。それが「数学における論理」であった⁴⁶⁾。学生であったとはいえ、カルナップのような人を惹きつける講義をフレーゲは行っていたのであり、この頃（1911年秋）、マンチェスターから訪ねてきたウィトゲンシュタインにラッセルの所に行くよう勧めている。

フレーゲは晩年の数年を、再び「論理」の研究に捧げた。1918年に「論理学研究」という論文シリーズの最初の二つである「思想」「否定」が発表された⁴⁷⁾。そして、1

923年に第三番目の論文「複合思想」が現れる⁴⁸⁾。1918年頃からフレーゲは算術の論理的基礎づけという年来のテーマを諦めていたのかもしれない。最晩年の1924-5年に書かれたいくつかの遺稿⁴⁹⁾の中に、算術が論理の一部分であるという主張を完全に断念していることが読み取れる。ラッセルのパラドクスからの抜け道をフレーゲが見つけ出していたのかはどうか、は分からない。しかし、その為の新しい試みであるラッセルのタイプ理論やツェルメロの公理的集合論には不満であったようである。というのは1924-5年頃の遺稿で「集合論の矛盾が生じ、それが集合論そのものを破滅させた」と言っているからである⁵⁰⁾。

こうして、フレーゲは数が論理的な概念のみから構成される論理的对象であるという信念を放棄したようである。しかし、彼は数がある種の対象である、という信念は貫いた。そして、彼は算術の新しい基礎を幾何学に求めた：

「それについて考えれば考えるほど、算術と幾何学は同じ基礎、すなわち幾何学から成長してきた、従って、全数学は実際には幾何学である、と私は確信するようになった。」⁵¹⁾

彼は数をガウス平面上の点と同一視することによって、算術に必要と彼が考える抽象的对象を幾何学によって確保しようとした。こうして、彼は、『概念記法』執筆の時期以前から抱いてきた信念、すなわち、算術は論理に起源を持つ分析的でア・プリオリな知識であり、幾何学は「幾何学的直観」に基礎をおく総合的でア・プリオリな知識であるという信念を放棄する。

しかし、この新しい算術の基礎づけ、幾何学による算術の基礎づけを十分に展開するための時間は、フレーゲには残されていなかった。彼は、論理と数学と哲学に大きな足跡を残したが、その問題の一部は未解決のままで、1925年、世を去った。

われわれは、以下で、フレーゲの最初の、そして生涯の大部分の努力目標であった、算術の論理による基礎づけという観点に踏み止まって、そこからフレーゲの思索を跡づけることにする。

- (1) Michael Dummett, FREGE: Philosophy of Language, Harvard U.P. (1973¹, 1981²).
- (2) 1980年代以降の論理・数学の哲学を中心とする解釈の先鞭を切ったのが, Crispin Wright, Frege's Conception of Numbers as Objects, Aberdeen U. P. (1983)である。その後の代表的な仕事には以下のものがある。Terence Parsons, "On the Consistency of the First-order Portion of Frege's Logical System", Notre Dame journal of formal logic, 28 (1987), pp. 69-79; M. Dummett, FREGE: Philosophy of Mathematics, Harvard U. P. (1991); George Boolos, "The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic", On Being and Saying: Essays in honor of Richard Cartwright, J. Thomson (ed.), MIT Press (1987), pp.3-20; Richard G. Heck, Jr., "The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik", The journal of symbolic logic 58 (1993), pp.570-601. これらの論文および関連する論文が次の二つの論文集に収められている: William Demopoulos (ed.), Frege's Philosophy of Mathematics, Harvard U. P. (1995), Matthias Schirn (ed.), Frege: Importance and Legacy, Perspectives in Analytical Philosophy 13, Walter de Gruyter (1996).
- (3) フレーゲの伝記的事項は次のバイナムの本に拠る: Gottlob Frege, Conceptual Notation and related articles, translated and edited with a biography and introduction by Terrell Ward Bynum, Oxford (1972).
- (4) G. Frege, "Ueber eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene", KS SS.1-49, CP pp.1-55. (著作略号については註の後に纏めた一覧を参照)。
- (5) G. Frege, "Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen", KS SS.50-84, CP pp.56-92.
- (6) "Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene", Berichte über die Verhandlungen der königlichen sächsischen Gesell-

schaft der Wissenschaften zu Leipzig 48 (1896), SS.361-378.

- (7) Cf. 藤村龍雄「論理学の革命」『岩波講座現代思想4: 言語論的転回』岩波書店 (1993), 117-141 頁。
- (8) T. W. Bynum, op.cit. pp.13-14.
- (9) 藤村前掲論文 122頁。
- (10) Bynum, op.cit. p.16.
- (11) 六人の学者の書評の英訳が Bynum, op.cit. pp.209-235 にある。
- (12) Bynum, op.cit. pp.232-234.
- (13) Bynum, op.cit. pp.218-232.
- (14) G. Frege, "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift", (1880/81), NS SS.10-52, PW pp.9-46.
- (15) 三つのジャーナルとは、クライン (F. Klein) を編者とする『数学年報』 (Mathematische Annalen) と、シュレーミルヒ (O. Schlömilch) の『数学物理雑誌』 (Zeitschrift für Mathematik und Physik), およびウルリッヒ (H. Ulrich) の『哲学・哲学批評誌』 (Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik) である。Bynum, op.cit. p.21脚註6参照。
- (16) NS S.26, PW p.24.
- (17) NS S.27, PW p.24.
- (18) NS S.30, PW p.27.
- (19) NS SS.51-52, PW p.46.
- (20) "Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift" (1882), NS SS.53-59, PW pp.47-52.
- (21) 掲載を拒んだジャーナルは、アヴェナリウス (R. Avenarius) を編者とする『科学哲学季刊誌』 (Viertel Jahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie) であった。アヴェナリウスからフレーゲに宛てた断りの手紙が残っている: WB S.1.
- (22) "Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift" (1882), BuA SS.106-114, Bynum, op.cit. pp.83-89.
- (23) Ibid, BuA SS.112-114, Bynum, op.cit. pp.88-89.
- (24) "Ueber den Zweck der Begriffsschrift", Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 16 (1882-3), SS.1-10, BuA SS.97-106, Bynum, op.cit.

pp.90-100.

(25)G L A, II.

(26)G L A, IV-V.

(27)R. Hoppeの書評はArchiv der Mathematik und Physik 2 (1885), Literarischer Bericht VII, SS.28-35 にある。また, Lasswitz の書評は Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik 89 (1886), SS.143-8 があり, Cantor のそれはDeutsche Literaturzeitung 6 (1885), SS.728-9 があり, 彼の全集にも収録されている: G. Cantor, Gasammelte Abhandlungen [以下G Aと略記することがある], Olms (1962).

(28)G. Cantor, G A SS.440-2.

(29)G. Frege, "Erwiderung auf Cantors Rezension der Grundlagen der Arithmetik" Deutsche Literaturzeitung, 6 (1885), S.1030, K S S.112.

(30)G. Cantor, "Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten", G A SS.378-439.

(31)G. Frege, "Rezension von : Georg Cantor, Zur Lehre von Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik", Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik, 100 (1892), SS.269-72, K S SS.163-66.

(32)Bynum, op.cit. p.29.

(33)Bynum, op.cit. p.29-30.

(34)"Ueber formale Theorien der Arithmetik", Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, 19 (1885) SS.94-101, K S S.103-111, C P pp.112-121.

(35)"Funktion und Begriff" (1891), K S SS.125-142, "Ueber Sinn und Bedeutung" (1892), K S SS.143-162, "Ueber Begriff und Gegenstand" (1892), K S SS.167-178.

(36)Bynum, op.cit. p.34.

(37)Bynum, op.cit. p.38. R. Hoppeの書評は, Archiv der Mathematik und Physik 13 (1895), Literarischer Bericht XLIX, S.8 にある。

(38)Bynum, op.cit. p.38. G. Peanoの書評は, Rivista di mathematica 5 (1895)

pp.122-8, reprinted in G. Peano, Opera scelte, Rome(1958), pp.187-95

にある。

(39)"Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene", Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, 48 (1896), SS.361-78. K S SS.220-233, C P pp.234-248.

(40)Bynum, op.cit. p.42.

(41)バイナム (Bynum, ibid.)によれば, フレーゲはカール・ツァイス財団 (Karl-Zeiss Stiftung)から年間三千マルクを支給されたという。カール・ツァイス財団は, イエナ大学に年間十萬マルクを提供していた。カール・ツァイス社はレンズ等の精密器械で現在も世界的に有数の会社であり, イエナを本拠地としている。エルンスト・アベはこの会社の技術顧問をしていて, 野本によると (野本和幸「フレーゲ著作集ニュースレター」1994.6.7), アベは当時, イエナの町の名士だったらしい。今でも町のあちこちにアベの銅像が見られるという。1874年にフレーゲを私講師に推し, 1879年に員外教授に推挙したのも彼であったが, フレーゲはおそらく, このアベの推挙でこの財団から基金を得たのだろう。アベはツァイス家がレンズ・カメラ工場を建てるのを援助しており, 工場の収益の45%を得ていたという。この収益金を元手にアベはカール・ツァイス基金を作った。後, アベは Rhoderich Zeiss と共同工場を建てて, 基金を大きくしたという。

(42)"Logik in der Mathematik", N S SS.219-270, P W pp.203-250.

(43)Bynum, op.cit. p.50.

(44)R. Carnap は自伝: "Carnap's intellectual autobiography", P. A. Schilpp (ed.), The Philosophy of Rudolf Carnap, Northwestern U.P. (1963), pp.3-84 でこう述べている:

「1910年の秋, 好奇心からフレーゲの「概念記法」の講義に出たが, “誰かが面白いと言っている” というある友人の言葉以外には, その人についても主題についても何も知らなかった。講義に出ていた学生はほんの僅かだった。フレーゲは実際の年齢より老けて見えた。彼は小柄で, シャイな風で, 極端に内向的であった。彼はめったに聴講者の方を見なかった。われわれはいつも彼の背中だけ見えていたが, 彼は黒板に彼の記号法の奇妙な図式を描いて, それを説明した。講義

中も講義が済んでからも、学生は誰一人質問もコメントもしなかった。議論の可能性など問題外だという雰囲気だった。」(Carnap, op.cit. p.5)

(45)レーヴェンハイムとの往復書簡は大部分失われているが、WB SS.157-161 にその目録が挙げられている。

(46)「学期の終わりに、フレーゲは彼がわれわれに教えてくれた新しい論理学が全数学の構成に役立つということを語った。この話はわれわれの好奇心をかき立てた。1913年の夏学期に、友人と私は「概念記法II」の講義に出席しようと決心した。……「概念記法」のこの進んだコースでは、フレーゲは、彼の出版したものの中には無いようなさまざまな応用、例えば、関数の連続性や関数の極限の定義、通常収束と一様収束の違い等の表現への概念記法の応用について説明した。……1914年の夏学期に、私は、フレーゲの「数学における論理」という講義に出た。ここで彼は、数学において慣例となった考え方や定式化を批判的に吟味した。彼は、数学者たちが統一された、十分に基礎づけられた数学の体系の構築すら目指していないように見え、従って、基礎についての関心を欠いているという事実を嘆いた。彼は、公理や定義や証明についての慣例化した定式化の中に、また著明な数学者の仕事の中にさえ見出される一定のルーズさを指摘した。…特に、彼は一定の基本的区別、例えば、記号と記号が表すものの区別、論理的な概念と心的像や行動の区別、関数と関数の値の区別等への注意が足りないことを批判した。」(強調はカルナップによる、Carnap, op.cit. pp.5-6)

(47) “Der Gedanke: Eine logische Untersuchung”, Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus, 1 (1918), SS.58-77, KS S.342-62.

“Die Verneinung: eine logische Untersuchung”, Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus, 1 (1918), SS.143-57, KS SS.362-78.

(48) “Logische Untersuchungen, Dritter Teil: Gedankengefüge”, Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus 3 (1923), SS.36-51, KS SS.378-94.

(49)次のような論述である(頁はいずれもNSのもの): “Zahl” (1924) SS.284-5, “Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften” (1924/25) SS.286-294, “Zahlen und Arithmetik” (1924/25) SS.295-97, “Neue Versuch der Grundlagen der Arithmetik” (1924/

25) SS.298-302.

(50)上の “Erkenntnisquellen”, NS S.289.

(51) “Zahlen und Arithmetik”, NS S.297.

【著作集略号】

BuA: Begriffsschrift und andere Aufsätze, Zweite Auflage, hrsg. von Ignacio Angelelli, Georg Olms (1964).

KS: Kleine Schriften, Zweite Auflage, hrsg. von I. Angelelli, Olms (1990).

CP: Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy, ed. by Brian McGuinness, Basil Blackwell (1984).

NS: Nachgelassene Schriften, Unter Mitwirkung von Gottfried Gabriel und Walburga Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach, Zweite, revidierte Auflage, Felix Meiner (1983).

PW: Posthumous Writings, ed. by H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach with the assistance of G. Gabriel and W. Rödding. Translated by Peter Long, Roger White with the assistance of Raymond Hargreaves, Basil Blackwell (1979).

WB: Wissenschaftlicher Briefwechsel. Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraarat, Felix Meiner (1976).

PMC: Philosophical and Mathematical Correspondence. Edited by G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraarat, abridged for the English edition by Brian McGuinness and translated by Hans Kaal, Basil Blackwell (1980).

第Ⅱ部 出発点：概念記法

第2章 論理学の刷新

—『概念記法』第Ⅰ，Ⅱ部研究—

1. 「序」

論理は世界を支配する。何人も、論理の法網をくぐり抜けることはできない。むしろ、専制君主が民衆を政治権力によって支配するという仕方と同じ仕方で、あるいは宗教的カリスマが人の心を目に見えない形で束縛するという仕方と同じ仕方で、論理が世界を支配する訳ではない。論理はごく目立たない形で散文的に世界を支配する。人は言葉を語りつつ同時に語らないということとはできない。また「 $2+3=5$ 」という命題が真であると同時に偽であるということも有り得ない。通常、われわれは思考過程において、このような論理をことさら意識することはない。丁度、われわれが片時も忘れず、休むことなく呼吸しているにも関わらず、そのことを意識さえしないように。しかし、その意識しないこと、当たり前のことこそ論理の強い支配の傍証ではないか。意識されないほど、当たり前であるほど、論理の支配は世界に浸透し、われわれの思考を貫いている。

しかし——、と人は疑うかもしれない。世界以外に世界に浸透し、世界を貫く「論理」というものがあるのか？そのような「論理」が世界から取り出せるのか？政治家の言動、素粒子の振る舞い、それらを世界の「論理」と呼ぶにせよ、それは世界の一部でしかないのではないか？世界から取り出された「論理」を言葉で考察するとき、われわれが思考の法則としての「論理」に支配されているならば、そのような「論理」を取り出すことすら不可能ではないか？確かに、ある意味でわれわれは論理の外には出られない。取り出した論理を考察する手段である言葉による思考がその論理に支配されているからである。そこに、ある種の循環がある⁽¹⁾。しかし、われわれはそれを承知で、フレーゲとともに、言語活動・思考活動の原点としての論理を取り出す作業を考察する。

フレーゲが1879年に彼の最初の書物である『概念記法』(Begriffsschrift: BS)⁽²⁾によって彼の論理主義のプログラムを遂行し始めたとき、彼がまず着手せねばならなかったのは、算術を基礎づけるために算術が前提する論理を明示的に定式化することであった。『概念記法』の「序」の冒頭で、フレーゲは、証明を要する真理に二種類のものがあると考えている。第一種の真理は、純論理的な証明によって確立される。これとは対照的に、

第二種の真理は、経験的事実によって支えられる証明によって確立される。フレーゲは、算術の真理は第一種の真理である、という確信を抱いていた。そのことを詳細に示すこと、すなわち算術の諸定理を定義と論理法則だけから導くことが彼の論理主義の遂行に外ならない。そこで、まず論理法則そのものを定式化しなければならない。フレーゲにとって、純粋な論理は同時に思考の法則でもある。思考の法則としての一般性が、論理法則の妥当性を含む筈である。フレーゲは、『概念記法』Iで思考の手段としての記号言語、すなわち概念記法の用法とその意義を説明する。さらに、『概念記法』IIIで算術の基礎づけの準備として、数の系列を論理的・一般的な系列理論の中に位置づける。最終目標は、論理的な概念に還元された算術の法則を、直観の入る余地のない完璧な推論連鎖によって少数の原理から導出して見せることである。ここで導出の基礎になるのは公理体系として整備された論理法則の体系である。この公理体系の構築は『概念記法』IIで行われる。

こうして「概念記法」という構想は、基本的には推論の構造を明確に示すという目的のために立てられた。推論を行うとき、使用される推論規則や公理はすべて明示されねばならない。暗黙の内に別の原理を無断で使用することは許されない。それを許せば推論に透き間が生じるからである。推論の際に重要なものは「概念内容」である。これは客観的な概念の意味内容であり、曖昧さのない形で表現されねばならない。推論の遂行には、われわれが日常使う言語（自然言語）より、式言語（Formelsprache）の方が目的に合う。こうして、推論のような曖昧さの許されない思考を表現するために算術の言語を範とした式言語、それがフレーゲの考案になる概念記法（Begriffsschrift）であった。

フレーゲは、日常言語と自らの式言語との違いを、肉眼と顕微鏡との違いの比喻によって説明する（BS, XI）。肉眼は視野が広く、種々の状況に柔軟に対処できる点で適用範囲も大きい。それに対して顕微鏡は、日常の使用範囲では肉眼に劣るものの、肉眼に見えない微細なものを観察するという特別な使用目的に対しては、肉眼の機能を上まわる。従って、普段の生活では肉眼で十分であって顕微鏡の必要は感じられないが、科学的探究の場面において特別な光学的性能が要求される段になると、肉眼は不十分で顕微鏡が必要となる。これと類比的なことが、日常言語と概念記法（Begriffsschrift）との間にも言える。確かに、日常言語はわれわれの生活上の要求を満たしてくれる。しかし、推論、特に算術のそれを明示的に定式化するという仕事においては、概念記法が便利で有用である。フレーゲは、ライブニッツの普遍記号法の構想を念頭において、自らの概念記法が新しい〈方法〉の創造であると自負している。少なくとも、推論や証明の正しさ（妥当性）が問題と

なる場面で、概念記法が用いられるに十分な価値があると確信していた。

さらに、概念記法は哲学者によっても有効に使われ得る、とフレーゲは考える。フレーゲ自身が、「哲学の難問は言語分析によって解かれ得る」という後世の分析哲学の（少なくともある時期ある学派の）テーゼをこの時点で明確に保持していた訳ではもちろんない。しかし、概念記法という人工言語を使うことにより人間の精神を言葉（日常言語）の束縛から解き放つというフレーゲ自身も抱いた見解が、さまざまなヴァリエーション（例えば、ラッセルの記述理論、前期ウィトゲンシュタイン、カルナップの形式的意味論、モンタギュー意味論等）となって展開したことは事実であり、今日の分析的伝統の起源がフレーゲにあるという解釈はすでに古典的解釈となりつつある⁽³⁾。

フレーゲ自身、自らが今日の分析哲学の父と目されることは予想できなかったであろうが、また彼の論理学上の業績がいかに非凡なものであるかも、明確には自覚できていなかったふしがある。なるほど、フレーゲは自らの新機軸を3点挙げている（BS, VIII）が、論理学史上の革命的業績としてバイナムが挙げる11の項目⁽⁴⁾と比較すると、フレーゲの自己評価はかなり控えめである。フレーゲ自身は、まず第一に、概念記法を考案しただけでも論理学を推し進めたことになることを主張する。（しかも、その記号の新奇さに驚いて正当な評価を放棄しないでほしい、と当時の論理学者に訴えている。）第二の新機軸は、「主語」「述語」の概念に代えて「アーギュメント」「関数」の概念を採用したことである。判断の内容をアーギュメントの関数と見なしたことがいかに多大な実りをもたらすことになるか、このことはフレーゲ自身も十分に心得ていた。第三の新機軸としてフレーゲが考えているのは、いわゆる論理結合詞の定式化である。

いずれにせよ、概念記法は算術に応用されて算術を基礎づけることに用いられねばならない。フレーゲはカントと違い、算術命題は分析的であると考えた（本論第III部）。フレーゲにとって、算術命題の中の諸概念が論理的に定義され、算術の真なる命題が論理法則のみによって証明される、という意味において算術命題は分析的なのである。そこで、算術をそれによって基礎づける論理を、記号の用法と公理体系の観点から、以下『概念記法』I, IIに即して検討していくことにする。

2. 記号および判断（BS § 1 - § 4）

フレーゲは、使用される記号を二種類に区別する（§ 1）。すなわち、量の一般理論で

使われる記号は、数や関数を不定なままで代表し、それらに関する一般性を表現するために用いられる文字（変項）と、 $+$ 、 $-$ 、 $\sqrt{\quad}$ 、 0 、 1 、 2 のような特定の意味を持つ記号（定項）とに分類される。しかもフレーゲは、この基本的な区別を量の理論よりもっと一般的な純粹思考の領域でも使うことを意図している。今日のいわゆる自由変項に当たるものを、フレーゲは「文字」（Buchstabe）と呼ぶ。文字はさまざまな事物を不定なままで代表する。これに対して、 $+$ 、 0 、 1 のような特別の記号は常に一定の意味を担う。こうして、何事かを表示するという記号の基本的機能のうち、これら二つを区別することが記号の用法を理解する第一歩である。特に文字の用法において、文脈に相対的にある意味が与えられると考えねばならないが、その文脈が維持されるかぎり同じ記号は同じものを表示する。例えば、

$$F(x) \wedge G(y) \\ \therefore F(x)$$

において、上段の“ $F(x)$ ”も下段の“ $F(x)$ ”も同一のものを表示する。文字が文脈を離れ、不定なままで任意のあるものを代表する場合、それはそれらのものに関する一般性、法則性を表現する。例えば、文字式：

$$(a+b)c = ac + bc$$

は、 a 、 b 、 c が不定なままで実数を代表するとすれば、任意の3実数間に成り立つ分配律という一般法則を表現することになる。

さて、記号の種類を見定めた後、フレーゲは「判断」（Urtheil）の議論に移っていく。判断とは何か？フレーゲの説明によれば、文（Satz）により表現された内容を真と認めることである。いま、「磁石の異極は互いに引き合う」という文を“A”と略記すると、「磁石の異極は互いに引き合う」という判断は、

┆——A

と書かれる。判断記号⁽⁵⁾：

┆——

の短い縦棒“┆”は「判断線」（Urtheilsstrich）とよばれ、水平線“——”は「内容線」（Inhaltsstrich）と呼ばれる。内容線は、その右側の記号（または記号結合）をまとめた一つの内容（文の意味内容）に結合する働きをする。もちろん、内容には判断可能な内容とそうでない内容がある。例えば、「馬」という語はこれだけでは判断可能な内容を表現してはいないから、本来は内容線の右には位置し得ない。判断記号から判断線を取

り除いて、例えば、

——A

という表現を考えるとする。これは、“A”を先述の文の略記表現とすると、「磁石の異極は互いに引き合う」という判断可能な内容を表現するが、判断ではない。

判断と判断内容（判断可能な意味内容）を区別し、その区別を表現し得る記号を導入したことは、H. スラガの指摘通り⁽⁶⁾、フレーゲの重要な功績の一つであろう。しかし、判断内容と区別される、言わば判断そのものとは論理的にどのような身分のものなのか？判断は、日常生活において、確かにわれわれの行為であり精神作用であり、真であるという意図の下になされる断定である。例えば、旅行者に「久松公園は鳥取駅の南側にあります^{きゅうしょう}か？」と道を聞かれたら、「いえ、久松公園は鳥取駅の北側です」と答えるであろう。その場合、「久松公園が鳥取駅の北側にある」という内容を真であるという意図の下に断定しているのである。答え手はわざわざ「“久松公園が鳥取駅の北側にある”という判断内容は真です」とは言わないし、「“久松公園が鳥取駅の北側にあること”を私は断定します」と答えて、旅行者に鳥取人の「論理的厳格さ」（？）を誇示することもあるまい。断定すること、すなわち、真であることを意図して、その力を言葉に担わせつつ内容をそのまま語るという言語活動は、われわれの日常の場面で行う判断の慣用的用法である⁽⁷⁾。内容線を伴う表現は、「…という事態」「…という状況」「…という思想」等とバラフレーズできるが、判断記号を伴う表現に対しては、「…と判断する」とか「…と断定する」とはバラフレーズできない⁽⁸⁾。というのは、そのようにバラフレーズしたとき、本当に断定したのか、偽ってまたは誤って断定したのではないか、と常に問い直されるからである。そして、本当に判断したのか、そのような精神作用が事実あったのか、という心理的事実問題へと問題が変質する危険すらある。むしろ、判断記号は、判断という行為を遂行することを示す遂行演算子（performative operator）⁽⁹⁾であり、（ウィトゲンシュタイン流に言えば）判断内容が真であると「示して」いるのであり、「語って」いるのではない。その場合、行為として見られた判断は、判断者の主観的意図の内部に閉ざされた行為としてではなく、対話または推論という公共の場でなされた行為と考えられねばならない。推論という公共の場では、判断記号のメタ言語的役割がすでに承認されているのである。推論の前提を措くとき、われわれはそれを真なるものとメタレベルで見なしているのである。

フレーゲは、判断記号は常に判断内容の左端に置かれる、と説明する。その意味は、判断記号によって表現される判断そのものが判断内容の一部となることはない、ということである。例えば、「証明可能である」という公理体系についてのメタ言語は、メタ数学またはメタ論理の文脈において判断可能な内容の一部として登場し得る。「論理式Aは証明可能であるが、論理式Bは証明できない」という判断内容は、メタ論理で十分意味を持つからである。しかし、判断そのものは、メタレベルの議論においても判断内容の一部になることはない。判断記号が判断内容の左端に置かれることのもう一つの効果は、判断というものが内容の全体に関わっているのであってその部分に作用することはない、ということである。D. ベルの例⁽¹⁰⁾を借用すると、

$\vdash P \quad \therefore \vdash Q \quad \text{かつ} \quad \vdash \neg P \quad \dots\dots ①$

は矛盾である。しかし、

$\vdash P \supset Q \quad \text{かつ} \quad \vdash \neg P \quad \dots\dots ②$

は矛盾ではない。①で“P”は断定されているが、②で“ $P \supset Q$ ”の一部分としての“P”は断定されていないからである。

このように、判断が内容全体に関わる理由は、内容線がすでに「全体」としての内容を把握しているからである。では、内容とは何か。何をもって同一内容と言えるのか。フレーゲは、

「ギリシア軍はブラタエアでバルシア軍を破った」

という文と、

「バルシア軍はブラタエアでギリシア軍に破られた」

という文とを比較する。この二つの文は、主語・述語を異にし、意味の微妙なニュアンスの違いを持つことは事実である。しかし、前者と他のいくつかの命題とから導出される結論と、後者との同じいくつかの命題とから導出される結論とは同一であろう。従って、これら二つの文は同じ意味内容を共有していると思なうことができる。そして、その同じ意味内容をそれぞれの文の内容と呼ぶ。フレーゲは、基本的に推論という場面を考えている。この場面において実質的に働く意味内容のみを内容と認める。すなわち文の内容とは、「推論によって同一の結論を導く」という関係によって定められた同値類である。主語・述語から判断が成り立っているという伝統的判断論からフレーゲはきっぱりと決別する。主語・述語の異同は判断内容には、従って判断には直接には無関係である。「アルキメデスはシラクサの（ローマによる）征服のときに死んだ」という判断は、「シラクサの（ロ

ーマによる）征服時におけるアルキメデスの死は事実である」という判断と同一である。ここで、通常の意味での主語・述語の違いを問題とすることは無益である。あらゆる文を上のように名詞化し、「……は事実である」を唯一の述語とするような言語体系を作ってもよい、とフレーゲは言う。彼によれば、概念記法の言語体系もそのような体系と見ることができるのであり、そのとき“ $\vdash$ ”はすべての判断の共通述語なのである。

伝統的論理学（アリストテレスの論理学とその中世の発展形態）は、概念→判断→推論という形で体系づけられていると言える。アリストテレスの『範疇論』で第一実体と第二実体の区別がなされ、判断は（三段論法という推論に現れるかぎりでは）第二実体間の従属（包摂）関係（すなわち概念間の従属関係）を表現すると見なされる。そして従属関係の正しい法則が正しい推論である（『分析論前書』）。言い換えると、推論は判断と判断の間の関係ではなく、概念間の関係である。その意味で伝統的論理学は名辞論理学（または概念論理学）である⁽¹¹⁾。これに対して、フレーゲの論理学は判断が概念に論理的に先行する⁽¹²⁾。推論は判断と判断の論理的关系であり、概念は判断から作られる（この点は「関数」の捉え方にはっきりと現れている：本論第IV部）。フレーゲにとって、全称判断と特称判断の違いは判断自体の相違ではなく、判断内容の相違であり、判断はあくまでただ一種である。肯定・否定も判断の種類ではなく、判断内容の種類である。「否定」は判断を否定するのではなく、肯定の形の内容を否定して「否定」という新しい内容を作るのである。「否定」によって世界の部分が分断されるのではない。「否定」は判断内容の一部なのである⁽¹³⁾。

さて、『概念記法』では、上述のように内容線の右に位置する記号は判断可能な内容を表現するものでなければならない。ところが、1891年以降、フレーゲの思想の深化に伴って内容線がある種の「関数」と見なされるようになる。論文「意義と意味について」（“Ueber Sinn und Bedeutung”：[Frege 1892(1)]）においてイミの二つの側面（意義Sinnと意味Bedeutung）が区別され、この区別が文にも及ぶことが主張されるようになる（本論第IV部）。文の意義（Sinn）とは文の意味内容、すなわち文が表現する思想（Gedanke）であり、文の意味（Bedeutung）とは真理値であるとされる。しかも、この時期のフレーゲは、関数のアーギュメントの領域を全対象領域と見なしていた。それゆえ、『概念記法』では許されなかった、

——ユリウス・カエサル

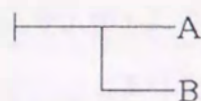
のような表現が認められることになる。そして、

という関数が考えられる。アーギュメントの座“ ξ ”に真なる内容（思想Gedanke）がアーギュメントとして取られたとき、この関数の値は真となり、そうでないときこの関数の値は偽となる⁽¹⁴⁾。文がある意味で複合的な名であるという観点が論文「意義と意味について」で開かれて以来、文の内容が対象と見られる傾向が強くなる。これは、判断内容を一つのまとまった全体として捉え、概念ではなく判断を論理的に先だとする考え方の当然の帰結である。論文「関数と概念」（“Funktion und Begriff”：[Frege 1891]）で見られるような関数の考え方の深化と共に、判断内容（後の思想Gedanke）そのものが（真理値〈真〉という対象として）アーギュメントと見られる。これは、実質的に真理関数の考え方に到達している。なぜなら、文の（表示的）意味（Bedeutung）である、対象としての真理値をアーギュメントとなし、同じく真理値という対象を値とする関数が“— ξ ”なのであるから。ウィトゲンシュタインの真理関数との違いは、フレーゲの真理関数がアーギュメントとしてあらゆる対象を認めている点である。

判断が概念に先行するというフレーゲの考えは、以上のような真理関数に発展したが、『概念記法』においてもすでにその原形となる考えが述べられている。ただ、『概念記法』においては、推論が判断と判断の関係として捉えられているゆえに、判断の成立・不成立の関数という形で論理結合詞が考えられている。節を改めて、論理結合詞についてのフレーゲの扱いを考察しよう。

3. 条件法と否定（§5—§7）

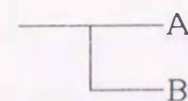
推論という場面を考えてみよう。「AならばBである」。ところで「Aである」。従って「Bである」。この推論はむろん妥当な推論である。ここで、「ならば」という言葉と「従って」という言葉が登場している。どちらも似たような意味を持つと思われるが、論理的にはこれらは明確に区別されねばならない。このことを理解し、公理と推論規則を截然と区別した最初の人でもフレーゲであった⁽¹⁵⁾。通常、「ならば」という言葉は「そして」「または」などととも論理結合詞と呼ばれ、真理関数として説明される。フレーゲはこれを肯定・否定の判断の一つとして説明する。まず、「BならばA」という肯定判断は



として記号化される。ここで、A、Bはともに判断可能な内容を表現する文である。A、Bが肯定されているか否定されているか、によって以下の4つの場合が生じる。

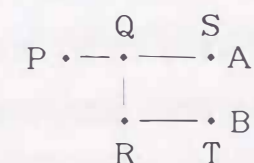
- (1) Aが肯定、 Bが肯定
- (2) Aが肯定、 Bが否定
- (3) Aが否定、 Bが肯定
- (4) Aが否定、 Bが否定

判断「BならばA」が主張するのは(3)が生じないということである。言い換えると、



の否定は、(3)が生じるという内容である。フレーゲは条件法「BならばA」を質料含意（material implication）として捉えている。日常語の「ならば」はさまざまな連関——例えば因果連関（causal connection）——を意味し得るが、質料含意は、「ならば」の最大公約数的な意味である「BとAのごく弱い結びつき」の表現でしかない。

スラガも指摘するように⁽¹⁶⁾、(1)～(4)の肯定・否定は、真・偽とほぼ同じ意味を持つ。真理関数としての「ならば」を定義するには真理値を用いねばならないが、判断として定義する場合はこのような形になるであろう。この場合、先述のように、肯定・否定は断定・不断定ではない。肯定という内容、否定という内容を断定（判断）するのである。内容線、その他の定義も生かされる。すなわち、



において、

QR：条件線

PQ：条件法全体の内容線

RT：Bの内容線

QS：Aの内容線

と理解される。

さて、先の「従って」に当たる言葉はフレーゲの概念文字の中には含まれていない。その代わり、ただ一つの推論のパターンに従ってすべての推論が進行する、というその推論形態そのもののものに「示されて」いる。そのただ一つの推論のパターンとは、いわゆるモドゥス・ポネンスの推論規則である。（実は代入規則も明示されるべきであるが、フレー

ゲは暗黙に承認して使っている。) フレーゲは、命題論理の論理法則がこの推論規則だけから推論されることの自らの発見を自負している。「アリストテレスは有限個の妥当な推論規則を掲げたが、有限個で止める理由はなく無限に多く掲げてよい。われわれは見通しのよさを考慮して一つに限定する」とフレーゲは述べている(BS, §6)。

フレーゲにおいては「否定」も判断内容の一部であるから、「Aでない」という否定形式の内容を表す記号が必要となる。「Aでない」という内容は、

— A

と表現できる。これを分解すると、

P Q S
• — • — • A
 |
 •
 R

となる。短い縦棒QRが否定線であり、QSがAの内容線、PQが「Aでない」という否定の内容線である。「—A」はあくまで、「Aでない」という否定内容にすぎない。

「(実際に) Aでない」と断定しているのではなく、ただ「Aでない」という観念を呼び起こす否定内容にすぎない。

条件法と否定とによって、連言(AかつB)と選言(AまたはB)が表現できる。なぜなら、条件法が質料含意として定義されているゆえに、「BならばA」は「BでありAでないということはない」と表現できるからであり、従って、「BかつA」は「BならばAでないということはない」と表現できるからである。また「BまたはA」も同様に「BでないならばA」と表現できる。ブールが連言と選言と否定を使ったのに対して、フレーゲが条件法と否定を使ったのは、前者が論理をある種の代数と見なしたのに対して、フレーゲが論理を推論の厳密な表現という観点から見ていた、という両者の違いを象徴している。ともかく、フレーゲは、条件法と否定で公理体系としての命題論理を展開する最初の人となる。

フレーゲはまた、概念文字に登場する言葉と、それに相当する日常言語の用法との違いを考慮している。例えば、「しかし」という語は「対立」「意外さ」という意味を、話者の命題連関に対する評価として含む。その点で「そして」という語と全く同一の意味を持つとは言えず、全く同様の文脈で使われる訳でもない。しかし、概念記法としての連言詞と見たとき、「そして」と「しかし」とは論理的には同じ働きをする点で、同じ〈論理的〉意味を持つ、とフレーゲは考える。推論の場面では「そして」も「しかし」も同一の

働きをするからである。「または」が exclusive or ではなく inclusive or と見なされるのも、その方が推論の場面で都合だからである。

さて、以上で命題論理を展開するための準備は整った。しかし、尚、述語論理を展開するには不十分である。そこで次に、述語論理の展開に必要な「同一」「関数」「一般性」についての検討がなされる。われわれも節を改めて、それを追跡しよう。

4. 同一、関数、一般性 (§8 - §13)

ここで、フレーゲのいう「同一」とは「内容の同一」ということである。フレーゲの概念記法はすべてある意味内容を持つ。一般に、ある記号(概念記法)が持つ意味内容を別の記号が表示することがある。丁度、同一人物が本名以外の名(ペンネームやあだ名)でも呼ばれるように。するとそのとき、「名Aと名Bは同一物を表示する」という判断がなされることになる。この判断は通常的判断とは異なり、内容そのものについての判断ではなく、内容を表示する記号についての判断ということになる。判断「記号Aと記号Bは同一内容を表示する」を表現するために新たに必要とされるのが、「内容の同一」を表す記号“≡”である。判断：

— (A ≡ B)

に登場する記号は内容を表示するのではなく、記号を表示することになる。「A」と「B」は記号A、記号B自身を表示し、「≡」は記号の振る舞い、すなわち同一内容を表示するという記号間の関係を表現することになる。今までの記号はすべて記号に対応する言語外の内容を表示した。ここで、意味内容ではなく記号自身を表示する、新しい記号の用法を導入したことにより、記号の「意味」に分裂が生じたとも言える。フレーゲもそのことには気づいていた。しかしこのことが、われわれの関心が内容ではなく表現そのものにあることを含意する訳ではないことを、フレーゲは強調する。

「内容の同一」の記号を導入するにはそれ相当の理由がある。フレーゲは幾何学から例を引いている。右図(図1: [Bynum 1972] p.125より)で、点Aは円周上の一点、ABは直径を含む半直線で、固定されたAを中心に矢印方向に回転する。この回転により、半直線と円周との交点Bは連続的に位置を変

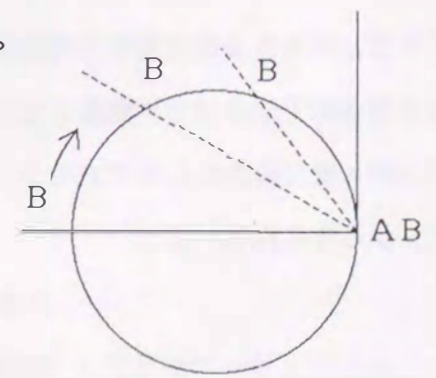


図1

える。換言すると、半直線の位置が確定されたとき初めて、名「半直線と円周との交点B」は確定した点を表示する。いま、名「半直線が点Aを含む直径と直交するときの半直線と円周との交点B」は何を表示するかといえば、これは点Aに外ならない。するとここで、同一の点が二通りの仕方で特定されたことになる。感覚により直接的に「A」と名づけることによる特定と、「…なる交点B」という特定と、である。この異なる二通りの特定の仕方に応じて、それを表現する名（記号）も異なる。異なる二つの名によってある同一のものが表示され得るということには、その異なる名に応じた異なる特定の仕方が存在することが含意される。われわれが同一の意味内容をさまざまな表現手段によって表現し得るということ、このことはわれわれの認識の問題にも関わることである。なぜなら、あるものを特定するとき、必ずしも一通りのではなく多数の認識ルートによってそのものに到達できることを、このことは含意するからである。

この、特定された内容とその特定の仕方という観点は、後に言葉の「意味（指示対象）」（Bedeutung）と「意義」（Sinn）の区別という形で、フレーゲ自身の思想の中で深化される（[Frege 1892(1)]）。はからずも、この区別を扱う論文「意義と意味について」（Ueber Sinn und Bedeutung）は、同一性を表現する命題の意義の考察から始められている。（ただし、ここでフレーゲは「同一性」というものを記号と記号の間の、同一対象を表示するというメタの関係としてではなく、記号によって名指されるもの同士の関係として捉え直している。）固有名にせよ確定記述にせよ、名は名指すべき対象を持つとともに名指しの仕方を自ら伴っている。その名指しの仕方が意義（Sinn）である。『概念記法』の段階では、意義（Sinn）⁽¹⁷⁾と意味（Bedeutung）の区別という観点は、明確な形では未だ無い。しかし、その萌芽が「内容」と内容の「特定の仕方」という形で現れている、と見ることができる。

フレーゲの「内容」は後の「意味」や「対象」に発展するものであるが、いずれにせよそれは、それ自身で独立した完結した論理的存在である。これに対して、「関数」はそのようなものではない。「関数」についてのフレーゲの説明は、その導入部分においては、文法的・構文論的なものであるが、後に存在論的含意を持つものに発展する。まず、関数は文から作られる。文：

水素は二酸化炭素より軽い	……①
酸素は二酸化炭素より軽い	……②
窒素は二酸化炭素より軽い	……③

において、「水素」「酸素」「窒素」は置き換え可能な部分、「…は二酸化炭素より軽い」は置き換えられない部分と見なし得る。つまり、文という完結した論理的存在が置き換え可能な部分（アーギュメントと呼ばれる）と、置き換え不可能な部分（関数と呼ばれる）とに分節化され得ること、そして文がアーギュメントの関数として見なされるということ、これがフレーゲの基本的発想であった。むろん、この分節の様式は、各文において一意的に決まっている訳ではない。上述の①において、「二酸化炭素」をアーギュメントと見なし、「水素は…より軽い」を関数と見なすこともできる。（置き換え可能・不可能というアーギュメントと関数の区別の基準は、後に完結的なもの（対象）と補完を要するもの・不飽和なもの（関数）という基準に発展する。Cf. [Frege 1892(2)]）フレーゲが強調するように（本章第1節）、主語・述語の区別に替えてアーギュメント・関数の区別を基本としたこと、これが、フレーゲの（クラス論理と関係論理を統一した）述語論理の一般的展開を可能とした発想であった。

ここで注意すべきことは、文の内容（Inhalt）が分節化されることにより、それがアーギュメントの関数と見られるようになるのであって、最初にアーギュメントと関数が与えられ、それらが合成されることで文の内容、つまり判断内容が作られる訳ではない、ということである。むろん、判断とは、アーギュメントにより表現された対象が関数により表現された概念に帰属する、または対象が他の対象と何らかの関係にあるという判断であるが、概念が判断に先立つ訳ではない。「概念から判断を作る」のではなく「判断（の内容）を分析して概念」に至るという道を採用したことが重要であった。これにより、判断の内部構造も判断という一つのまとまりの中で捉えることにより、推論を判断と判断の関係として統一的に把握することが可能となった。

フレーゲの「関数」の概念は後に大きく拡張されるが、『概念記法』においてもその片鱗が見られることは注目に値する。例えば、置き換え可能・不可能の基準により、アーギュメントと関数に分節化された後、その関数表現が別の関数表現と置き換え可能であるという視点が導入される。すなわち、関数自身が不定なものとして表現される記法が考えられている。例えば、

$$\Phi(A)$$

$$\Psi(A, B)$$

といった表現は、各々、Aをアーギュメントとして持つ関数、AとBをアーギュメントとして持つ関数を不定なものとして表現している。従って、判断：

$$\begin{array}{l} \vdash \Phi(A) \\ \vdash \Psi(A, B) \end{array}$$

は、各々、「Aは性質Φを持つ」、「BはAとΨという関係にある」または「Bは対象Aに手続きΨを施した結果である」と読める。ここで、通常関数をアーギュメントとして取る高次の関数概念が考えられている。(これは『概念記法』Ⅲの「一般系列理論」に関連する。第3章参照。)

さらに、関数とアーギュメントという道具立ては、文の一部分における一般性を表現することにより、一般性に関連する複雑な文の構造の表現に寄与する。文：

「20は四つの数の平方の和として表現できる」

「すべての正の整数は四つの数の平方の和として表現できる」

において、「20」と「すべての正の整数」がともにアーギュメントと見なせる訳ではない。「20」がある特定の対象を表示する固有名であり、アーギュメントと見なし得るのに対して、「すべての正の整数」は文全体の中に位置して初めて文全体の内容の構成に貢献するのであり、これだけを取り出しても何も意味しない、よってアーギュメントとは見なせない。しかし、われわれは、ある特定のものについて、それがある性質を持つということを述べるばかりではなく、任意のもの、またはすべてのものがその性質を持つことを述べる必要がある場合がある。そのように一般性を表現する場合、例えば、 $\Phi(a)$ という文について、 a によって表現された特定の対象をのみならず、任意の対象についてそれが性質Φを持つ、と表現することになる。言い換えると、「 a 」をアーギュメント、「 $\Phi(\)$ 」を関数と見て、「アーギュメントとして何を取ろうとも、それはΦである」と表現することになる。これを表す判断は、フレーゲの概念記法では、

$$\vdash \underbrace{\quad}_a \Phi(a)$$

である。この記法は、判断

$$\vdash \Phi(a)$$

から次のようにして作られる。まず、アーギュメントと見なした「 a 」をゴチック文字「 $\mathfrak{a}$ 」(フレーゲ自身はドイツ文字、いわゆる亀の子文字を用いている)に替え、さらに内容線の真ん中に「 $\underbrace{\quad}$ 」を作り、その中にゴチック文字「 $\mathfrak{a}$ 」を入れる。これを「すべてのものはΦである」と読む。こうして、一般性の表現は、関数のアーギュメントと見られた文の一部分への任意代入可能性を主張する文として表現される。もちろん、判断：

$$\vdash \Phi(a)$$

の「Φ」をアーギュメントと見ることもできるから、

$$\vdash \underbrace{\quad}_F F(a)$$

すなわち「いかなる性質Fを取ろうとも、 a はその性質Fを持つ」という判断も表現できる。

なぜ、一般性を表現するのに、自由変項の文字だけでは不十分で、「 $\underbrace{\quad}$ 」とゴチック文字という装置が必要なのか。それは今日言うところの束縛の作用範囲の明示のためである。これにより「すべてのものがΦである訳ではない」と「すべてのものがΦではない」を、

$$\vdash \underbrace{\quad}_a \Phi(a)$$

および

$$\vdash \underbrace{\quad}_a \Phi(a)$$

として区別できるし、「すべてのものがΦならばAである」と「任意のものについて、それがΦならばAである」を、

$$\vdash \underbrace{\quad}_a \begin{array}{l} A \\ \Phi(a) \end{array}$$

および

$$\vdash \underbrace{\quad}_a \begin{array}{l} A \\ \Phi(a) \end{array}$$

として区別できる。

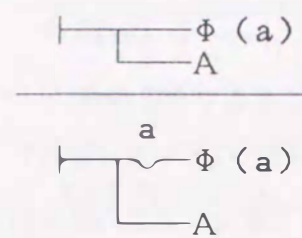
さらに、一般性を表す文に関して、フレーゲは、全称例化の推論：

$$\begin{array}{l} \vdash \underbrace{\quad}_a \Phi(a) \\ \hline \vdash \Phi(b) \end{array}$$

(ここで、 $\Phi(b)$ は $\Phi(a)$ の a のすべての出現を b で替えて $\Phi(a)$ から得られる)が正しいことを説明し、同時に、実質上の束縛変項改名規則を述べている。またさらに、二つの全称化の推論：

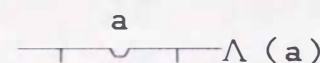
$$\begin{array}{l} \vdash X(a) \\ \hline \vdash \underbrace{\quad}_a X(a) \end{array}$$

および

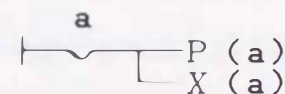


(ここで、ラテン文字 a は A には出現しない)

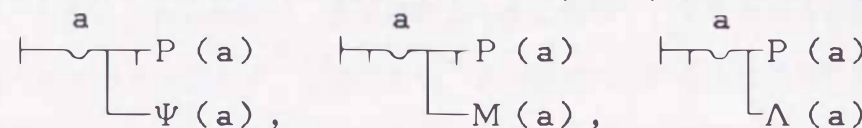
を正しい推論として挙げている。全称化に際して、束縛変項をゴチック文字（フレーゲ自身はドイツ文字）で示し、自由変項をラテン文字で示すことにより、フレーゲはこの二つの文字の一般性表現における違いを明確に示すことができた。これで、述語論理を展開するには十分である。存在（あるいは特称）はフレーゲの概念記法では、



で表され、特別に他の記号を必要とはしない。全称肯定判断「すべての X は P である」は



と表現できる。また、全称否定判断「いかなる Ψ も P でない」、特称肯定判断「ある M は P である」、特称否定判断「ある Λ は P でない」は、各々、以下のように表現できる：



これらの判断の内容の間には、下の図（図2）のような関係がある（BS, §12）。

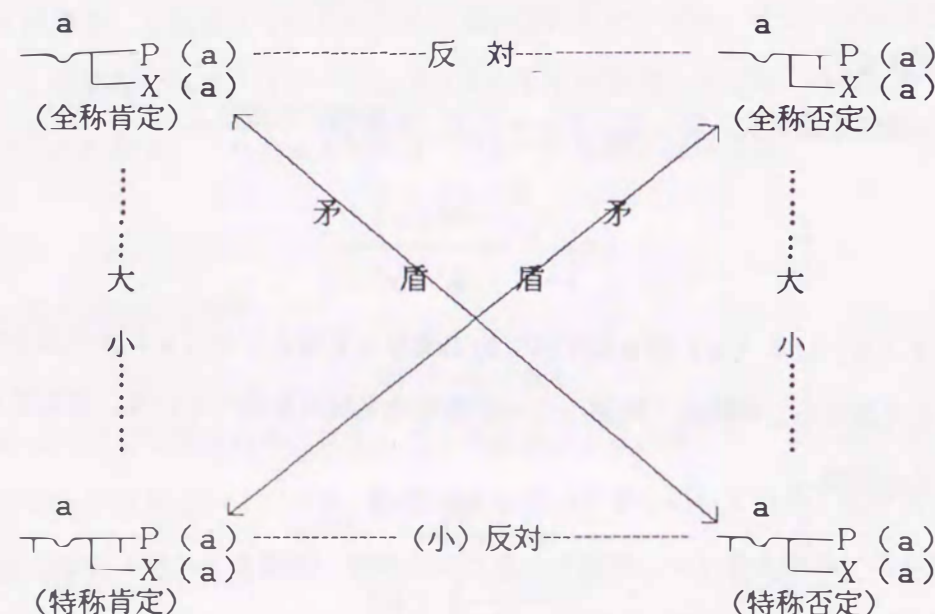


図2

伝統的論理学の対当表と違い、反対関係にある全称肯定と全称否定は、共に真でも共に偽でもあり得るし、小反対関係にある特称肯定と特称否定も同様に共に真でも共に偽でもあり得る。また大小関係の間に含意関係は無い。これらが生じる理由は、フレーゲの全称肯定にはいわゆる存在含意 (existential import) が無いからである。

5. 命題論理の展開 (§13-§19)

フレーゲは『概念記法』第II部 (§13-§22) で、命題論理、および等号を持つ述語論理を公理体系として展開する。そこでまず、命題論理から検討していこう。

フレーゲは、「純粹思考の判断」と彼が呼ぶ論理法則を少数の中核となる命題（公理）から導き出そうとする。このような公理体系を作る意義は、一つ一つの論理法則の論理的正しさを知るだけでなくそれらの相互関係を知ることにある。論理法則は無数にあるであろう。無数にあるものをすべて書き並べることはできない。そこで、公理体系を作り、少数の論理法則から他のすべての論理法則が導出可能であることを示すことによって、可能的にわれわれはすべての論理法則を手に入れることができる。もちろん、公理体系の作り方は唯一つとは限らない。フレーゲもそれは承知していた。しかし、作られる公理体系が可能的にすべての論理法則を導出できるという意味で完全であることが望ましい。フレーゲはこの意味での「完全性」（すなわち、すべてのトートロジーが導出可能であること）が彼自身の体系に備わっていることを暗黙に前提していたようであり、そのことを改めて証明しようとはしていない。彼は実際に、命題論理の範囲で51個の命題を「純粹論理の判断」として提示するが、このように多数の命題が導かれることが彼の公理体系の完全性を示すものと考えたのであろう（事実、彼の体系は完全である）。

フレーゲ自身は公理体系の構文論を明示してはいないが、それを明示すると次のようになる。

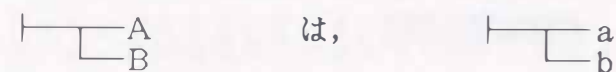
命題変項：a, b, c, d, e, ... (これらは判断内容を表現する)

判断の形成規則：

- (i) α が命題変項であるとき、 $\vdash \alpha$ は判断である。
- (ii) A, B が判断から判断線を取り除いた残余の表現であるとき、

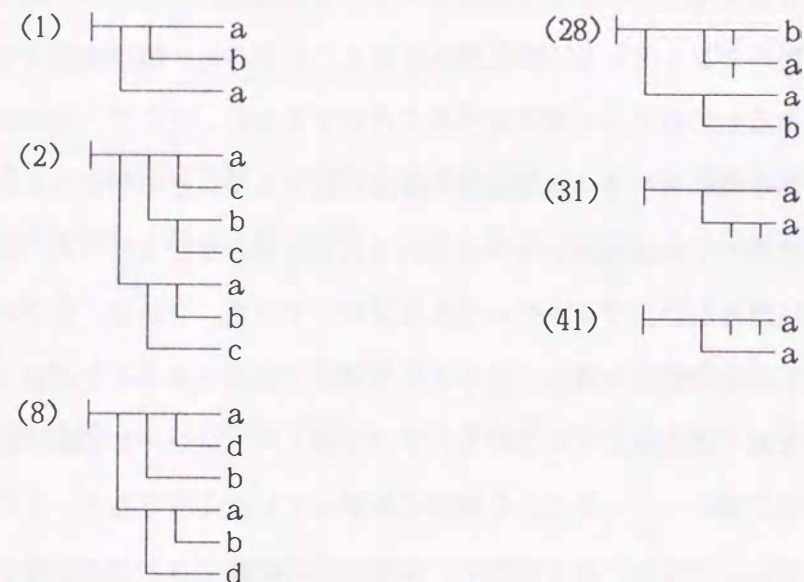
$\vdash \frac{A}{B}$ および $\vdash A$ は判断である。

実は上の形成規則はまだ不十分である。判断が判断線以外に内容線という連続なものを含みゆえに、『算術の基本法則』§ 6 ([Frege 1893])で述べられているように、内容線を左に持つ二つの判断内容表現から新しい判断を作るために、内容線どうしの融合 (Verschmelzung) が許されなければならない。いま、Aを「— a」、Bを「— b」とするとき、内容線の融合によって、



となる。『概念記法』では内容線の融合のことは、内容線の説明のうちに含まれていると見て明示的には述べられていない。

さて次に、少数の核となる判断 (すなわち公理) とは以下の6個である。(左の番号はフレーゲがつけた通し番号である。)



このうち、(1) (2) (8) は条件法の記号のみを含み、(28) (31) (41) は条件法と否定の記号を共に含む。

フレーゲの記号は二次元的な広がりを持つゆえに、この記法に慣れると、推論の進み方、個々の命題の内部構造が見て取り安い。しかし、多くのスペースを取るのが欠点である。記号法としては、数学の大部分においてそうであるように線形のものが好まれるためか、フレーゲのものは今日使われなくなった。(線形のものにならなかったら、Hilbert, Gödel, Tarski らのメタ論理的研究は発達しなかったろう、というスラガの意見⁽¹⁸⁾はフレーゲには酷である。フレーゲは見通しの良さの点で自らの記法に自信があった。) 今日の流れで書けば、上記の公理は次のようになる (判断記号は省く)。

$$(1) a \supset (b \supset a)$$

$$(2) (c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$$

$$(8) (d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$$

$$(28) (b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg b)$$

$$(31) \neg \neg a \supset a$$

$$(41) a \supset \neg \neg a$$

今日の記法は、資源節約には適うが、括弧の多い複雑な式ではフレーゲのものより意味が読み取りにくい。(後に実例がそれを示すことになる。)

推論規則は、モドゥス・ポネンスと代入規則である。本章第3節で述べたように、代入規則は明示されていないが、実際に使われている。

フレーゲが掲げている51個の「純粹思考の判断」のすべてを今日流の記法で書いてみると、以下のようになる。

$$(1) a \supset (b \supset a)$$

$$(2) (c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$$

$$(3) (b \supset a) \supset ((c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))$$

$$(4) \{ (b \supset a) \supset (c \supset (b \supset a)) \} \supset \{ (b \supset a) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)) \}$$

$$(5) (b \supset a) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$$

$$(6) (c \supset (b \supset a)) \supset (c \supset ((d \supset b) \supset (d \supset a)))$$

$$(7) (b \supset a) \supset ((d \supset (c \supset b)) \supset (d \supset (c \supset a)))$$

$$(8) (d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$$

$$(9) (c \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (c \supset a))$$

$$(10) \{ (e \supset (d \supset b)) \supset a \} \supset \{ (d \supset (e \supset b)) \supset a \}$$

$$(11) ((c \supset b) \supset a) \supset (b \supset a)$$

$$(12) \{ d \supset (c \supset (b \supset a)) \} \supset \{ d \supset (b \supset (c \supset a)) \}$$

$$(13) \{ d \supset (c \supset (b \supset a)) \} \supset \{ b \supset (d \supset (c \supset a)) \}$$

$$(14) \{ e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a))) \} \supset \{ e \supset (b \supset (d \supset (c \supset a))) \}$$

$$(15) \{ e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a))) \} \supset \{ b \supset (e \supset (d \supset (c \supset a))) \}$$

$$(16) \{ e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a))) \} \supset \{ e \supset (d \supset (b \supset (c \supset a))) \}$$

$$(17) \{ d \supset (c \supset (b \supset a)) \} \supset \{ c \supset (b \supset (d \supset a)) \}$$

$$(18) (c \supset (b \supset a)) \supset \{ (d \supset c) \supset (b \supset (d \supset a)) \}$$

$$(19) (d \supset (c \supset b)) \supset \{ (b \supset a) \supset (d \supset (c \supset a)) \}$$

- (20) $(e \supset (d \supset (c \supset b))) \supset \{ (b \supset a) \supset (e \supset (d \supset (c \supset a))) \}$
 (21) $((d \supset b) \supset a) \supset \{ (d \supset c) \supset ((c \supset b) \supset a) \}$
 (22) $\{ f \supset (e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))) \} \supset \{ f \supset (e \supset (d \supset (b \supset (c \supset a)))) \}$
 (23) $\{ d \supset (c \supset (b \supset a)) \} \supset \{ (e \supset d) \supset (c \supset (b \supset (e \supset a))) \}$
 (24) $(c \supset a) \supset (c \supset (b \supset a))$
 (25) $(d \supset (c \supset a)) \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))$
 (26) $(b \supset (a \supset a))$
 (27) $a \supset a$
 (28) $(b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg b)$
 (29) $(c \supset (b \supset a)) \supset (c \supset (\neg a \supset \neg b))$
 (30) $(b \supset (c \supset a)) \supset (c \supset (\neg a \supset \neg b))$
 (31) $\neg \neg a \supset a$
 (32) $\{ (\neg b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg \neg b) \} \supset ((\neg b \supset a) \supset (\neg a \supset b))$
 (33) $(\neg b \supset a) \supset (\neg a \supset b)$
 (34) $(c \supset (\neg b \supset a)) \supset (c \supset (\neg a \supset b))$
 (35) $(c \supset (\neg b \supset a)) \supset (\neg a \supset (c \supset b))$
 (36) $a \supset (\neg a \supset b)$
 (37) $((\neg c \supset b) \supset a) \supset (c \supset a)$
 (38) $\neg a \supset (a \supset b)$
 (39) $(\neg a \supset a) \supset (\neg a \supset b)$
 (40) $\neg b \supset ((\neg a \supset a) \supset a)$
 (41) $a \supset \neg \neg a$
 (42) $\neg \neg (a \supset a)$
 (43) $(\neg a \supset a) \supset a$
 (44) $(\neg a \supset c) \supset ((c \supset a) \supset a)$
 (45) $\{ (\neg c \supset a) \supset (\neg a \supset c) \} \supset \{ (\neg c \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a) \}$
 (46) $(\neg c \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a)$
 (47) $(\neg c \supset b) \supset \{ (b \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a) \}$
 (48) $(d \supset (\neg c \supset b)) \supset \{ (b \supset a) \supset ((c \supset a) \supset (d \supset a)) \}$
 (49) $(\neg c \supset b) \supset \{ (c \supset a) \supset ((b \supset a) \supset a) \}$

- (50) $(c \supset a) \supset \{ (b \supset a) \supset ((\neg c \supset b) \supset a) \}$
 (51) $(d \supset (c \supset a)) \supset \{ (b \supset a) \supset (d \supset ((\neg c \supset b) \supset a)) \}$

この51個の論理法則がどのように結びついているか、このことを分かりやすく図示するために、次の記法を導入する。数字は上述の論理法則の番号を示し、鉤括弧で囲まれた番号、例えば[31]は、その番号31を持つ論理法則の代入例である。代入規則によって $[\alpha]$ が α から推論されるとき、

$$\frac{\alpha}{[\alpha]}$$

と表し、 β が α と $\alpha \supset \beta$ とからモドゥス・ポネンスによって推論されるとき、

$$\frac{\alpha \quad \alpha \supset \beta}{\beta} \quad \text{または} \quad \frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}$$

と表す。また、 α が β と同じ式であることを、

$$\alpha : \beta$$

と表す。この約束の下で、まず(3)~(7)の論理法則がどのように公理(1),(2)から導出されるかは、下の図(図3)によって表すことができる。

$$\begin{array}{c} \frac{2 \quad \frac{1}{[1] : 2 \supset 3}}{3} \quad \frac{2}{[2] : 3 \supset 4} \quad \frac{1}{[1]} \\ \frac{4 : [1] \supset 5}{5} \quad \frac{5}{[5] : 5 \supset 6} \\ \frac{5 \quad [6] : 5 \supset 7}{7} \end{array}$$

図3

さらにこれらの論理法則をも使いながら、公理(8)から、法則(9)~(27)がどのようにして導出されるかは、以下の図4により示される。(一度導出された論理法則は証明なしで使う。)

$\begin{array}{c} 8 \\ \hline 5 \quad [8] : 5 \supset 9 \\ \hline [8] \quad [9] : [8] \supset 10 \\ \hline 10 \end{array}$		$\begin{array}{c} 9 \\ \hline [9] : [1] \supset 11 \quad [1] \\ \hline 11 \end{array}$	
$\begin{array}{c} [5] : [8] \supset 12 \quad 8 \\ \hline 12 \\ 12 \quad [12] : 12 \supset 13 \\ \hline [5] : 13 \supset 14 \quad 13 \\ \hline [12] : 14 \supset 15 \quad 14 \\ \hline 15 \end{array}$		$\begin{array}{c} 8 \\ \hline [8] \\ \hline 16 \\ \hline [16] : [5] \supset 18 \quad [5] \\ \hline 18 \\ 9 \quad [18] : 9 \supset 19 \\ \hline [18] : 19 \supset 20 \quad 19 \\ \hline 20 \end{array}$	
$\begin{array}{c} 12 \quad [5] : 12 \supset 16 \\ \hline 16 \\ [8] \quad [16] : [8] \supset 17 \\ \hline 17 \\ 16 \quad [5] : 16 \supset 22 \\ \hline [18] \quad 22 : [18] \supset 23 \\ \hline 23 \end{array}$		$\begin{array}{c} 19 \\ \hline [19] : [9] \supset 21 \quad [9] \\ \hline 21 \end{array}$	
$\begin{array}{c} 12 \\ \hline [12] : [1] \supset 24 \quad [1] \\ \hline 24 \quad [5] : 24 \supset 25 \\ \hline 25 \end{array}$		$\begin{array}{c} 8 \\ \hline 1 \quad [8] : 1 \supset 26 \\ \hline 26 \\ 1 \quad [26] : 1 \supset 27 \\ \hline 27 \end{array}$	

図4

論理法則 (27) までは「否定」が出て来ない。(28), (31), (41)は否定と条件法に関する公理である。これらから他の論理法則がどう導出されるかは図5から分かる。

$\begin{array}{c} 28 \quad [5] : 28 \supset 29 \\ \hline [10] : 29 \supset 30 \quad 29 \\ \hline 30 \end{array}$		$\begin{array}{c} 31 \\ \hline [7] : [31] \supset 32 \quad [31] \\ \hline [28] \quad 32 : [28] \supset 33 \\ \hline [5] : 33 \supset 34 \quad 33 \\ \hline 34 \end{array}$	
$\begin{array}{c} 34 \quad [12] : 34 \supset 35 \\ \hline 35 \end{array}$		$\begin{array}{c} 34 \\ \hline [1] \quad [34] : [1] \supset 36 \\ \hline 36 \end{array}$	
$\begin{array}{c} 36 \quad [8] : 36 \supset 38 \\ \hline [2] : 38 \supset 39 \quad 38 \\ \hline 39 \quad [35] : 39 \supset 40 \\ \hline 40 \end{array}$		$\begin{array}{c} 36 \\ \hline [9] : [36] \supset 37 \quad [36] \\ \hline 37 \end{array}$	
$\begin{array}{c} 41 \\ \hline 27 \quad [41] : 27 \supset 42 \\ \hline [40] : 42 \supset 43 \quad 42 \\ \hline 43 \quad [21] : 43 \supset 44 \\ \hline 44 \quad [5] : 44 \supset 45 \\ \hline [33] \quad 45 : [33] \supset 46 \\ \hline [21] : 46 \supset 47 \quad 46 \\ \hline [23] : 47 \supset 48 \quad 47 \\ \hline 48 \end{array}$		$\begin{array}{c} [12] : 47 \supset 49 \quad 47 \\ \hline 49 \quad [17] : 49 \supset 50 \\ \hline [18] : 50 \supset 51 \quad 50 \\ \hline 51 \end{array}$	

図5

さて、「否定」と「条件法」だけからなる、このフレーゲの命題論理体系について、いくつかのメタ論理的考察を試みよう。

まず、この公理系は無矛盾である⁽¹⁹⁾。むしろフレーゲは古典二値論理の立場であるから、通常の真理関数の解釈に従って「否定」と「条件法」を解釈すれば、6つの公理はいずれもトートロジーである。そして代入規則と推論規則はトートロジー性を保存する。すなわち、 α がトートロジーであれば、 α の代入例 $S(\alpha)$ もトートロジーであるし、また α と $\alpha \supset \beta$ がトートロジーであれば β もトートロジーである。このことから、フレーゲが提示している論理法則はもちろんのこと、この公理系で導出されるすべての論理法則はトートロジーである。すなわち、この体系は健全で(sound)ある。ところで、 $a \supset b$ という式はトートロジーではないから、この体系では導出できない。従って、この体系には導出できない式が少なくとも一つ存在するから、この体系は無矛盾である。

次に、この公理系は意味論的に完全である。すなわち、意味論的に解釈された妥当な式(トートロジー)のすべてがこの公理系の定理として導出できるという意味で完全である。証明は、(46)が導出されているからカルマールの方法によって行うことができる⁽²⁰⁾。

最後に独立性である。6個の公理のうち、(8)は独立ではない。このことを最初に指摘したのはルカシェヴィッチである⁽²¹⁾。これを分かりやすく整理したのがニールである。ルカシェヴィッチの証明は比較的短いが技巧的である。筆者が試みた証明⁽²³⁾は長いが技巧は不要であり、公理(1),(2)のみから(8)が導かれることを印象づけるものである。以下に筆者の証明を今日流の記法で書く。

1. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset (c \supset (b \supset a))\}$ 公理(1)に代入
2. $(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$ 公理(2)に代入
3. $\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$
 $\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 公理(1)に代入
4. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$ 2, 3にMP
5. $\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$
 $\supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 公理(1)に代入
6. $(5) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (5)\}$ 公理(1)に代入
7. $(c \supset (b \supset a)) \supset [\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$
 $\supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 5, 6にMP
8. $(7) \supset \{(4) \supset [(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]\}]$

- $\{(c \supset b) \supset (c \supset a)\} \supset [(c \supset b) \supset (c \supset a)]$ 公理(2)に代入
9. $(4) \supset [(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]$
7, 8にMP
10. $(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$
4, 9にMP
11. $[b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$
 $\supset [\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 公理(2)に代入
12. $(11) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (11)\}$ 公理(1)に代入
13. $(c \supset (b \supset a)) \supset$
 $[[b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}] \supset$
 $[\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]$ 11, 12にMP
14. $(13) \supset [(10) \supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset$
 $\{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]$ 公理(2)に代入
15. $(10) \supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset$
 $\{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]$ 13, 14にMP
16. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$
10, 15にMP
17. $(16) \supset [(1) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}]]$
公理(2)に代入
18. $(1) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}$ 16, 17にMP
19. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$ 1, 18にMP
20. $\{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\} \supset \{(b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a))\}$
公理(2)に代入
21. $(20) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (20)\}$ 公理(1)に代入
22. $(c \supset (b \supset a)) \supset (20)$ 20, 21にMP
23. $\{(c \supset (b \supset a)) \supset (20)\} \supset [\{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))\} \supset$
 $\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a)))\}]$
公理(2)に代入
24. $[(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$
 $\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset ((b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a)))]$ 22, 23にMP

25. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{ (b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a)) \}$ 19,24 にMP

26. $(25) \supset [\{ (c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b)) \} \supset \{ (c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a)) \}]$ 公理(2) に代入

27. $\{ (c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b)) \} \supset \{ (c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a)) \}$ 25,26 にMP

28. $b \supset (c \supset b)$ 公理(1) に代入

29. $(b \supset (c \supset b)) \supset \{ (c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b)) \}$ 公理(1) に代入

30. $(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b))$ 28,29 にMP

31. $(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a))$ 27,30 にMP

32. $(d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$ 31に代入

これで(8)が(1),(2)から代入規則とモドゥス・ポネンス(MP)によって導出されることが示された。それでは、残る五つの公理は独立であるか？確かに独立である。これは3値モデル、および2値モデルで「否定」の解釈を変更することによって証明される。まず3値モデルで調べる。統一的に調べるために真理値集合 $\{1, 2, 0\}$ に真理値束⁽²⁴⁾の構造を与え、条件法と否定を順序と補元で解釈する。すると、条件法と否定はそれぞれ表1、表2で与えられる(x_1, x_2, x_3, y は0か2)。そして x_1, x_2, x_3, y の取り方が表3、表4で与えられる。

$p \supset q$	q		
	1	2	0
$p \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{cases}$

表1

p	$\neg p$
1	0
2	y
0	1

表2

	x_1	x_2	x_3
①2	2	2	
②2	2	0	
③2	0	2	
④2	0	0	
⑤0	2	2	
⑥0	2	0	
⑦0	0	2	
⑧0	0	0	

表3

	y
(イ)	2
(ロ)	0

表4

これらを組み合わせて、条件法と否定の解釈の対(イ)を作り、(1)(2)(28)(31)(41)の公理が恒真か否かを調べると、表5のようなになる(○は恒真、×は非恒真を示す)。

	①②③④⑤⑥⑦⑧
(1) $a \supset (b \supset a)$	○○○○××××
(2) $(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$	×××○×××○
	[①②③④⑤⑥⑦⑧] + (イ)
(28) $(b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg b)$	○×○××○×○
(31) $\neg \neg a \supset a$	○○○○○○○○
(41) $a \supset \neg \neg a$	○○○○○○○○
	[①②③④⑤⑥⑦⑧] + (ロ)
(28) $(b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg b)$	○○×○○○×○
(31) $\neg \neg a \supset a$	××××××××
(41) $a \supset \neg \neg a$	○○○○○○○○

表5

そして、①~⑧と(イ)(ロ)とを組み合わせた、どの解釈においても、モドゥス・ポネンスと代入規則は恒真性を保持する。従って、このことと表5より、

公理(1)の独立性は⑧と(イ)の解釈の組で、

公理(2)の独立性は①と(イ)、③と(イ)の解釈の組で、

公理(28)の独立性は④と(イ)の解釈の組で、

公理(31)の独立性は④と(ロ)の解釈の組で、

示すことができる。しかし、公理(41)の独立性は真理値束と見なした3値モデルでは証明できない。そこで、真理値束でない解釈、例えば、表6の解釈を“ $\supset$ ”に与えると、これと否定についての(イ)の解釈とによって、独立性が示される。

$p \supset q$	a		
	1	2	0
$p \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$

表6

p	$\neg p$
1	1
0	0

表7

p	$\neg p$
1	1
0	1

表8

P	$\neg p$
1	0
0	0

表9

あるいは、(28)(31)(41)の独立性の証明は、条件法を通常の2値で解釈し、否定を表7、表8、表9で解釈すれば、それぞれこの順で得られる。

こうして、フレーゲのオリジナルの公理系は独立ではないが、(8)を除く5個の公理からなる公理系は独立である。

6. 述語論理の展開 (§20 - §22)

フレーゲは『概念記法』§20 - §22において、等号を持つ第1階の述語論理を展開している。公理は、等号に関する二つの公理(52)、(54)と、普遍例化の公理(58)である。すなわち、

$$(52) \quad \begin{array}{c} \vdash \quad \begin{array}{c} f(d) \\ f(c) \\ \hline (c \equiv d) \end{array} \end{array}$$

$$(54) \quad \vdash \quad (c \equiv c)$$

$$(58) \quad \begin{array}{c} \vdash \quad \begin{array}{c} f(c) \\ a \\ \hline f(a) \end{array} \end{array}$$

の3個である。判断記号を省いて、これらを今日流の記法で書けば、

$$(52) \quad (c = d) \supset (f(c) \supset f(d))$$

$$(54) \quad c = c$$

$$(58) \quad \forall a f(a) \supset f(c)$$

となる。(『概念記法』では、等号としては「内容の同一」の記号“ $\equiv$ ”が使われているが⁽²⁵⁾、『算術の基本法則』([Frege 1893])では“ $=$ ”が使われている。)

推論規則には、代入規則とモドゥス・ポネンスに加えて、全称化がある。本章第4節で述べたように、フレーゲは二つの全称化を挙げているが、そのうち、

$$\frac{\vdash X(a)}{\vdash \begin{array}{c} a \\ \hline X(a) \end{array}}$$

を基本とし、

$$\frac{\vdash \begin{array}{c} \Phi(a) \\ A \end{array}}{\vdash \begin{array}{c} a \\ \hline \Phi(a) \\ A \end{array}}$$

は派生規則として説明している。

さて、フレーゲは17個の(等号を含む)述語論理の論理法則を提示している。それらは今日流の記法で書くと次のようになる。

$$(52) \quad (c = d) \supset (f(c) \supset f(d))$$

$$(53) \quad f(c) \supset ((c = d \supset f(d)))$$

$$(54) \quad c = c$$

$$(55) \quad (c = d) \supset (d = c)$$

$$(56) \quad \{ (d = c) \supset (f(d) \supset f(c)) \} \supset \{ (c = d) \supset (f(d) \supset f(c)) \}$$

$$(57) \quad (c = d) \supset (f(d) \supset f(c))$$

$$(58) \quad \forall a f(a) \supset f(c)$$

$$(59) \quad g(b) \supset \{ \neg f(b) \supset \neg \forall a (g(a) \supset f(a)) \}$$

$$(60) \quad \forall a (h(a) \supset (g(a) \supset f(a))) \supset (g(b) \supset (h(b) \supset f(b)))$$

$$(61) \quad (f(c) \supset a) \supset (\forall a f(a) \supset a)$$

$$(62) \quad g(x) \supset \{ \forall a (g(a) \supset f(a)) \supset f(x) \}$$

$$(63) \quad g(x) \supset \{ m \supset (\forall a (g(a) \supset f(a)) \supset f(x)) \}$$

$$(64) \quad (h(y) \supset g(x)) \supset \{ \forall a (g(a) \supset f(a)) \supset (h(y) \supset f(x)) \}$$

$$(65) \quad \forall a (h(a) \supset g(a)) \supset \{ \forall a (g(a) \supset f(a)) \supset (h(x) \supset f(x)) \}$$

$$(66) \quad \forall a (g(a) \supset f(a)) \supset \{ \forall a (h(a) \supset g(a)) \supset (h(x) \supset f(x)) \}$$

$$(67) \quad \{ (\forall a f(a) \equiv b) \supset (b \supset \forall a f(a)) \} \supset \{ (\forall a f(a) \equiv b) \supset (b \supset f(c)) \}$$

$$(68) \quad (\forall a f(a) \equiv b) \supset (b \supset f(c))$$

これらがどのように導出されるかは、前節と同じ記法を用いると図6で示される。

ここで注意すべきことがある。われわれは、フレーゲの公理(52),(54),(58)を等号を持つ述語論理の公理と見なした。もちろんそのことは正しい。ところが、その場合に、実は(67),(68)は導出できない。これを打開するために、記号“ $\equiv$ ”を文の内容を表すものと見て、公理(52)(54)(58)を「拡張された命題論理」⁽²⁶⁾と解釈する必要がある。

$$\begin{array}{c}
52 \quad [8] : 52 \supset 53 \\
\hline
53 \\
54 \quad [53] : 54 \supset 55 \\
\hline
55 \quad [9] : 55 \supset 56 \\
\hline
[52] \quad 56 : [52] \supset 57 \\
\hline
57 \\
\\
58 \quad [9] : 58 \supset 61 \\
\hline
61 \\
\\
58 \quad [30] : [58] \supset 59 \\
\hline
59 \\
58 \quad [12] : [58] \supset 60 \\
\hline
60 \\
\\
58 \quad [8] : [58] \supset 62 \\
\hline
[24] : 62 \supset 63 \quad 62 \\
\hline
63 \\
58 \quad [7] : 58 \supset 67 \\
\hline
[57] \quad 67 : [57] \supset 68 \\
\hline
68 \\
\\
62 \quad [18] : 62 \supset 64 \\
\hline
64 \\
[61] : [64] \supset 65 \quad [64] \\
\hline
[8] : 65 \supset 66 \quad 65 \\
\hline
66
\end{array}$$

図6

すると、(67)(68)は導出可能となる。そのとき、(67)(68)は上記の今日流の記法で書かれた論理式の意味で（すなわち b を命題として）理解されねばならない。もし、 b を個体変項と解釈すると、(67)(68)は次のようになるが、これらは無意味（文法違反）であるからである。

$$(67)* \{(\forall a f(a) = b) \supset (b \supset \forall a f(a))\} \supset \{(\forall a f(a) = b) \supset (b \supset f(c))\}$$

$$(68)* (\forall a f(a) = b) \supset (b \supset f(c))$$

言い換えると、註(25)で述べたように、フレーゲは記号“ $\equiv$ ”を、対象の同一性と命題の内容の同一性とを共に表しうるという意味で両義的に用いているから、(52)から(66)までを等号を持つ第1階述語論理の式とも、また拡張された命題論理の式とも解することができるが、(67)と(68)は拡張された命題論理の式としか解釈できないということである。

このフレーゲの述語論理（等号を含んでいてもいなくても）の公理系は無矛盾であり、完全であり、独立である⁽²⁷⁾。

- (1) 考察対象となる論理と、考察する側の論理のレベル差を設定して、前者を対象論理、後者をメタ論理として二つの論理を区別することで困難は一応は回避できる。しかし、メタ論理そのものの正当性はどのように確保されるかという問題は依然として残る。
- (2) 『概念記法』の原典テキストとしては [Frege 1879] を用い、頁づけもこれに拠る。また優れた英訳・解説として [Bynum 1972] を参照する。以後『概念記法』を BS と略記することがある。
- (3) 言語哲学（または分析哲学）の創始者をウィトゲンシュタインやラッセルというよりもむしろフレーゲに見るという見方は、[Dummett 1973] によって今日有力なものとなっている。しかし、フレーゲの全体像を過不足なく眺めるという観点に立つと、この見方の影響は今日強くなりすぎているのではないかと、とも筆者には考えられる。
- (4) 11 の項目とは以下の事柄である：①命題関数の発明、②量化理論の発明、③第1階述語論理の最初の出現、④論理体系の方法の最初の使用、⑤命題論理の論理体系としての最初の定式化、⑥関係の祖先の最初の定式化、⑦数学的帰納法による証明の最初の論理的分析、⑧（実質上の）真理表による論理結合詞の定義と公理の正当化の最初の試み、⑨論理体系における質料含意の最初の使用、⑩変項（フレーゲのいう文字）の概念の最初の明確かつ首尾一貫した説明、⑪公理と推論規則の最初の明確な区別。[Bynum 1972] pp.13-14 参照。また、本論文第1章2.2節参照。
- (5) “ $\vdash$ ” は現在では、公理体系での証明可能性を示す記号として用いられるのが普通である。クリーネによれば “ $\vdash$ ” をこの意味で最初に使用したのはロッサーとクリーネである（[Kleene 1952] p.88参照）。ラッセルとホワイトヘッドは Principia Mathematica で “ $\vdash$ ” を assertion sign として用いたが、内容線は用いていない（[Church 1956] p.24脚注65参照）。
- (6) [Sluga 1980] p.76 ff.
- (7) 意図 (intention) や慣用 (convention) の断定 (assertion) との関わりについての興味深い分析が [Dummett 1973] ch.10 Assertion p.299 ff. にある。
- (8) この指摘は [Bell 1979] p.97-8 に負う。
- (9) [Bell 1979] p.98.
- (10) [Bell 1979] p.88. これは [Geach 1965] p.452からの引用である。

- (11) [Lukasiewicz 1935] 参照。
- (12) H. スラガもこの点を強調している。[Sluga 1980] pp.90-95.
- (13) 後期の論文「否定」においてもこの事は強調される。[Frege 1918] 参照。
- (14) [Frege 1893] § 5.
- (15) 註(4) 参照。
- (16) H. Sluga, op.cit. p.78参照。
- (17) (平叙) 文の「意義」は、フレーゲの場合、他の文との関連は切り離して、独立に、その文が表現する思想 (Gedanke) として決定され得る、というのが基本的だと思われる。これについては [Dummett 1975] 参照。
- (18) H. Sluga, op.cit. p.71.
- (19) ここでいう無矛盾性は、ある論理式 A とその否定 $\neg A$ が共に導出されることはない、という構文論的意味での無矛盾性である。(36) $a \supset (\neg a \supset b)$ がフレーゲの体系では導出できるから、この意味での矛盾とは、すべての式（むろん正しく形成された式 well formed formulas）がこの体系で導出できることと同値である。従って、この体系が無矛盾のときかつそのときのみ、この体系で導出できない式が少なくとも一つ存在する。
- (20) カルマルの方法による証明が初めて行われたのは [Kalmar 1934-5] においてである。また [Kleene 1952] § 29, [Kleene 1967] § 12, [杉原 1967] p.68 ff. 参照。
- (21) [Lukasiewicz 1935] 参照。
- (22) [Kneale 1962] pp.490-491.
- (23) 仮定 $A_1, \dots, A_n$ からの B の演繹が $B_1, \dots, B_m$ ($=B$) とするとき、 $A_1, \dots, A_{n-1}$ からの $A_n \supset B$ の演繹が、 $A_n \supset B_1, \dots, A_n \supset B_m$ から作られるというアイディアによる。
- (24) 束（とくに真理値束）とは演算 $\cup$ (結), $\cap$ (交) が定義され、次の五つの公理を持つ（真理値の）集合である。
1. $a = a$ (同一律)
 2. $(a = b \wedge A(a)) \supset A(b)$ (同値代入)
 3. $a \cup b = b \cup a, a \cap b = b \cap a$ (交換律)
 4. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$ (結合律)

5. $a \cup (a \cap b) = a$, $a \cap (a \cup b) = a$ (吸収律)

順序 $a \leq b$ は $a \cap b = a$ と定義される。そして、すべての真理値の結、交を最大元、最小元といい、それぞれ 1, 0 で表す。このとき、 a の補元 a^c は、 $a \cup a^c = 1$, $a \cap a^c = 0$ で与えられる真理値である。

(25) つまり、フレーゲは『概念記法』においては、対象の同一性を示すのにも、また命題の意味内容の同一性を示すのにも、“ $\equiv$ ” というただ一つの記号を用いている。今日では、対象(個体)の同一性を示すには“ $=$ ”が、命題の真・偽の観点から見た同一性(同値性)あるいは命題の相互導出可能性としての同値性を示すのには“ $\equiv$ ”が、用いられる。

(26) 「拡張された命題論理」とは、命題変項に作用する全称または存在量化記号、あるいはその両方を持つ命題論理を指す。[Church 1956] §28 参照。

(27) 等号を含まないフレーゲの述語論理の公理系は [ヒルベルト & アッケルマン 1954] の体系と同等であるから完全である。等号を含む述語論理の完全性証明は [杉原 1967] p.143 ff, [Kleene 1967] §52 にある。無矛盾性と独立性についても [杉原 1967] p.142-3 参照。

引用文献

- [Angelelli 1990]: Gottlob Frege, *Kleine Schriften*, hrsg. von I. Angelelli, Hildesheim G. Olms, 1990.
- [Bell 1979]: D. Bell, *Frege's Theory of Judgement*, Oxford Clarendon Press, 1979.
- [Bynum 1972]: Gottlob Frege, *Conceptual Notation and Related Articles*, transl. and ed. by T. W. Bynum, Oxford Clarendon Press, 1972.
- [Church 1956]: A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I Princeton U. P., 1956.
- [Dummett 1973]: M. Dummett, *Frege, Philosophy of Language*, Harper & Row, 1973.
- [Dummett 1975]: M. Dummett, “Frege's Distinction between Sense and Reference”, [Dummett 1978] に収録 (pp.116-144)。
- [Dummett 1978]: M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, Harvard U. P. 1978.
- [Frege 1879]: G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aussätze*, ed. I. Angelelli, Hildesheim G. Olms, 1964.
- [Frege 1891]: G. Frege, “Funktion und Begriff”, [Angelelli 1990] に収録 (ss.125-142)。
- [Frege 1892(1)]: G. Frege, “Ueber Sinn und Bedeutung”, *Zeitschrift für wissenschaftliche Philosophische Kritik*, 100, ss.25-50. [Angelelli 1990] に収録 (ss.143-162)。
- [Frege 1892(2)]: G. Frege, “Ueber Begriff und Gegenstand”, *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16, 1892, ss.192-205. [Angelelli 1990] に収録 (ss.167-178)。
- [Frege 1893]: G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. I, Jena H. Pohle, 1893. 復刻版: Hildesheim G. Olms, 1962.
- [Frege 1918]: G. Frege, “Die Verneinung: Eine logische Unter-

suchung”, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 1, 1918, ss.143-57. [Angelelli 1990]に収録 (SS.362-378)。

[Geach 1965]: P. T. Geach, “Assertion”, Philosophical Review, lxxiv, 1965, pp.448-54. Geach, Logic Matters, Oxford 1972に再録。

[Hilbert & Ackermann 1928]: D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der Theoretischen Logik, Springer, 1928.

[Kalmar 1934-5]: L. Kalmar, “Ueber die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls”, Acta Litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungariae, Sectio scientiarum mathematicarum (Szeged), vol.7, 1934-5, pp.222-43.

[Kleene 1952]: S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North-Holland, 1952.

[Kleene 1967]: S. C. Kleene, Mathematical Logic, John Wiley & Sons, 1967.

[Kneale 1962]: W. & M. Kneale, The Development of Logic, Oxford, 1962.

[Lukasiewicz 1935]: J. Lukasiewicz, “Zur Geschichte der Aussagenlogik”, Erkenntnis 5, 1935, pp.111-31. Lukasiewicz, Selected Works, ed. by L. Borkowski, North-Holland 1970, に再録。

[Sluga 1980]: H. Sluga, Gottlob Frege, Routledge & Kegan Paul, 1980.

[Thiel 1965]: C. Thiel, Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges, Meinenheim am Glan A. Hain, 1965.

[杉原 1967]: 杉原丈夫『数学的論理学』槇書店, 1967.

[ヒルベルト & アッケルマン 1954]: ヒルベルト & アッケルマン『記号論理学の基礎』伊藤誠訳, 大阪教育図書, 1954. これは, [Hilbert & Ackermann 1928]の第3版の翻訳である。

第3章 一般系列理論

—『概念記法』第Ⅲ部研究—

はじめに

本章の目的は、(i)「一般系列理論からのいくつかの話題」(Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre)と題されたフレーゲの『概念記法』第Ⅲ部⁽¹⁾の内容を可能なかぎり詳細に解説・吟味し、それによって、(ii)この部分が、その後に展開される彼の論理主義のある基本的側面——それは一言で言えば「命題の導出において直観にではなく純粹思考にのみ依拠する」ということである——を具体的な形で実行して見せようとしていること、を確認し、(iii)さらに、「証明の厳密性の追究」という、19世紀の数学の哲学の潮流の中でフレーゲが果たした独自の役割というより広い観点から、この部分に光を当てることである。

論理学の刷新が1879年に起こったこと、この1879年という年が『概念記法』(Begriffsschrift)が出版された年であることは、今ではよく知られるようになった。第2章で見たように、『概念記法』の第Ⅰ部、第Ⅱ部の内容は、記号法と条件法・一般性等の論理的概念についての深い考察であり、論理学史上最初の(第1階)述語論理の展開であった。つぎに、われわれは本章で『概念記法』の第Ⅲ部に向かう。従来、この部分は、後の『算術の基礎』での「数の概念」の展開に先立つ、予備的な数学的概念の断片的提示といった形でしか理解されず、それが持つ重要さもほとんど無視されていたように思われる。最近、ブーロスが第Ⅲ部に関する啓発的な論文⁽²⁾を著してこの部分の持つ意義を明らかにしたことにより、そういった状況はかなりの程度は改善された。しかし、ブーロスが直接に扱っているのは、事実上、第Ⅲ部の一部にすぎない。そこで、本章では、これを補う意味も込めて、より丁寧に第Ⅲ部の内容を追跡する(以下、第1～5節)。

フレーゲは『概念記法』第Ⅲ部への導入(§23)で純粹思考の直観に対する優位を強調する。彼によれば、直観は命題の理解と構成において一定の役割を果たすとはいえ、命題の主張内容の表現の一般性という点で純粹思考(論理的思考)に遠く及ばない。このような考えはフレーゲの「論理主義」の一つの基本的側面を物語るものであり、数論の展開に必要な一般系列理論を第Ⅲ部で展開するときの指導理念となっている。(例えば、後に

詳しく見るように、「数学的帰納法」のより一般的な系列理論からの導出にそのことが典型的に現れる。）そして、この純粹思考の優位は、透き間のない厳密な証明の追究と結びついている。『概念記法』の5年後に出版され、19世紀の数学の「厳密化」の流れの中で自らの独自の位置を自覚して論じている『算術の基礎』の冒頭でも、フレーゲはこの「厳密な証明の追究」を強調している。この文脈から見て、『概念記法』第Ⅲ部は、「厳密な証明の追究」を、数論の展開に必要な系列に関する一般法則の証明という具体的な場面で遂行する第一歩であることが明らかとなる（以下、第6、7節）。

1. 『概念記法』第Ⅲ部の構成とフレーゲの意図

まず、『概念記法』第Ⅲ部の全体的構成を把握することから始める。第Ⅲ部は、第Ⅰ部「記号の説明」（§1～§12）、第Ⅱ部「純粹思考のいくつかの判断の提示と導出」（§13～§22）に続く、『概念記法』の最後の部分である。この部分は、すでに述べたように「一般系列理論からのいくつかの話題」と題されており、§23から始まり§31で終わる。導入的な節である§23で、第Ⅲ部が『概念記法』で占める位置と目的が説明される。§24で「特性Fはf系列において遺伝する」という概念の定義が与えられ（定義69）、続く§25で遺伝性に関する諸帰結が導かれる。§26で「xはf系列でyに先行する」という関係が第2階の量化により定義される（定義76）。ここで、『概念記法』におけるフレーゲの論理が公式的には「第2階述語論理」になったことが判明する。続く§27、§28で祖先関係の定義から諸帰結が導かれる。§29で「zはxで始まるf系列に属する」という関係が先の祖先関係を用いて定義される（定義99）。続く§30でそれからの帰結が導かれる。最後に、§31で「fは一意的（＝多対一の）手続きである」という概念が定義され（定義115）、その諸帰結が導かれる。（§31の先に、『概念記法』に登場するすべての論理式について、それが何を導くのに使われたかを示す表が付録として加えられている。）

こうして、導入部分（§23）を除くと、四つの定義の提示とそれらからの諸帰結を導くことが、第Ⅲ部の中心的内容となっている。その四つの定義とは次のものである。

定義69：「特性Fはf系列において遺伝する」

定義76：「xはf系列でyに先行する」

定義99：「zはxで始まるf系列に属する」

定義115：「fは一意的手続きである」

フレーゲにとって重要であるのは、これらの定義の内容と同時にその定義の「仕方」である。すなわち、これら四つの定義がすべて「論理的に」定義されていることである（その具体的な内容は以下で考察する）。そのことの持つ意義をフレーゲ自身の言葉によって聞こう。

フレーゲは、内容目次で「導入的論評（Einleitende Bemerkungen）」と題された§23において、以下のように述べている（少し長いが§23を全文引用する）。

「以下の導出は、この概念記法の取り扱い方についての一般的観念を与えようとするものである、たとえそれが、この記法の持つ利点を完全に知らしめるに十分ではないかもしれないとも。この利点は、より複雑な文[命題]において初めて顕著なものとなる。その上、この例において、純粹思考（das reine Denken）——それは感覚によって、または直観によって^{ア・プリオリ}先天的にさえ与えられる内容をすべて度外視する——が、その固有な本性から生じる内容だけから、一見するとある種の直観（irgendeine Anschauung）に基づいてのみ可能であるように見える判断をいかにして生み出し得るか、をわれわれは見る。われわれはこの働きを、子供のような意識にとっては何も無いように見える空気[水蒸気]を眼に見える水滴をなす液体に変化させる凝結作用に、喩えることができる。系列に関する以下で展開される諸命題は、系列に関するある種の直観から導出され得るどんな類似の命題をも一般性においてはるかに凌駕する。それゆえ、もし系列についての直観的観念を基礎に取るのがより適切であると考えたいならば、そのようにして得られた命題がここで与えられた命題と同じような言葉使いを持ったとしても、それらは、基礎づけられている特定の直観の領域においてしか妥当性を持たないゆえに、ここでの命題ほど多くのことは語らないだろう、ということを忘れてはならない。」⁽³⁾

フレーゲはここで、自らが考案した概念記法の利点を説明している。概念記法が複雑な命題においてこそ大きな威力を発揮すること、その威力の内実として、純粹思考が感覚や直観に基づかないで生み出す定義や導出を概念記法がはっきりと眼に見えるように示すことを——水蒸気水滴に凝結することに喩えて——説明している。そして、この「直観」と「純粹思考」の差異は、それらに基づく命題の射程距離の長さに関して明白である。フレーゲによれば、系列に関する直観がいかなるものであれ、概念記法によって表現される

- 71 -

$$\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a)) \equiv \text{Her} (F)$$

は、

「もし d が何であれ、 d が特性 F を持てば、手続き f を d に適用した結果がすべて特性 F を持つならば、そのときかつそのときに限り、

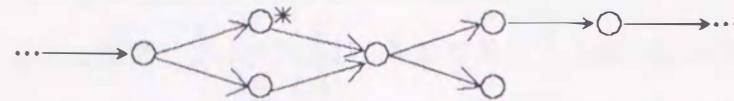
私は“特性 F は f 系列において遺伝する”と言う」

と表現される。

「 f 系列における遺伝」の内容をモデル化するための図式を考えよう。 $x f y$ の関係を



と描く。この関係 f (つまり ' $\rightarrow$ ') は多数の対象の間で成り立ち、例えば



のような「系列」を形成していると考えてよい。このとき、「 f 系列における遺伝性」と

は、任意の f 関係： $\dots \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{f} \bigcirc \dots$ において、 $x f y$ 関係の前者 x が特性 F を持つ

： $\begin{matrix} F \\ \bullet \\ x \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} \bigcirc \\ y \end{matrix}$ ならば $x f y$ 関係の後者 y も特性 F を持つ： $\begin{matrix} F \\ \bullet \\ x \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} F \\ \bullet \\ y \end{matrix}$ ，ということである。

従って、上の「系列」図で、* 印のついた対象が特性 F を持つ： $\bullet^*$ ならば、そこから出ている $\rightarrow$ の到達先、さらにその到達先から出る $\rightarrow$ の到達先、等々がすべて特性 F を持つことになる：



続く §25 でフレーゲは、遺伝性の定義である命題 69 からの諸帰結を導出している。まず、第 II 部の最後の命題である命題 68： $(\forall a G a \equiv B) \supset (B \supset G c)$ において (無用な混乱を避ける目的でフレーゲ自身が使っている文字を替えている。以下同様)，
 'a' に d を，'G' に $F \supset \forall a (d f a \supset F a)$ を，'B' に $\text{Her} (F)$ ，'c' に x をそれぞれ代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a)) \equiv \text{Her} (F)] \\ & \supset [\text{Her} (F) \supset (F x \supset \forall a (x f a \supset F a))] \end{aligned}$$

これと、命題 69 (この上の式の先件となっている) から MP (モドゥス・ポネンス：『概念記法』第 I 部 §6) により、次の命題 70 が導かれる：

$$\text{Her} (F) \supset (F x \supset \forall a (x f a \supset F a)) \quad (70)$$

(f 系列で遺伝する特性 F を持つ x のすべての子は F を持つ)

以後、主要な式言語の後に、フレーゲ自身の説明か、または f を親子関係モデルで表現した日常言語への翻訳を付する。

命題論理の命題 19： $(D \supset (C \supset B)) \supset [(B \supset A) \supset (D \supset (C \supset A))]$ (第 II 部 §16) の ' D ' に $\text{Her} (F)$ を，' C ' に $F x$ を，' B ' に $\forall a (x f a \supset F a)$ を，' A ' に $x f y \supset F y$ を代入すると， $[\text{Her} (F) \supset (F x \supset \forall a (x f a \supset F a))] \supset [(\forall a (x f a \supset F a) \supset (x f y \supset F y)) \supset (\text{Her} (F) \supset (F x \supset (x f y \supset F y)))]$ が導かれるが、この式の先件は命題 70 であるから、MP により、次の命題 71 が導かれる：

$$[\forall a (x f a \supset F a) \supset (x f y \supset F y)] \supset [\text{Her} (F) \supset (F x \supset (x f y \supset F y))] \quad (71)$$

(x のすべての子が特性 F を持ち y が x の子ならば y は F を持つということが成り立てば、親から子に遺伝する特性 F を y の親 x が持てば、 y は F を持つ)

普遍例化を主張する命題 58 (§22)： $\forall a f a \supset f c$ の ' f ' に $x f \supset F$ を，' c ' に y を代入すると、 $\forall a (x f a \supset F a) \supset (x f y \supset F y)$ が導かれるが、これは 71 の先件であるから、MP により、次の命題 72 が導かれる：

$$\text{Her} (F) \supset (F x \supset (x f y \supset F y)) \quad (72)$$

(特性 F が f 系列で遺伝し、 x が特性 F を持ち、 y が手続き f を x に適用した結果ならば、 y は特性 F を持つ)，(親から子へと遺伝する特性 F を持つ x の子 y も F を持つ)

命題論理の命題 2 (§14)： $(C \supset (B \supset A)) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$ で，' C ' に $\text{Her} (F)$ を，' B ' に $F x$ を，' A ' に $x f y \supset F y$ を代入すると， $[\text{Her} (F) \supset (F x \supset (x f y \supset F y))] \supset [(\text{Her} (F) \supset F x) \supset (\text{Her} (F) \supset (x f y \supset F y))]$ が導出されるが、この式の先件は命題 72 であるから、MP により、次の命題 73 が導かれる：

$$(\text{Her} (F) \supset F x) \supset [\text{Her} (F) \supset (x f y \supset F y)] \quad (73)$$

(特性 F が f 系列で遺伝すれば x が F を持つということが成り立てば、 F が f 系列で遺伝し、手続き f の x への適用結果が y ならば、 y は F を持つ)

命題論理の命題 8 (§16)： $(D \supset (B \supset A)) \supset (B \supset (D \supset A))$ で，' D ' に $\text{Her} (F)$ を，' B ' に $F x$ を，' A ' に $x f y \supset F y$ を代入すると， $[\text{Her} (F) \supset (F x$

$\supset (x f y \supset F y)) \supset [F x \supset (Her(F) \supset (x f y \supset F y))]$ が導出されるが、この式の先件は命題72であるから、MPにより、次の命題74が導かれる：

$$F x \supset [Her(F) \supset (x f y \supset F y)] \quad (74)$$

(x が、 f 系列で遺伝する特性 F を持つならば、 x に手続き f を適用した任意の結果である y も F を持つ)

同一者不可識別原理（フレーゲの言葉では「内容の同一の第一原理」）である命題52 (§20) : $(C \equiv D) \supset (f C \supset f D)$ で、‘ C ’ に $\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a))$ を、‘ D ’ に $Her(F)$ を、‘ f ’ に Γ を代入すると、 $[\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a)) \equiv Her(F)] \supset [\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a)) \supset Her(F)]$ が導出されるが、この先件は命題69であるから、MPによって、次の命題75が導かれる：

$$\forall d (F d \supset \forall a (d f a \supset F a)) \supset Her(F) \quad (75)$$

(任意の d が特性 F を持つことから手続き f の d への適用結果がすべて F を持つことが帰結するならば、特性 F は f 系列で遺伝する)

3. 祖先関係 (f 系列での後続関係) とその帰結

フレーゲは §26 を次の定義76 で始める：

$$\forall F [Her(F) \supset (\forall a (x f a \supset F a) \supset F y)] \equiv x f^* y \quad (76)$$

“ $\equiv$ ” の左辺によって定義される右辺 $x f^* y$ はフレーゲの実際の記号では、

$$\frac{\gamma}{\beta} \sim_f (x \gamma, y \beta)$$

である。われわれは簡単のために ‘ $x f^* y$ ’ で表す。フレーゲによれば、 $x f^* y$ は、

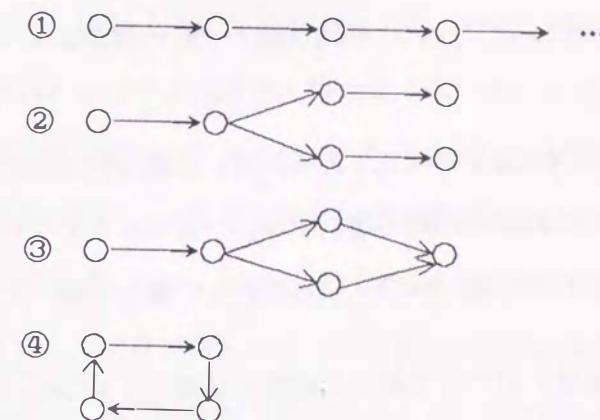
「 y は f 系列で x に後続する」 (y folgt in der f -Reihe auf x)

と翻訳される⁽⁸⁾。もちろん、 f の意味が具体的に定められて初めて、 $x f^* y$ の意味も確定する。命題76は、フレーゲの日常言語での翻訳では、

「 F が何であれ、特性 F は f 系列で遺伝するという命題と、手続き f を x に適用した結果がすべて特性 F を持つという命題とから、 y が特性 F を持つということが推論されるならば、そのとき、私は “ y は f 系列で x に後続する”、または “ x は f 系列で y に先行する” と言う」

となる⁽⁹⁾。

この命題76の説明を補足する目的で、フレーゲは脚註を与えている⁽¹⁰⁾。それによると、 f 系列の順序をここでは一般的に考えているということであり、例えば、①数珠つなぎの玉のような系列だけではなく、②家系樹のように枝分かれしたもの、③逆に枝が合流するもの、④環のように一巡するもの、等も含まれるという。フレーゲが考えている例を図示すると以下のようなものとなろう。



ここで、 f のモデルとして親子関係を取ろう。これは、枝分かれと枝の合流を共に含む。このとき、 $x f^* y$ はどのようなものとなろうか。任意の特性 F を取る。 F が f 系列で遺伝する、つまり親の持つ特性 F がその親のすべての子に伝えられる、とする。いま、 x の子がすべて F を持つとする。このような状況のとき、 y は x のすべての子が持つすべての遺伝する特性を持っている。すなわち、 y は x の子孫である。もちろん、 F が x の子孫がすべて持っているような遺伝的特性の一つであるにも関わらず、 x の子孫でない y が F を持つことは有りうる。しかし、 x のすべての子が持つ任意の遺伝的特性を、 x の子孫でない y が持つことはできない。そのような特権は x の子孫にのみ許される。こうして、 f を親子のモデルで考えるとき、

$x f^* y$ は 「 x は y の祖先である」を表す。

例えば、『創世記』5章のアダムの系図によれば、人祖アダムの後継者は次のようになっている（共同訳による）：

アダム → セト → エノシュ → ケナン → マハラエル → イエレド
→ エノク → メトシェラ → レメク → ノア → ……

このとき、セト以下のアダムの子孫は「この系列でアダムに後続する（この家系でアダムの子孫である）」が、それは、彼らが、アダムのすべての子（カインやアベルも含む）が持つ、この家系で遺伝する任意の特性を持つからだと考えられる。例えば、そのような特性として「人間の父を持つ」という特性が考えられる。人祖アダムは神が直接に創造した

ものであるから、彼自身はこの「人間の父を持つ」という特性は持っていない。しかし、アダムは『創世紀』では人間の祖先であることに相違ないから、アダムから数えて第十代目の子孫であるノアも、アダムの子、孫、曾孫、…と綿々と伝えられたすべての遺伝的特性を持つ筈である。「 x は y の祖先である」または「 y は x の子孫である」という概念は、このような例によって確かにある種の直観によって理解できるが、フレーゲの要点は、「 f 系列」および「 f 系列における遺伝性」という、より論理的・一般的概念によって、これを定義することにある。

いずれにせよ、 $x f^* y$ (x は f 系列での y の祖先である)は、直観的には次のようなことである。 F を任意の特性として、これが f 系列で遺伝する、つまり $a f d : d \bigcirc \longrightarrow \bigcirc a$ なる任意の d 、 a に対して、もし $F d : \bullet \longrightarrow \bigcirc$ ならば $F a : \bullet \longrightarrow \bullet$ であり、

しかも x の子(手続き f の x の適用結果)のすべてがこの特性 F を持つ： $x \bigcirc \begin{array}{c} \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$

ということが成り立つ場合はつねに y も F を持つ。これが、 $x f^* y$ の意味である(記号 f^* が f の一般化であることを暗示する)。

§27と§28でフレーゲは、 f 系列での後続関係(祖先関係)からの諸帰結を導いている。記述を簡略化するために、

$$\forall a (x f a \supset F a)$$

を、

$$\text{In}(x, F) \quad [\text{inheritance: 相続}]$$

と略記する。(また、今後も手続き f は固定されているとみなす。)すると、命題76は

$$\forall F [\text{Her}(F) \supset (\text{In}(x, F) \supset F y)] \equiv x f^* y \quad (76)$$

となる。

命題68 (§22) : $(\forall a F a \equiv B) \supset (B \supset F c)$ に類比的な第2階の命題68' : $[\forall f M \beta f \beta \equiv B] \supset [B \supset M \beta G \beta]$ で、「 f 」に F を、「 $M \beta \Gamma \beta$ 」に $\text{Her}(\Gamma)$ $\supset (\forall a (x f a \supset \Gamma a) \supset \Gamma y)$ を、「 B 」に $x f^* y$ を、「 G 」に F を代入すると、

$$[\forall F (\text{Her}(F) \supset (\text{In}(x, F) \supset F y)) \equiv x f^* y]$$

$$\supset [x f^* y \supset (\text{Her}(F) \supset (\text{In}(x, F) \supset F y))]$$

が導出されるが、この式の先件は命題76であるから、MPにより、次の命題77が導かれる：

$$x f^* y \supset [\text{Her}(F) \supset (\text{In}(x, F) \supset F y)] \quad (77)$$

(y が f 系列で x に後続し、特性 F が f 系列で遺伝し、 x への手続き f の適用結果がすべて特性 F を持てば、 y は F を持つ)

命題17 (§16) : $[D \supset (C \supset (B \supset A))] \supset [C \supset (B \supset (D \supset A))]$ で、「 D 」に $x f^* y$ を、「 C 」に $\text{Her}(F)$ を、「 B 」に $\text{In}(x, F)$ を、「 A 」に $F y$ を代入すると、先件が命題77となるから、MPによって後件が次の命題78として導かれる：

$$\text{Her}(F) \supset [\text{In}(x, F) \supset (x f^* y \supset F y)] \quad (78)$$

命題2 (§14) : $[C \supset (B \supset A)] \supset [(C \supset B) \supset (C \supset A)]$ で、「 C 」に $\text{Her}(F)$ を、「 B 」に $\text{In}(x, F)$ を、「 A 」に $x f^* y \supset F y$ を代入すると、先件が命題78となるから、MPによって後件が次の命題79として導かれる：

$$[\text{Her}(F) \supset \text{In}(x, F)] \supset [\text{Her}(F) \supset (x f^* y \supset F y)] \quad (79)$$

命題5 (§15) : $(B \supset A) \supset [(C \supset B) \supset (C \supset A)]$ で、「 B 」に $\text{Her}(F) \supset \text{In}(x, F)$ を、「 A 」に $\text{Her}(F) \supset (x f^* y \supset F y)$ を、「 C 」に $F x$ を代入すると、先件が命題79となるから、MPにより、後件が次の命題80として導かれる：

$$[F x \supset (\text{Her}(F) \supset \text{In}(x, F))] \supset [F x \supset (\text{Her}(F) \supset (x f^* y \supset F y))] \quad (80)$$

命題74では y は $x f y \supset F y$ の部分にしか現れないから、この部分を y で普遍汎化 (§11) すると、 $F x \supset [\text{Her}(F) \supset \forall a (x f a \supset F a)]$ 、つまり $F x \supset [\text{Her}(F) \supset \text{In}(x, F)]$ が導出されるが、これは命題80の先件だから、MPにより後件が次の命題81として導かれる(これは一般化された数学的帰納法である)：

$$F x \supset [\text{Her}(F) \supset (x f^* y \supset F y)] \quad (81)$$

(x が f 系列で遺伝する特性 F を持ち、 y が x の子孫ならば、 y は特性 F を持つ)

命題18 (§16) : $[C \supset (B \supset A)] \supset [(D \supset C) \supset (B \supset (D \supset A))]$ で、「 C 」に $F x$ を、「 B 」に $\text{Her}(F)$ を、「 A 」に $x f^* y \supset F y$ を、「 D 」に A を代入すると、その先件が命題81となるから、MPにより後件が次の命題82として導かれる：

$$(A \supset F x) \supset [\text{Her}(F) \supset (A \supset (x f^* y \supset F y))] \quad (82)$$

この命題82で、「 A 」に $h x$ 、「 $F \Gamma$ 」に $h \Gamma \vee g \Gamma$ を代入すると、 $(h x \supset h x \vee g x) \supset [\text{Her}(\{a : h a \vee g a\}) \supset (h x \supset (x f^* y \supset h y \vee g y))]$ が導出されるが、この式の先件部分： $h x \supset h x \vee g x$ は、命題36 (18) : $A \supset A \vee B$ で「 A 」に $h x$ を「 B 」に $g x$ を代入した式だから証明可能である。よって、これとMPにより後件部分が次の命題83として導かれる：

$$\text{Her}(\{a : h a \vee g a\}) \supset [h x \supset (x f^* y \supset h y \vee g y)] \quad (83)$$

(特性FまたはGを持つという特性がf系列で遺伝し、xが特性hを持ち、

yがf系列でxに後続するならば、yは特性hまたはgを持つ)

ここで、‘F’に $h \vee g$ のような複合述語を代入する場合、‘Her(F)’という形で‘F’がすでに第2階の述語によって述語づけられているときは $\text{Her}(h \vee g)$ とせず、上記のように集合論の記法で $\text{Her}(\{a : h a \vee g a\})$ と表す。

命題8 (§16) : $[D \supset (B \supset A)] \supset [B \supset (D \supset A)]$ で、‘D’に $F x$ を、‘B’に $\text{Her}(F)$ を、‘A’に $x f^* y \supset F y$ を代入して得られる式の先件は命題81であるから、MPにより、後件である次の命題84が導かれる：

$$\text{Her}(F) \supset [F x \supset (x f^* y \supset F y)] \quad (84)$$

命題12 (§16) : $[D \supset (C \supset (B \supset A))] \supset [D \supset (B \supset (C \supset A))]$ で、‘D’に $x f^* y$ を、‘C’に $\text{In}(x, F)$ を、‘B’に $\text{Her}(F) \supset F y$ を、‘A’に $F y$ を代入した式の先件は命題77であるから、MPにより、後件である次の命題85が導かれる：

$$x f^* y \supset [\text{In}(x, F) \supset (\text{Her}(F) \supset F y)] \quad (85)$$

(xがyの祖先で、xのすべての子が遺伝する特性Fを持てば、yはFを持つ)

命題19 (§16) : $(D \supset (C \supset B)) \supset [(B \supset A) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で、‘D’に $x f^* y$ を、‘C’に $\text{In}(x, F)$ を、‘B’に $\text{Her}(F) \supset F y$ を、‘A’に $\text{Her}(F) \supset (y f z \supset F z)$ を代入した式の先件は命題85であるから、MPにより、その後件である次の命題86が導かれる：

$$[\text{Her}(F) \supset F y] \supset [\text{Her}(F) \supset (y f z \supset F z)] \\ \supset [x f^* y \supset \{\text{In}(x, F) \supset (\text{Her}(F) \supset (y f z \supset F z))\}] \quad (86)$$

命題73で、‘y’に z を、‘x’に y を代入した式は命題86の先件となるから、MPにより、その後件部分である次の命題87が導かれる：

$$x f^* y \supset [\text{In}(x, F) \supset (\text{Her}(F) \supset (y f z \supset F z))] \quad (87)$$

フレーゲは命題87の導出を、以下のように日常言語で説明する⁽¹¹⁾。

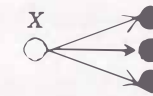
(α) yがf系列でxに後続するとする： $x f^* y$



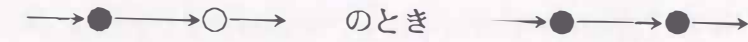
(β) 手続きfのxへの適用結果がすべて特性Fを持つとする： $\text{In}(x, F)$ ，

つまり

$$\forall a (x f a \rightarrow F a)$$



(γ) 特性Fがf系列で遺伝する： $\text{Her}(F)$



(α)，(β)，(γ)の仮定から命題85により、

(δ) yは特性Fを持つ： $F y$



(ε) zを手続きfのyへの適用結果とする： $y f z$



命題72 (ただし、‘x’にyを‘y’にzを代入)によれば、

$$\text{Her}(F) \supset (F y \supset (y f z \supset F z))$$

であるから、(γ)： $\text{Her}(F)$ ，(δ)： $F y$ ，(ε)： $y f z$ から、MPにより、

zは特性Fを持つ： $F z$

が帰結する。こうして、命題87はを日常言語で表現すると、

「もしzが対象yへの手続きfの適用結果であり、yがxにf系列で後続しており、xへの手続きfの適用結果がすべてf系列で遺伝する特性Fを持つならば、そのときzは特性Fを持つ」

となる。親子モデルでは、

「xがyの祖先であり、xのすべての子が親から子へ遺伝する特性Fを持ち、zがyの子ならば、zはその特性Fを持つ」
となる。

命題15 (§16) : $[E \supset \{D \supset (C \supset (B \supset A))\}] \supset [B \supset \{E \supset (D \supset (C \supset A))\}]$ で、‘E’に $x f^* y$ を、‘D’に $\text{In}(x, F)$ を、‘C’に $\text{Her}(F)$ を、‘B’に $y f z$ を、‘A’に $F z$ を代入した式の先件は命題87であるから、その後件である次の命題88が導かれる：

$$y f z \supset [x f^* y \supset (\text{In}(x, F) \supset (\text{Her}(F) \supset F z))] \quad (88)$$

ここから、§28に移る。引き続き、祖先関係(f系列での後続関係)に関わる命題の

導出を追跡する。

命題52 (§20) : $(C \equiv D) \supset (fC \supset fD)$ で, 'C' に $\forall F [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)]$ を, 'D' に $x f^* y$ を, 'f' に Γ を代入した式の先件は命題76であるから, その後件部分が次の命題89として導かれる:

$$\forall F [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)] \supset x f^* y \quad (89)$$

命題5 (§15) : $(B \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$ で, 'B' に $\forall F [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)]$ を, 'A' に $x f^* y$ を代入した式の先件は命題89であるから, その後件部分が次の命題90として導かれる:

$$[C \supset \forall F \{Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)\}] \supset [C \supset x f^* y] \quad (90)$$

命題63 (§22) : $gx \supset [m \supset (\forall a (ga \supset fa) \supset fx)]$ で, 'g' に $x f \Gamma$ を, 'm' に $Her(F)$ を, 'f' に F を, 'x' に y を代入した式:

$$x f y \supset [Her(F) \supset (\forall a (x f a \supset Fa) \supset Fy)]$$

つまり,

$$x f y \supset [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)]$$

の後件部分(下線部)の F を普遍汎化した式は, 命題90で 'C' に $x f y$ を代入した式の先件であるから, その後件部分が次の命題91として導かれる:

$$x f y \supset x f^* y \quad (91)$$

日常言語による命題91の導出はこうなる(フレーゲが与えている説明⁽¹²⁾を少し変形する)。

(α) x に手続き f を適用した結果を y とする: $x f y$

(β) x に手続き f を適用した結果がすべて特性 F を持つ: $\forall a (x f a \supset Fa)$
つまり $In(x, F)$

(α) と (β) から,

(γ) y は特性 F を持つ: Fy

が導出されるから,

(δ) x に手続き f を適用した結果が y であり, F が何であれ, F が f 系列で遺伝し, x に手続き f を適用した結果がすべて特性 F を持つならば, y は特性 F を持つ

が導かれる。(8)の下線部分は「 y は f 系列で x に後続する」ということであるから,

「 y が x に手続き f を適用した結果であるならば, y は f 系列で x に後続する」

となる。これが, 命題91の内容である。親子モデルでは,

「 y が x の子であるならば, y は x の子孫である」

と表現できる。

命題53 (§20) : $fc \supset (c = d \supset fd)$ で, 'fA' に $x f y \supset A f^* y$ を, 'c' に x を, 'd' に z を代入した式: $(x f y \supset x f^* y) \supset (x = z \supset (x f y \supset z f^* y))$ の先件が命題91であるから, 後件部分が次の命題92として導かれる:

$$x = z \supset (x f y \supset z f^* y) \quad (92)$$

命題60 (§22) : $\forall a (ha \supset (ga \supset fa)) \supset (gb \supset (hb \supset fb))$ に類比的な第2階の命題60' : $\forall f (\Omega \beta f \beta \supset (N \beta f \beta \supset M \beta f \beta)) \supset (N \beta g \beta \supset (\Omega \beta g \beta \supset M \beta g \beta))$

で, 'f' に F を, ' $\Omega \beta \Gamma \beta$ ' に $In(x, \Gamma)$ を, ' $N \beta \Gamma \beta$ ' に $Her(\Gamma)$ を, ' $M \beta \Gamma \beta$ ' に Γy を, 'g' に F を代入した式:

$$\forall F [In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fy)]$$

$$\supset [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)]$$

の後件の F を普遍汎化すると次の式が導出される:

$$\forall F [In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fy)]$$

$$\supset \forall F [Her(F) \supset (In(x, F) \supset Fy)]$$

ところで, この式は, 命題90で 'C' に $\forall F [In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fy)]$ を代入した式の先件部分に外ならないから, その後件部分が次の命題93として導かれる:

$$\forall F [In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fy)] \supset x f^* y \quad (93)$$

命題7 (§15) : $(B \supset A) \supset [(D \supset (C \supset B)) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で, 'B' に $\forall F (In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fz))$ を, 'A' に $x f^* z$ を, 'D' に $y f z$ を, 'C' に $x f^* y$ を代入した式の先件は, 命題93で 'y' に z を代入した式: $\forall F [In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fz)] \supset x f^* z$ であるから, 先の式の後件部分が次の命題94として導かれる:

$$[y f z \supset \{x f^* y \supset \forall F (In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fz))\}]$$

$$\supset [y f z \supset (x f^* y \supset x f^* z)] \quad (94)$$

命題88で 'F' が現れている部分を普遍汎化して得られる式:

$$y f z \supset [x f^* y \supset \forall F (In(x, F) \supset (Her(F) \supset Fz))]$$

は命題94の先件部分であるから, 後件部分が次の命題として導かれる:

$$y f z \supset (x f^* y \supset x f^* z) \quad (95)$$

命題8 (§16) : $(D \supset (B \supset A)) \supset (B \supset (D \supset A))$ で, 'D' に $y f z$ を, 'B' に $x f^* y$ を, 'A' に $x f^* z$ を代入した式の先件は命題95であるから, 後件が次の命題96として導かれる:

$$x f^* y \supset (y f z \supset x f^* z) \quad (96)$$

(f 系列で x に後続する対象 y に手続き f を適用した結果 z は f 系列で x に後続する)

または (y が x の子孫であり, z が y の子ならば, z も x の子孫である)

命題75で 'F' に $x f^* \Gamma$ を代入すると,

$$\forall d [x f^* d \supset \forall a (d f a \supset x f^* a)] \supset \text{Her}(\{a : x f^* a\})$$

が得られるが, この式の先件は, 命題96で 'z' を a で 'y' を d で普遍汎化した式:

$$\forall d [x f^* d \supset \forall a (d f a \supset x f^* a)]$$

に外ならないから, 後件部分が次の命題97として導かれる:

$$\text{Her}(\{a : x f^* a\}) \quad (97)$$

(f 系列で x に後続する (つまり x の子孫である) という特性は, f 系列で遺伝する)

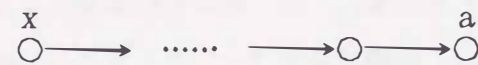
命題97の内容は, 親子モデルではこういうことである。いま, 「x の子孫である」という特性を考える。任意の対象 d がこの特性を持っているとしよう。d の任意の子を a とする。そのとき, a も「x の子孫である」という特性を持つ。図式的に書くと,



かつ



ならば



命題84で, 'F' に $x f^* \Gamma$ を, 'x' に y を, 'y' に z を代入した式: $\text{Her}(\{a : x f^* a\}) \supset [x f^* y \supset (y f^* z \supset x f^* z)]$ の先件部分は命題97であるから, 後件部分が次の命題98として導かれる:

$$x f^* y \supset (y f^* z \supset x f^* z) \quad (98)$$

(x が y の祖先であり, y が z の祖先であれば, x は z の祖先である)

命題98は, 祖先関係 (すなわち, f 系列で後続するという関係) が推移的であるということ を主張している。

4. 系列 (家系) への所属関係とその帰結

対象 x を固定し, 「x を始祖とする x の子孫である (x に f 系列で後続する)」という特性を考えると, x 自身がこの特性を持つとは限らない。むしろ, 持たない場合が多い。人間の親子関係のモデルにおいても, ある対象がそれ自身の子孫 (または先祖) であるとは, 通常は見做さない。だが他方で, 命題97が主張するように, 「x の子孫である」という特性は, 親から子へと遺伝する。一般に, f 系列で遺伝する特性 F を考えるとき, たとえ x の子孫がすべてこの特性 F を持っていたとしても, x 自身が F を持つとは限らない。『創世記』の人祖アダムの家系においても, アダム自身はアダムの子孫ではない。同様に, 「人間の父を持つ」という遺伝する特性は, アダムのすべての子孫に共有されているが, アダムその人はこれを欠いている (本章第3節参照)。しかし, アダム自身がアダムの家系 (「人間」の家系?) に属することは間違いない。そこで, アダム自身を含めたアダムの家系の一員であることを定義するには, 「アダムの子孫であるか, またはアダムその人である」と規定すればよいことになる。これがフレーゲのアイディアである。

『概念記法』§29でフレーゲは, 「z は x で始まる f 系列に属する」または「z は x を始祖とする家系に属する」という関係を, 命題99として定義している。

$$x f^* z \vee z = x \equiv x f^* = z \quad (99)$$

この式の '≡' の右辺である $x f^* = z$ は, フレーゲの実際の記号では,

$$\frac{\gamma}{\beta} f(x\gamma, z\beta)$$

であり, これが「z は x で始まる f 系列に属する」を意味する。つまり, 命題99全体は, 「z が f 系列で x に後続するかまたは z が x と同一であるとき, かつそのときに限り z は x で始まる f 系列に属する」ということを表している。

以下, この「ある対象で始まる f 系列に属する」(親子モデルでは「ある家系に属する」という関係の諸帰結を, フレーゲに従って導出する。

命題57 (§21) : $(C \equiv D) \supset (f D \supset f C)$ で, 'C' に $x f^* z \vee z = x$ を, 'D' に $x f^* = z$ を, 'f' に Γ を代入した式:

$$(x f^* z \vee z = x \equiv x f^* = z) \supset (x f^* = z \supset x f^* z \vee z = x)$$

の先件は命題99であるから, 後件が次の命題100として導かれる:

$$x f^* = z \supset x f^* z \vee z = x \quad (100)$$

命題48 (§19) : $(D \supset C \vee B) \supset [(B \supset A) \supset \{(C \supset A) \supset (D \supset A)\}]$ で、
 ‘D’ に $x f^* = z$ を、‘C’ に $x f^* z$ を、‘B’ に $z = x$ を、‘A’ に $z f y \supset x f^* y$ を代入した式の先件部分は命題100であるから、後件部分が次の命題101として導かれる：

$$[z = x \supset (z f y \supset x f^* y)] \supset [\{x f^* z \supset (z f y \supset x f^* y)\} \supset \{x f^* = z \supset (z f y \supset x f^* y)\}] \quad (101)$$

命題92で、‘x’ に z を、‘z’ に x を、‘y’ に v を代入した式： $z = x \supset (z f v \supset x f^* v)$ は、命題101の‘y’ に v を代入した式の先件であるから、これからその式の後件部分：

$[x f^* z \supset (z f v \supset x f^* v)] \supset [x f^* = z \supset (z f v \supset x f^* v)]$ が導かれる。この式の先件部分は、命題96で‘y’ に z を‘z’ に v を代入した式： $x f^* z \supset (z f v \supset x f^* v)$ に外ならないから、先の式の後件部分が次の命題102として導かれる：

$$x f^* = z \supset (z f v \supset x f^* v) \quad (102)$$

言葉での命題102の導出はこうである：

もし z が x と同一ならば、命題92により、 z に手続き f を適用した結果である対象 v は f 系列で x に後続する。もし z が f 系列で x に後続すれば、命題96により、 z に手続き f を適用した結果である v は f 系列で x に後続する。

従って、

もし z が x で始まる f 系列に属するならば、そのとき手続き f を z に適用した結果である v は x に後続する

命題19 (§16) : $[D \supset (C \supset B)] \supset [(B \supset A) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で、‘D’ に $x f^* = z$ を、‘C’ に $\neg x f^* z$ を、‘B’ に $z = x$ を、‘A’ に $x = z$ を代入した式の先件は命題100であるから、その後件が次の命題103として導かれる：

$$(z = x \supset x = z) \supset (x f^* = z \supset x f^* z \vee x = z) \quad (103)$$

命題55 (§21) : $c = d \supset d = c$ で、‘c’ に z を、‘d’ に x を代入した式は命題103の先件であるから、後件が次の命題104として導かれる：

$$x f^* = z \supset x f^* z \vee x = z \quad (104)$$

ここから、§30に移る。引き続き、「 z は x で始まる f 系列に属する (z は x の家系

に属する)」という関係の諸帰結の導出を追う。

命題52 (§20) : $(C \equiv D) \supset (f C \supset f D)$ で、‘C’ に $x f^* z \vee z = x$ を、‘D’ に $x f^* = z$ を、‘f’ に Γ を代入した式の先件部分は命題99であるから、後件部分が次の命題105として導かれる：

$$x f^* z \vee z = x \supset x f^* = z \quad (105)$$

命題37 (§18) : $(C \vee B \supset A) \supset (C \supset A)$ で、‘C’ に $x f^* z$ を、‘B’ に $z = x$ を、‘A’ に $x f^* = z$ を代入した式の先件部分は命題105であるから、後件部分が次の命題106として導かれる：

$$x f^* z \supset x f^* = z \quad (106)$$

(f 系列で x に後続する対象 z は、 x で始まる f 系列に属する)

または (x の子孫であるものは、 x を始祖とする家系の一員である)

命題7 (§15) : $(B \supset A) \supset [(D \supset (C \supset B)) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で、‘B’ に $z f^* v$ を、‘A’ に $z f^* = v$ を、‘D’ に $z f^* = y$ を、‘C’ に $y f v$ を代入した式の先件部分は、命題106で‘x’ に z を‘z’ に v を代入した式に外ならないから、先の式の後件部分が次の命題107として導かれる：

$$[z f^* = y \supset (y f v \supset z f^* v)] \supset [z f^* = y \supset (y f v \supset z f^* = v)] \quad (107)$$

命題102で、‘x’ に z を、‘z’ に y を代入した式： $z f^* = y \supset (y f v \supset z f^* v)$ は命題107の先件であるから、その後件が次の命題108として導かれる：

$$z f^* = y \supset (y f v \supset z f^* = v) \quad (108)$$

ここで、この命題108の導出を言葉で与える。

もし y が z で始まる f 系列に属するならば、そのとき命題102によって、 y に手続き f を適用したすべての結果は、 f 系列で z に後続する。そのとき、命題106によって、手続き f を y に適用したすべての結果は、 z で始まる f 系列に属する。

従って、

もし y が z で始まる f 系列に属するならば、手続き f を y に適用したすべての結果は、 z で始まる f 系列に属する。

上の命題108で、‘z’ に x を代入し、‘y’ を d で、‘v’ を a で普遍汎化すると

$$\forall d (x f^* = d \supset \forall a (d f a \supset x f^* = a))$$

という式が導かれるが、これは、命題75で‘F’ に $x f^* = \Gamma$ を代入した式：

$$\forall d (x f^* = d \supset \forall a (d f a \supset x f^* = a)) \supset \text{Her}(\{a : x f^* = a\})$$

の先件であるから、後件が次の命題109として導かれる：

$$\text{Her}(\{a : x f^* = a\}) \quad (109)$$

命題78で、‘F’に $x f^* = \Gamma$ を、‘x’にyを、‘y’にmを代入した式：

$$\text{Her}(\{a : x f^* = a\}) \supset [\forall a (y f a \supset x f^* = a) \supset (y f^* m \supset x f^* = m)]$$

の先件は命題109であるから、後件が次の命題110として導かれる：

$$\forall a (y f a \supset x f^* = a) \supset (y f^* m \supset x f^* = m) \quad (110)$$

命題25 (§16)：(D ⊃ (C ⊃ A)) ⊃ [D ⊃ (C ⊃ (B ⊃ A))] で、‘D’に $z f^* = y$ を、‘C’に $y f v$ を、‘A’に $z f^* = v$ を、‘B’に $\neg v f^* z$ を代入した式の先件は命題108であるから、後件が次の命題111として導かれる：

$$z f^* = y \supset [y f v \supset v f^* z \vee z f^* = v] \quad (111)$$

この命題111の言葉による導出を与える：

もしyがzで始まるf系列に属するならば、命題108により、手続きfのyに対する適用結果はすべてzで始まるf系列に属する。従って、手続きfのyに対する適用結果はすべて、zで始まるf系列に属するかまたはf系列でzに先行する。

こうして、

もしyがzで始まるf系列に属するならば、そのとき、手続きfのyへの適用結果はすべて、zで始まるf系列に属するかまたはf系列でzに先行する。

命題11 (§16)：((C ⊃ B) ⊃ A) ⊃ (B ⊃ A) で、‘C’に $\neg x f^* z$ を、‘B’に $z = x$ を、‘A’に $x f^* = z$ を代入した式の先件は命題105であるから、その後件が次の命題112として導かれる：

$$z = x \supset x f^* = z \quad (112)$$

命題7 (§15)：(B ⊃ A) ⊃ [(D ⊃ (C ⊃ B)) ⊃ (D ⊃ (C ⊃ A))] で、‘B’に $z = x$ を、‘A’に $x f^* = z$ を、‘D’に $z f^* = x$ を、‘C’に $\neg z f^* x$ を代入した式の先件は命題112であるから、後件が次の命題113として導かれる：

$$[z f^* = x \supset (z f^* x \vee z = x)] \supset [z f^* = x \supset (z f^* x \vee x f^* = z)] \quad (113)$$

命題104で、‘x’にzを、‘z’にxを代入した式： $z f^* = x \supset (z f^* x \vee z = x)$ は命題113の先件であるから、後件が次の命題114として導かれる：

$$z f^* = x \supset (z f^* x \vee x f^* = z) \quad (114)$$

(xがzを始祖とする家系に属するならば、xはzの子孫であるかまたはzはxを始祖とする家系に属する)

この命題114の言葉による導出を与える：

xがzで始まるf系列に属するとする。そのとき命題104によって、xはf系列でzに後続するかまたはzはxと同一である。もしzがxと同一であれば、命題112によって、zはxで始まるf系列に属する。

最後の二つの命題から、次が導かれる：

xはf系列でzに後続するか、またはzはxで始まるf系列に属する。

従って、

もしxがzで始まるf系列に属するならば、xはf系列でzに後続するかまたはzはxで始まるf列に属する。

5. 多対一の関係とその帰結

これまで、二項関係fは全く一般的な「手続き」として扱われてきた。従って、「親子」のような多対多の関係がモデルとして許容されていた。しかし、フレーゲの本来の意図は数系列にあり、その準備のために一般系列理論を展開してきたのである。そこで、fを限定して、数系列の構成に不可欠な「多対一」の関係（数学的には関数の関係）を定義せねばならない。それが『概念記法』§31で命題115によって与えられる：

$$\forall e \forall d [d f e \supset \forall a (d f a \supset a = e)] \equiv \text{FN}(f) \quad (115)$$

われわれが $\text{FN}(f)$ と表した ‘≡’ の右辺は、フレーゲの実際の記号では、

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ f(\delta, \varepsilon) \\ \varepsilon \end{array}$$

であり、「手続きfは多対一である」または「fは関数である」と翻訳される（‘FN’は function に由来）。こうして、命題115全体は、

「dが何であれ、eがdへの手続きfの適用結果であるという状況から、dへのfの適用結果がすべてeと同一であるということが帰結するとき、かつそのときに限り、“fは多対一の手続きである（fは関数である）”と定義する」

と翻訳される。

以下、多対一の関係の定義からの諸帰結を、フレーゲに従って導出する。

命題68 (§22) : $[\forall a f a \equiv B] \supset (B \supset f c)$ で, 'f' に $\forall d (d f \Gamma \supset \forall a (d f a \supset a = \Gamma))$ を, 'B' に $FN(f)$ を, 'c' に x を代入し, 'a' を e で書き換えると,

$$\begin{aligned} & [\forall e \forall d (d f e \supset \forall a (d f a \supset a = e)) \equiv FN(f)] \\ & \supset [FN(f) \supset \forall d (d f x \supset \forall a (d f a \supset a = x))] \end{aligned}$$

が導かれるが, この式の先件は命題115であるから, 後件である次の命題116が導かれる:

$$FN(f) \supset \forall d [d f x \supset \forall a (d f a \supset a = x)] \quad (116)$$

命題9 (§16) : $(C \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (C \supset A))$ で, 'C' に $FN(f)$ を, 'B' に $\forall d (d f x \supset \forall a (d f a \supset a = x))$ を, 'A' に $y f x \supset \forall a (y f a \supset a = x)$ を代入した式の先件は命題116であるから, 後件が次の命題117として導かれる:

$$\begin{aligned} & [\forall d \{d f x \supset \forall a (d f a \supset a = x)\} \supset \{y f x \supset \forall a (y f a \supset a = x)\}] \\ & \supset [FN(f) \supset \{y f x \supset \forall a (y f a \supset a = x)\}] \end{aligned} \quad (117)$$

普遍例化の主張である命題58 (§22) : $\forall a f a \supset f c$ で, 'a' を d で書き換え, 'f' に $\Gamma f x \supset \forall a (\Gamma f a \supset a = x)$ を, 'c' に y を代入した式:

$$\forall d [d f x \supset \forall a (d f a \supset a = x)] \supset \{y f x \supset \forall a (y f a \supset a = x)\}$$

は命題117の先件であるから, 後件が次の命題118として導かれる:

$$FN(f) \supset [y f x \supset \forall a (y f a \supset a = x)] \quad (118)$$

命題19 (§16) : $(D \supset (C \supset B)) \supset [(B \supset A) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で, 'D' に $FN(f)$ を, 'C' に $y f x$ を, 'B' に $\forall a (y f a \supset a = x)$ を, 'A' に $y f a \supset a = x$ を代入した式の先件は命題118であるから, 後件である次の命題119が導かれる:

$$\begin{aligned} & [\forall a (y f a \supset a = x) \supset (y f a \supset a = x)] \\ & \supset [FN(f) \supset \{y f x \supset (y f a \supset a = x)\}] \end{aligned} \quad (119)$$

命題58 (§22) : $\forall a f a \supset f c$ で, 'f' に $y f \Gamma \supset \Gamma = x$ を, 'c' に a を代入した式: $\forall a (y f a \supset a = x) \supset (y f a \supset a = x)$ は命題119の先件であるから, 後件である次の命題120が導かれる:

$$FN(f) \supset [y f x \supset (y f a \supset a = x)] \quad (120)$$

$$\text{命題20 (§16)} : [E \supset (D \supset (C \supset B))] \supset [(B \supset A) \supset \{E \supset (D \supset (C \supset A))\}]$$

で, 'E' に $FN(f)$ を, 'D' に $y f x$ を, 'C' に $y f a$ を, B に $a = x$ を, 'A' に $x f^* = a$ を代入した式の先件は命題120であるから, 後件が次の命題121として導かれる:

$$(a = x \supset x f^* = a) \supset [FN(f) \supset \{y f x \supset (y f a \supset x f^* = a)\}] \quad (121)$$

命題112で, 'z' に a を代入した式: $a = x \supset x f^* = a$ は命題121の先件であるから, 後件が次の命題122として導かれる:

$$FN(f) \supset [y f x \supset (y f a \supset x f^* = a)] \quad (122)$$

命題19 (§16) : $(D \supset (C \supset B)) \supset [(B \supset A) \supset (D \supset (C \supset A))]$ で, 'D' に $FN(f)$ を, 'C' に $y f x$ を, 'B' に $\forall a (y f a \supset x f^* = a)$ を, 'A' に $y f^* m \supset x f^* = m$ を代入した式の先件は, 上の命題122で $y f a \supset x f^* = a$ の部分の 'a' を普遍汎化した式: $FN(f) \supset (y f x \supset \forall a (y f a \supset x f^* = a))$ であるから, 先の式の後件が次の命題123として導かれる:

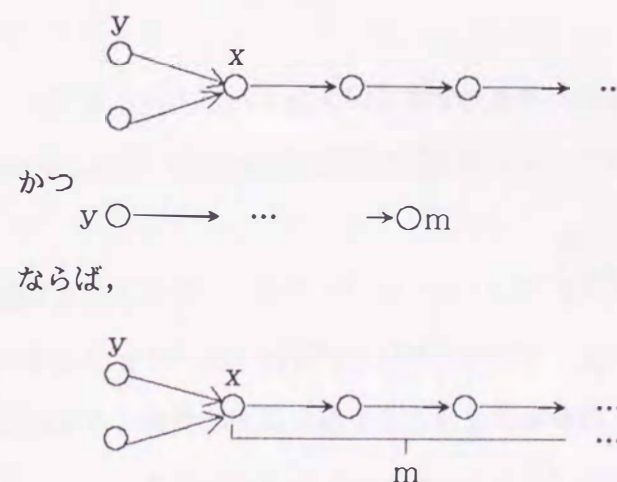
$$\begin{aligned} & [\forall a (y f a \supset x f^* = a) \supset (y f^* m \supset x f^* = m)] \\ & \supset [FN(f) \supset \{y f x \supset (y f^* m \supset x f^* = m)\}] \end{aligned} \quad (123)$$

上の命題123の先件は命題110に外ならないから, その後件が次の命題124として導かれる:

$$FN(f) \supset [y f x \supset (y f^* m \supset (x f^* = m))] \quad (124)$$

(もし x が多対一の手続き f を y に適用した結果であり, m が f 系列で y に後続するならば, m は x で始まる f 系列に属する)

命題124の内容を図式的に表すと,



となろう。

命題9 (§16) : $(C \supset B) \supset ([B \supset A] \supset (C \supset A))$ で、‘C’ に $FN(f)$ を、
 ‘B’ に $Her(\{a : a f^* m \vee m f^* = a\})$ を、‘A’ に $x f^* m \supset (x f^* y \supset y f^* m \vee m f^* = y)$ を代入した式の先件は命題131であるから、後件が次の命題132として導かれる：

$$[Her(\{a : a f^* m \vee m f^* = a\}) \supset \{x f^* m \supset (x f^* y \supset y f^* m \vee m f^* = y)\}] \\ \supset [FN(f) \supset \{x f^* m \supset (x f^* y \supset y f^* m \vee m f^* = y)\}] \quad (132)$$

命題83で、‘ $h\Gamma$ ’ に $\Gamma f^* m$ を、‘ $g\Gamma$ ’ に $m f^* = \Gamma$ を代入した式：

$$Her(\{a : a f^* m \vee m f^* = a\}) \supset [x f^* m \supset (x f^* y \supset y f^* m \vee m f^* = y)]$$

は命題132の先件であるから、後件が次の命題133として導かれる：

$$FN(f) \supset [x f^* m \supset (x f^* y \supset y f^* m \vee m f^* = y)] \quad (133)$$

(手続き f が多対一であり、 m と y が f 系列で x に後続するとき、 y は f 系列で m に先行するかまたは m で始まる f 系列に属する)

この命題133の導出によって、フレーゲは、『概念記法』第Ⅲ部での f 系列に関する式の導出をひとまず終えている。

6. 直観と純粹思考

フレーゲは『概念記法』第Ⅲ部への導入 (§23) で、純粹思考の直観に対する優位を強調していた。フレーゲによれば、純粹思考によって定義され導かれる命題は、直観による命題を凌駕しているのである(本章第1節参照)。また、『概念記法』全体の「序」において、自らの歩みを振り返ってこう言っている：

「……、まず私は、ここから数概念に進むために系列における配置〔順序〕の概念を論理的後続の概念に還元しようと試みた。ここで直観的なものが気づかれずに侵入できないようにするために、すべての推論に透き間がなくなることが重要であった。」〔強調はフレーゲ〕⁽¹³⁾

こうして、フレーゲは、

(1) 命題の主張内容とその根拠の一般性・論理性、適用範囲の広さ、

および

(2) 推論の連鎖において透き間(論理的飛躍)が無いという意味での厳密な証明の追究、

という観点から、純粹思考の直観に対する優位を考えていると言える。算術の概念や定理を論理的に定義し導出すること、その導出を厳密な証明により行うこと、これらの実現はフレーゲの、後に論理主義と呼ばれるようになるプログラムにおける中心的な課題である。フレーゲは最初の著作である『概念記法』においてすでにそのことを目標とし、実行し始めたのである。そこで、この二つの観点から『概念記法』第Ⅲ部を眺め、彼の意図がこの時点でどれほど実現しているかを検討しよう。

直観的なものの役割とは何であろうか。フレーゲはカントを重視する観点から、「時空の直観形式」といったものを念頭においていたのかもしれないが、ここではまず、系列に関する命題を理解するためのモデルという形で捉えることにする。というのは、われわれは「系列における遺伝」や「系列における後続」といった関係を「親子」モデルを使って考えたが、これはフレーゲ自身の説明手段でもあったからである。親から子へと生物学上の特性が文字通り遺伝するモデルによって、対象 d が持っていた特性 F を、 d に手続き f を適用した結果である対象 a も持つこと、すなわち「 F の伝達」という事態を理解することが容易になる。しかし、そのような直観的なものは、さまざまなモデルの中の一つにすぎない。直観的なものに訴えることは、命題の内容全体を目前に提示されたモデルの特殊事例に限定してしまうことを含む。言い換えると、命題の内容の持つ一般性を狭め、それによって言わば命題の内容の射程を短く(適用範囲を狭く)するのである。

例えば、§26で「 y は f 系列で x に後続する」： $x f^* y$ という関係の定義(命題76)を説明するとき、フレーゲは手続き f の配置(順序)を、そこでは一般的に考えていることを強調するために、いくつかのモデルを例示していた。フレーゲの意図は、多数のモデルの提示による十全な理解の促進を図ることであったと同時に、それは、どれか一つのモデルに限定することによって命題76が持つ内容の一般性を減じないようにするための配慮でもあった。

われわれも手続き f を「親子」の関係として、『創世記』5章のアダムの系図を祖先関係(系列 f での後続関係)のモデルとした。そして、対象 x を固定して「 x を祖先とするその子孫である」という特性が遺伝することを、このモデルで考えることができる。この「 x を祖先としてその子孫である」という特性は後に、そのような特定のモデルに依存しない形で、フレーゲの体系において論理的に導出された(命題97: $Her(\{a : x f^* a\})$)。もちろん、これは論点先取によるのではなく、第2階述語論理という体系で「代入」という論理的操作によって導出されたのである。

ここで、この「代入」という論理的操作がフレーゲの体系という文脈において持つ必要以上の強さ（それはある困難を生み出す可能性を孕むほどのものである）について語ることとはできる⁽¹⁴⁾。しかし、われわれとしては、フレーゲの体系の欠点を指摘してその限界を論ずるのではなく、彼が意図したことの積極的な意義と（部分的にしろ）成功した側面を評価する、という観点を保持したい。『概念記法』第Ⅲ部でのフレーゲの意図は、自然数の算術を展開するに必要な関係と概念を一般的に定義し、論理的に導くことであった。上で引用した「系列における配置の概念を論理的後続の概念に還元する」というフレーゲの戦略の意図も、正しくそこにこそあった。

「算術に必要な原理の論理的導出」という『概念記法』第Ⅲ部での意図の実現を例証するものとして、いわゆる「数学的帰納法」の導出を挙げることができる。フレーゲの体系では、数学的帰納法は、命題81がそれに相当する：

$$(81) \quad Fx \supset [Her(F) \supset (x f^* y \supset Fy)] .$$

通常、自然数論において数学的帰納法（mathematical induction : MI）は次の形の命題で考えられる：

$$(MI) \quad P0 \wedge \forall x (Px \supset Px') \supset \forall x Px .$$

この、通常の形の数学的帰納法が命題81の特殊事例であり、これから論理的に導かれることは次のようにして分かる。いま、MIの先件を仮定する：

$$P0 \text{ かつ } \forall x (Px \supset Px') \quad \dots\dots ①$$

また、自然数論での後者関数「 $'$ 」をフレーゲの手続き f と関連づけるため、

$$x f y \equiv y = x' \quad \dots\dots ②$$

とおく。命題81で、「 F 」に P を、「 x 」に 0 を代入し、「 y 」を普遍汎化すると、

$$P0 \supset [Her(P) \supset \forall y (0 f^* y \supset Py)] \quad \dots\dots ③$$

が導かれる。ここで、 $Her(P)$ 、すなわち $\forall x (Px \supset \forall y (x f y \supset Py))$ の、下線部分： $\forall y (x f y \supset Py)$ は②により、 Px' と同値である。（なぜなら、 $\forall y (x f y \supset Py)$ と仮定すると普遍例化により、 $x f x' \supset Px'$ 。ところが②より、 $x f x' \equiv x' = x'$ であり、この式の右辺は常に成り立つから $x f x'$ 、 $\therefore Px'$ 。逆に、 Px' と仮定して、任意の y について $x f y$ とおくと、②より $y = x'$ だから、 Py 、 $\therefore \forall y (x f y \supset Py)$ が導かれるからである。）よって、 $Her(P)$ は $\forall x (Px \supset Px')$ と同値である。すると、①の仮定から $P0$ 、 $\forall x (Px \supset Px')$ すなわち $Her(P)$ であるから、③より

$$\forall y (0 f^* y \supset Py) \quad \dots\dots ④$$

が導かれる。ところで、標準的な解釈を持つ通常自然数論では、すべての自然数は、 0 および 0 の後者 $0'$ 、その後者 $0''$ 、そのまた後者 $0'''$ 、……である。よって、②の $x f y \equiv y = x'$ により、フレーゲの体系の言葉で言えば、すべての自然数とは、 0 、および 0 のすべての後続者（ $0 f^* y$ である任意の y ）に外ならない。ゆえに、仮定 $P0$ と④により、すべての自然数は P である、すなわち、

$$\forall x Px \quad \dots\dots ⑤$$

が導かれる。こうして、①の仮定から⑤が導けた。こうして、フレーゲの体系で

$$P0 \wedge \forall x (Px \supset Px') \supset \forall x Px$$

という、通常の数学的帰納法が導出される。

数学的帰納法は「数学に特有な原理」であると考えられることがある。フレーゲはこの原理をより一般的な形で導いた。その導出の根拠となったものは、全く一般的・論理的に定義された、 f 系列における遺伝と後続という関係である。概念に関わる法則が何を根拠にして何から導かれているか、という命題相互の内的関連を知ることは、学問の発展という観点からきわめて重要である。フレーゲは根拠となるものは、一般性・論理性のより高いものであると考え、自然数の算術の展開に必要な概念と法則を、より一般的・論理的な定義と法則から導くことを実行した。この観点から、『概念記法』第Ⅲ部を見直すとき、彼の意図は十分に実現しているといえる。

さて、「厳密な証明の追究」という観点から第Ⅲ部を見るというもう一つの課題は、節を改めて遂行することにする。

7. 厳密な証明の追究

われわれは『概念記法』第Ⅲ部を厳密な証明の追究という観点から眺めるために、『概念記法』の出版から5年後の1884年に出た『算術の基礎』（Grundlagen der Arithmetik）の冒頭の数章に手掛りを求めたい⁽¹⁵⁾。というのは、この箇所ではフレーゲ自身が明確に「厳密な証明の追究」という主題を述べており、従って、それを19世紀数学の厳密化の運動に果たしたフレーゲの役割という観点から『概念記法』第Ⅲ部に光を当てる、というわれわれの目論見にとって好都合だからである。

フレーゲは、関数・連続性・極限・無限といった概念について批判的吟味と厳密な定義

が求められているという歴史的な事態を踏まえて、こう述べる：

「数学においては、多くの成功した応用に支えられた単なる教訓的確信では不十分であることが益々明らかにされてきている。以前は自明なことと見なされていた多くの事柄に対して、今では証明が要求されている。…… 厳密に証明し、妥当性の限界を正確に設定しようとして、それを可能とするために概念を鋭利に把握しようとする努力が至る所でなされているのが見られる。」(『算術の基礎』⁽¹⁶⁾)

§ 1。以下引用の際は『基礎』と略記)

厳密な証明を追究するという数学のこのような傾向は、偶然的な歴史的産物ではなく、数学の本性に根ざすものとフレーゲは考える。

「証明が可能である場合には、数学が帰納による確証よりは証明を好むというのは数学の本性に基づいている。」(『基礎』§ 2)

ではなぜ、証明が必要なのか。それは、真理の間の相互関係、すなわち当の真理がどの一層基本的で単純な真理から導かれたかを知るためである。

「証明は、単に一つの命題の真理性に対してすべての疑いを排除するという目的だけを持つのではなく、真理がいかに互いに依存し合っているかという相互依存性への洞察をももたらすものである。」(『基礎』§ 2)

すると、証明は、真理の正当性(Berechtigung)の問題と直結する。これに関連してフレーゲは、『算術の基礎』§ 3で、算術の真理の本性について引き出される哲学的問い——算術の真理はア・プリオリなものかア・ポステリオリなものか、分析的なものか総合的なものかという問い——も数学的に問われねばならない、と言う。

「[そのような] 関連する諸概念がそれ自体哲学に属するにせよ、それにも関わらず、数学の手助けがなければ[これらの問いについては] いかなる決定にも到達し得ない、と私は信じる。」(『基礎』§ 3)

フレーゲによれば、算術の命題についても、命題の主張内容の真偽の問いと、その正当性の根拠の問い、つまりどのようにしてそれが証明されたかという問いとを、区別する必要がある。ア・プリオリ vs. ア・ポステリオリ、分析的 vs. 総合的という哲学的区別は、判断の「内容」にではなく判断をなす「根拠」に関わるのである。そして真理が数学の領域に属するものであれば、数学が本性的に求める命題の正当化、すなわち証明を改めて吟味する必要がある。フレーゲにとって、「分析的」または「ア・プリオリ」である命題とは、その証明が定義と一般的論理法則にのみ依存するような命題であり、「総合的」または「

ア・ポステリオリ」である命題とは、その証明が特殊な科学の領域または特定の対象についての事実を含むこと無しには遂行できない命題である。

ここで、ア・プリオリ vs. ア・ポステリオリ、分析的 vs. 総合的という区別をフレーゲが数学者として行ったのか哲学者として行ったのか、といった問題は派生的問題にすぎない。それらの区別にに基づく問い(算術の真理はこれらのどちらであるかという問い)が数学的に答え易いようにある種の変更を被ったとしても、肝心な点は「問いの数学化」の持つ意味である。フレーゲにとって、算術の基本法則は可能ならば証明されねばならず、しかも厳密に証明されねばならない。

「これらの哲学的な問いから出発して、われわれは数学の領域で独立に生じた同じ要求を定式化することに導かれる。すなわち、その要求とは、算術の基本法則はもしそれが何らかの方法で可能ならば、最大限の厳密さをもって証明されねばならない。というのは、演繹の連鎖におけるすべての透き間が最大の注意をもって取り除かれるとき初めて、その証明がいかなる原真理(Urwahrheit)に依存しているかを確実に語ることができるからである。」(『基礎』§ 4)

こうして、透き間のない証明が要求されるのは、真理の正当性の究極の根拠を明らかにするためである。

「もしわれわれがこの要求を満たそうとするならば、われわれは、そこで生じている概念をより単純な概念に分析することに成功するかまたはそれらをより一般性を持つものに還元することに成功するか、しないかぎり証明できない文に到達する。」(『基礎』§ 4)

フレーゲは、算術の基本法則が一般的な論理法則から導かれ、算術の展開に必要な概念——言うまでもなくその筆頭は数の概念である——がすべて論理的に定義できると考えた。こうして、基本法則の証明可能性と基本概念(数概念)の定義可能性の要求は、19世紀数学の厳密化の運動という歴史的な事実問題であるに止まらず、フレーゲにとっては数学の本性に根ざす要求であった。フレーゲはこの要求に従って、『概念記法』第Ⅲ部において、数系列を定義するためのより一般的な概念や関係(つまり「系列における遺伝」以下四つの概念や関係)を一般的・論理的に定義し、それに関する法則を論理的に導いた。第Ⅲ部でなされた仕事の意義は、上で見てきたような厳密な証明による真理の正当性の根拠の明示、という文脈から光を当てて初めて正しく評価されることになる。

- (1) テキストとしては、Olms 社からのもの：Gottlob Frege, Begriffsschrift und andere Aufsätze, Zweite Auflage, Olms Vlg.1977 を用いるが、これには一部誤植が含まれるので、Bynumの英訳：Gottlob Frege, Conceptual Notation and Related Articles, transl. and ed. by T. W. Bynum, Clarendon Press (1972) も合わせて参照する。
- (2) G. Boolos : "Reading the Begriffsschrift", Mind 94 (1985), pp.331-44. この論文は、フレーゲの数学の哲学に関する、80年代以降の主要な論文を集めた次の論文集にも収録されている。W. Demopoulos (ed.) : Frege's Philosophy of Mathematics, Harvard University Press (1995).
- (3) Frege: Begriffsschrift §23, S.55. (頁づけは註1のテキストによる。)
- (4) Begriffsschrift §24, S.56.
- (5) op.cit. §24, S.56.
- (6) op.cit. §24, S.57.
- (7) op.cit. §24, S.58.
- (8) op.cit. §26, S.61.
- (9) op.cit. §26, S.61-2.
- (10) op.cit. §26, S.62.
- (11) op.cit. §27, S.67.
- (12) op.cit. §28, S.69.
- (13) op.cit. S. X.
- (14) 標準的な論理規則が認められているとき、代入規則と内包公理シェーマ： $\exists X \forall x (Xx \equiv Xx \equiv A(x))$ とは演繹的に同値である。その証明の概略は以下のようになる。証明可能な式 $\forall x (Fx \equiv Fx)$ から第2階の存在汎化により、 $\vdash \exists X \forall x (Xx \equiv F(x))$ 。代入規則を仮定しているとして、'F' に $\{a : A(a)\}$ を代入すると、 $\vdash \exists X \forall x (Xx \equiv A(x))$ 。逆に、内包公理シェーマから代入規則が導けることを示す。 $\vdash \forall x (Fx \equiv A(x))$ かつ $\vdash P[F]$ から、 $\vdash P[\{a : A(a)\}]$ を導かねばならない。 $P[F]$ の部分式についての数学的帰納法により、 $\vdash \forall x (Fx \equiv A(x)) \supset (P[F] \equiv P[\{a : A(a)\}])$ 。仮定： $\vdash P[F]$ と、 $P[\{a : A(a)\}]$ の部分に

'F' が含まれないことにより、全称化と述語論理により、 $\vdash \exists X \forall x (Xx \equiv A(x)) \supset P[\{a : A(a)\}]$ 。内包公理シェーマを仮定しているから、 $\vdash P[\{a : A(a)\}]$ 。QED.

こうして、代入規則を認めることは内包公理シェーマが体系内に含まれていることを認めることになる。しかし、特性と対象の区別とその根拠が余り明確でない『概念記法』においてはラッセルのパラドクスと類比的な問題が生じる可能性は否定できない。例えば、f は特性間では成り立たないのか？特性と特性の間で $x f y$ を「特性 x は特性 y に当てはまる」と解釈すると $\neg x f x$ は「x は自分自身に当てはまらない特性である」という特性となり、そのとき $\exists X \forall x (Xx \equiv \neg x f x)$ は「自分自身に当てはまらないすべての特性がかつそれらのみが当てはまる特性が存在する」と解釈されようが、これは偽であろう。もちろん、 $\exists X$ を「…なる集合が存在する」と読むとラッセルのパラドクスそのものが導かれる。

- (15) 同じ戦略をベナセラフが影響力のある論文「フレーゲ：最後の論理主義者」で採用している (P. Benacerraf : "Frege: The Last Logician", Midwest studies in philosophy VI, French et al (eds.), University of Minnesota Press, 1981, pp.17-35. 註2に記したDemopoulos 編の書物に収録)。
- (16) テキストとしてはオースティンの独英対訳本を用いる：The Foundations of Arithmetic, German Text with English Translation by J. L. Austin.