

## 大規模構造物の非線形強制振動解析および安定判別に関する研究

佐々木, 卓実  
九州大学工学機械科学知能機械

<https://doi.org/10.11501/3180310>

---

出版情報：九州大学, 2000, 博士（工学）, 課程博士  
バージョン：  
権利関係：



## 第5章 数値計算結果

第2章および第3章において、非線形支持された直線状はり構造物に対して、定常周期解を高速かつ高精度に求め得る増分伝達剛性係数法、および近似解の安定性を解析の精度を損なうことなく高速に判別する低次元化モデルによる安定判別法の定式化を行った。また、第4章では、低次元化モデル導出の際に利用される高速な固有値解析法として、計算過程に伝達剛性係数法を適用した逆反復法を定式化した。本章では種々の直線状はり構造物に対する具体的な計算結果により、これらの手法の有効性を確認する。

**5.1 計算条件** 本章では、4個の計算モデルに対して様々な条件で数値計算を行った。その計算には32ビットパーソナルコンピュータ（FORTRAN 77による倍精度計算）を使用した。以下に示す計算結果はいずれも奇数次解であるので、近似解の計算および安定判別には奇数次解用アルゴリズムを用いた。近似解の収束判定条件は、増分量の相対誤差が $10^{-10}$ 以下とした。安定判別用の低次元化モデルを構成するための固有振動数とモード行列の導出には、第4章で定式化した伝達剛性係数法を援用した逆反復法を用いた。低次元化モデルに対する安定判別に際しては、特性指数を求める場合には、有限近似した無限次元行列式の固有値計算に安定判別に必要な固有値（主特性指数）のみを計算するように改良したダブルQR法を利用した。また、特性乗数を求める場合には、推移行列の計算（変分方程式の数値積分）にはルンゲ・クッタ・ギル法、推移行列の固有値の計算にはダブルQR法を利用した。

また、線形一様はり要素の物性値は、すべての解析モデルに対して次のように設定した。

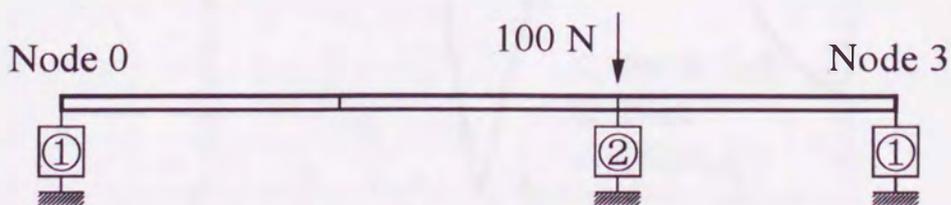
$$\left. \begin{array}{l} \rho = 7.86 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\ E = 206 \text{ [GPa]} \\ G = 79.2 \text{ [GPa]} \\ \kappa = 0.886 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

ここに、 $\rho$ は一様はり要素の密度である。また、断片線形基礎支持部に対しては、区分求積法<sup>(59)</sup>によってフーリエ係数の計算を行った。

5.2 モード III 法による安定判別の精度の確認 まず，三種類の低次元化法の中でもっとも高精度であることが予想されるモード III 法の計算精度を確認するため，図 5.1 に示すような計算モデル 5-i に対して近似解計算および安定判別を行った．モデル 5-i は，低次元化を行わずに全系の変分方程式に対してそのまま安定判別を行っても 3.2 節で述べた数値計算上の問題点が顕著に現れない範囲で最大規模のものであり，長さ 500 mm，直径 10 mm の中実な一様はり要素 3 本を直線状に結合した全長 1500 mm の構造物において，各一様はり要素は  $2^3$  個の基本要素に等分割（系の総自由度は 50）している．基礎支持要素としては，並進に関する 3 次の連続非線形性を考慮し，図示の節点に配置した．また，励振力については，節点 2 に振幅 100 N の調和強制外力が作用するものとした．なお，このモデルでは一様はり内部に作用する分布粘性減衰力は考慮していない．また，低次元化モデルに対する安定判別は特性乗数を求めることにより行った．

図 5.2(a)～図 5.2(c)に，節点 2 の 9 次近似解の周波数応答（最大振幅による表示）と安定判別の結果を示す．周波数応答の計算結果は各図ともに共通で，1 次と 2 次の主共振領域が現れており，漸硬形の非線形性のためにも右方向に傾斜している．以下に示すグラフでは，実線が安定解，破線が不安定解，○印はサドルノード分岐点，□印はホップ分岐点を表す．なお，近似解の計算精度に関しては，仮定するフーリエ級数の最高次数を 11 次以上に増やしても周波数応答に大きな変化が認められなかったため，このモデルの図示の振動数領域では 9 次近似解で十分に高精度であると見なすことができる．

図 5.2(a)は低次元化を行わずに安定判別を行った結果であり，応答曲線の垂直接線



$$\textcircled{1} : F_j^* = 10^7 \{y_j^* + 10^5 (y_j^*)^3\} \quad (j = 1, 3)$$

$$\textcircled{2} : F_j^* = 25.0\omega y_2^* + 10^3 \{y_2^* + 2.3 \times 10^5 (y_2^*)^3\}$$

図 5.1 計算モデル 5-i

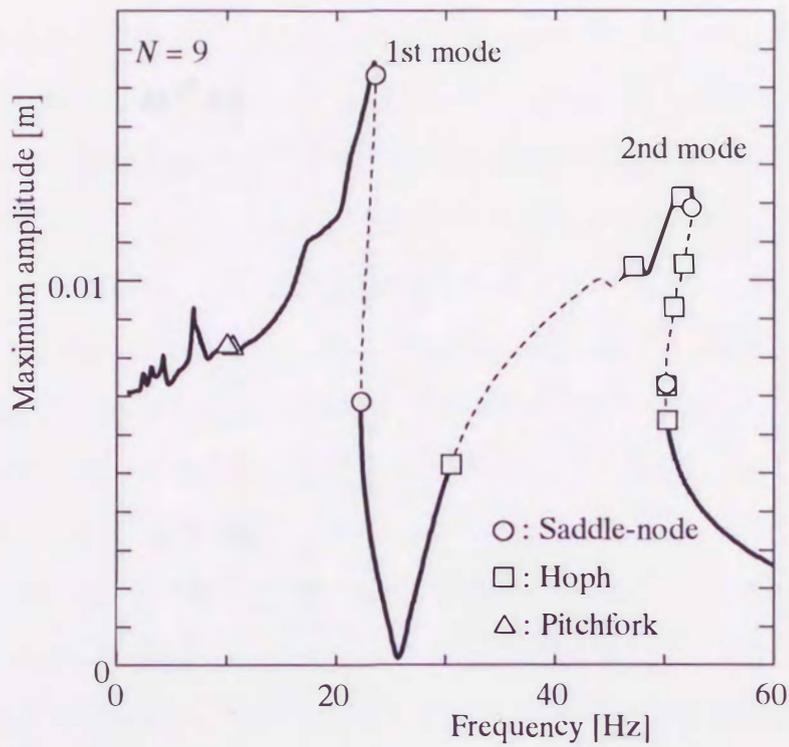


図 5.2(a) モデル 5-i の周波数特性と安定判別  
(低次元化を行わない場合)

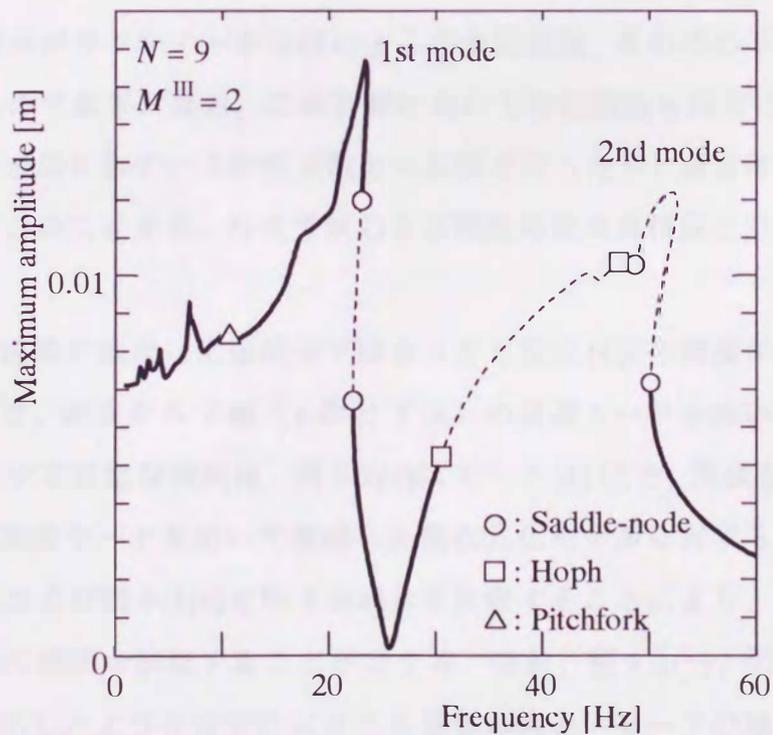


図 5.2(b) モデル 5-i の周波数特性と安定判別  
(モード III 法で低次から 2 組の複素モードを用いた場合)

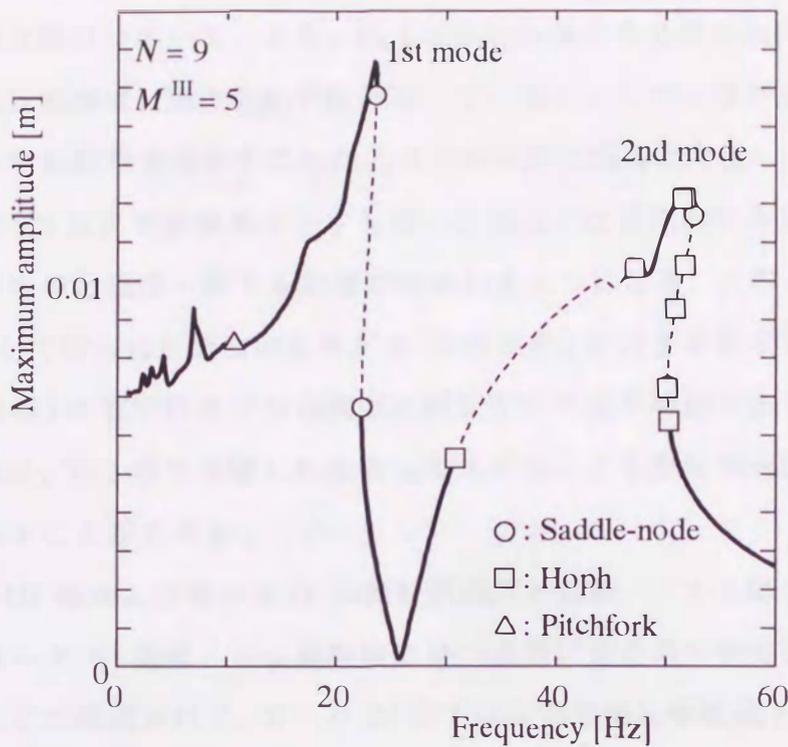


図 5.2(c) モデル 5- i の周波数特性と安定判別

(モード III 法で低次から 5 組の複素モードを用いた場合)

部に挟まれる部分がサドルノード分岐による不安定領域，その他の不安定領域はホップ分岐によるものである．なお，この計算において特性指数も同時に求め，式(3.10)の関係により，求められている特性乗数との比較を行ったが，両者はほぼ一致することを確認した．このことから，特性乗数および特性指数は高精度に計算されていることがわかる．

図 5.2(b)は三種類の低次元化法の中ではもっとも安定判別の精度が高いと考えられるモード III 法で，低次から 2 組（1次と 2次）の複素モードを用いて構成した低次元化モデルに対する安定判別結果，図 5.2(c)はモード III 法で，低次から 5 組（1次から 5次まで）の複素モードを用いて構成した低次元化モデルに対する安定判別結果である．図 5.2(b)および図 5.2(c)と図 5.2(a)とを比較することにより，低次元化モデルによる安定判別の精度を検証することができる．なお，図 5.2(b)，図 5.2(c)の計算では，3・4・3 項に示したような安定性に与える影響の大きいモードの抽出は行っていない．

図 5.2(a)と図 5.2(b)とを比較すると，1 次と 2 次の主共振部に存在するサドルノード

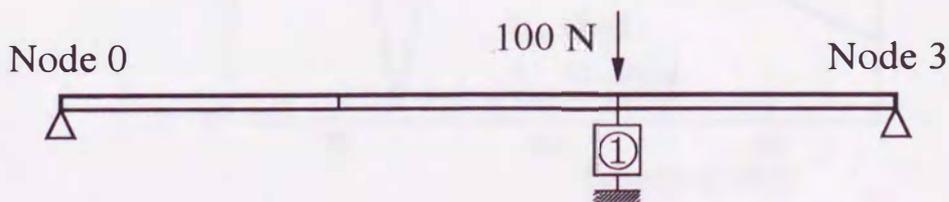
ド分岐点がかなり異なっている。また、図 5.2(a)に存在する 2 次の主共振部のホップ分岐による不安定領域は、図 5.2(b)では存在していない。しかしながら、低次元化に用いる複素モードの個数を増やすことにより安定判別の精度は向上し、図 5.2(c)に示すように低次から 5 次までの複素モードを用いた場合には定性的にも定量的にも低次元化を行わないものとはほぼ一致する結果が得られるようになる。このことから、モード III 法を適用して得られた低次元化モデル (5 自由度) に対する安定判別によって、元の系 (50 自由度) の安定性を十分高精度に判別することが可能であることが確認された。この結果は、第 3 章で提案した低次元化モデルによる安定判別法の妥当性を示しているとみなすことができる。

**5.3 モード III 法およびモード II 法の計算精度の比較** 5.2 節に示した計算結果によって、モード III 法は、十分高精度にかつ高速に元の系の安定判別を行うことが可能であることが確認された。モード III 法では安定判別の精度低下を防ぐために、減衰項である  $C^0$  をも考慮した複素モードを利用して低次元化モデルを構成した。一方、計算能率の観点からすれば、モード I 法またはモード II のように実モードを利用した方が有利である。本節では、モード III 法とモード II 法の計算精度を比較するため、図 5.3 に示すような計算モデル 5-ii に対して近似解計算および安定判別を行った。モデル 5-ii は、長さ 500 mm、直径 10 mm の中実な一様はり要素 3 本を直線状に結合した全長 1500 mm の構造物である。各一様はり要素は 24 個の基本要素に等分割 (系の総自由度は 98) し、並進方向の分布粘性減衰係数を  $2.0 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  に設定した。基礎支持要素としては、並進に関する 3 次の連続非線形性を考慮し、図示の節点に配置した。励振力については、節点 2 に振幅 100 N の調和強制外力が作用するものとした。また、安定判別は特性指数を求めることにより行った。なお、本項の計算ではモード II 法およびモード III 法に対して、3・3・4 項および 3・4・3 項に示した安定性に大きな影響を持つモードの抽出は行っていない。また、本モデルの自由度は、モデル 5-i と比べて約 2 倍に増加しているため、従来の低次元化を行わない方法により安定判別をしようとする場合には、計算量および計算精度の両面の問題から、高精度の解析は不可能である。

図 5.4(a)~図 5.4(f)に、節点 2 の 9 次近似解の周波数応答 (ノルムによる表示) と安定判別の結果を示す。図中の線種および分岐点を表す記号の意味は前項と同様であ

り、さらに、△印はピッチフォーク分岐点を表す。周波数応答の計算結果は各図ともに共通で、1次と2次の主共振領域が現れている。近似解の計算精度に関しては、仮定する近似解の次数を11以上に増やしても、周波数応答に大きな変化が見られなかったため、このモデルの図示の振動数領域では9次近似解で十分高精度であるとみなすことができる。

安定判別に関しては、図5.4(a)～図5.4(c)はモードIII法による安定判別の結果、図5.4(d)～図5.4(f)はモードII法による安定判別の結果を示す。モードIII法において、図5.4(a)は最低次(1次)の1組の複素モードのみを用いた場合の結果、図5.4(b)は低次から2組(1次と2次)の複素モードを用いた場合の結果、図5.4(c)は低次から10組(1次から10次まで)の複素モードを用いた場合の結果である。1次の複素モードのみを用いた図5.4(a)では、2次以上の振動モードは考慮されないため、当然ながら1次の主共振領域に存在するサドルノード分岐による不安定領域が現れているだけである。しかも、その精度はかなり悪いことがわかる。また、2組の複素モードを用いた図5.4(b)では、2次の主共振領域に存在するホップ分岐やサドルノード分岐に基づく不安定領域も現れるようになる。このことから、 $\omega/2\pi = 30 \sim 48$  Hzの領域に存在するホップ分岐による不安定領域は、1次の振動モードと2次の振動モードの内部共振の影響によるものであることがわかる。しかしながら、周波数応答曲線の垂直接線部にあるべきサドルノード分岐点の中腹部に存在するなど、安定判別の精度は十分なものではない。これに対して、前項と同様に、用いるモード数を増やすことにより安定判別の精度は向上し、10次までのモードを用いた場合には、図5.4(c)のような結果が得られる。この計算において、11次以上のモードを用いた場合の計算結果と図5.4(c)の結果との間に大きな差が見られなかったことから、図5.4(c)の結果は十分に



$$\textcircled{1} : F_2^* = 20.0\omega y_2^* + 10^3 \{y_2^* + 5 \times 10^5 (y_2^*)^3\}$$

図 5.3 計算モデル 5- ii

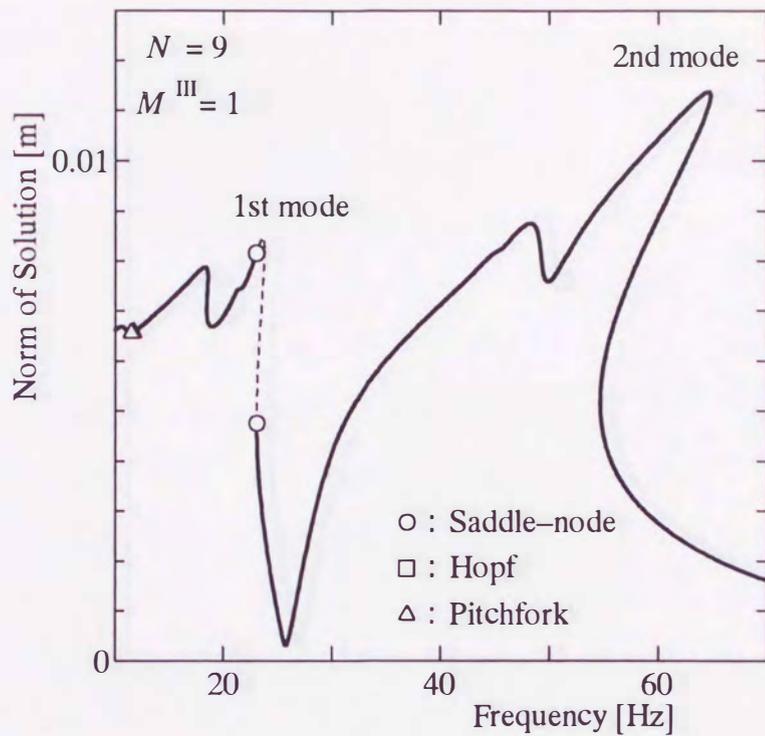


図 5.4(a) モデル 5- ii の周波数特性と安定判別  
(モード III 法で最低次の 1 組の複素モードを用いた場合)

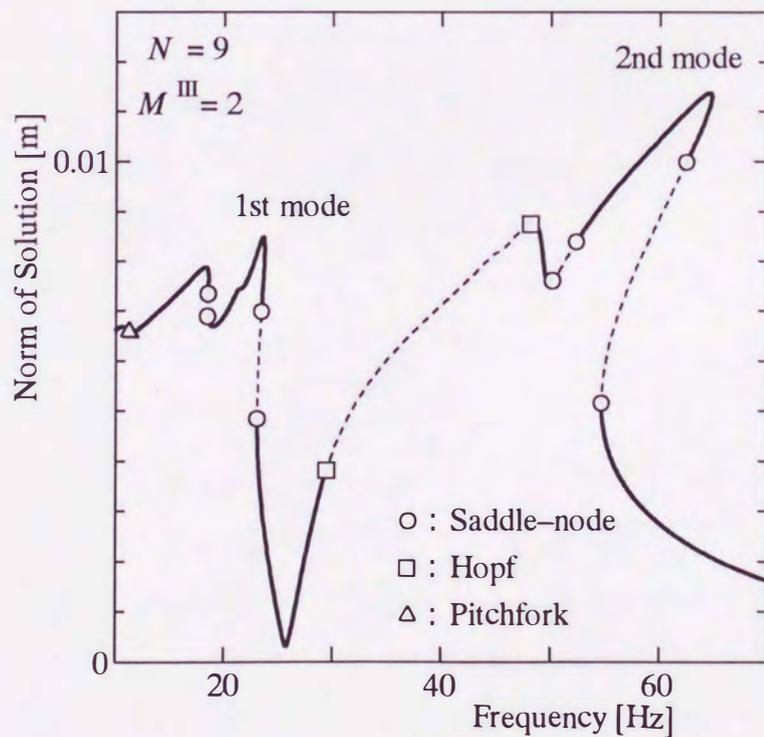


図 5.4(b) モデル 5- ii の周波数特性と安定判別  
(モード III 法で低次から 2 組の複素モードを用いた場合)

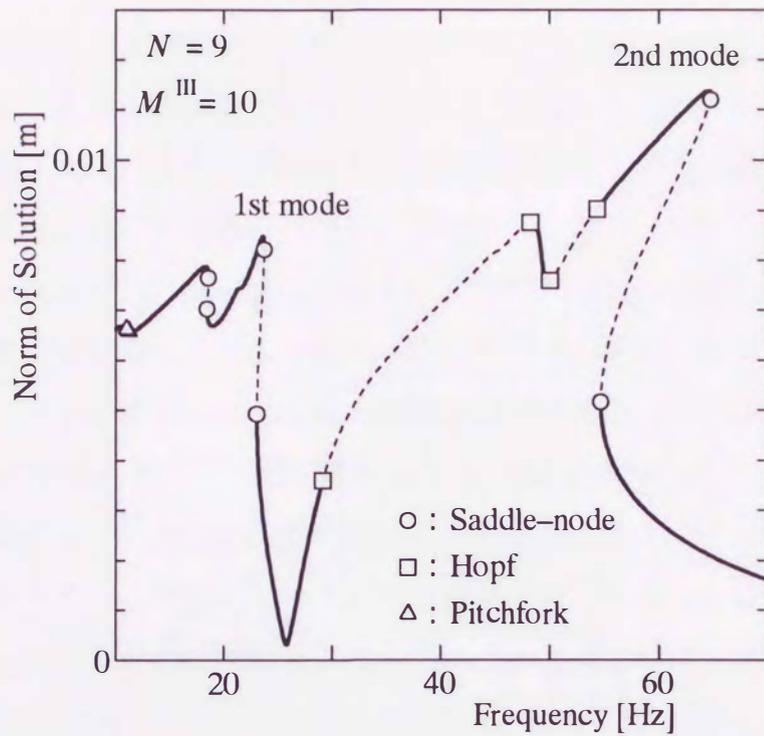


図 5.4(c) モデル 5- ii の周波数特性と安定判別  
(モード III 法で低次から 10 組の複素モードを用いた場合)

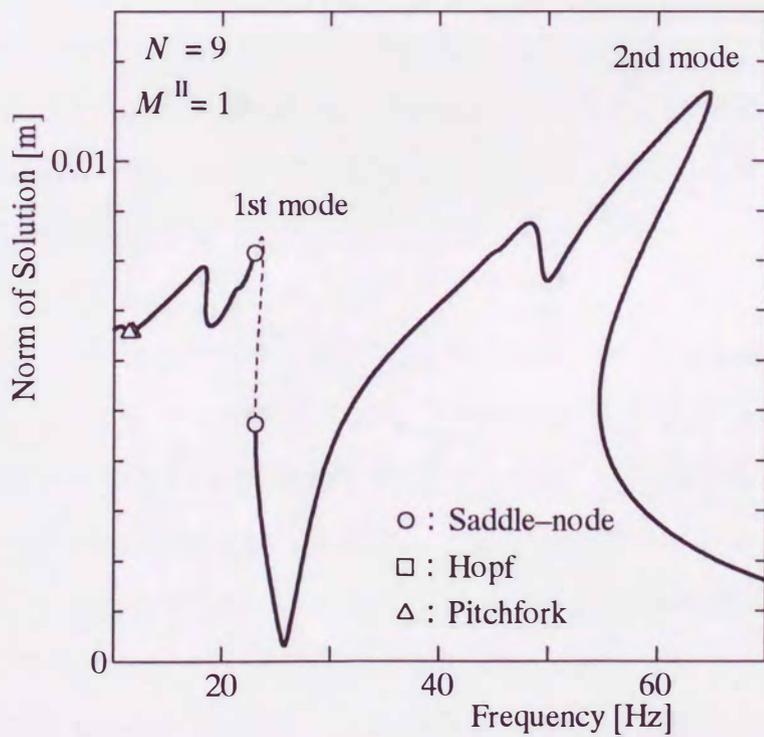


図 5.4(d) モデル 5- ii の周波数特性と安定判別  
(モード II 法で 1 次の定数項モードを用いた場合)

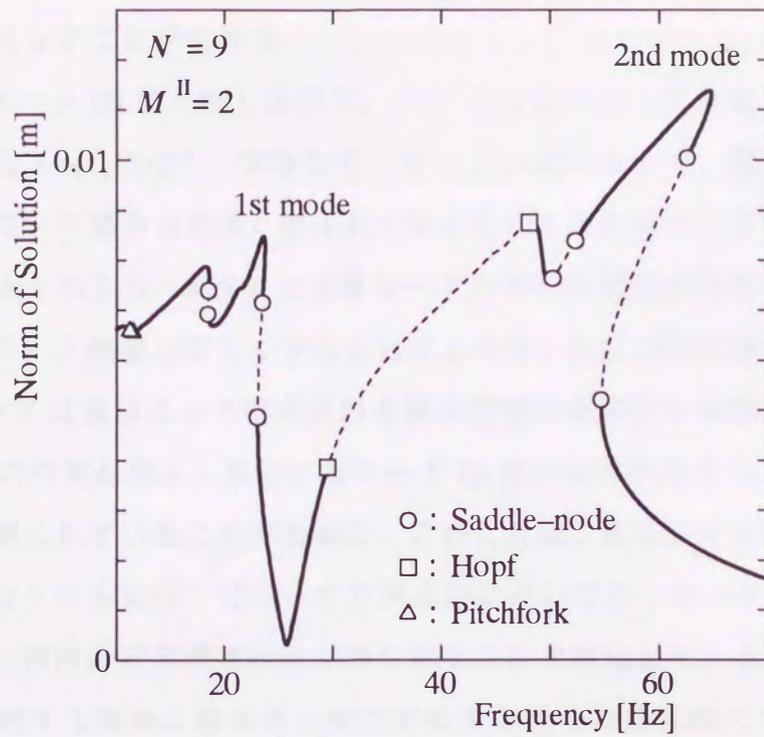


図 5.4(e) モデル 5-ii の周波数特性と安定判別  
(モード II 法で 2 次までの定数項モードを用いた場合)

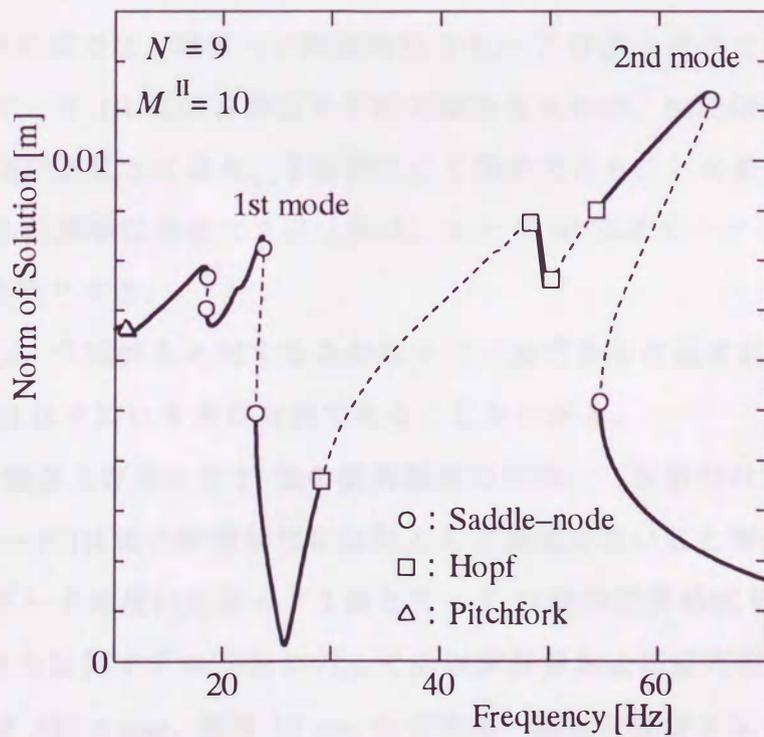


図 5.4(f) モデル 5-ii の周波数特性と安定判別  
(モード II 法で 1 次から 10 次までの定数項モードを用いた場合)

高精度であると見なすことができる。

以上に示したモード III 法と同じ条件で、モード II 法によって安定判別を行った結果を図 5.4(d)~図 5.4(f)に示す。すなわち、モード II 法において、図 5.4(d)は 1 次の実モードのみを用いた場合の結果、図 5.4(e)は 1 次と 2 次の実モードを用いた場合の結果、図 5.4(f)は 1 次から 10 次までの実モードを用いた場合の結果である。このように、両手法のモード個数を等しくすることによって、安定判別の精度、すなわちモード III 法とモード II 法によって構成される部分空間の適切性を比較することができる。モード II 法の計算結果と、対応するモード III 法の計算結果を比較すると、ほぼ一致した結果が得られていることがわかる。このことは、本モデルに特有の現象ではなく、他の様々なモデルに対して行った計算結果においても、モード II とモード III 法では、ほぼ同じ精度の安定判別結果が得られることを確認している。これは、大規模系の近似解に対する変分方程式を少数の変数からなる部分空間に変数変換する際に、減衰要素が部分空間の形態に与える影響が非常に小さいためと考えられる。このように、モード II 法とモード III 法では、得られる安定判別の結果の間にほとんど差違が認められないことが確認された。

なお、計算能率の面では、実モード解析を行うモード II 法と比べて、複素モード解析を必要とするモード III 法の方が若干不利ではあるものの、伝達剛性係数法を援用した逆反復法を用いることにより、その差はごく僅かであることを確認している。ただし、逆反復法の計算部に必要なメモリ量は、モード III 法はモード II 法に比べて約 2 倍のメモリを必要とする。

以上のことから、大規模系に対する必要なメモリ量等をも考慮すれば、モード III 法よりもモード II 法を用いる方が有利であることがわかる。

**5.4 モード I 法およびモード II 法の計算精度の比較** 前節の計算結果により、モード II 法とモード III 法の計算精度にはほとんど差違がないことが確認された。本節では、実固有モードを用いたモード I 法とモード II 法の計算精度を比較するため、図 5.5 に示すような計算モデル 5-iii に対して近似解計算および安定判別を行った。モデル 5-iii は、長さ 312.5 mm、直径 10 mm の中実な一様はり要素 8 本を直線状に結合した全長 2500 mm の構造物である。各はり要素は  $2^2$  個の基本要素に等分割（系の総自由度は 66）し、並進方向の分布粘性減衰係数を  $0.3 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  に設定した。基礎支持要

素としては、並進に関してはガタ、回転に関しては3次の連続非線形性を考慮し、図示の節点に配置した。また、励振力については、節点4および節点6に振幅30Nの調和強制外力と振幅10N・mの調和強制トルクとが同時に作用するものとした。

**5・4・1 安定判別条件** モードI法およびモードII法ともに、モードの個数を  $M^I = M^{II} = 7$  に固定して安定判別を行った。その際、次のような固有モードの抽出法を併用した。まず、1次から30次までのモード行列を用いて低次元化モデルを作成する。次に、その剛性行列  $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の中で、近似解の安定性に支配的な影響を及ぼすと考えられる2次のフーリエ成分  $\hat{K}_{s^1}^{2I}$ ,  $\hat{K}_{s^2}^{2I}$  および  $\hat{K}_{s^1}^{2II}$ ,  $\hat{K}_{s^2}^{2II}$  に着目して、各行列の  $i$  行  $j$  列の要素  $(\hat{K}_{i,j}^{2I})$ ,  $(\hat{K}_{i,j}^{2II})$  の絶対値  $\sqrt{\{(\hat{K}_{i,j}^{2I})\}^2 + \{(\hat{K}_{i,j}^{2II})\}^2}$  および  $(\hat{K}_{i,j}^{2I})$ ,  $(\hat{K}_{i,j}^{2II})$  の絶対値  $\sqrt{\{(\hat{K}_{i,j}^{2I})\}^2 + \{(\hat{K}_{i,j}^{2II})\}^2}$  が大きなものから順に、対応する7個のモードを選択する。前節と同様に、両手法のモード個数と選択基準を等しくすることによって、安定判別の精度、すなわちモードI法とモードII法によって構成される部分空間の適切性を比較することができる。

なお、周期解については9次近似解 ( $N=9$ ) を求め、安定判別には  $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の18次までのフーリエ係数を利用した。したがって、最終的に特性指数を求めるための固有値問題の次元は140 (同一の計算条件で低次元化を行わない場合は1320) となる。

**5・4・2 周波数応答および安定判別** 図5.6(a)～図5.6(c)に、9次近似解の周波数応答(ノルムによる表示)と安定判別の結果を示す。図5.6(a)はモードI法、図5.6(b)はモードII法による安定判別の結果である。さらに、安定判別の精度を比較・検証するために、モードII法で20個のモード(抽出法は同様)を用いて求めた結果を図5.6(c)に示している。

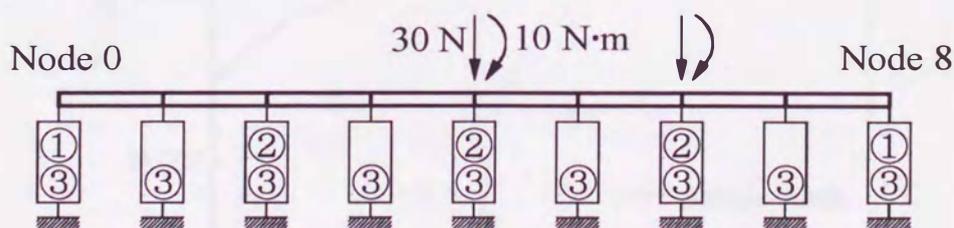
近似解の計算精度に関しては、仮定する最高次数を11以上に増やしても周波数応答の計算結果に大きな変化が認められなかったため、このモデルの図示の周波数領域では9次近似解で十分に高精度であるとみなすことができる。また、安定判別の精度に関しては、抽出するモード個数を21個以上にして求めた結果と図5.6(c)の結果との間に大きな差異が現れなかったことから、図5.6(c)の安定判別の結果は十分に高精度であるとみなすことができる。

周波数応答の計算結果は各図ともに共通で、1次と2次の主共振が現れており、漸

硬形の非線形性のために共振領域の応答曲線は右傾している。次に、安定判別に関して、モード I 法による図 5.6(a)の結果と基準としての図 5.6(c)の結果とを比較すると、図 5.6(c)で確認される 1 次および 2 次の主共振部におけるホップ分岐に基づく不安定領域が図 5.6(a)には現れていないこと、また、応答曲線の垂直接線部に存在すべきサドルノード分岐が応答曲線の中腹部に移動していること等の差異が認められる。それに対して、モード II 法による図 5.6(b)では、分岐点の位置などで若干の精度低下は見られるものの、図 5.6(c)と比較してほぼ満足できる結果が得られている。これは、3・2 節で議論したように、モード II 法は近似解（非線形性）の影響を考慮したモードを利用しているので、構成された低次元化モデルにその影響がより良く反映されているためと考えられる。なお、解析モデル次第ではモード I 法はモード II 法とほぼ同等の結果を与えることもあるが、前者の方が高精度になることは経験していない。

なお、計算能率に関しては、モード I 法では、低次元化のためのモード行列を 1 度求めておけばよいのに対して、モード II 法は、周期解が求められる度にモード行列を求め直す必要があるため若干不利ではある。しかしながら、伝達剛性係数法を援用した逆反復法を用いることにより、モード解析に必要な計算量は非常に低減化されているので、モード I 法とモード II 法の計算時間を比較しても、その差は僅少であることを確認している。

以上に示した計算結果により、モード II 法の方がモード I 法よりも計算量の点では若干不利ではあるが、計算精度の面ではより信頼できる手法であることが確認された。



$$\textcircled{1} : \hat{F}_j = 10^{10} y_j^*$$

$$\textcircled{2} : \hat{F}_j = 2.0\omega \dot{y}_j^* + k_F y_j^*, \quad k_F = \begin{cases} 0 & |y_j^*| < 5 \text{ mm} \\ 5.0 \times 10^4 & |y_j^*| \geq 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} : \hat{N}_j = 0.5\omega \dot{\theta}_j^* + 5.0 \times 10^5 (\theta_j^*)^3$$

図 5.5 計算モデル 5-iii

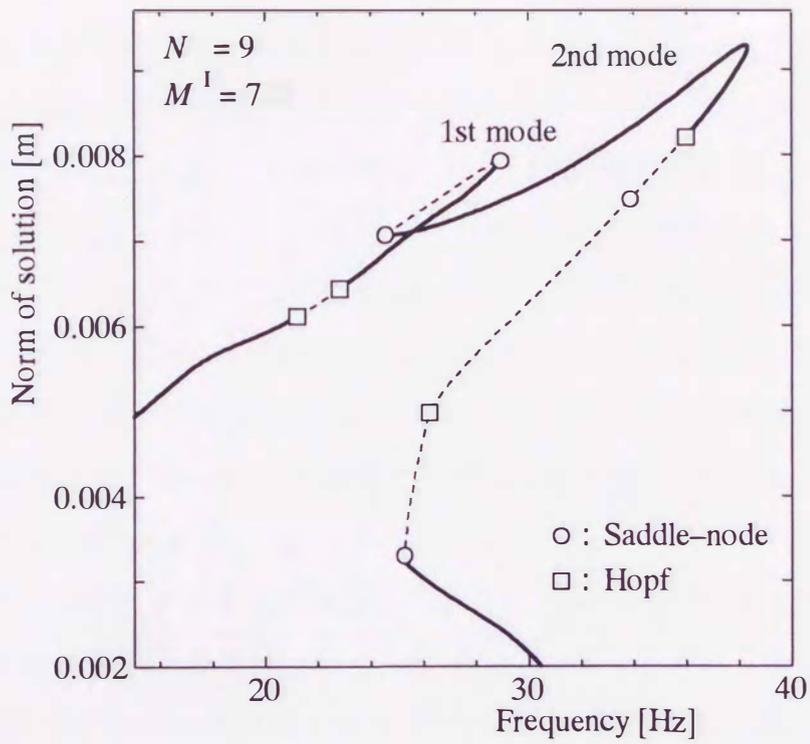


図 5.6(a) モデル 5-iii の周波数特性と安定判別  
(モード I 法で 7 個の線形モードを用いた場合)

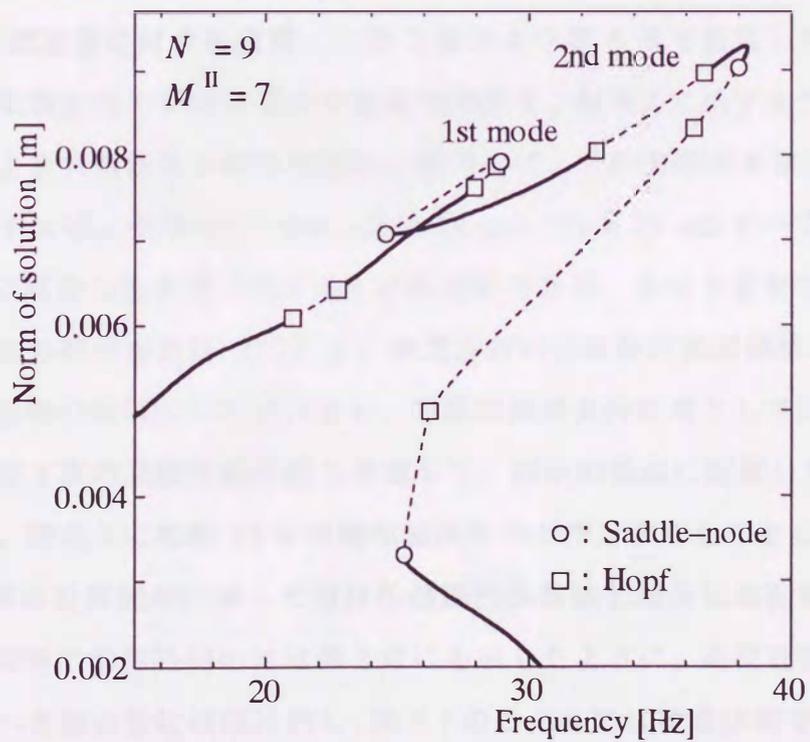


図 5.6(b) モデル 5-iii の周波数特性と安定判別  
(モード II 法で 7 個の定数項モードを用いた場合)

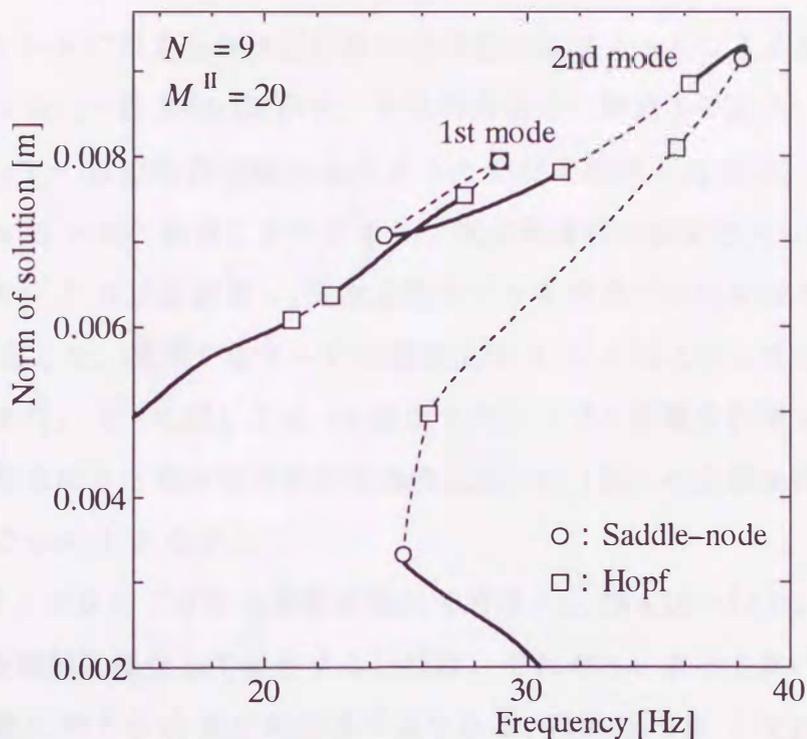


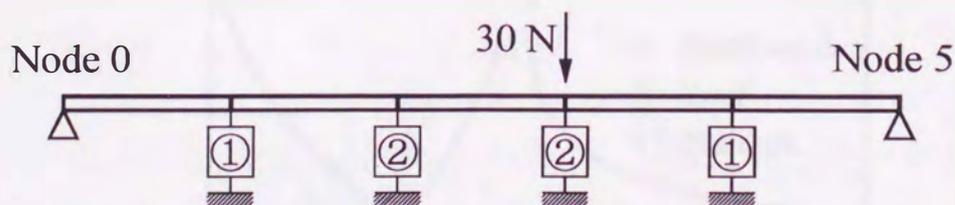
図 5.6(c) モデル 5-iii の周波数特性と安定判別  
(モード II 法で 20 個の定数項モードを用いた場合)

**5.5 大規模構造物に対する適用** 第 2 章および第 3 章で提案した増分伝達剛性係数法および低次元化モデルに基づく安定判別法を，図 5.7 に示すような比較的实际の系に近い，より大規模な非線形構造物に適用して，その有効性を検証する．図 5.7 の計算モデル 5-iv は，長さ 1000 mm，外径 30 mm，内径 25 mm の一様中空はり要素 5 本を直線状に結合した全長 5000 mm の構造物である．各はり要素は  $2^5$  個の基本要素に等分割（系の総自由度は 322）し，並進方向の分布粘性減衰係数を  $2.0 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  に設定した．構造物の両端は単純支持とし，中間の基礎支持要素としては並進に関してのみガタおよび 3 次の連続非線形性を考慮して，図示の節点に配置した．また，励振力については，節点 3 に振幅 30 N の調和強制外力が作用するものとした．

まず，近似解の計算能率に関して増分伝達剛性係数法と増分伝達影響係数法との比較を行った．両者の計算時間の比は第 2 章にも示したように，逐次近似計算の際に伝達計算を行うべき節点数にほぼ比例し，図 5.7 のモデルでは後者は前者に対して約 30 倍の計算時間を必要とした（主要部の理論的な計算量の比は，第 2 章の表 2.1 より， $(2^5 \times 5 + 1)/(5 + 1) = 26.83$  となる）．

次に、モデル 5-iv に対する 9 次近似解の周波数応答（ノルムによる表示）と安定判別の結果を図 5.8(a)～図 5.8(c)に示す。図示の応答点は節点 3 であり、図 5.8(b)は図 5.8(a)の  $\omega/2\pi \cong 7 \sim 22$  の応答曲線の込み入った部分を拡大したもの、図 5.8(c)は図 5.8(a)の  $\omega/2\pi \cong 29 \sim 39$  の領域に存在する  $1/3$  次分数調波共振を拡大したものである。安定判別にはモード II 法を利用し、低次元化モデルを作成するためのモードの個数は  $M^{\text{II}} = 8$  個に固定した。採用するモードの選択法は 5・4・1 項に示した方法とまったく同様である。また、 $\hat{K}^{\text{III}}$  に関しては 18 次までのフーリエ係数を利用したので、最終的に特性指数を求めるための固有値問題の次元は 160（同一の計算条件で低次元化を行わない場合は 6440）となる。

図 5.8(a)には 1 次から 3 次の主共振が現れており、 $\omega/2\pi \cong 10 \sim 16$  Hz,  $17 \sim 22$  Hz,  $29 \sim 39$  Hz の各領域に孤立して存在する分枝は、それぞれ 1 次と 2 次の主共振、および 1 次の主共振に対する  $1/3$  次分数調波共振である。このように 1 次および 2 次の主共振ピークの先端部は島状に孤立していること、 $1/3$  次分数調波共振が 2 つの島状に分離して存在すること、およびサドルノード分岐に基づく不安定領域のほかに、ホップ分岐やピッチフォーク分岐に基づく不安定領域が数多く存在していることが本モデルの特徴である。なお、近似解の最高次数を 9 次よりも大きくしたり、安定判別に用いるモードの個数を  $M^{\text{II}} = 8$  よりも大きく設定して計算を行っても、周波数応答や安定判別にほとんど差異が現れないことを確認している。このことから、図 5.8(a)、図 5.8(b)および図 5.8(c)の計算結果は十分信頼し得るものであることが分かる。以上のことから、本論文で提案した手法により、従来まったく不可能と考えられていた大規



$$\textcircled{1} : \hat{F}_j = 5.0\omega y_j^* + 10^3\{y_j^* + 10^5(y_j^*)^3\}$$

$$\textcircled{2} : \hat{F}_j = 5.0\omega y_j^* + k_F y_j^*, \quad k_F = \begin{cases} 0 & |y_j^*| < 5 \text{ mm} \\ 10^5 & |y_j^*| \geq 5 \text{ mm} \end{cases}$$

図 5.7 計算モデル 5-iv

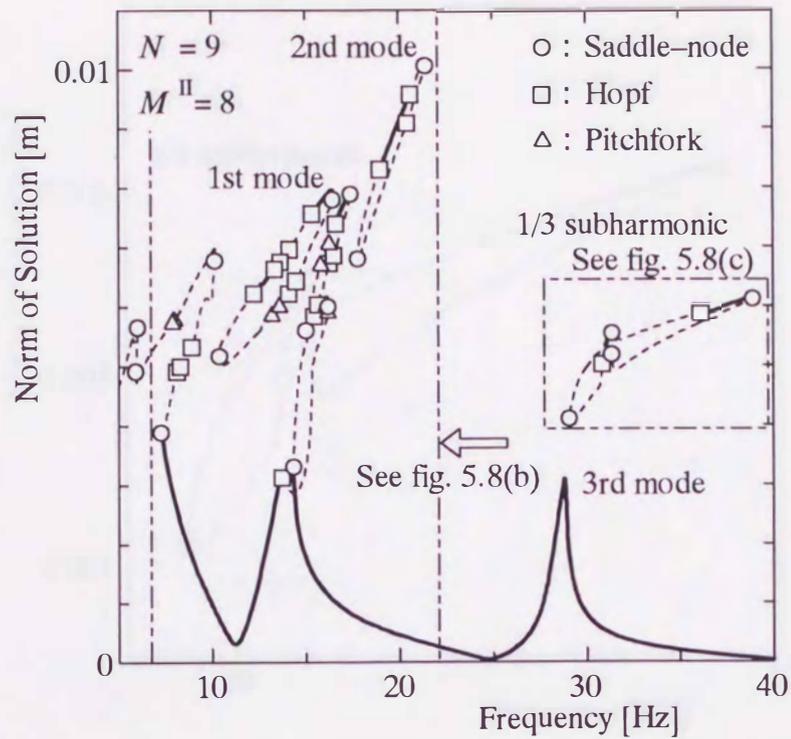


図 5.8(a) モデル 5-iv の周波数特性 (9 次近似) と安定判別  
(モード II 法で 8 個の定数項モードを用いた場合)

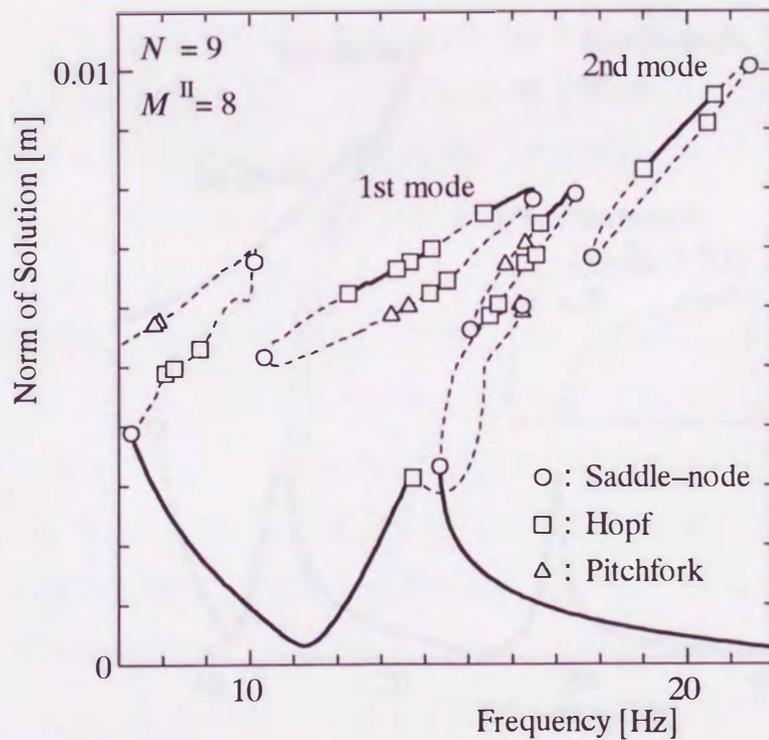


図 5.8(b) モデル 5-iv の周波数特性 (9 次近似) と安定判別  
(1 次と 2 次の主共振領域の拡大図)

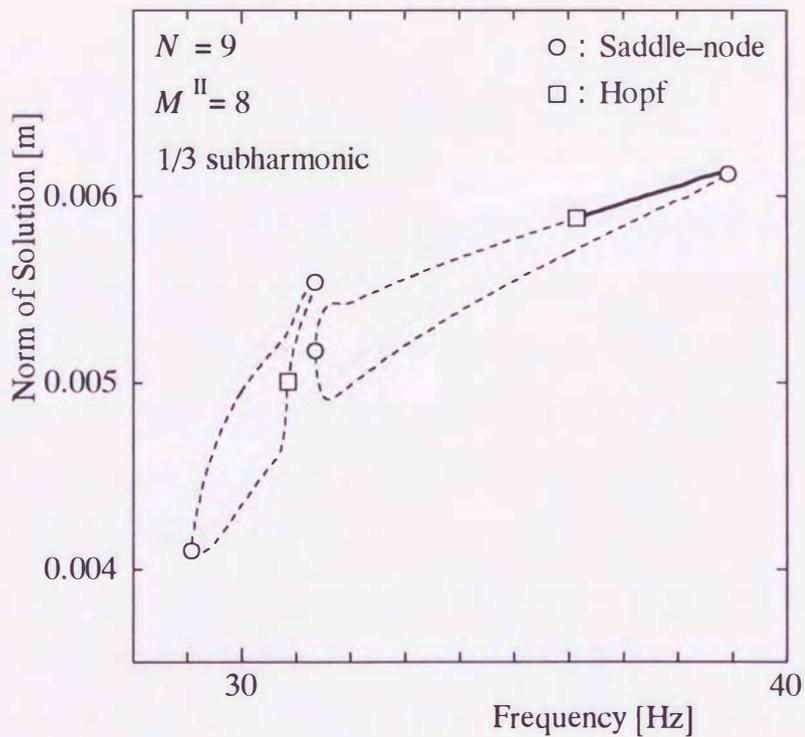


図 5.8(c) モデル 5-iv の周波数特性 (9 次近似) と安定判別  
 (1/3 次分数調波共振の拡大図)

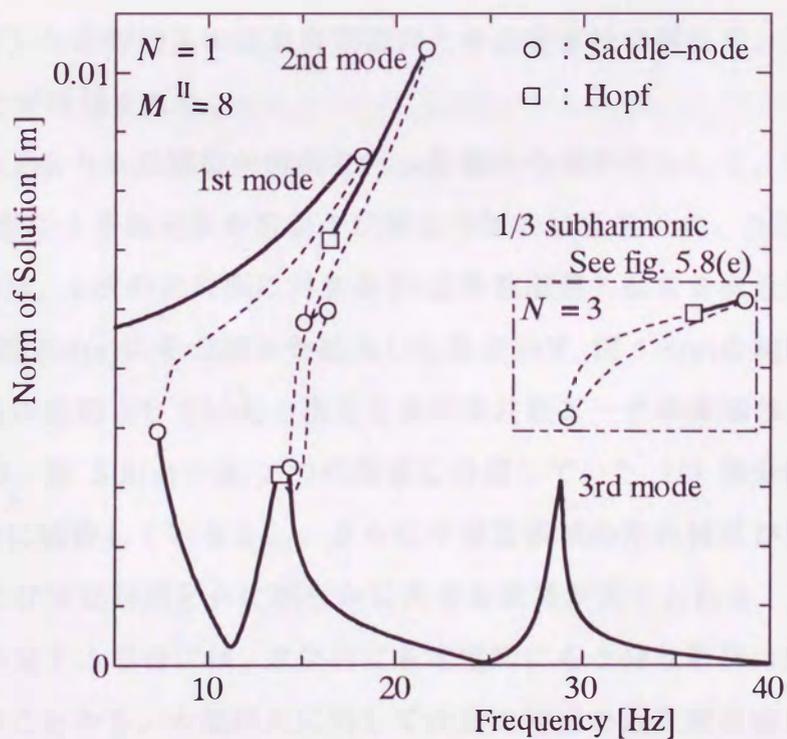


図 5.8(d) モデル 5-iv の周波数特性 (1 次近似) と安定判別  
 (モード II 法で 8 個の定数項モードを用いた場合)

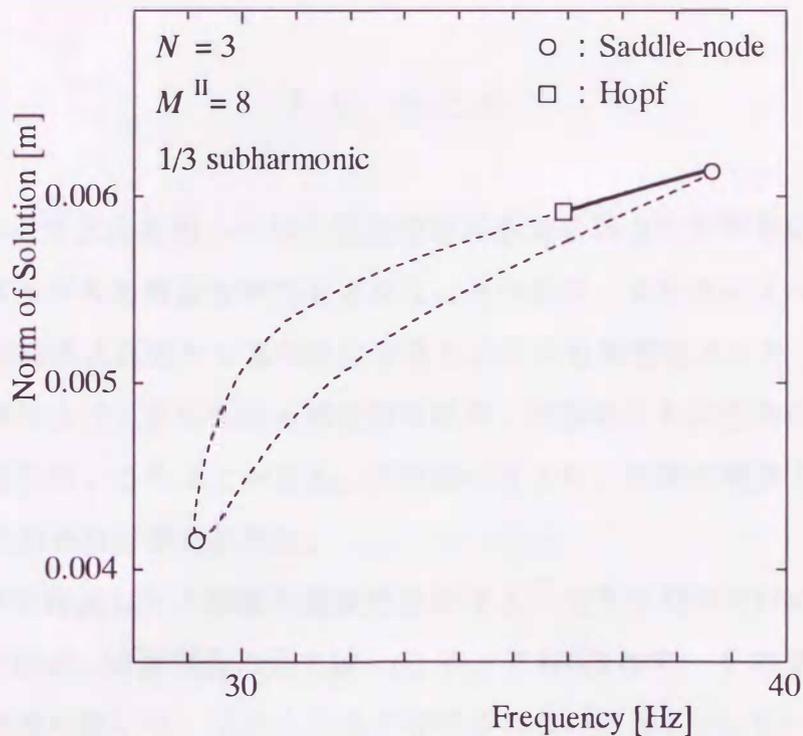


図 5.8(e) モデル 5-iv の周波数特性 (1 次近似) と安定判別  
(1/3 次分数調波共振の拡大図)

模 (322 自由度) な非線形系の定常周期振動とその安定性の解析を、高精度かつ高速に行い得ることが確認された。

一方、図 5.8(a) よりも低精度の解析を行った場合の参考例として、図 5.8(d) に節点 3 の 1 次近似解による周波数応答および安定判別の結果を示す。ただし、 $\omega/2\pi \approx 28 \sim 39$  Hz の枠内は、1 次の主共振に対する 1/3 次分数調波共振を 3 次近似解により求めた結果であり、図 5.8(e) にその部分を拡大した図を示す。図 5.8(a) の結果と比較して、図 5.8(a) では島状に孤立していた 1 次と 2 次の主共振ピークの先端部が図 5.8(d) では現れないことや、図 5.8(a) では 2 つの島状に分離していた 1/3 次分数調波共振が図 5.8(d) では 1 つに結合していること、さらに不安定領域の存在様式が異なること等、周波数応答および安定判別ともに明らかに大きな差異が見てとれる。このように、近似解の次数が不足する場合には、定量的にも定性的にも十分な解析は望めないことがわかる。以上のことから、大規模系に対して任意の精度の近似解を容易に求めることが可能で、さらに、その安定性を能率的かつ高精度で判別できるような計算手法を開発することの重要性と意義とが理解される。

## 5.6 まとめ

(1) 第2章で定式化を行った増分伝達剛性係数法を種々の直線状はり構造物に対して適用し、各モデルの周波数特性を求めた。その結果、本手法によって大規模非線形系の定常周期振動を高速かつ高精度に求められることが確認された。また、仮定する近似解の項数により、求められる周波数特性が、定量的にも定性的にも大きく異なることも確認された。このことから、本手法のように、任意の精度で近似解を求め得る解析手法の重要性が確認された。

(2) 第3章で提案した3種類の低次元化法によって安定判別を行い、その優劣を確認した。その結果、計算精度の面では、(i) モード III 法とモード II 法により得られる安定判別の結果の間には、ほとんど差が確認されないこと、(ii) モード II 法とモード I 法では、解析モデルによってはモード II 法の方がより高精度な安定判別が行うことができること、を確認した。また、計算効率の面からは、理論上明らかにモード I 法、モード II 法、モード III 法の順に有利であるが、第4章で定式化した伝達剛性係数法を援用した逆反復法を用いることにより、計算効率の差は僅少となることを確認した。以上のことから、本論文で対象とした直線状はり構造物の非線形強制振動に対しては、モード II 法が最も信頼性の高い安定判別法であると結論することができる。

(3) 比較的实际の系に近い、大規模な非線形構造物に対して、増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法を適用し、従来不可能であると考えられていた大規模非線形系の定常周期解の計算およびその安定判別を、非常に高速かつ高精度に行うことが可能であることを確認した。

## 第 6 章 非線形支持された

### 三次元樹状構造物の強制振動解析

本章では、第 2 章および第 3 章で直線状はり構造物に対して定式化を行った増分伝達剛性係数法による非線形強制振動解析アルゴリズム、および低次元化モデルによる安定判別法の適用対象を、より一般的な構造物へと拡張するための一例として、三次元樹状構造物の縦・曲げ・ねじり連成非線形強制振動解析アルゴリズムの定式化を行う。また、具体的なモデルに対する数値計算により、本章で定式化した手法の有効性を確認する。

#### 6.1 解析モデルと非線形基礎支持要素の取扱い

**6.1.1 解析モデル** 図 6.1 に、本章で取扱う三次元樹状構造物の解析モデルを示す。系は一つの主系 (Main system) と主系に結合する複数個の分岐系 (Sub-systems) とから構成され、すべての屈曲部、分岐系との結合部、強制外力および強制モーメントの作用点、せん断力や曲げモーメントまたは断面積が不連続となる点、および応答を求めたい点を境にして複数の一様はり要素に分割されている。また、分割点には、並進と回転に関する非線形ばねおよび非線形ダッシュポットから構成される基礎支持要素によって支持された剛体が存在しているものとする。すなわち、解析モデルの非線形性は基礎支持要素にのみ存在するものとし、一様はり要素自体の大変形にともなう非線形性は考慮しない。

各分割点を主系の相対的な左端から右端にかけて節点  $0 \sim$  節点  $n$  と呼ぶ。また、節点  $j-1$  と節点  $j$  の間の一様はり要素を  $j$  番め一様はり要素、節点  $j$  の剛体および基礎支持要素をそれぞれ剛体  $j$  および  $j$  番め基礎支持要素と呼ぶ。分岐系に対しては、主系と結合していない端を左端、結合している端を右端とみなす。主系および分岐系ともに、各一様はり要素はさらにいくつかの基本要素に等分割され、基本要素は線形の集中系としてモデル化される。また、基本要素に対しては、一様はり要素の内部に作用

する分布粘性減衰を考慮する。強制外力としては、同一周期の調和強制外力および調和強制トルクが複数の節点に集中的に作用し、その周期は無次元時間  $\tau = \omega t$  ( $\omega$ : 外力の角振動数,  $t$ : 実時間) に関して  $2\pi$  とする。

解析にあたり、 $j$  番め一様はり要素に対して、節点  $j-1$  を原点とし、一様はり要素の慣性主軸方向に 3 軸を一致させた  $j$  番め局所直交座標系  $(X_j, Y_j, Z_j)$  を設定する。ただし、一様はり要素の長手方向を  $X_j$  軸とする。 $j$  番め基礎支持要素の取り付け方向および剛体  $j$  の慣性主軸が  $j$  番め局所直交座標系  $(X_j, Y_j, Z_j)$  と一致しない場合も何ら問題なく取扱うことができるが、本論文では煩雑を避けるため、 $j$  番め基礎支持要素の取り付け方向および剛体  $j$  の慣性主軸は、いずれも  $j$  番め局所直交座標系に一致しているものと仮定する。また、一様はり要素内部に作用する分布強制外力や、基礎支持要素を介して作用する強制変位に関しても問題なく取扱うことができるが、同様の理由により本論文では省略する。

以下、変数に付された装飾記号や添字は、原則として次のような物理量であることを意味する。

(1) 「\*」の付された記号は無次元時間  $\tau$  に関する物理量、何も付されていないものは対応する物理量のフーリエ係数。

(2) 右下添字「c」および「s」はそれぞれ対応する物理量のフーリエ係数の余弦成分および正弦成分、それらに付された右上添字はフーリエ係数の次数。

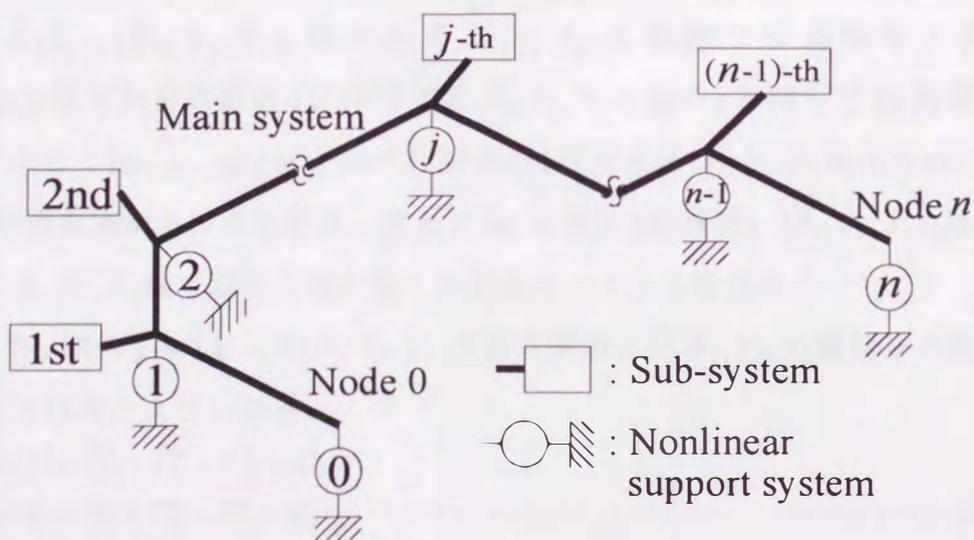


図 6.1 三次元樹状構造物の解析モデル

(3) 右下添字「 $j$ 」は、節点  $j$  または  $j$  番め一様はり要素に関する物理量。ただし、 $j = 0, 1, \dots, n$ .

(4) 右上添字「 $j$ 」は、 $j$  番め局所直交座標系で成分表示された物理量。ただし、本節と次節で現れる物理量は、すべて  $j$  番め局所直交座標系で成分表示されたものであるとする。よってこれらの節では、煩雑を避けるため右上添字「 $j$ 」を省略する。

(5) 同一記号で頭号「 $-$ 」の付された記号は節点左側の物理量、頭号「 $\wedge$ 」の付された記号は非線形基礎支持要素または節点の剛体に関する物理量、何も付されていないものは節点右側または一様はり要素の物理量。

(6) 「 $\Delta$ 」の付された記号は対応する物理量の増分。

(7) 右肩号「 $L$ 」および「 $R$ 」は一様はり要素を細分割した基本要素（図 6.3 参照）の左端および右端に関する物理量。

(8) 同一記号で頭号「 $\sim$ 」付きのものは基本要素の両端質量の弾性はり側に関する物理量。

また、ベクトルおよび行列に付された左上添字「 $t$ 」は転置記号であり、 $\mathbf{0}_p$  および  $\mathbf{I}_p$  はそれぞれ  $p$  次の零行列および単位行列を表す。

**6.1.2 剛体  $j$  の運動方程式** 図 6.2 に、剛体  $j$  の変位および角変位、さらに剛体  $j$  に作用する力および力のモーメントの正方向を示す。 $(x, y, z)_j^*$  は剛体  $j$  の重心の  $X_j, Y_j, Z_j$  方向の変位、 $(\theta, \phi, \psi)_j^*$  はそれぞれ  $X_j, Y_j, Z_j$  軸回りの角変位、 $(\bar{F}_x, F_x, \hat{F}_x)_j^*$ 、 $(\bar{F}_y, F_y, \hat{F}_y)_j^*$ 、 $(\bar{F}_z, F_z, \hat{F}_z)_j^*$  はそれぞれ  $X_j, Y_j, Z_j$  方向の力、同じく  $(\bar{N}_x, N_x, \hat{N}_x)_j^*$ 、 $(\bar{N}_y, N_y, \hat{N}_y)_j^*$ 、 $(\bar{N}_z, N_z, \hat{N}_z)_j^*$  はそれぞれ  $X_j, Y_j, Z_j$  軸回りの力のモーメント、 $(q_x, q_y, q_z)_j^*$  はそれぞれ節点  $j$  に作用する  $X_j, Y_j, Z_j$  方向の  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の調和強制外力、同じく  $(q_\theta, q_\phi, q_\psi)_j^*$  はそれぞれ節点  $j$  に作用する  $X_j, Y_j, Z_j$  軸回りの  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の調和強制トルクである。また、 $\hat{m}_j$  は剛体  $j$  の質量、 $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)_j$  はそれぞれ剛体  $j$  の  $X_j, Y_j, Z_j$  軸（慣性主軸）回りの慣性モーメントを表す。

このとき、剛体  $j (= 0, 1, \dots, n)$  の  $X_j, Y_j, Z_j$  軸方向および  $X_j, Y_j, Z_j$  軸回りの運動方程式は、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 \ddot{x}_j^* + \bar{F}_{xj}^* + \hat{F}_{xj}^* - F_{xj}^* &= q_{xj}^* \\ \hat{m}_j \omega^2 \ddot{y}_j^* + \bar{F}_{yj}^* + \hat{F}_{yj}^* - F_{yj}^* &= q_{yj}^* \\ \hat{m}_j \omega^2 \ddot{z}_j^* + \bar{F}_{zj}^* + \hat{F}_{zj}^* - F_{zj}^* &= q_{zj}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{J}_{xj} \omega^2 \dot{\theta}_j^* + \bar{N}_{xj}^* + \hat{N}_{zj}^* - N_{xj}^* &= q_{\theta j}^* \\ \hat{J}_{yj} \omega^2 \dot{\phi}_j^* + \bar{N}_{yj}^* + \hat{N}_{zj}^* - N_{yj}^* &= q_{\phi j}^* \\ \hat{J}_{zj} \omega^2 \dot{\psi}_j^* + \bar{N}_{zj}^* + \hat{N}_{zj}^* - N_{zj}^* &= q_{\psi j}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.2)$$

ここに、「 $\dot{\cdot}$ 」=  $d/d\tau$  を表す。

ここで、剛体  $j$  の変位ベクトル  $d_j^*$ 、力ベクトル  $\bar{f}_j^*$ ,  $f_j^*$ ,  $\hat{f}_j^*$ 、強制外力ベクトル  $q_j^*$  および質量行列  $\hat{m}_j$  を次のように定義する。

$$d_j^* = {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_j^* \dots\dots\dots (6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j^* &= {}^t(\bar{F}_x, \bar{N}_x, \bar{F}_y, \bar{N}_y, \bar{F}_z, \bar{N}_z)_j^* \\ f_j^* &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_j^* \\ \hat{f}_j^* &= {}^t(\hat{F}_x, \hat{N}_x, \hat{F}_y, \hat{N}_y, \hat{F}_z, \hat{N}_z)_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.4)$$

$$q_j^* = {}^t(q_x, q_\theta, q_y, q_\psi, q_z, q_\phi)_j^* \dots\dots\dots (6.5)$$

$$\hat{m}_j = \text{diag}(\hat{m}, \hat{J}_x, \hat{m}, \hat{J}_z, \hat{m}, \hat{J}_y)_j \dots\dots\dots (6.6)$$

ここに、 $\bar{f}_j^*$  および  $f_j^*$  はそれぞれ  $j$  番めおよび  $j+1$  番め一様はり要素から節点  $j$  の剛体に作用する線形の反力、 $\hat{f}_j^*$  は非線形基礎支持要素から剛体に作用する非線形反力である。また、 $\hat{f}_j^*$  に関しては煩雑をさけるため、 $(\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z)_j^*$  はそれぞれ  $(x, y, z)_j^*$  および  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j^*$  のみに依存する非線形関数、 $(\hat{N}_x, \hat{N}_y, \hat{N}_z)_j^*$  はそれぞれ  $(\theta, \phi, \psi)_j^*$  および  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})_j^*$  のみに依存する非線形関数であると仮定する。

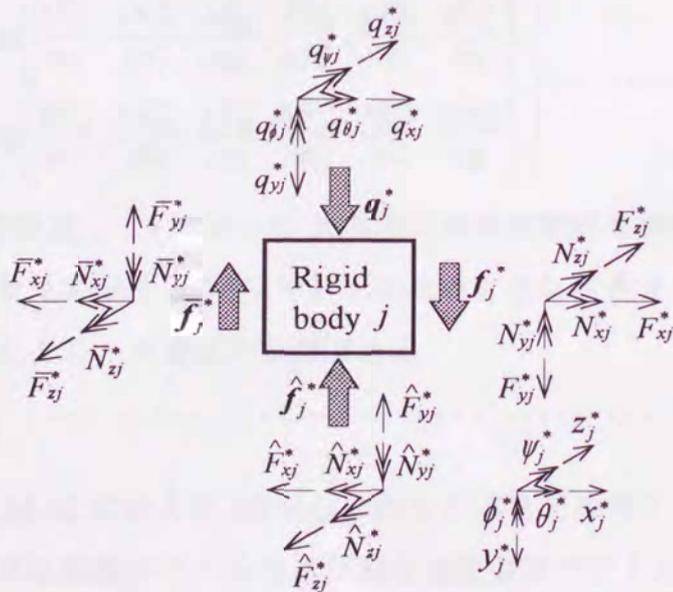


図 6.2 剛体  $j$  の変位および作用する力と力のモーメントの正方向の定義

このとき、剛体  $j$  の重心の各軸方向の並進および各軸回りの回転に関する運動方程式(6.1)および式(6.2)をまとめて表すと次のようになる。

$$\omega^2 \hat{m}_j \ddot{\mathbf{d}}_j + \bar{\mathbf{f}}_j + \hat{\mathbf{f}}_j - \mathbf{f}_j = \mathbf{q}_j \quad \dots\dots\dots(6.7)$$

本章の以下の議論では、表示の簡略化のため、式(6.7)と同様に式(6.3)～式(6.6)に示した各ベクトルおよび行列を用いて定式化を行う。

**6.1.3 運動方程式の増分形表示** 式(6.7)で表される剛体  $j$  の運動方程式は、支持部に非線形性がある場合には  $\hat{\mathbf{f}}_j$  が非線形関数となるので連立非線形常微分方程式

となり、解析的に解くことは非常に困難である。そこで、第2章と同様に増分法概念を導入して式(6.7)の定常周期振動を逐次近似計算することを考える。そのために必要となる式(6.7)の増分量に関する線形化方程式は次のようになる。

$$\omega^2 \hat{m}_j \Delta \ddot{\mathbf{d}}_j + \Delta \bar{\mathbf{f}}_j + \Delta \hat{\mathbf{f}}_j - \Delta \mathbf{f}_j = \mathbf{r}_j \quad \dots\dots\dots(6.8)$$

ここに、 $\mathbf{r}_j$  は残差であり、次式で与えられる。

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{q}_j - \omega^2 \hat{m}_j \ddot{\mathbf{d}}_j - \bar{\mathbf{f}}_j - \hat{\mathbf{f}}_j + \mathbf{f}_j \quad \dots\dots\dots(6.9)$$

一方、非線形反力ベクトル  $\hat{\mathbf{f}}_j$  は、対応する各軸方向の変位および速度、あるいは対応する各軸回りの角変位および角速度のみに依存する非線形関数であると仮定しているため、 $\hat{\mathbf{f}}_j$  の増分ベクトル  $\Delta \hat{\mathbf{f}}_j$  は次のように表される。

$$\Delta \hat{\mathbf{f}}_j = \hat{\mathbf{V}}_j \Delta \dot{\mathbf{d}}_j + \hat{\mathbf{W}}_j \Delta \mathbf{d}_j \quad \dots\dots\dots(6.10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_j &= \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_j}{\partial \dot{\mathbf{d}}_j} = \text{diag} \left[ \frac{\partial \hat{F}_{xj}}{\partial \dot{x}_j}, \frac{\partial \hat{N}_{xj}}{\partial \dot{\theta}_j}, \frac{\partial \hat{F}_{yj}}{\partial \dot{y}_j}, \frac{\partial \hat{N}_{zj}}{\partial \dot{\psi}_j}, \frac{\partial \hat{F}_{zj}}{\partial \dot{z}_j}, \frac{\partial \hat{N}_{yj}}{\partial \dot{\phi}_j} \right] \\ \hat{\mathbf{W}}_j &= \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_j}{\partial \mathbf{d}_j} = \text{diag} \left[ \frac{\partial \hat{F}_{xj}}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{N}_{xj}}{\partial \theta_j}, \frac{\partial \hat{F}_{yj}}{\partial y_j}, \frac{\partial \hat{N}_{zj}}{\partial \psi_j}, \frac{\partial \hat{F}_{zj}}{\partial z_j}, \frac{\partial \hat{N}_{yj}}{\partial \phi_j} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.11)$$

**6.1.4 近似解の仮定**  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動解を調和バランス法で求める

ために、変位  $\mathbf{d}_j$  とその増分  $\Delta \mathbf{d}_j$  を、それぞれ次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で仮定する。ただし、 $N$  は正の整数である。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_j &= \mathbf{E}_0 \mathbf{d}_j \\ \Delta \mathbf{d}_j &= \mathbf{E}_0 \Delta \mathbf{d}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.12)$$

ここに、 $\mathbf{d}_j$  および  $\Delta \mathbf{d}_j$  は  $\mathbf{d}_j$  および  $\Delta \mathbf{d}_j$  の 0 次から  $N$  次までの実フーリエ係数をまとめた  $6(2N+1)$  次元の変位振幅ベクトルおよび増分変位振幅ベクトル、 $\mathbf{E}_0$  は  $6 \times 6(2N+1)$  次元実行列であり、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned}
 d_j &= {}^t(d_0^j, d_1^j, d_2^j, \dots, d_N^j, d_6^j) \\
 \Delta d_j &= {}^t(\Delta d_0^j, \Delta d_1^j, \Delta d_2^j, \dots, \Delta d_N^j, \Delta d_6^j) \\
 (d_6^k)_j &= \{^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_6^k\}_j \\
 (d_6^k)_j &= \{^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_6^k\}_j \\
 (\Delta d_6^k)_j &= \{^t(\Delta x, \Delta \theta, \Delta y, \Delta \psi, \Delta z, \Delta \phi)_6^k\}_j \\
 (\Delta d_6^k)_j &= \{^t(\Delta x, \Delta \theta, \Delta y, \Delta \psi, \Delta z, \Delta \phi)_6^k\}_j \\
 E_6 &= [I_6/2, I_6 \cos \tau, I_6 \sin \tau, \dots, I_6 \cos N\tau, I_6 \sin N\tau]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.13)$$

このとき、 $d_j$  および  $\Delta d_j$  の  $\tau$  に関する導関数は、それぞれ次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{d}_j &= E_6 U \dot{d}_j, \quad \ddot{d}_j = E_6 U^2 \ddot{d}_j \\
 \Delta \dot{d}_j &= E_6 U \Delta \dot{d}_j, \quad \Delta \ddot{d}_j = E_6 U^2 \Delta \ddot{d}_j
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.14)$$

ここに、 $U$  は次式で定義されるような  $6(2N+1)$  次ブロック対角行列である。

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \text{Diag}[0_6, U_1, U_2, \dots, U_N] \\
 U_r &= \begin{bmatrix} 0_6 & rI_6 \\ -rI_6 & 0_6 \end{bmatrix}, \quad (r=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.15)$$

なお、 $\text{Diag}[\dots]$  はブロック対角行列を表す。

**6・1・5 力および力のモーメント**  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動  $d_j$  に対しては、剛体に作用する力や力のモーメント、およびそれらの増分もまた  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の関数となる。そこで、これらに関しても次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で近似する。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_j &= E_6 \bar{f}_j, \quad \hat{f}_j = E_6 \hat{f}_j, \quad f_j = E_6 f_j \\
 \Delta \bar{f}_j &= E_6 \Delta \bar{f}_j, \quad \Delta \hat{f}_j = E_6 \Delta \hat{f}_j, \quad \Delta f_j = E_6 \Delta f_j
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.16)$$

ここに、 $\bar{f}_j, \hat{f}_j, f_j$  および  $\Delta \bar{f}_j, \Delta \hat{f}_j, \Delta f_j$  は、それぞれ  $\bar{f}_j, \hat{f}_j, f_j$  および  $\Delta \bar{f}_j, \Delta \hat{f}_j, \Delta f_j$  の 0 次から  $N$  次までの実フーリエ係数をまとめた  $6(2N+1)$  次元の力振幅ベクトルおよび増分力振幅ベクトルであり、それぞれ次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_j &= {}^t(\bar{f}_c^0, \bar{f}_c^1, \bar{f}_s^1, \dots, \bar{f}_c^N, \bar{f}_s^N)_j \\
 \hat{f}_j &= {}^t(\hat{f}_c^0, \hat{f}_c^1, \hat{f}_s^1, \dots, \hat{f}_c^N, \hat{f}_s^N)_j \\
 f_j &= {}^t(f_c^0, f_c^1, f_s^1, \dots, f_c^N, f_s^N)_j \\
 (\bar{f}_6^k)_j &= \{^t(\bar{F}_x, \bar{N}_x, \bar{F}_y, \bar{N}_y, \bar{F}_z, \bar{N}_z)_6^k\}_j \\
 (\bar{f}_6^k)_j &= \{^t(\bar{F}_x, \bar{N}_x, \bar{F}_y, \bar{N}_y, \bar{F}_z, \bar{N}_z)_6^k\}_j \\
 (\hat{f}_6^k)_j &= \{^t(\hat{F}_x, \hat{N}_x, \hat{F}_y, \hat{N}_y, \hat{F}_z, \hat{N}_z)_6^k\}_j \\
 (\hat{f}_6^k)_j &= \{^t(\hat{F}_x, \hat{N}_x, \hat{F}_y, \hat{N}_y, \hat{F}_z, \hat{N}_z)_6^k\}_j \\
 (f_6^k)_j &= \{^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_6^k\}_j \\
 (f_6^k)_j &= \{^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_6^k\}_j
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.17)$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \bar{f}_j &= {}^t(\Delta \bar{f}_c^0, \Delta \bar{f}_c^1, \Delta \bar{f}_s^1, \dots, \Delta \bar{f}_c^N, \Delta \bar{f}_s^N)_j \\
\Delta \hat{f}_j &= {}^t(\Delta \hat{f}_c^0, \Delta \hat{f}_c^1, \Delta \hat{f}_s^1, \dots, \Delta \hat{f}_c^N, \Delta \hat{f}_s^N)_j \\
\Delta f_j &= {}^t(\Delta f_c^0, \Delta f_c^1, \Delta f_s^1, \dots, \Delta f_c^N, \Delta f_s^N)_j \\
(\Delta \bar{f}_c^k)_j &= \{ {}^t(\Delta \bar{F}_x, \Delta \bar{N}_x, \Delta \bar{F}_y, \Delta \bar{N}_y, \Delta \bar{F}_z, \Delta \bar{N}_z)_c^k \}_j \\
(\Delta \bar{f}_s^k)_j &= \{ {}^t(\Delta \bar{F}_x, \Delta \bar{N}_x, \Delta \bar{F}_y, \Delta \bar{N}_y, \Delta \bar{F}_z, \Delta \bar{N}_z)_s^k \}_j \dots \dots \dots (6.18) \\
(\Delta \hat{f}_c^k)_j &= \{ {}^t(\Delta \hat{F}_x, \Delta \hat{N}_x, \Delta \hat{F}_y, \Delta \hat{N}_y, \Delta \hat{F}_z, \Delta \hat{N}_z)_c^k \}_j \\
(\Delta \hat{f}_s^k)_j &= \{ {}^t(\Delta \hat{F}_x, \Delta \hat{N}_x, \Delta \hat{F}_y, \Delta \hat{N}_y, \Delta \hat{F}_z, \Delta \hat{N}_z)_s^k \}_j \\
(\Delta f_c^k)_j &= \{ {}^t(\Delta F_x, \Delta N_x, \Delta F_y, \Delta N_y, \Delta F_z, \Delta N_z)_c^k \}_j \\
(\Delta f_s^k)_j &= \{ {}^t(\Delta F_x, \Delta N_x, \Delta F_y, \Delta N_y, \Delta F_z, \Delta N_z)_s^k \}_j
\end{aligned} \right\}$$

また、 $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動  $d_j$  に対しては、式(6.11)で定義される  $\hat{V}_j, \hat{W}_j$  も  $2\pi$  周期の関数となるので、次のような実フーリエ級数で表示する。

$$\left. \begin{aligned}
\hat{V}_j &= \frac{1}{2}(\hat{V}_c^0)_j + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (\hat{V}_c^k)_j \cos k\tau + (\hat{V}_s^k)_j \sin k\tau \} \\
\hat{W}_j &= \frac{1}{2}(\hat{W}_c^0)_j + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (\hat{W}_c^k)_j \cos k\tau + (\hat{W}_s^k)_j \sin k\tau \}
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.19)$$

式(6.19)のように表されるフーリエ係数を利用すれば、 $\Delta \hat{f}_j$  と  $\Delta d_j$  との関係は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \hat{f}_j &= \hat{K}_j \Delta d_j \\
\hat{K}_j &= \hat{V}_j + \hat{W}_j U
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.20)$$

ここに、 $\hat{V}_j, \hat{W}_j$  はそれぞれ  $\hat{V}_j, \hat{W}_j$  の実フーリエ係数  $(\hat{V}_c^k)_j, (\hat{V}_s^k)_j, (\hat{W}_c^k)_j, (\hat{W}_s^k)_j$  を要素とする  $6(2N+1)$  次正方形行列であり、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
\hat{V}_j &= \frac{A_j^1 + B_j^1}{2} \\
\hat{W}_j &= \frac{A_j^2 + B_j^2}{2}
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_j^q &= \begin{bmatrix} 0_6 & a^1 & a^2 & \dots & a^N \\ 0_6 & A^2 & A^3 & \dots & A^{N+1} \\ 0_6 & {}^t A^3 & A^4 & \dots & A^{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_6 & {}^t A^{N+1} & {}^t A^{N+2} & \dots & A^{2N} \end{bmatrix}_j \\
B_j^q &= \begin{bmatrix} b^0 & b^1 & b^2 & \dots & b^N \\ {}^t b^1 & B^0 & B^1 & \dots & B^{N-1} \\ {}^t b^2 & {}^t B^1 & B^0 & \dots & B^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t b^N & {}^t B^{N-1} & {}^t B^{N-2} & \dots & B^0 \end{bmatrix}_j
\end{aligned} \right\} (q=1, 2) \dots \dots \dots (6.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 (A^k)_j^1 &= \begin{bmatrix} \hat{V}_c^k & \hat{V}_s^k \\ \hat{V}_s^k & -\hat{V}_c^k \end{bmatrix}_j, & (B^k)_j^1 &= \begin{bmatrix} \hat{V}_c^k & \hat{V}_s^k \\ -\hat{V}_s^k & \hat{V}_c^k \end{bmatrix}_j \\
 (A^k)_j^2 &= \begin{bmatrix} \hat{W}_c^k & \hat{W}_s^k \\ \hat{W}_s^k & -\hat{W}_c^k \end{bmatrix}_j, & (B^k)_j^2 &= \begin{bmatrix} \hat{W}_c^k & \hat{W}_s^k \\ -\hat{W}_s^k & \hat{W}_c^k \end{bmatrix}_j \\
 (a^k)_j^1 &= (b^k)_j^1 = [\hat{V}_c^k \ \hat{V}_s^k]_j, & (a^k)_j^2 &= (b^k)_j^2 = [\hat{W}_c^k \ \hat{W}_s^k]_j \\
 (b^0)_j^1 &= \hat{V}_c^0, & (b^0)_j^2 &= \hat{W}_c^0, & (\hat{V}_s^0)_j &= (\hat{W}_s^0)_j = 0_6
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.23)$$

6・1・6 奇数次解の取り扱い 第2章と同様に、非零の奇数次調波と偶数次調波をともに含む周期解を非奇数次解、奇数次調波のみのフーリエ級数に展開できるような周期解を奇数次解と呼ぶ。周知のように、かなり広範な非線形系において奇数次解が発生する。奇数次解に対しては、近似解の最高次数  $N$  (本項では、 $N$ は正の奇数とする) が同一ならば取扱う行列やベクトルの次元を非奇数次解の場合の約半分に縮小できる。したがって、計算時間および必要なメモリ量の両面で極めて有利である。しかも、そのアルゴリズムは計算に必要なベクトルと行列とを奇数次解用に再定義したものに置き換えるだけで、形式的には非奇数次解の場合とまったく同様である。そこで、以下に変更を要する点のみを示す。

式(6.13)で定義された変位振幅ベクトル  $d_j$  および増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j$  については、奇数次調波成分のみからなる  $6(N+1)$ 次元実ベクトル、 $E_6$ については、 $6 \times 6(N+1)$ 次元実行列で次式のように再定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 d_j &= {}^t(d_c^1, d_s^1, d_c^3, d_s^3, \dots, d_c^N, d_s^N)_j \\
 \Delta d_j &= {}^t(\Delta d_c^1, \Delta d_s^1, \Delta d_c^3, \Delta d_s^3, \dots, \Delta d_c^N, \Delta d_s^N)_j \\
 E_6 &= [I_6 \cos \tau, I_6 \sin \tau, I_6 \cos 3\tau, I_6 \sin 3\tau, \dots, I_6 \cos N\tau, I_6 \sin N\tau]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.24)$$

同様に力振幅ベクトルおよび増分力振幅ベクトルについても、奇数次調波成分のみからなる  $6(N+1)$ 次元ベクトルで次のように再定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{f}_j &= {}^t(\bar{f}_c^1, \bar{f}_s^1, \bar{f}_c^3, \bar{f}_s^3, \dots, \bar{f}_c^N, \bar{f}_s^N)_j \\
 \hat{f}_j &= {}^t(\hat{f}_c^1, \hat{f}_s^1, \hat{f}_c^3, \hat{f}_s^3, \dots, \hat{f}_c^N, \hat{f}_s^N)_j \\
 f_j &= {}^t(f_c^1, f_s^1, f_c^3, f_s^3, \dots, f_c^N, f_s^N)_j \\
 \Delta \bar{f}_j &= {}^t(\Delta \bar{f}_c^1, \Delta \bar{f}_s^1, \Delta \bar{f}_c^3, \Delta \bar{f}_s^3, \dots, \Delta \bar{f}_c^N, \Delta \bar{f}_s^N)_j \\
 \Delta \hat{f}_j &= {}^t(\Delta \hat{f}_c^1, \Delta \hat{f}_s^1, \Delta \hat{f}_c^3, \Delta \hat{f}_s^3, \dots, \Delta \hat{f}_c^N, \Delta \hat{f}_s^N)_j \\
 \Delta f_j &= {}^t(\Delta f_c^1, \Delta f_s^1, \Delta f_c^3, \Delta f_s^3, \dots, \Delta f_c^N, \Delta f_s^N)_j
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.25)$$

また、式(6.15)の  $U$  および式(6.22)の  $A_j^1, B_j^1, A_j^2, B_j^2$  は、それぞれ次式のようになる。

$$U = \text{Diag}[U_1, U_3, \dots, U_N] \dots\dots\dots (6.26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_j^q &= \begin{bmatrix} A^2 & A^4 & \dots & A^{N+1} \\ {}^t A^4 & A^6 & \dots & A^{N+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t A^{N+1} & {}^t A^{N+3} & \dots & A^{2N} \end{bmatrix}_j \\
 B_j^q &= \begin{bmatrix} B^0 & B^2 & \dots & B^{N-1} \\ {}^t B^2 & B^0 & \dots & B^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t B^{N-1} & {}^t B^{N-3} & \dots & B^0 \end{bmatrix}_j
 \end{aligned} \right\} (q=1, 2) \dots\dots\dots (6.27)$$

後述するその他の行列やベクトルについても、これらと同様の操作を行うことにより次元を約半分に縮小できる。

**6.1.7 分数調波振動の解析** 本章のアルゴリズムにより、 $1/L$ 次分数調波振動の解析も同様に行うことができる。すなわち、第2章と同様に、 $\omega t = \tau$ の代わりに $\omega t/L = \tau'$ のような変数変換を行い、 $\tau'$ について $2\pi$ 周期の解を求めればよい。その具体的な計算手順は通常のものと同様である。

**6.1.8 調和バランス法の適用** 剛体 $j$ の増分量に関する運動方程式(6.8)、およびその残差を与える式(6.9)に式(6.12)、(6.14)、(6.16)を代入し、さらに調和バランスの原理を適用することにより次式を得る。

$$\omega^2 \hat{M} U^2 \Delta d_j + \Delta \bar{f}_j + \Delta \hat{f}_j - \Delta f_j = r_j \dots\dots\dots (6.28)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{M}_j &= \text{Diag}[\overbrace{\hat{m}_j, \dots, \hat{m}_j}^{6(2N+1)}] \\
 r_j &= q_j - \omega^2 \hat{M}_j U^2 d_j - \bar{f}_j - \hat{f}_j + f_j
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.29)$$

ここに、 $q_j$ は強制力 $q_j^*$ を $N$ 次までの実フーリエ級数に展開したときの $6(2N+1)$ 次元の強制外力振幅ベクトルであり、その構造は式(6.13)と同一である。

さらに、式(6.20)の関係を考慮すれば、式(6.28)は次式のようなになる。

$$\hat{P}_j \Delta d_j + \Delta \bar{f}_j - \Delta f_j = r_j \dots\dots\dots (6.30)$$

ここに、

$$\hat{P}_j = \hat{K}_j + \omega^2 \hat{M}_j U^2 \dots\dots\dots (6.31)$$

ここで、式(6.30)は、非線形基礎支持要素の存在する節点において、定常振動解の振幅ベクトルをニュートン法により求める際の逐次近似計算式に相当している。したがって、式(6.30)において $\bar{f}_j$ および $f_j$ と $d_j$ との間の関係、さらに $\Delta \bar{f}_j$ および $\Delta f_j$ と $\Delta d_j$ との間の関係、すなわち線形の一様はり要素両端の状態量ベクトルの間の関係が求め

られると、後述のように解析手続きは閉じた形になる。そこで次節では、伝達剛性係数法の概念を適用し、これらの関係を極めて能率的に求めるための計算手続きを定式化する。

## 6.2 一様はり要素内部自由度の能率的な消去

**6.2.1 基本要素のモデル化** 一様はり要素に対して伝達剛性係数法の概念を適用するにあたり、各一様はり要素を基本要素に等分割し、各基本要素は図 6.3 に示すように左右対称な集中形としてモデル化する。すなわち、基本要素の重心に関する慣性特性値はその両端に等分割し、両端間は質量のない弾性はりで結合されているとみなす。

ここに、 $m$  および  $J_x, J_y, J_z$  は基本要素両端に等分された質量および  $X_j, Y_j, Z_j$  軸（慣性主軸）回りの慣性モーメント、 $l$  および  $A$  は基本要素の長さおよび断面積、 $GI_x$  は  $x$  軸回りのねじり剛性、 $EI_y$  および  $EI_z$  は  $Y_j$  軸および  $Z_j$  軸回りの曲げ剛性、 $\kappa_y, \kappa_z$  および  $G$  は断面形状係数および横弾性係数を示す。第 2 章の 2.2.1 項でも述べたように、一様はり要素自体の構造減衰を考慮することは困難であるので、本節においても一様はり要素には分布粘性減衰力が作用するものとする。すなわち、各座標軸方向の並進および回転に関する単位長さあたりの分布粘性減衰係数を  $(c_x^d, c_y^d, c_z^d)$  および  $(C_x^d, C_y^d, C_z^d)$  とすれば、次式のように定義される等価な集中粘性減衰係数  $(c_x^e, c_y^e, c_z^e)$  および  $(C_x^e, C_y^e, C_z^e)$  が、基本要素の両端に等分されるものとする。

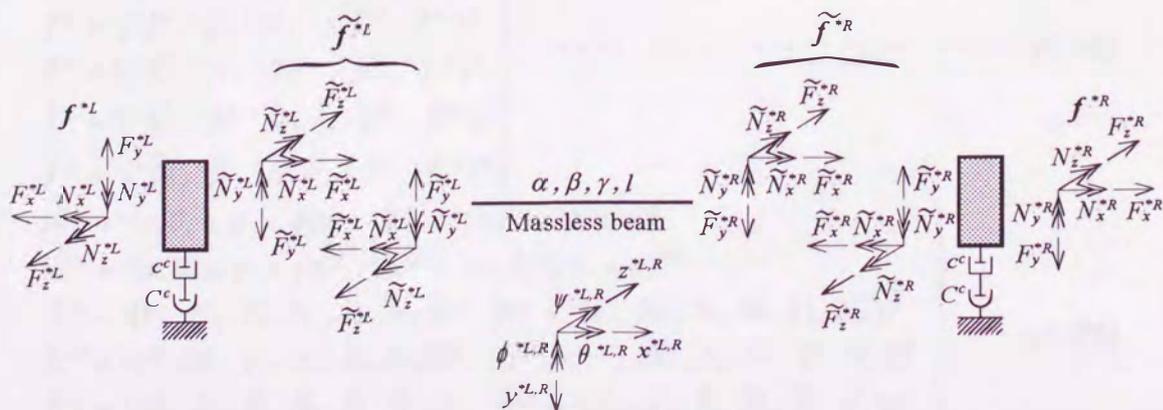


図 6.3 基本要素の解析モデル

$$\left. \begin{aligned} c_x^c &= c_x^d/2, & c_y^c &= c_y^d/2, & c_z^c &= c_z^d/2 \\ C_x^c &= C_x^d/2, & C_y^c &= C_y^d/2, & C_z^c &= C_z^d/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.32)$$

6.2.2 自己および相互動的剛性係数行列 上記の仮定のもとで、図 6.3 の力の作用図を参考にすると、基本要素両端における集中質量に関する運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M'\dot{d}^{*L} + C'\dot{d}^{*L} &= \tilde{f}^{*L} - f^{*L} \\ M'\dot{d}^{*R} + C'\dot{d}^{*R} &= f^{*R} - \tilde{f}^{*R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} M' &= \text{diag}(m, J_x, m, J_z, m, J_y) \\ C' &= \text{diag}(c_x^c, C_x^c, c_y^c, C_y^c, c_z^c, C_z^c) \\ d^{*L} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)^{*L} \\ d^{*R} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)^{*R} \\ f^{*L} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)^{*L} \\ f^{*R} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)^{*R} \\ \tilde{f}^{*L} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)^{*L} \\ \tilde{f}^{*R} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)^{*R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.34)$$

ここで、非線形基礎支持節点での解と対応させるために、式(6.33)の解を次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} d^{*L} &= E_0 d^L, & d^{*R} &= E_0 d^R \\ f^{*L} &= E_0 f^L, & f^{*R} &= E_0 f^R \\ \tilde{f}^{*L} &= E_0 \tilde{f}^L, & \tilde{f}^{*R} &= E_0 \tilde{f}^R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.35)$$

ここに、 $d^L, d^R, f^L, f^R, \tilde{f}^L$  および  $\tilde{f}^R$  は  $6(2N+1)$  次元実ベクトルであり、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} d^L &= {}^t(d_c^0, d_c^1, d_s^1, \dots, d_c^N, d_s^N)^L \\ d^R &= {}^t(d_c^0, d_c^1, d_s^1, \dots, d_c^N, d_s^N)^R \\ f^L &= {}^t(f_c^0, f_c^1, f_s^1, \dots, f_c^N, f_s^N)^L \\ f^R &= {}^t(f_c^0, f_c^1, f_s^1, \dots, f_c^N, f_s^N)^R \\ \tilde{f}^L &= {}^t(\tilde{f}_c^0, \tilde{f}_c^1, \tilde{f}_s^1, \dots, \tilde{f}_c^N, \tilde{f}_s^N)^L \\ \tilde{f}^R &= {}^t(\tilde{f}_c^0, \tilde{f}_c^1, \tilde{f}_s^1, \dots, \tilde{f}_c^N, \tilde{f}_s^N)^R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} d_c^{kL} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_c^{kL}, & d_s^{kL} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_s^{kL} \\ d_c^{kR} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_c^{kR}, & d_s^{kR} &= {}^t(x, \theta, y, \psi, z, \phi)_s^{kR} \\ f_c^{kL} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_c^{kL}, & f_s^{kL} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_s^{kL} \\ f_c^{kR} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_c^{kR}, & f_s^{kR} &= {}^t(F_x, N_x, F_y, N_y, F_z, N_z)_s^{kR} \\ \tilde{f}_c^{kL} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)_c^{kL}, & \tilde{f}_s^{kL} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)_s^{kL} \\ \tilde{f}_c^{kR} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)_c^{kR}, & \tilde{f}_s^{kR} &= {}^t(\tilde{F}_x, \tilde{N}_x, \tilde{F}_y, \tilde{N}_y, \tilde{F}_z, \tilde{N}_z)_s^{kR} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.37)$$

さて、一様はり要素自体は線形であると仮定しているので、非線形基礎支持節点における式(6.12)および式(6.14)の解は、一様はり内部ではフーリエ級数の次数成分ごとに分離して取り扱うことができる。そこで、式(6.33)の解を次数成分ごとに次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} d^{*kL} &= d_c^{kL} \cos k\tau + d_s^{kL} \sin k\tau, & d^{*kR} &= d_c^{kR} \cos k\tau + d_s^{kR} \sin k\tau \\ f^{*kL} &= f_c^{kL} \cos k\tau + f_s^{kL} \sin k\tau, & f^{*kR} &= f_c^{kR} \cos k\tau + f_s^{kR} \sin k\tau \\ \tilde{f}^{*kL} &= \tilde{f}_c^{kL} \cos k\tau + \tilde{f}_s^{kL} \sin k\tau, & \tilde{f}^{*kR} &= \tilde{f}_c^{kR} \cos k\tau + \tilde{f}_s^{kR} \sin k\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.38)$$

式(6.38)を式(6.33)に代入し、さらに複素化して整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (M^k + C^k)d^{kL} &= \tilde{f}^{kL} - f^{kL} \\ (M^k + C^k)d^{kR} &= f^{kR} - \tilde{f}^{kR} \\ M^k &= -(k\omega)^2 M', & C^k &= -ik\omega C' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.39)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} d^{kL} &= d_c^{kL} + id_s^{kL}, & d^{kR} &= d_c^{kR} + id_s^{kR} \\ f^{kL} &= f_c^{kL} + if_s^{kL}, & f^{kR} &= f_c^{kR} + if_s^{kR} \\ \tilde{f}^{kL} &= \tilde{f}_c^{kL} + i\tilde{f}_s^{kL}, & \tilde{f}^{kR} &= \tilde{f}_c^{kR} + i\tilde{f}_s^{kR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.40)$$

式(6.39)は一様はり要素の分布粘性減衰を考慮した場合の基本要素両端における動的な力のつり合いを表している。

一方、基本要素の質量のない弾性はり両端における状態量ベクトル間の関係は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} d^{kR} &= {}^tLd^{kL} + F\tilde{f}^{kR} \\ \tilde{f}^{kL} &= L\tilde{f}^{kR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.41)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \text{Diag}(1, 1, L', L'), & L' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \\ F &= \text{Diag}(\alpha_x, \beta_x, F'_z, F'_y) \\ \alpha_x &= \frac{l}{EA}, & \beta_x &= \frac{l}{GI_x} \\ F'_y &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}_y, & F'_z &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}_z \\ (\alpha, \beta, \gamma)_y &= \left( \frac{l^3}{3EI_y} + \frac{l}{\kappa_y GA}, \frac{l}{EI_y}, \frac{l^2}{2EI_y} \right) \\ (\alpha, \beta, \gamma)_z &= \left( \frac{l^3}{3EI_z} + \frac{l}{\kappa_z GA}, \frac{l}{EI_z}, \frac{l^2}{2EI_z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.42)$$

ここに、 $(\alpha, \beta, \gamma)_y$  および  $(\alpha, \beta, \gamma)_z$  は弾性はり要素を片持ちばりとみなした場合の  $Y_j$  軸回りおよび  $Z_j$  軸回りの静的影響係数である。

式(6.39)および式(6.41)から  $\tilde{f}^{kL}$  および  $\tilde{f}^{kR}$  を消去することにより、基本要素の左端の状態量ベクトル  $d^{kL}$ ,  $f^{kL}$  と右端の状態量ベクトル  $d^{kR}$ ,  $f^{kR}$  との関係として、次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} f^{kR} &= S^{ka} d^{kR} + S^{kc} d^{kL} \\ f^{kL} &= s^{kc} d^{kR} + s^{ka} d^{kL} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.43)$$

ここに、 $S^{ka}$ ,  $s^{ka}$  は自己動的剛性係数行列、 $S^{kc}$ ,  $s^{kc}$  は相互動的剛性係数行列であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S^{ka} &= \text{Diag}[S_x^{ka}, S_\theta^{ka}, S_z^{ka}, S_y^{ka}] \\ s^{ka} &= \text{Diag}[s_x^{ka}, s_\theta^{ka}, s_z^{ka}, s_y^{ka}] \\ S^{kc} &= \text{Diag}[S_x^{kc}, S_\theta^{kc}, S_z^{kc}, S_y^{kc}] \\ s^{kc} &= \text{Diag}[s_x^{kc}, s_\theta^{kc}, s_z^{kc}, s_y^{kc}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.44)$$

$$\left. \begin{aligned} S_x^{ka} &= -s_x^{ka} = -(k\omega)^2 m - ik\omega c_x^c + 1/\alpha_x \\ S_\theta^{ka} &= -s_\theta^{ka} = -(k\omega)^2 J_x - ik\omega C_x^c + 1/\beta_x \\ S_x^{kc} &= -s_x^{kc} = -1/\alpha_x \\ S_\theta^{kc} &= -s_\theta^{kc} = -1/\beta_x \\ S_y^{ka} &= \begin{bmatrix} A^k & \gamma' \\ \gamma' & B^k \end{bmatrix}_y, & S_z^{ka} &= \begin{bmatrix} A^k & \gamma' \\ \gamma' & B^k \end{bmatrix}_z \\ s_y^{ka} &= \begin{bmatrix} -A^k & \gamma' \\ \gamma' & -B^k \end{bmatrix}_y, & s_z^{ka} &= \begin{bmatrix} -A^k & \gamma' \\ \gamma' & -B^k \end{bmatrix}_z \\ S_y^{kc} &= -{}^t s_y^{kc} = -\begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma' l \end{bmatrix}_y \\ S_z^{kc} &= -{}^t s_z^{kc} = -\begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma' l \end{bmatrix}_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.45)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{l}{EA}, \quad \beta_x = \frac{l}{GI_x} \\ A_y^k &= \alpha_y' - m(k\omega)^2 - ik\omega c_y^c, & A_z^k &= \alpha_z' - m(k\omega)^2 - ik\omega c_z^c \\ B_y^k &= \beta_y' - J_y(k\omega)^2 - ik\omega C_y^c, & B_z^k &= \beta_z' - J_z(k\omega)^2 - ik\omega C_z^c \\ (\alpha', \beta', \gamma')_y &= \left( \frac{\beta}{D}, \frac{\alpha}{D}, -\frac{\gamma}{D} \right), & (\alpha', \beta', \gamma')_z &= \left( \frac{\beta}{D}, \frac{\alpha}{D}, -\frac{\gamma}{D} \right)_z \\ D_y &= (\alpha\beta - \gamma^2)_y, & D_z &= (\alpha\beta - \gamma^2)_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.46)$$

**6.2.3 直列結合則** 複数の基本要素から構成される一様はり内部の部分系を分

系と呼ぶ。いま、分系は明らかに左右対称である。

第2章と同様に、分系Aの右端に分系Bを直線状にかつ剛に結合して、新たな分系Cを構成することについて検討する。この結合過程においても、自己および相互動的

剛性係数行列の計算は次数成分ごとに分離することが可能である。このとき、分系 A と分系 B の両端の  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列を求めるための直列結合則は、以下のように求められる。ただし、各分系に関する物理量を下添字「A, B, C」により区別する。

まず、分系 A と分系 B の第  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列が既知であり、両分系の両端における状態量ベクトルが次のように表されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} f_A^{kR} &= S_A^{ka} d_A^{kR} + S_A^{kc} d_A^{kL}, & f_A^{kL} &= s_A^{kc} d_A^{kR} + s_A^{ka} d_A^{kL} \\ f_B^{kR} &= S_B^{ka} d_B^{kR} + S_B^{kc} d_B^{kL}, & f_B^{kL} &= s_B^{kc} d_B^{kR} + s_B^{ka} d_B^{kL} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.47)$$

両分系の結合は剛であるので、結合部における状態量間の関係は  $d_A^{kR} = d_B^{kL}$  および  $f_A^{kR} = f_B^{kL}$  で与えられる。また、両分系と結合後の分系 C の状態量ベクトル間の関係は、明らかに  $d_C^{kL} = d_A^{kL}$ ,  $d_C^{kR} = d_B^{kR}$ ,  $f_C^{kL} = f_A^{kL}$  および  $f_C^{kR} = f_B^{kR}$  である。これらの関係を用いて、式(6.47)から結合部の状態量  $d_A^{kR}$ ,  $d_B^{kL}$ ,  $f_A^{kR}$  および  $f_B^{kL}$  を消去することにより、自己および相互剛性係数行列の直列結合則として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} S_C^{ka} &= {}^t S_C^{ka} = S_B^{ka} + S_B^{kc} T_{AB}^k s_B^{kc} \\ S_C^{kc} &= -{}^t s_C^{kc} = -S_B^{kc} T_{AB}^k s_A^{ka} \\ s_C^{ka} &= {}^t s_C^{ka} = s_A^{ka} - s_A^{kc} T_{AB}^k s_A^{kc} \\ T_{AB}^k &= {}^t T_{AB}^k = (S_A^{ka} - s_A^{ka})^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.48)$$

この直列結合則も第 2 章の 2・2・3 項に示した数値計算上の特徴を有している。さらに、これに加えて、式(6.48)の再結合過程は、縦 (X 軸方向) ・ねじり (X 軸回り) ・二平面内の曲げ (X-Y 平面の Z 軸回り, X-Z 平面の Y 軸回り) の四種類の要素に分離して計算することが可能であり、小さな次元の行列により結合計算を行うことが可能である (付録 2 参照)。

式(6.48)に示される結合則を再帰的に適用することにより、非常に少ない計算量で要素の内部節点の自由度を消去して、一様はり要素両端の状態量間の関係を求めることができる。ただし、本項に示した再結合則においても、内部自由度の消去によって計算精度が損なわれることはない。

**6・2・4 一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係** 各一様はり要素に対して次数成分ごとに式(6.48)の直列結合則を再帰的に適用することにより、一様はり要素内部の自由度は完全に消去され、一様はり要素両端間における複素化された状態量ベクトルの関係が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j^k &= S_j^{ka} d_j^k + S_j^{kc} d_{j-1}^k \\ f_{j-1}^k &= s_j^{kc} d_j^k + s_j^{ka} d_{j-1}^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.49)$$

一様はり要素両端間の自己および相互動的剛性係数行列  $S_j^{ka}$ ,  $S_j^{kc}$ ,  $s_j^{ka}$ ,  $s_j^{kc}$  を求めるまでの一様はり要素内部の計算には、上記のように複素量を用いた法が便利であり、しかも能率的である。一方、非線形基礎支持節点における式(6.30)の計算に利用するには、これらを次式の関係により実数表示に変換しておく必要がある。ただし、 $S_j^{ka}$ ,  $S_j^{kc}$ ,  $s_j^{ka}$ ,  $s_j^{kc}$  の下添字「r」および「i」は、それぞれ対応する変数の実部および虚部を示す。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{f}_c \\ \bar{f}_s \end{bmatrix}_j^k &= \begin{bmatrix} S_r^a & -S_i^a \\ S_i^a & S_r^a \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k + \begin{bmatrix} S_r^c & -S_i^c \\ S_i^c & S_r^c \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k \\ \begin{bmatrix} f_c \\ f_s \end{bmatrix}_j^k &= \begin{bmatrix} s_r^c & -s_i^c \\ s_i^c & s_r^c \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k + \begin{bmatrix} s_r^a & -s_i^a \\ s_i^a & s_r^a \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.50)$$

さらに、式(6.12)および式(6.16)で定義される各節点の変位振幅ベクトルおよび力振幅ベクトルの構造に適合するように、式(6.50)を  $k=0, 1, \dots, N$  について再整理することにより、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= S_j^a d_j + S_j^c d_{j-1} \\ f_{j-1} &= s_j^c d_j + s_j^a d_{j-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.51)$$

また、一様はり要素は線形であるので、式(6.51)の関係は増分量に対してもまったく同様に成立する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{f}_j &= S_j^a \Delta d_j + S_j^c \Delta d_{j-1} \\ \Delta f_{j-1} &= s_j^c \Delta d_j + s_j^a \Delta d_{j-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.52)$$

これが、一様はり要素に対して求めるべき  $\Delta \bar{f}_j$  および  $\Delta f_j$  と  $\Delta d_j$  との関係である。

### 6.3 増分伝達剛性係数法の定式化

前節において、式(6.52)のように求められた一様はり要素両端間の状態量ベクトルの間の関係を、座標変換を考慮した上で式(6.30)に代入することにより、修正量としての増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j$  が系内の全節点に対して求められる。さらに、 $\Delta d_j$  に対して  $d_j + \Delta d_j \rightarrow d_j$  なる反復計算を実行することにより、変位振幅ベクトル  $d_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ) が逐次近似計算される。この逐次近似計算において注目すべき点は、

逐次近似計算過程から一様はり要素内部の状態量は完全に消去されて、非線形基礎支持節点のみの自由度  $[6(2N+1)(n+1)]$  に縮小されている点である。この点だけから見ても、従来の増分調和バランス法や増分伝達影響係数法よりもかなり計算能率の向上が達成されていることがわかる。

本節では、さらなる計算能率の向上を図るために、 $\Delta d_j$  の計算過程に第 2 章で提案した漸化形式による計算手法を導入する。

**6.3.1 漸化形式による増分変位振幅ベクトルの高能率計算**  $j$  番めおよび  $j+1$  番め局所直交座標系で表された節点  $j$  の左側および右側における増分変位振幅ベクトルと増分力振幅ベクトルとの間の関係をそれぞれ次式で定義する。ただし、本章の以下の議論では、上添字により当該の物理量を成分表示している座標系を明示する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{f}_j^j &= \bar{S}_j^j \Delta d_j^j + \bar{s}_j^j \\ \Delta f_j^j &= S_j^j \Delta d_j^j + s_j^j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.53)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{f}_j^{j+1} &= \bar{S}_j^{j+1} \Delta d_j^{j+1} + \bar{s}_j^{j+1} \\ \Delta f_j^{j+1} &= S_j^{j+1} \Delta d_j^{j+1} + s_j^{j+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.54)$$

ここに、 $\bar{S}_j^j, S_j^j$  および  $\bar{S}_j^{j+1}, S_j^{j+1}$  は動的剛性係数行列、 $\bar{s}_j^j, s_j^j$  および  $\bar{s}_j^{j+1}, s_j^{j+1}$  は増分力補正ベクトルであり、これらの次元はいずれも  $6(2N+1)$  である。本章の計算過程においても、増分伝達剛性係数法では、まず動的剛性係数行列と増分力補正ベクトルとを節点 0 から節点  $n$  にかけて漸化的に計算した後に、その計算過程で得られた結果を利用して節点  $n$  から節点 0 にかけて増分変位振幅ベクトルを漸化的に伝達計算する。その伝達計算則は次のように求められる。

(a) 分岐系が存在しない場合 まず、式(6.52)の下添字  $j$  を  $j-1$  に変更した式および式(6.53)から、 $S_{j-1}^j, s_{j-1}^j$  に基づいて  $\bar{S}_j^j, \bar{s}_j^j$  を計算する一様はり要素両端間の格間伝達則が、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_j^j &= S_j^{aj} + S_j^{cj} V_j^j \\ \bar{s}_j^j &= -S_j^{cj} (G_j^j)^{-1} s_{j-1}^j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.55)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} G_j^j &= S_{j-1}^j - s_j^{aj} \\ V_j^j &= (G_j^j)^{-1} s_j^{cj} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.56)$$

ただし、 $j=1$  に対する伝達計算の初期値  $S_0^1, s_0^1$  は、系の左端の条件から次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} S_0^1 = \hat{P}_0^1 \\ s_0^1 = -r_0^1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(6.57)$$

次に、節点  $j$  両側において、 $\bar{S}_j^j, \bar{s}_j^j$  に基づいて  $S_j^j, s_j^j$  を計算する格点伝達則は、式(6.30)および式(6.53)から次式のように求められる。

$$\left. \begin{array}{l} S_j^j = \bar{S}_j^j + \hat{P}_j^j \\ s_j^j = \bar{s}_j^j - r_j^j \end{array} \right\} \dots\dots\dots(6.58)$$

さらに、式(6.55)および式(6.58)から  $\bar{S}_j^j$  および  $\bar{s}_j^j$  を消去することにより、 $S_{j-1}^j, s_{j-1}^j$  から  $S_j^j, s_j^j$  を計算する格間格点伝達則が次のように求められる。

$$\left. \begin{array}{l} S_j^j = \hat{P}_j^j + S_j^{aj} + S_j^{cj} V_j^j \\ s_j^j = -S_j^{cj} (G_j^j)^{-1} s_{j-1}^j - r_j^j \end{array} \right\} (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(6.59)$$

一方、増分変位振幅ベクトルおよび増分力振幅ベクトルについて、 $j$  番めおよび  $j+1$  番め局所直交座標系で成分表示したとき、両者の間の変換則は、両座標系間の座標変換行列を  $T_j$  とすれば、次のように表される。

$$\left. \begin{array}{l} \Delta d_j^j = T_j \Delta d_j^{j+1} \\ \Delta f_j^j = T_j \Delta f_j^{j+1} \\ \Delta \bar{f}_j^j = T_j \Delta \bar{f}_j^{j+1} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(6.60)$$

ここに、 $j$  番めと  $j+1$  番めの局所直交座標系  $(X_j, Y_j, Z_j)$  と  $(X_{j+1}, Y_{j+1}, Z_{j+1})$  との間が、図 6.4 に示すようにオイラー角で  $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_j$  だけ異なっているものとすれば、 $T_j$  は次のように与えられる。

$$T_j = \text{Diag}[\overbrace{T^j, T^j, \dots, T^j}^{6(2N+1)}] \dots\dots\dots(6.61)$$

$$T^j = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & t_{13} & 0 & t_{15} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & t_{24} & 0 & t_{26} \\ t_{31} & 0 & t_{33} & 0 & t_{35} & 0 \\ 0 & t_{42} & 0 & t_{44} & 0 & t_{46} \\ t_{51} & 0 & t_{53} & 0 & t_{55} & 0 \\ 0 & t_{62} & 0 & t_{64} & 0 & t_{66} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.62)$$

$$\left. \begin{array}{l} t_{11} = t_{22} = \cos \alpha_b, \quad t_{31} = -t_{62} = \cos \alpha_a \sin \alpha_b, \quad t_{42} = t_{51} = \sin \alpha_a \sin \alpha_b \\ t_{13} = -t_{26} = -\sin \alpha_b \cos \alpha_c, \quad t_{33} = t_{66} = \cos \alpha_a \cos \alpha_b \cos \alpha_c - \sin \alpha_a \sin \alpha_c \\ t_{15} = t_{24} = \sin \alpha_b \sin \alpha_c, \quad t_{53} = -t_{46} = \sin \alpha_a \cos \alpha_b \cos \alpha_c + \cos \alpha_a \sin \alpha_c \\ t_{44} = t_{55} = -\sin \alpha_a \cos \alpha_b \sin \alpha_c + \cos \alpha_a \cos \alpha_c \\ t_{35} = -t_{64} = -\cos \alpha_a \cos \alpha_b \sin \alpha_c - \sin \alpha_a \cos \alpha_c \end{array} \right\}$$

また、式(6.62)より、明らかに  $T_j^{-1} = {}^t T_j$  である。したがって、 $j$  番めおよび  $j+1$  番め局

所直交座標系で表された節点  $j$  の右側の動的剛性係数行列および増分力補正ベクトルの関係は、式(6.53), 式(6.54)および式(6.60)から次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_j^{j+1} &= {}^t T_j S_j^j T_j \\ s_j^{j+1} &= {}^t T_j s_j^j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.63)$$

以上に示したように、式(6.57)を初期値として、式(6.63)の座標変換則を考慮して、式(6.59)を伝達計算することにより、動的剛性係数行列  $S_j^j$  および増分力補正ベクトル  $s_j^j$  が、それぞれ系の左端から右端にかけて漸化的に求められる。

次に、上記の方法で各節点の動的剛性係数行列  $S_j^j$  と増分力補正ベクトル  $s_j^j$  が  $j=1, 2, \dots, n$  について計算されているものとすれば、系の右端（節点  $n$ ）の増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_n^n$  は、系の右端の条件（ $f_n^n = 0$ ）から次のように与えられる。

$$\Delta d_n^n = -(S_n^n)^{-1} s_n^n \dots\dots\dots (6.64)$$

また、式(6.30), 式(6.52)および式(6.53)から、 $\Delta d_j^j$  から  $\Delta d_{j-1}^{j-1}$  を求める伝達計算則が次のように求められる。

$$\Delta d_{j-1}^{j-1} = V_j^j \Delta d_j^j - (G_j^j)^{-1} s_{j-1}^{j-1}, \quad (j=n, n-1, \dots, 1) \dots\dots\dots (6.65)$$

以上により、各節点の増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j^j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ) は式(6.64)で求められる  $\Delta d_n^n$  を初期値として、式(6.60)の座標変換則を考慮して、式(6.65)の小さな次元の行列を用いた漸化計算を行うことにより、系の右端から左端にかけて能率的に求められる。

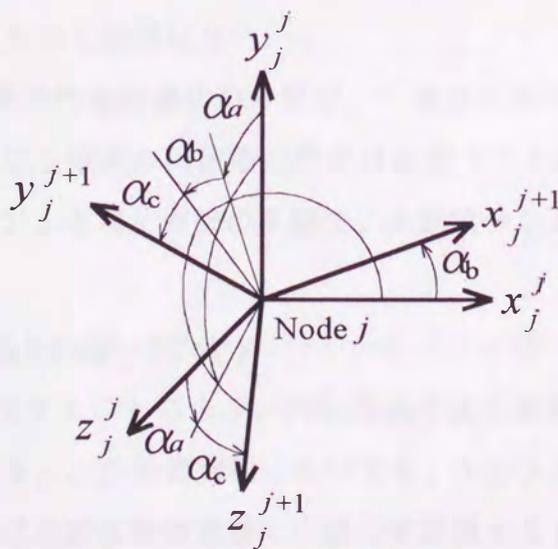


図 6.4 節点  $j$  における局所直交座標系間のオイラー角の定義

(b) 分岐系の取り扱い 分岐系についても主系と全く同様の計算手続きを適用することが可能である。そこで、主系の計算に先立って、式(6.63)までに定式化した計算手続きを主系の節点  $j$  に結合する分岐系に適用し、分岐系の右端（主系との結合部）における動的剛性係数行列  $(S_j^j)_{\text{sub}}$  および増分力補正ベクトル  $(s_j^j)_{\text{sub}}$  が、 $j$  番め局所直交座標系を用いて次のように求められているものとする。ただし、下添字「sub」の付された記号は、分岐系に関する物理量であるものとする。

$$(\Delta f_j^j)_{\text{sub}} = (S_j^j)_{\text{sub}} \Delta d_j^j + (s_j^j)_{\text{sub}} \dots \dots \dots (6.66)$$

次に、分岐系の結合部である節点  $j$  での動的な力のバランスを考えると、式(6.30)の左辺に式(6.66)の  $(\Delta f_j^j)_{\text{sub}}$  を加算すればよいことが分かる。すなわち、

$$\hat{P}_j^j \Delta d_j^j + \Delta \bar{f}_j^j - \Delta f_j^j + (\Delta f_j^j)_{\text{sub}} = r_j \dots \dots \dots (6.67)$$

したがって、式(6.67)の関係を考慮して、式(6.55)～式(6.59)と同様の計算手続きを行うことにより、節点  $j$  に分岐系が結合している場合の格間格点伝達則は、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} S_j^j &= \hat{P}_j^j + S_j^{aj} + S_j^{cj} V_j^j + (S_j^j)_{\text{sub}} \\ s_j^j &= -S_j^{cj} (G_j^j)^{-1} s_{j-1}^j - r_j^j + (s_j^j)_{\text{sub}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.68)$$

分岐系内の節点における増分変位振幅ベクトルも、主系の増分変位振幅ベクトルが求められたのちに、結合している主系の節点の増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j^j$  を初期値として、式(6.65)の伝達計算則を式(6.60)の座標変換則を考慮して分岐系に適用することによって、主系と同様の手順で求められる。また、当然ながら、分岐系自身がさらに分岐系を有していても全く問題はない。

6.3.2 一様はり要素の内部節点の取り扱い 逐次近似計算により、近似解が求められた時点で、一様はり要素の内部節点の変位振幅ベクトル（ $j$  番目局所直交座標系表示）は、第2章の2.3.5項と同様の手順で、次数成分ごとに次のように求められる。

$$(d_A^{kR})^j = (d_B^{kL})^j = T_{AB}^k (s_B^{kc} d_B^{kR} - S_A^{kc} d_A^{kL})^j \dots \dots \dots (6.69)$$

式(6.69)を再帰的に適用することにより、内部節点の変位振幅ベクトルが次数成分ごとに分離して求められる。この計算過程においても、6.2.3項とは逆の手順で、縦・ねじり・二平面内の曲げの四種類の要素に分離して計算することが可能であり、小さな次元の行列計算により能率的に行うことができる。

## 6.4 計算手順のまとめ

以上により，増分伝達剛性係数法による三次元樹状構造物の非線形強制振動の計算手順は，次のように整理される．

(1) 与えられた強制外力の角振動数  $\omega$  に対して，6.2.2 項および 6.2.3 項の手順を適用して，主系および分岐系の各節点間の一樣はり要素両端間に関する自己および相互動的剛性係数行列を求める．ただし，一樣はり要素が同一である場合には，自己および相互動的剛性係数行列もまた同一となるので，いずれか一本の一樣はり要素に対してのみこの計算を行えばよい．

(2) 主系および分岐系の全節点において変位振幅ベクトル  $d_j^j$  の初期値を仮定する．

(3) 分岐系の各節点における状態量の計算を行う．すなわち，

(3-i) 仮定された分岐系の  $(d_j^j)_{\text{sub}}$  から，力振幅ベクトル  $(\bar{f}_j^j, f_j^j, \hat{f}_j^j)_{\text{sub}}$  を計算する．

このうち  $(\bar{f}_j^j)_{\text{sub}}, (f_j^j)_{\text{sub}}$  の計算は式(6.51)による．また， $(\hat{f}_j^j)_{\text{sub}}$  の計算は基礎支持要素の非線形特性を表す関数形に依存するので，それに適した計算法<sup>(59)</sup>を利用すればよい．

(3-ii) 分岐系の各節点において，式(6.29)および式(6.31)より  $(\hat{P}_j^j)_{\text{sub}}, (r_j^j)_{\text{sub}}$  を計算する．

(3-iii) 式(6.57)および式(6.59)より，分岐系の左端から右端にかけて動的剛性係数行列  $(S_j^j)_{\text{sub}}$  および増分力補正ベクトル  $(s_j^j)_{\text{sub}}$  を計算する．

(4) 主系の各節点における状態量の計算を行う．すなわち，

(4-i) 仮定された主系の  $d_j^j$  から，力振幅ベクトル  $(\bar{f}_j^j, f_j^j, \hat{f}_j^j)$  を順次計算する．

(4-ii) 主系の各節点において，式(6.29)および式(6.31)より  $\hat{P}_j^j, r_j^j$  を計算する．

(4-iii) 式(6.57)および式(6.59)より，主系の左端から右端にかけて動的剛性係数行列  $S_j^j$  および増分力補正ベクトル  $s_j^j$  を計算する．このとき，分岐系と結合している節点では，すでに計算されている分系系の  $(S_j^j)_{\text{sub}}$  および  $(s_j^j)_{\text{sub}}$  を式(6.68)により加算する．

(5) 式(6.64)および式(6.65)より，主系の増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j^j$  を計算する．

(6) 式(6.65)より分岐系の増分変位振幅ベクトル  $(\Delta d_j^j)_{\text{sub}}$  を計算する．

(7) 主系および分岐系の全節点に対して、 $\|\Delta d_j^i\|$  が収束判定値以下となれば逐次近似計算は収束したと見なして手順(8)へ。そうでなければ  $d_j^i + \Delta d_j^i$  を新たな初期値  $d_j^i$  として手順(3)へ戻る。

(8) 必要があれば一様はりの内部節点の変位振幅ベクトルを求める。

(9) 新しい  $\omega$  を設定して手順(1)へ戻る。

以上のように、本章で定式化した手法では、第2章と同様に最も大きな計算量を必要とする手順(3)～手順(7)の間の反復計算ループから、一様はり要素内部の節点に関する計算が完全に除去されている。また、反復計算ループ(3)～(7)の中では計算量の最も大きな手順(5)および(6)の  $\Delta d_j^i$  の伝達計算過程に対しても、漸化形式による計算手続きを導入することにより、計算量と必要なメモリ量の両面で効率化が図られている。このように、本章で定式化した手法は、計算手続きの各段階で計算能率向上のための可能な限りの対策が施された手法であるといえる。

## 6.5 低次元化モデルによる安定判別法の適用

本節では、第3章で定式化した低次元化モデルによる安定判別法を三次元樹状構造物に適用する。その概念は第3章に述べたものと基本的には同様のものであるので、本章では三次元樹状構造物に対して定式化する際の概略を示す。また、本節の以下の議論では、すべての物理量はある一つの基準座標系で成分表示されているものとし、基準座標系を表す上添字は省略する。

**6.5.1 安定判別に関する基礎的事項** 前章までの手順によって、定常周期解  $d_j^i = (x, \theta, y, \varphi, z, \phi)_j^i$  が求められているものとする。この近似解に対する微少変分を  $\delta d_j^i = (\delta x, \delta \theta, \delta y, \delta \varphi, \delta z, \delta \phi)_j^i$  とし、それに基づく力および力のモーメントの微少変分を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{f}_j^i &= (\delta \bar{F}_x, \delta \bar{N}_x, \delta \bar{F}_z, \delta \bar{N}_y, \delta \bar{F}_z, \delta \bar{N}_y)_j^i \\ \delta \hat{f}_j^i &= (\delta \hat{F}_x, \delta \hat{N}_x, \delta \hat{F}_z, \delta \hat{N}_y, \delta \hat{F}_z, \delta \hat{N}_y)_j^i \\ \delta f_j^i &= (\delta F_x, \delta N_x, \delta F_z, \delta N_y, \delta F_z, \delta N_y)_j^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.70)$$

ここに、

$$\delta \hat{f}_j^i = \hat{V}_j^i \delta d_j^i + \hat{W}_j^i \delta \dot{d}_j^i \dots\dots\dots (6.71)$$

ここで、式(6.7)の  $\delta \mathbf{d}_j^*$  に関する変分方程式は次のようになる。

$$\omega^2 \hat{M}_j \delta \ddot{\mathbf{d}}_j^* + \delta \bar{\mathbf{f}}_j^* + \delta \hat{\mathbf{f}}_j^* - \delta \mathbf{f}_j^* = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (6.72)$$

一方、基本要素でモデル化した一様はり要素内部の集中質量に関する変分方程式は、形式的に式(6.72)から  $\delta \hat{\mathbf{f}}_j^*$  を除去した式で与えられる。また、質量のない弾性はり両端間での力および力のモーメントの釣り合いを考慮することにより、一様はり要素の  $p$  番め内部節点における変分方程式は、次のように書き表すことができる。

$$m_p \delta \ddot{\mathbf{d}}_p + \mathbf{c}_p \delta \dot{\mathbf{d}}_p + \mathbf{H}_p^1 \delta \mathbf{d}_{p-1} + \mathbf{H}_p^2 \delta \mathbf{d}_p + \mathbf{H}_p^3 \delta \mathbf{d}_{p+1} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (6.73)$$

$$\left. \begin{aligned} m_p &= \text{diag}(m, J_x, m, J_z, m, J_y)_p, \quad \mathbf{c}_p = \text{diag}(c_x^c, C_x^c, c_y^c, C_y^c, c_z^c, C_z^c)_p \\ \mathbf{H}_p^1 &= \text{Diag}[-1/\alpha_x, -1/\beta_x, h_x^1, h_y^1]_p \\ \mathbf{H}_p^2 &= \text{Diag}[1/\alpha_x, 1/\beta_x, h_x^{21}, h_y^{21}]_p - \text{Diag}[-1/\alpha_x, -1/\beta_x, h_x^{22}, h_y^{22}]_{p+1} \\ \mathbf{H}_p^3 &= \text{Diag}[-1/\alpha_x, -1/\beta_x, h_x^3, h_y^3]_p \\ h_{yp}^1 &= \begin{bmatrix} -\alpha' & \gamma' \\ -\gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_{yp}, \quad h_{xp}^1 = \begin{bmatrix} -\alpha' & \gamma' \\ -\gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_{xp} \\ h_{yp}^{21} &= \begin{bmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \gamma' & \beta' \end{bmatrix}_{yp}, \quad h_{xp}^{21} = \begin{bmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \gamma' & \beta' \end{bmatrix}_{xp} \\ h_{yp}^{22} &= \begin{bmatrix} -\alpha' & \gamma' \\ \gamma' & -\beta' \end{bmatrix}_{yp}, \quad h_{xp}^{22} = \begin{bmatrix} -\alpha' & \gamma' \\ \gamma' & -\beta' \end{bmatrix}_{xp} \\ h_{yp}^3 &= \begin{bmatrix} -\alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_{yp}, \quad h_{xp}^3 = \begin{bmatrix} -\alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_{xp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.74)$$

ここに、 $m_p$  および  $c_p$  は  $p$  番め内部節点の質量行列および減衰行列である。また、 $\alpha_x, \beta_x, (\alpha', \beta', \gamma')_y, (\alpha', \beta', \gamma')_z$  および  $l$  は式(6.42)および式(6.45)で定義したのと同じである。この関係と式(6.71)および式(6.72)とを考慮することにより、系全体の變分方程式が形式的に次のように求められる。

$$\omega^2 M \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \omega C^* \dot{\boldsymbol{\eta}} + K^* \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (6.75)$$

ここに、 $\boldsymbol{\eta}$  は一様はり要素の内部節点をも含む主系および分岐系の全節点における各軸方向の変位および各軸回りの角変位の変分をまとめた変位変分ベクトルであり、総節点数を  $M$  とすれば  $6M$  次元ベクトルになる。また、質量行列  $M$ 、減衰行列  $C^* [= C^*(\tau)]$  および剛性行列  $K^* [= K^*(\tau)]$  はいずれも  $6M$  次正方形行列となり、非常に大規模な行列となる。また、定常周期振動に対しては、 $C^*$  および  $K^*$  は  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の関数となる。そこで、 $C^*$  および  $K^*$  を次のようにフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} C^* &= C_c^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_c^k \cos k\tau + C_s^k \sin k\tau) \\ K^* &= K_c^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (K_c^k \cos k\tau + K_s^k \sin k\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.76)$$

周期解  $d_j^*$  の無限小安定性は式(6.75)の零解 ( $\eta^* = 0$ ) の安定性から判別できる。式(6.75)は周期係数型線形常微分方程式であるため、フローケの定理<sup>(11)</sup>を適用することができる。フローケの定理によれば、特性指数の実部がすべて負であるか、特性乗数の絶対値がすべて1よりも小であれば周期解は安定、そうでなければ一般に不安定である。

第3章でも述べたように、特性指数または特性乗数の計算過程から一様はり要素の内部節点の自由度を消去することは容易ではない。したがって、原理的には大規模な自由度を有する式(6.75)をそのまま取り扱う必要があるが、式(6.75)に対して特性乗数または特性指数を求めようとする場合、第3章でも指摘した数値計算上の困難（大規模非対称行列の固有値解析および大規模スティフ系の数値積分）が生じる。そこで、本章でもこれらの問題を解決するために、第3章で提案した低次元化モデルによる安定判別法を適用する。

**6・5・2 低次元化モデルの構成** 前項で述べたように、式(6.75)に対して、そのまま特性指数や特性乗数を求めることは実際には不可能に近い。そこで、式(6.75)の変分方程式の解析にモード解析の概念を援用し、少数のモードを用いて式(6.75)の零解の安定性をよく反映する部分空間に変数変換することによって、安定判別に利用する変分方程式の次元の低減化を行う。本節では、第3章で提案した低次元化法の中で、使用頻度の高いと思われるモードI法およびモードII法の概要を述べるに止める。

**6・5・3 線形項モードを用いる方法（モードI法）** この方法では、変分方程式(6.75)において  $C^* = 0$  および  $\omega = 1$  とおき、式(6.19)の  $\hat{V}_j^*$ 、 $\hat{W}_j^*$  の定数項のみを残した次式を考える。

$$M\ddot{\eta}^* + K_0\eta^* = 0 \dots\dots\dots (6.77)$$

これは、元の系の線形項のみを考慮した線形化系において、不減衰自由振動を考えることに相当する。

ここで、式(5.77)に通常モード解析の手順を適用することにより、次のような一般的な固有値問題が導出される。

$$\left. \begin{aligned} (K_0 - \sigma^1 M)\phi^1 = 0 \\ \det(K_0 - \sigma^1 M) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.78)$$

仮定により、 $M$  および  $K_0$  は対称行列であるので、式(6.78)から実固有値と対応する実固有ベクトルが求められる。この実固有ベクトルを線形項モードと呼び、最低次から  $M^1 (<< 6M)$  個の線形項モードで構成される  $6M \times M^1$  モード行列を次のように定義する。

$$\Phi^1 = [\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_{M^1}^1] \dots\dots\dots (6.79)$$

ただし、モード行列  $\Phi^1$  は、次のように質量行列  $M$  によって正規化されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} {}^t\Phi^1 M \Phi^1 = I_{M^1}, \quad {}^t\Phi^1 K_0 \Phi^1 = (\Omega^1)^2 \\ \Omega^1 = \text{diag}[\sqrt{\sigma_1^1}, \sqrt{\sigma_2^1}, \dots, \sqrt{\sigma_{M^1}^1}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.80)$$

ここに、 $I_{M^1}$  は  $M^1$  次単位行列である。また、 $\sigma_p^1 (p = 1, 2, \dots, M^1)$  は、式(6.77)から求められる最低次から  $M^1$  個の実固有値である。

この、モード行列  $\Phi^1$  を用いれば、式(6.75)の変分方程式は次のように低次元化される。

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \ddot{\xi}^1 + \omega {}^t\Phi^1 C^* \Phi^1 \dot{\xi}^1 + {}^t\Phi^1 K^* \Phi^1 \xi^1 = 0 \\ \eta^* = {}^t\Phi^1 \dot{\xi}^1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.81)$$

また、系の安定性に大きな影響を与えるモードの適切な抽出のために、式(6.81)に適切な変数変換を行うことにより、最終的な低次元化モデルの変分方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \ddot{\xi}^1 + (\Omega^1)^2 [\omega \hat{C}^1 \dot{\xi}^1 + \hat{K}^1 \xi^1] = 0 \quad \dots\dots\dots (6.82) \\ \xi^1 = \Omega^1 \dot{\xi}^1 \\ \hat{C}^1 = \hat{C}_c^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{C}_c^{k1} \cos k\tau + \hat{C}_s^{k1} \sin k\tau) \\ \hat{K}^1 = I_{M^1} + \hat{K}_c^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{K}_c^{k1} \cos k\tau + \hat{K}_s^{k1} \sin k\tau) \quad \dots\dots\dots (6.83) \\ \hat{K}_c^1 = {}^t\hat{\Phi}^1 (K_c^0 - K_0) \hat{\Phi}^1, \quad \hat{K}_{c,s}^{k1} = {}^t\hat{\Phi}^1 K_{c,s}^k \hat{\Phi}^1 \\ \hat{C}_{c,s}^{k1} = {}^t\hat{\Phi}^1 \hat{C}_{c,s}^k \hat{\Phi}^1, \quad \hat{\Phi}^1 = \Phi^1 (\Omega^1)^{-1} \end{aligned} \right\}$$

**6.5.4 定数項モードを用いる方法 (モード II 法)** この方法は、元の非線形系の周期解の影響を低次元化モデルにも考慮する方法であり、式(6.75)において  $C^* = 0$  および  $\omega = 1$  とおき、式(6.76)で定義される  $K^*$  の定数項  $K_c^0$  のみを残した次式を考える。

$$M \ddot{\eta}^* + K_c^0 \eta^* = 0 \quad \dots\dots\dots (6.84)$$

前項と同様に，式(6.84)に通常のモード解析の手順を適用することにより次のような一般的な固有値問題が導出される．

$$\left. \begin{aligned} (K_c^0 - \sigma^{\text{II}} M) \phi^{\text{II}} = \mathbf{0} \\ \det(K_c^0 - \sigma^{\text{II}} M) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.85)$$

仮定により， $M$  および  $K_c^0$  は対称行列であるので，式(6.85)から実固有値と対応する実固有ベクトルが求められる．この実固有ベクトルを定数項モードと呼び，最低次から  $M^{\text{II}} (<< 6M)$  個の定数項モードで構成される  $6M \times M^{\text{II}}$  モード行列を次のように定義する．

$$\Phi^{\text{II}} = [\phi_1^{\text{II}}, \phi_2^{\text{II}}, \dots, \phi_{M^{\text{II}}}^{\text{II}}] \dots\dots\dots (6.86)$$

ただし，モード行列  $\Phi^{\text{II}}$  は，次のように質量行列  $M$  によって正規化されているものとする．

$$\left. \begin{aligned} {}^t \Phi^{\text{II}} M \Phi^{\text{II}} = I_{M^{\text{II}}}, \quad {}^t \Phi^{\text{II}} K_c^0 \Phi^{\text{II}} = (\Omega^{\text{II}})^2 \\ \Omega^{\text{II}} = \text{diag}[\sqrt{\sigma_1^{\text{II}}}, \sqrt{\sigma_2^{\text{II}}}, \dots, \sqrt{\sigma_{M^{\text{II}}}^{\text{II}}}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.87)$$

ここに， $I_{M^{\text{II}}}$  は  $M^{\text{II}}$  次単位行列である．また， $\sigma_p^{\text{II}} (p = 1, 2, \dots, M^{\text{II}})$  は，式(6.84)から求められる最低次から  $M^{\text{II}}$  個の実固有値である．

このモード行列  $\Phi^{\text{II}}$  を用いれば，式(6.75)の変分方程式は次のように低次元化される．

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \xi^{\text{II}} + \omega {}^t \Phi^{\text{II}} C \Phi^{\text{II}} \dot{\xi}^{\text{II}} + {}^t \Phi^{\text{II}} K \Phi^{\text{II}} \xi^{\text{II}} = \mathbf{0} \\ \eta^{\text{II}} = {}^t \Phi^{\text{II}} \xi^{\text{II}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.88)$$

また，系の安定性に大きな影響を与えるモードの適切な抽出のために，式(6.88)に適切な変数変換を行うことにより，最終的な低次元化モデルの変分方程式は次のようになる．

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \xi^{\text{II}} + (\Omega^{\text{II}})^2 [{}^t \omega \hat{C}^{\text{II}} \dot{\xi}^{\text{II}} + \hat{K}^{\text{II}} \xi^{\text{II}}] = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (6.89) \\ \xi^{\text{II}} = \Omega^{\text{II}} \zeta^{\text{II}} \\ \hat{C}^{\text{II}} = \hat{C}_c^{\text{II}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{C}_c^{k\text{II}} \cos k\tau + \hat{C}_s^{k\text{II}} \sin k\tau) \\ \hat{K}^{\text{II}} = I_{M^{\text{II}}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{K}_c^{k\text{II}} \cos k\tau + \hat{K}_s^{k\text{II}} \sin k\tau) \quad \dots\dots\dots (6.90) \\ \hat{K}_{c,s}^{k\text{II}} = {}^t \hat{\Phi}^{\text{II}} K_{c,s}^k \hat{\Phi}^{\text{II}} \\ \hat{C}_{c,s}^{k\text{II}} = {}^t \hat{\Phi}^{\text{II}} C_{c,s}^k \hat{\Phi}^{\text{II}}, \quad \hat{\Phi}^{\text{II}} = \Phi^{\text{II}} (\Omega^{\text{II}})^{-1} \end{aligned} \right\}$$

**6.5.5 線形項モードおよび定数項モードの適切な抽出法** 低次元化モデル作成の際に用いた 1 次から  $M^{\text{I}}$  または  $M^{\text{II}}$  次までのモードの中には，解の安定性に及ぼす影響が小さいモードも含まれている可能性がある．よって，第 3 章で示した手順によ

り、解の安定性に及ぼす影響が小さいモードを除去することにより、必要最低限のモードおよびフーリエ係数からなる低次元化モデルを構成することが可能である。すなわち、式(6.83)および式(6.90)の剛性行列に相当する  $\hat{K}_c^{kI}$ ,  $\hat{K}_s^{kI}$  および  $\hat{K}_c^{kII}$ ,  $\hat{K}_s^{kII}$  の、あるモードに対応する要素の絶対値が基準となる定数項行列（単位行列）の対角要素である 1 に比べて十分に小さな値であれば、安定性に及ぼす影響は小さいとみなしてそのモードを除去してもよいであろう。また、ある次数以上の  $\hat{K}_c^{kI}$ ,  $\hat{K}_s^{kI}$  および  $\hat{K}_c^{kII}$ ,  $\hat{K}_s^{kII}$  の要素がすべて 1 に比べて十分に小さな値であれば、安定性に与える影響は小さいので、それらも除去することができるであろう。

**6.5.6 低次元化モデルに対する安定判別** 前項までの手順によって、元の系の変分方程式(6.75)に対して、可能な限り低次元化された変分方程式(6.82), (6.89)に対しては、第3章で示した手順により、特性指数または特性乗数を求めることが可能である。ここでは、3.2節で指摘した数値計算上の問題点はかなり克服されることが期待できる。これにより、特性指数の実部がすべて負であるか特性乗数の絶対値がすべて1より小であれば元の大規模系の定常周期解は漸近安定、そうでなければ一般に不安定であると判別できる。

## 6.6 数値計算結果

**6.6.1 計算条件** 本章で定式化した三次元樹状構造物に対する増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法の有効性を検証するために、具体的な計算モデルに対して数値計算を行った。計算には 32 ビットパーソナルコンピュータ (FORTRAN 77 による倍精度計算) を使用した。以下の計算結果はすべて奇数次解であるので、奇数次解用アルゴリズムにより9次近似解 ( $N=9$ ) を求めた。近似解の収束判定条件は、増分量の相対誤差が  $10^{-8}$  以下とした。また、安定判別では、モード I 法およびモード II 法により低次元化モデルを導出した上で、特性指数を固有値問題として求める方法を利用した。その際に必要な固有値問題の解法にはダブル QR 法を用いた。

**6.6.2 計算モデル** 計算モデルは、図 6.5 に示すような長さ 500 mm、直径 20 mm、内径 15mm の中空な一様円形断面はり要素 7 本によって構成される三次元樹状構造物

である。各はり要素は  $2^3$  個の基本要素に等分割（系の総自由度は 342）し、集中系としてモデル化した。屈曲部における各局所直交座標系の間関係は、オイラー角で次に示すとおりである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{主系の節点1} : (0^\circ, -90^\circ, 0^\circ) \\ \text{主系の節点2} : (90^\circ, -90^\circ, 0^\circ) \\ \text{分岐系の節点1} : (0^\circ, 90^\circ, 90^\circ) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6.91)$$

基礎支持要素としては、並進に関する 3 次の連続非線形性および断片線形性（ガタ）を考慮し、図示の節点に配置した。また励振力については節点 2 の  $Y_2$  方向および節点 3 の  $Y_3, Z_3$  方向に振幅 100 N の調和強制外力が同時に作用するものとした。なお、一様はり要素の物性値は次のように設定した。

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 7.86 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\ E = 206 \text{ [GPa]} \\ G = 79.2 \text{ [GPa]} \\ \kappa_y = \kappa_z = 0.886 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6.92)$$

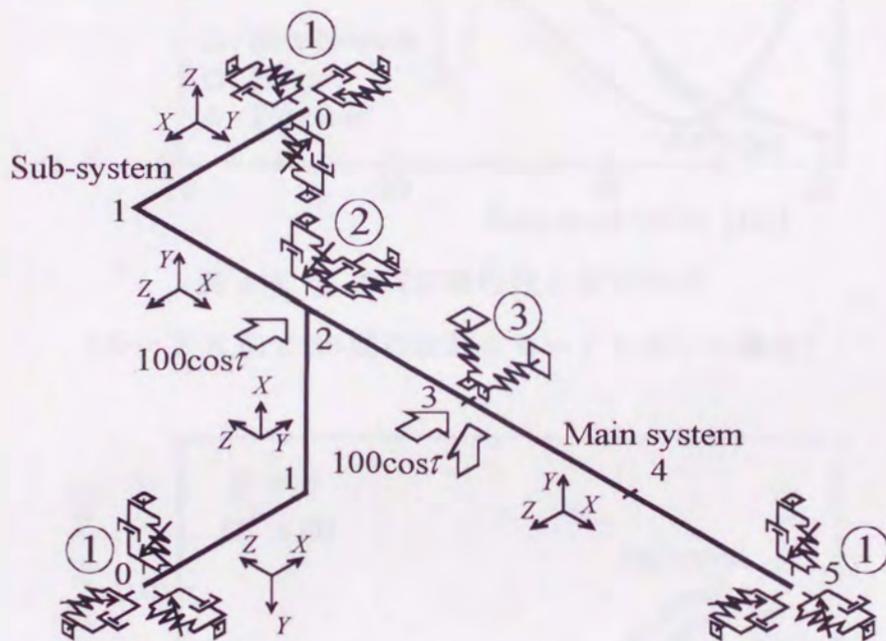
ここに、 $\rho$  は一様はり要素の密度である。また、断片線形基礎支持部に対しては、区分求積法<sup>(59)</sup>によってフーリエ係数の計算を行った。

**6.6.3 安定判別条件** 低次元化モデルの採用モード数に関しては、モード I 法およびモード II 法ともに、 $M^I = M^{II} = 20$  とした。その際、次のような固有モードの抽出法を併用した。まず、1 次から 45 次までのモード行列を用いて低次元化モデルを作成したのちに、その剛性行列  $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の中で、近似解の安定性に支配的な影響を及ぼすと考えられる 2 次のフーリエ成分  $\hat{K}^{2I}, \hat{K}^{2I}$  および  $\hat{K}^{2II}, \hat{K}^{2II}$  に着目して、各行列の  $i$  行  $j$  列の要素  $(\hat{K}^{2I})_{i,j}, (\hat{K}^{2I})_{i,j}$  の絶対値  $\sqrt{\{(\hat{K}^{2I})_{i,j}\}^2 + \{(\hat{K}^{2I})_{i,j}\}^2}$  および  $(\hat{K}^{2II})_{i,j}, (\hat{K}^{2II})_{i,j}$  の絶対値  $\sqrt{\{(\hat{K}^{2II})_{i,j}\}^2 + \{(\hat{K}^{2II})_{i,j}\}^2}$  が大きなものから順に対応する 20 個のモードを選択した。また、 $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の 18 次までのフーリエ係数を利用したので、最終的に特性指数を求めるための固有値問題の次元は 400 となる。なお、同一の計算条件で低次元化を行わない場合は 6840 次元の非対称行列に対する複素固有値問題を解かなければならないが、計算時間的にはもちろんのこと、計算精度の面からも実際の計算は極めて困難である。

**6.6.4 周波数応答および安定判別** 図 6.6~6.9 に主系の節点 3（ガタのある節点）の周波数応答を最大振幅により示す。それぞれ図 6.6 および図 6.8 は  $Y_3$  軸方向、

図 6.7 および図 6.9 は  $Z_3$  軸方向の周波数応答を示している。また、図 6.6 および図 6.7 はモード II 法による安定判別結果、図 6.8 および図 6.9 はモード I 法による安定判別結果であり、実線は安定解、破線は不安定解、○印はサドルノード分岐点、□印はホップ分岐点、△印はピッチフォーク分岐点を表す。また、 $y_3 = 0.005$  および  $z_3 = 0.005$  の位置に示す二点鎖線はガタによるばね特性の切り替え点 (5 mm) を表している。

それぞれの図には 1 次から 4 次の主共振が現れており、主共振ピークは漸硬形の非線形ばね特性の影響により右方向に傾斜している。また、ばね特性の切り替え点で応



$$\textcircled{1} : \begin{cases} \hat{F}_{x_p}^* = 15\dot{x}_p^* + 10^5 \{x_p^* + 10^5(x_p^*)^3\} & (p = 0, 5) \\ \hat{F}_{y_p}^* = 15\dot{y}_p^* + 10^5 \{y_p^* + 10^5(y_p^*)^3\} & (p = 0, 5) \\ \hat{F}_{z_p}^* = 15\dot{z}_p^* + 10^5 \{z_p^* + 10^5(z_p^*)^3\} & (p = 0, 5) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : \begin{cases} \hat{F}_{x_2}^* = 15\dot{x}_2^* + 10^4 \{x_2^* + 10^5(x_2^*)^3\} \\ \hat{F}_{y_2}^* = 15\dot{y}_2^* + 10^4 \{y_2^* + 10^5(y_2^*)^3\} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} : \begin{cases} \hat{F}_{y_3}^* = 15\dot{y}_3^* + k_{Fy} y_3^* \\ \hat{F}_{z_3}^* = 15\dot{z}_3^* + k_{Fz} z_3^* \end{cases}$$

$$k_{Fy} = \begin{cases} 10^3; & |y_3^*| < 5 \text{ mm} \\ 10^5; & |y_3^*| \geq 5 \text{ mm} \end{cases}, \quad k_{Fz} = \begin{cases} 10^3; & |z_3^*| < 5 \text{ mm} \\ 10^5; & |z_3^*| \geq 5 \text{ mm} \end{cases}$$

図 6.5 三次元樹状構造物の計算モデル

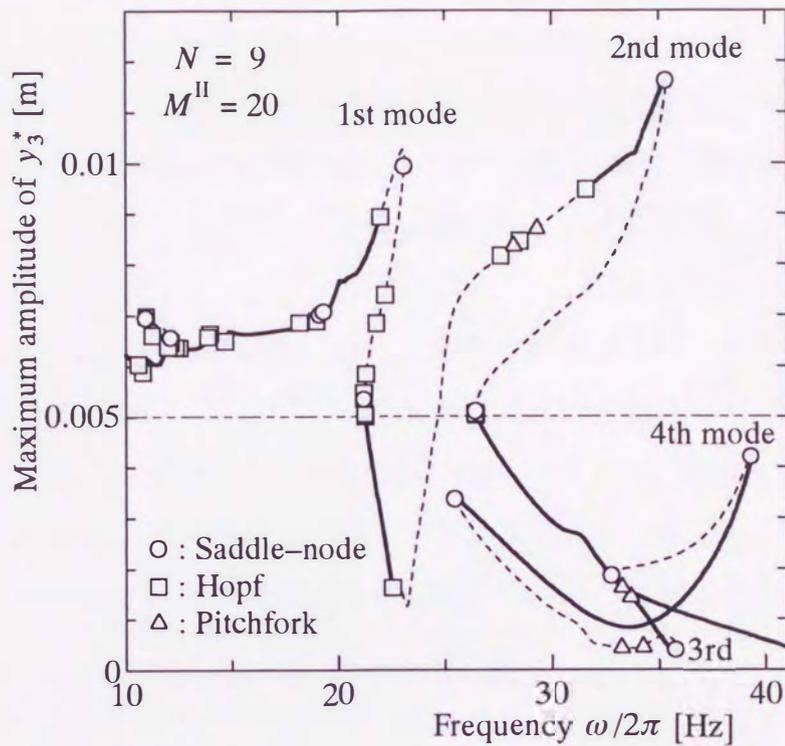


図 6.6  $y_3^*$  の周波数特性と安定判別

(モード II 法で 20 個の定数項モードを用いた場合)

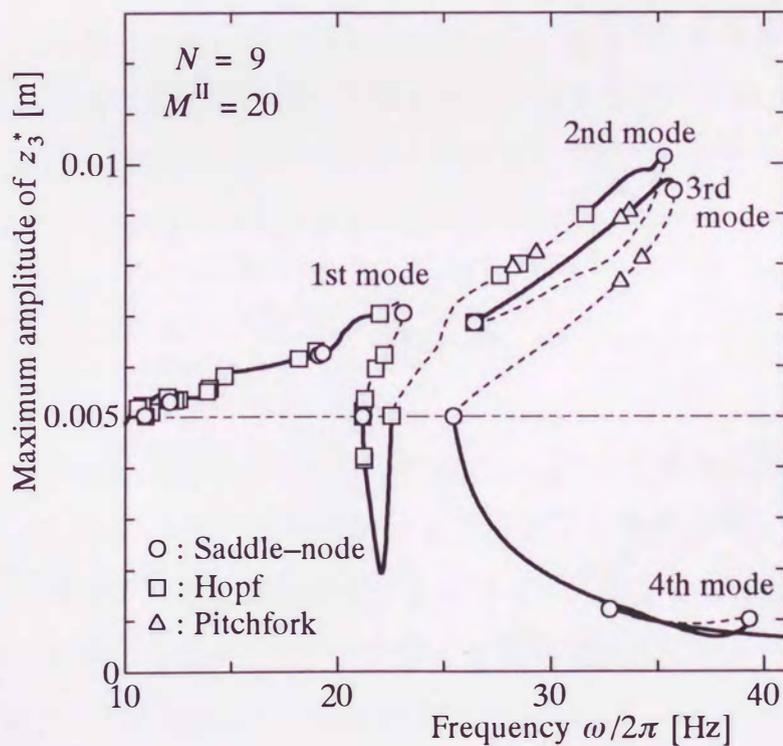


図 6.7  $z_3^*$  の周波数特性と安定判別

(モード II 法で 20 個の定数項モードを用いた場合)

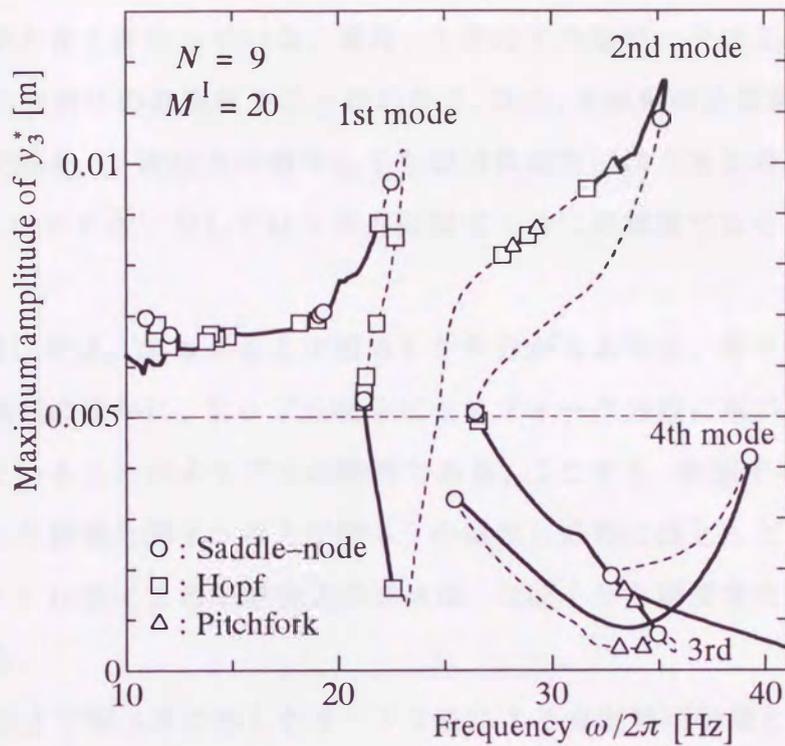


図 6.8  $y_3$  の周波数特性と安定判別

(モード I 法で 20 個の線形項モードを用いた場合)

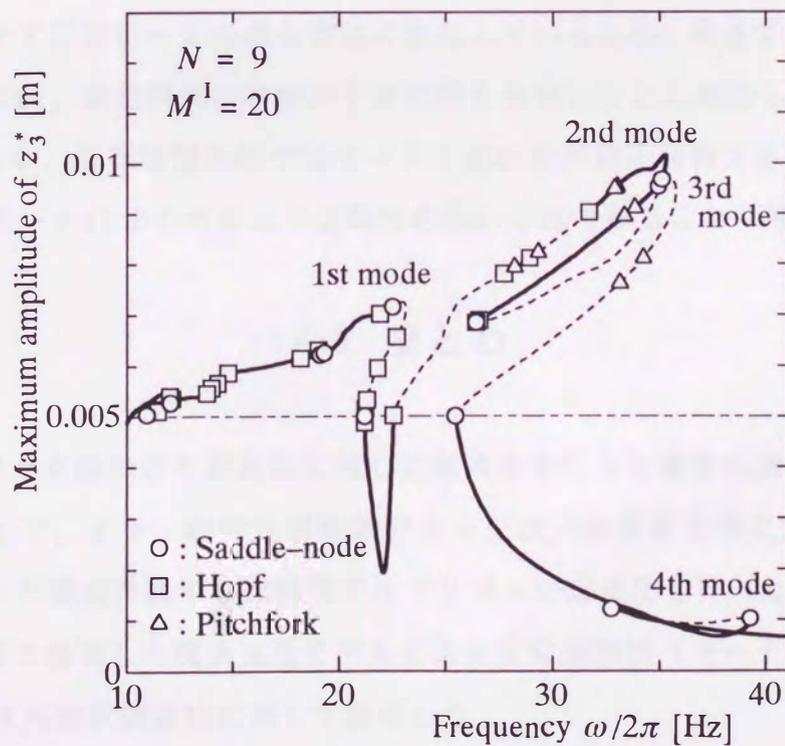


図 6.9  $z_3$  の周波数特性と安定判別

(モード I 法で 20 個の線形項モードを用いた場合)

答曲線の勾配が大きく変化している。また、3次の主共振ピークは $Z_3$ 方向、4次の主共振ピークは $Y_3$ 方向にのみ現れることがわかる。なお、近似解の計算精度に関しては、仮定する最高次数を11次以上に増やしても周波数応答には大きな変化が認められなかったため、このモデルに対しては9次近似解で十分に高精度であるとみなすことができる。

安定判別に関しては、図6.6および図6.7から分かるように、サドルノード分岐に基づく不安定領域のほかに、ホップ分岐やピッチフォーク分岐に基づく不安定領域が数多く存在していることが本モデルの特徴である。ここでも、抽出するモード数を21個以上に増やした結果と図6.6および図6.7の結果との間にほとんど差が見られなかったため、モードII法による安定判別の結果は、ほぼ十分な精度を有しているとみなすことができる。

一方、図6.8および図6.9に示したモードI法による安定判別結果と図6.6および図6.7とを比較すると、概ね一致する結果が得られているが、応答曲線の垂直接線部に現れるはずのサドルノード分岐点の位置や、ホップ分岐点の位置に若干の差違が見られる。これは、第3章でも指摘したように、モードI法では近似解の安定性を解の振動形態を考慮せずに常に一定の部分空間に近似しているため、考慮するモード数が十分でない場合には、安定判別の精度が十分に得られないことに起因している。

このことから、計算時間の面ではモードI法の方が若干有利であるものの、計算精度の面ではモードII法の方がより信頼性の高い手法であることが確認できる。

## 6.7 まとめ

(1) 第2章で直線状はり構造物に対して定式化を行った増分伝達剛性係数法の適用対象を拡張して、より一般的な構造物である三次元樹状構造物に対して適用し、縦・曲げ・ねじり連成非線形振動解析アルゴリズムの定式化を行った。

(2) 第3章で提案した低次元化モデルによる安定判別法（モードI法およびモードII法）を三次元樹状構造物に対して適用した。

(3) 具体的な数値計算により、上記の手法の有効性を確認した。その結果、従来の振動解析手法では困難であった大規模な自由度を持つ三次元樹状構造物に対する

非線形振動解析，さらに定常周期解の安定性が非常に高速かつ高精度に計算されることが確認された．とくにモード II 法の計算精度の優位性が示された．また同時に，増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法ともに，ガタや連続非線形性もまったく問題なく取り扱うことができることが確認された．

## 第7章 結 論

本論文では、大規模非線形系の定常周期振動解を高速かつ任意の精度で計算し得る増分伝達剛性係数法を提案し、最も基本的な直線状はり構造物およびより一般的な三次元樹状構造物に対して解析アルゴリズムの定式化を行った。また、従来は非常に困難であった大規模非線形系の定常周期解の安定判別法として、低次元化モデルによる安定判別法を提案した。さらに、種々の数値計算結果により、これらの手法の有効性を確認した。以下、その要点を簡単にまとめる。

第1章では、多自由度非線形系の定常周期解の解析法およびその安定判別法に対する従来の研究について概観したのち、本研究の意義と目的について述べた。

第2章では、大規模非線形系の定常周期解の高速かつ高精度の解析法として、調和バランス法と伝達剛性係数法を増分法概念を介して結合した増分伝達剛性係数法を提案し、最も基本的な直線状はり構造物の非線形強制振動に対する解析アルゴリズムの詳細を示した。増分伝達剛性係数法は、近似項数の増加にともなう厳密解への収束性が保証された調和バランス法の長所を保持しつつ、その逐次近似計算過程から解析対象の線形要素内部の自由度を計算精度を損なうことなく完全に消去できる。これにより、とくに機械系などに多く見られるような強い非線形要素が局所的に存在する構造物に対しては、従来の増分調和バランス法や増分伝達影響係数法などと比べて、計算能率を劇的に向上させることを可能とした。また、非線形要素の存在する節点のみの自由度に縮小された逐次近似計算式に対して、漸化形式による能率的な計算法を導入することにより、さらに計算能率を向上させた。本手法の計算能率を定量的に把握するために、増分調和バランス法、増分伝達影響係数法および増分伝達剛性係数法の3種類の非線形振動解析手法の間で、その主要部である逐次近似計算過程の反復計算1回あたりに必要な計算量を理論的に比較し、増分伝達剛性係数法の計算能率向上の効果を明らかにした。さらに、実際の数値計算により、増分伝達影響係数法と本手法の間で計算速度の比を求め、本手法の優位性を実証した。

第3章では、従来は数値解析上の問題により不可能であると考えられていた大規模

非線形系の定常周期解の安定判別法として、変分方程式の解析にモード解析の概念を援用した低次元化モデルによる安定判別法を提案し、大規模系の定常周期解の安定性を高速・高精度に判別することを可能とした。その際、2種類の実モードを利用した低次元化法（モード I 法，モード II 法），および 1 種類の複素モードを利用した低次元化法（モード III 法）の計 3 種類の低次元化法を提案した。モード II 法およびモード III 法は定常周期解の影響を考慮した低次元化モデルを構成するので、一般に解析の精度はモード I 法よりも有利である。また、各モード法によっていったん低次元化された変分方程式に対して適切な変数変換を施すことにより、近似解の安定性に与える影響が小さなモードおよびフーリエ係数を合理的に判別し、それらを除去することによって得られる必要最小限の低次元化モデルから、元の大規模系の近似解の安定性を高精度に判別する方法を示した。

第 4 章では、まず、分布外力が作用する場合の直線状はり構造物の線形強制振動解析に伝達剛性係数法を適用し、その解析アルゴリズムを示した。増分伝達剛性係数法の理論的基盤の一つでもある伝達剛性係数法は、大次元連立 1 次方程式の効率的な解法とみなすことができる。一方、大規模系の振動解析に適した固有値解析法の一つとして逆反復法があるが、その計算の主要部は大次元連立 1 次方程式の反復計算に帰着される。また、その計算は分布外力が作用する線形系の強制振動解析と実質的に等価である。そこで、先に定式化した分布外力が作用する場合の伝達剛性係数法を逆反復法の反復計算過程に適用し、その計算能率を飛躍的に向上させることを試みた。さらに、これに基づいて、実固有値解析および複素固有値解析に対する逆反復法のアルゴリズムの定式化を行った。これらの手法は、第 3 章で提案した低次元化モデルによる安定判別法において、低次元化モデル作成のためのモード行列の導出に利用することができるので、安定判別の全体的な計算能率を向上させることが可能となる。

第 5 章では、具体的な計算モデルに対して数値計算を行うことにより、第 2 章～第 4 章で定式化した手法の有効性を確認した。まず、増分伝達剛性係数法については、大規模非線形系の定常周期解を、近似する項数の設定により任意の精度で解析し得ることが確認された。また、連続非線形特性はもちろんのこと、ガタを含む断片線形特性についても区分積分法を用いたフーリエ係数の高精度計算法を利用することによって、まったく問題なく高精度に解析できることが確認された。安定判別法について

は、まず、もっとも高精度であることが期待されるモード III 法による安定判別結果と低次元化を行わない場合の安定判別結果とを比較することによって、低次元化モデルによる安定判別法の方法論自体の妥当性を確認した。さらに、3種のモード法による計算結果を比較することにより、モード III 法とモード II 法との間で安定判別の解析精度にほとんど差がないこと、モード II 法とモード I 法との間ではモード II 法の方が一般的に高精度な安定判別が期待されることを確認した。ただし、必要な計算量は、モード I 法、モード II 法、モード III 法の順に増大する。また、低次元化に用いるモード数を変化させた解析を実施することにより、種々のタイプの不安定領域に及ぼす各モードの影響の大きさを明らかにできることを示した。

第 6 章では、第 2 章および第 3 章で定式化した増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法の適用対象を、より一般的な三次元樹状構造物へ拡張した。その際、増分伝達剛性係数法による定常周期解の計算過程では、分岐系に対して計算された動的剛性係数行列および増分力補正ベクトルを、主系の伝達計算過程において付加することによって、分岐系もまったく問題なく取扱うことが可能であることを示した。低次元化モデルによる安定判別法については、計算能率および計算精度の観点から使用頻度が高いと考えられるモード I 法およびモード II 法について定式化を行った。また、具体的なモデルに対する数値計算によって、増分伝達合成係数法および低次元化モデルによる安定判別法の有効性を確認した。

増分伝達剛性係数法の今後の課題としては、本論文で取扱った直線状はり構造物や三次元樹状構造物以外の工学的に重要な種々の構造物、たとえばトラス構造物、板状構造物およびシェル状構造物などへも適用対象を拡張することが挙げられる。また、取扱う非線形特性も、連続非線形性および断片線形性にとどまらず、クーロン摩擦やヒステリシス特性などへも拡張することが期待される。さらに、増分伝達剛性係数法の計算能率および計算速度の両面にわたる数値解析上の優位性を生かして、過渡応答解析、振動制御、系パラメータ同定法などのように、工学上重要な他の分野に対する拡張も目指したいと考えている。

## 謝 辞

本論文を終えるにあたり、本研究の遂行およびまとめに至るまで懇切丁寧な御指導、御鞭撻を賜りました近藤孝広教授、ならびに本論文を作成するにあたり有益な御教示を頂きました末岡淳男教授、金光陽一教授に厚く感謝申し上げます。

また、本研究の遂行に際して多くの御助力、御意見を頂きました松崎健一郎助教授、貴重な御助言、有益な討論を頂きました久留米工業高等専門学校綾部隆助教授に厚く感謝致します。さらに、様々な面で御助力を頂いた盆子原助手、宗和助手をはじめとする力学研究グループの教職員および歴代の修士、卒業研究生の方々に深く感謝申し上げます。

最後に、博士課程まで進学させて頂き、様々な面で私を支えてくれた両親に感謝致します。

## 参 考 文 献

- (1) Hayashi, C., *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, (1964), McGraw-Hill.
- (2) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons.
- (3) Kahn, P.B., *Nonlinear Dynamics*, (1998), John Wiley & Sons.
- (4) 近藤・矢ヶ崎, 非線形振動とカオスに関する二, 三の話題, 機論, **61**-583, C(1995), 746.
- (5) 藪野, 多重尺度法に対する数式処理システムの応用, 機論, **57**-542, C(1991), 3183.
- (6) Urabe, M., Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **20**(1965), 120.
- (7) 占部, 非線形振動の解析法 (その2), 電子通信学会誌, **56**-9(1973), 1266.
- (8) 渡辺・黒田, ガレルキン法による多自由度非線形ばね質量系の自由振動の周期解の解析 (第1報, ガレルキン近似解の存在性), 機論, **44**-387(1978), 3711.
- (9) 渡辺・黒田, ガレルキン法による多自由度非線形ばね質量系の自由振動の周期解の解析 (第2報, ガレルキン近似解の近傍における厳密な周期解の存在性), 機論, **44**-387(1978), 3718.
- (10) Urabe, M., Convergence of Numerical Iteration in Solution of Equations, *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A*, **19**(1956), 479.
- (11) 日本数学学会編集, 数学辞典第3版, (1985), 1174, 岩波書店.
- (12) 近藤・田村・末岡, 非線形系の定常振動の高次近似解法と安定判別法について, 機論, **51**-466, C(1985), 1180.
- (13) Hsu, C.S., Impulsive Parametric Excitation: Theory, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **39**(1972), 551.
- (14) Hsu, C.S., Applications of the Theory of Impulsive Parametric Excitation and New Treatments of General Parametric Excitation Problems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **32**(1965), 373.
- (15) 近藤・末岡・井上, 多自由度非線形振動系における定常周期解の安定判別法について, 福岡工業大学エレクトロニクス研究所所報, **10**, (1993), 7.
- (16) Klotter, K., Steady State Oscillations in Nonlinear Multiloop Circuits, *Trans. I.R.E.*, **CT1**-2(1954), 13.

- (17) Huang, T.C., Harmonic Oscillations of Nonlinear Two-Degree-of-Freedom Systems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **22**(1955), 107.
- (18) Sethne, P.R., Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Ser. E, **27-1**(1960), 187.
- (19) Rosenberg, R.M. and Atkinson, C.P., On the Natural Modes and Their Stability in Nonlinear Two-Degree-of-Freedom Systems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **22**(1959), 377.
- (20) Iwan, W.D., The Steady-State Response of a Two-Degree-of-Freedom Bilinear Hysteretic System, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **32**(1965), 151.
- (21) 榎木・四十宮, 任意の非線形復元力特性を有する一要素を含む自由度 2 の振動系の強制振動に対する図式解法, 機論, **19-83**(1953), 102.
- (22) Dooren, R.V., Combination Tones of Summed Type in a Non-Linear Damped Vibratory System with Two Degrees of Freedom, Int. J. Non-Linear Mech., **6**(1971), 237.
- (23) 山本・安田, 二自由度非線形振動系の内部共振について (固有振動数比が 1:2 のときの低速の共振点付近の強制振動), 機論, **42-358**(1976), 1692.
- (24) 山本・安田・長坂, 二自由度非線形振動系の内部共振について (固有振動数比が 1:2 のときの高速の共振点付近の強制振動), 機論, **43-365**(1977), 105.
- (25) Crespo M.R.M., The Effect of Spin on the Non-Linear Resonant Motions of a Dynamical System, J Sound Vib., **52-2**(1977), 201.
- (26) Tousi, S. and Bajaj A.K., Period-Doubling Bifurcations and Modulated Motions in Forced Mechanical Systems, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **52**(1985), 466.
- (27) Natsiavas, S., Steady State Oscillations and Stability of Non-Linear Dynamic Vibration Absorbers, J Sound Vib., **156-2**(1992), 227.
- (28) Natsiavas, S. and Hagler L.B., Modal Interaction and Bifurcation in Two Degree of Freedom Duffing Oscillators, Nonlinear Dynamics, **2**(1991), 405.
- (29) Asrar, W., Two-Degree-of-Freedom Systems with Quadratic Non-Linearity Subjected to Parametric and Self Excitation, J Sound Vib., **150-3**(1991), 447.
- (30) Vakakis, A.F., Fundamental and Subharmonic Resonances in a System with a '1-1' Internal Resonance, Nonlinear Dynamics, **3**(1992), 123.
- (31) Nayfeh, T.A., Asrar, W. and Nayfeh, A.H., Three Mode Interactions in Harmonically Excited

- Systems with Quadratic Nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, **3**(1992), 385.
- (32) Ren, Y. and Beards, C.F., A New Receptance-Based Perturbative Multi-Harmonic Balance Method for the Calculation of the Steady State Response of Non-Linear Systems, *J Sound Vib.*, **172-5** (1994), 593.
- (33) Kim, Y.B. and Noah, S.T., Response and Bifurcation Analysis of a MODF Rotor System with a Strong Nonlinearity, *Nonlinear Dynamics*, **2**(1991), 215.
- (34) Ribeiro, P. and Petyt, M., Geometrical Non-Linear, Steady State, Forced, Periodic Vibration of Plates Part II: Stability Study and Analysis of Multi-modal Response, *J. Sound Vib.*, **226-5**(1999), 985.
- (35) Shaw, S.W. and Pierre, C., Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems, *J. Sound Vib.*, **164-1** (1993), 85.
- (36) Zu, J.W. and Ji, Z.Y., Steady-State Response of Continuous Nonlinear Rotor Bearing Systems Using Analytical Approach, *Trans. ASME, J. Eng. Gas Turbines Power*, **120**(1998), 751.
- (37) Narayanan, S., and Sekar, P., A Frequency Domain Based Numeric-analytical Method for Non-Linear Dynamical Systems, *J. Sound Vib.*, **211-3**(1998), 409.
- (38) 田村・近藤・末岡, Duffing 方程式の高次近似解 (ハードスプリング系の奇数次高調波共振), *機論*, **51-467**, C(1985), 1738.
- (39) 田村・近藤・末岡, Duffing 方程式の高次近似解 (ソフトスプリング系の主共振), *機論*, **52-473**, C(1986), 40.
- (40) 末岡・田村・近藤・藤本・大崎, ローラーチェーンの非線形強制パラメトリック共振, *機論*, **51-465**, C(1985), 912.
- (41) 末岡・近藤・田村・古川, ローラーチェーンの非線形強制パラメトリック共振 (第2報, 1/3次分数調波・パラメトリック結合共振の解析), *機論*, **52-480**, C(1986), 2044.
- (42) 末岡・近藤・田村・古川, ローラーチェーンの非線形強制パラメトリック共振 (第3報, 1/3次分数調波・パラメトリック結合共振の実験—その1), *機論*, **52-480**, C(1986), 2053.
- (43) 末岡・近藤・田村・古川, ローラーチェーンの非線形強制パラメトリック共振 (第3報, 1/3次分数調波・パラメトリック結合共振の実験—その2), *機論*, **52-483**, C(1986), 2782.
- (44) 富沢・松倉・宇佐見, 非線形軸受で支持された回転軸の振動解析, *機論*, **45-398**, C(1979), 1073.

- (45) 山内, 弾性ロータの非線形振動 (第 1 報, 新数値解析手法の開発), 機論, **49**-446, C(1983), 1862.
- (46) Cheung, Y.K. and Lau, S.L., Incremental Time-Space Finite Strip Method for Non-Linear Structural Vibrations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**(1982), 239.
- (47) Lau, S.L. and Cheung, Y.K., Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **48**(1981), 959.
- (48) Cheung, Y.K., Chen, S.H. and Lau, S.L., Application of the Incremental Harmonic Balance Method to Cubic Non-Linearity Systems, *J. Sound Vib.*, **140**-2(1990), 273.
- (49) Pierre, C. and Dowell, E.H., A Study of Dynamic Instability of Plates by an Extended Incremental Harmonic Balance Method, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 693.
- (50) Perre, C., Ferri, A.A. and Dowell, E.H., Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 959.
- (51) 小林・斉藤・山内, 部分構造合成法を用いた多自由度回転軸形の非線形定常振動解析, 機論, 57-533, C(1991), 1.
- (52) Nataraj, C. and Nelson, H.D., Periodic Solutions in Rotor Dynamic systems with Nonlinear Supports: A General Approach, *Trans. ASME, J. Vib., Acoust., Stress, Reliability in Design*, **111**(1989), 187.
- (53) Shiau, T.N. and Jean, A.N., Prediction of Periodic Response of Flexible Mechanical Systems with Nonlinear Characteristics, *Trans. ASME, J. Vib., Acoust.*, **112**(1990), 501.
- (54) Dowell, E.H., The Behavior of a Linear Damped Modal System with a Non-Linear Spring-Mass-Dry Friction Damper System Attached, *J. Sound Vib.*, **89**-1(1983), 65.
- (55) Kim, Y.B., Noah, S.T. and Choi, Y.S. Periodic Response of Multi-Disk Rotors with Bearing Clearances, *J. Sound Vib.*, **144**-3(1991), 381.
- (56) Kim, Y.B., Noah, S.T., Steady-State Analysis of a Nonlinear Rotor-Housing System, *Trans. ASME, J. Eng. Gas Turbines Power*, **113**(1991), 550.
- (57) 安田・鳥居・笠原, 非線形振動解析のための増分伝達マトリックス法の提案, 機論, **56**-525, C(1990), 1187.
- (58) 近藤・末岡・井上, 直列形非線形構造物の強制振動解析 (第 1 報, 増分伝達影響係数法

- の提案), 機論, 58-548, C(1992), 995.
- (59) 近藤・末岡・田中・井上・劉・綾部, 直列形非線形構造物の強制振動解析 (第2報, 断片線形系の取扱いと数値計算結果), 機論, 58-549, C(1992), 1343.
- (60) 近藤・末岡・井上, 直列形非線形構造物の強制振動解析 (偏角原理に基づく安定判別法の提案), 機論, 60-571, C(1994), 735.
- (61) 近藤・井上・末岡, 増分伝達影響係数法による直線状はり構造物の非線形強制振動解析, 福岡工業大学エレクトロニクス研究所所報, 11, (1994), 11.
- (62) Hill, G. W., On the Part of the Lunar Perigee Which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon, Acta Math., 8(1886), 1.
- (63) Whittaker, E.T. and Watson, G.N., A Course of Modern Analysis, 4th ed., (1927), 404, Cambridge at the University Press.
- (64) McLachlan, N.W., Theory and Application of Mathieu Functions, (1964), Dover Publications.
- (65) ボロチン, 弾性系の動的安定 (近藤・田中 訳) (1972), 178, コロナ社.
- (66) 近藤・綾部・末岡, 部分構造合成法を援用した伝達剛性係数法の提案, 機論, 62-596, C(1996), 1277.
- (67) 戸川, UNIX ワークステーションによる科学技術計算ハンドブック, (1992), 267, サイエンス社.

## 付録 1 同一な分系同士の直列結合則

付録 1 では、第 2 章 2・2・3 項に示した直列結合則の特長(3)について、補足的な説明をする。

対称で同一な分系 A と分系 B の  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列  $S_A^{ka}, S_B^{ka}$ ,  $s_A^{ka}, s_B^{ka}$  および  $S_A^{kc}, S_B^{kc}, s_A^{kc}, s_B^{kc}$  が、それぞれ次のように表されているとする。ただし、行列要素の記号は本文中のものとは無関係である。

$$\left. \begin{aligned} S_A^{ka} = S_B^{ka} &= \begin{bmatrix} A & \Gamma \\ \Gamma & B \end{bmatrix}, & s_A^{ka} = s_B^{ka} &= \begin{bmatrix} -A & \Gamma \\ \Gamma & -B \end{bmatrix} \\ S_A^{kc} = S_B^{kc} &= \begin{bmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}, & s_A^{kc} = s_B^{kc} &= \begin{bmatrix} -\alpha & -\gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-1)$$

このとき、式(2.48)の結合則により、結合後の分系 C の自己および相互動的剛性係数行列  $S_C^{ka}$  および  $S_C^{kc}$  はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_C^{ka} &= \begin{bmatrix} A - (A'' + \Gamma'') & \Gamma - \gamma(A' - B') \\ \Gamma - \gamma(A' - B') & B - (B'' + \Gamma') \end{bmatrix} \\ S_C^{kc} &= - \begin{bmatrix} A'' - \Gamma'' & -\gamma(A' + B') \\ \gamma(A' + B') & B'' - \Gamma' \end{bmatrix} \\ A' &= \frac{\alpha}{2A}, \quad B' = \frac{\beta}{2B}, \quad \Gamma' = \frac{\gamma^2}{2A} \\ A'' &= \alpha A', \quad B'' = \beta B', \quad \Gamma'' = \frac{\gamma^2}{2B} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-2)$$

このように、対称で同一な分系同士を結合したときの自己および相互動的剛性係数行列  $S_C^{ka}$  および  $S_C^{kc}$  の要素中には共通項がかない多いので、これらの要素のうちいずれか一つを計算すればよく、直列結合則の計算を能率的に実行することができる。

## 付録2 四種類の振動要素に分離した直列結合則

付録2では、第6章6・2・3項に示した直列結合則の特長について補足的な説明をする。

一樣はり要素内の分系Aと分系Bのk次の自己および相互動的剛性係数行列  $S_A^{ka}, S_B^{ka}, s_A^{ka}, s_B^{ka}$  および  $S_A^{kc}, S_B^{kc}, s_A^{kc}, s_B^{kc}$  が、それぞれ次のように表されているとする。

$$\left. \begin{aligned} S_A^{ka} &= \text{Diag}[(S_x^{ka}, S_\theta^{ka}, S_z^{ka}, S_y^{ka})_A] \\ S_B^{ka} &= \text{Diag}[(S_x^{ka}, S_\theta^{ka}, S_z^{ka}, S_y^{ka})_B] \\ s_A^{ka} &= \text{Diag}[(s_x^{ka}, s_\theta^{ka}, s_z^{ka}, s_y^{ka})_A] \\ s_B^{ka} &= \text{Diag}[(s_x^{ka}, s_\theta^{ka}, s_z^{ka}, s_y^{ka})_B] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_A^{kc} &= \text{Diag}[(S_x^{kc}, S_\theta^{kc}, S_z^{kc}, S_y^{kc})_A] \\ S_B^{kc} &= \text{Diag}[(S_x^{kc}, S_\theta^{kc}, S_z^{kc}, S_y^{kc})_B] \\ s_A^{kc} &= \text{Diag}[(s_x^{kc}, s_\theta^{kc}, s_z^{kc}, s_y^{kc})_A] \\ s_B^{kc} &= \text{Diag}[(s_x^{kc}, s_\theta^{kc}, s_z^{kc}, s_y^{kc})_B] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-2)$$

このとき、式(2.48)の結合則により、結合後の分系Cの自己および相互動的剛性係数行列  $S_C^{ka}$  および  $S_C^{kc}$  が得られるが、この結合過程は、以下のような縦・ねじり・二平面内の曲げの四種類の要素に分離して計算することが可能である。

$$\left. \begin{aligned} S_C^{ka} &= \text{Diag}[(S_x^{ka}, S_\theta^{ka}, S_z^{ka}, S_y^{ka})_C] \\ S_C^{kc} &= \text{Diag}[(S_x^{kc}, S_\theta^{kc}, S_z^{kc}, S_y^{kc})_C] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-3)$$

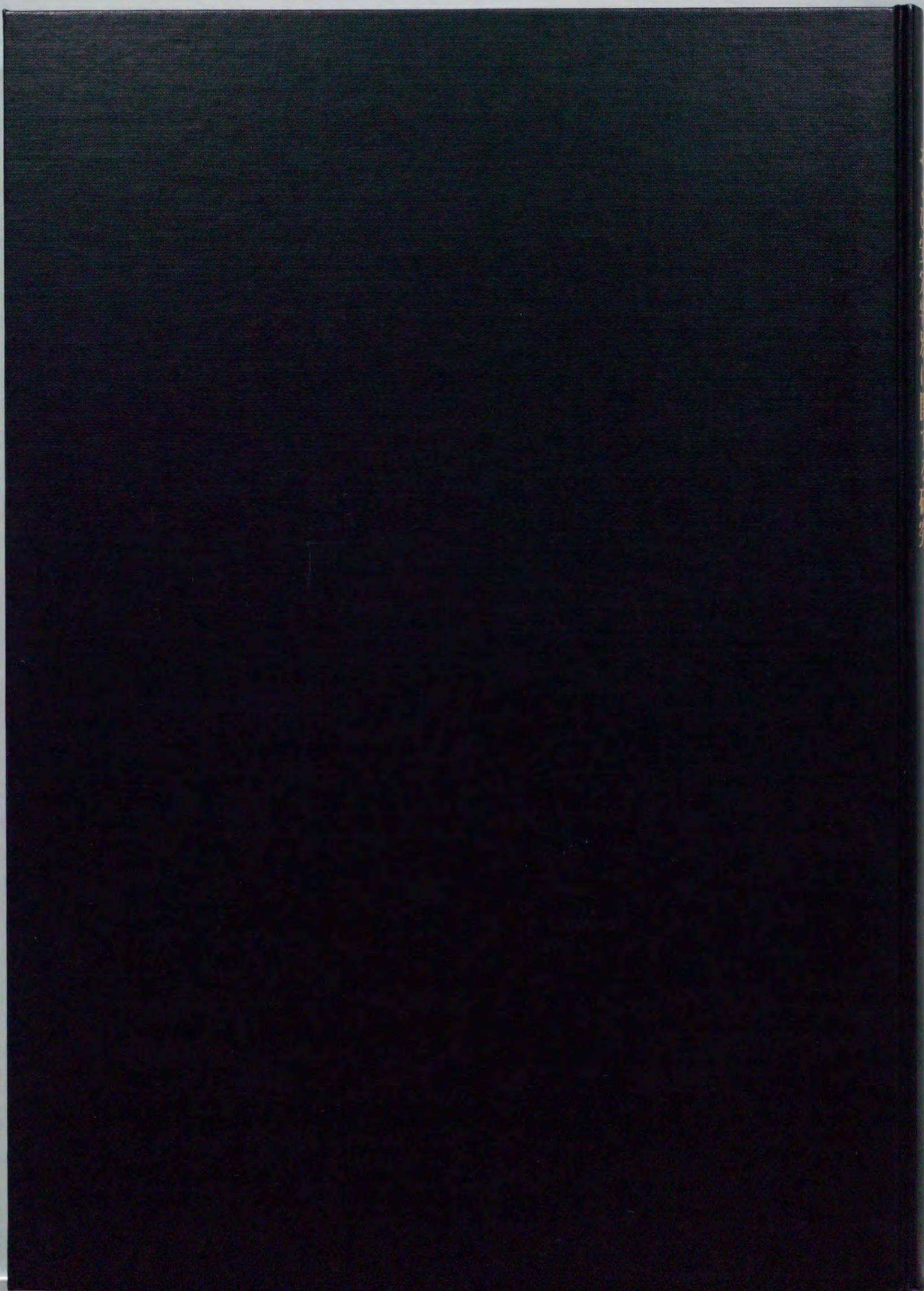
$$\left. \begin{aligned} S_{xC}^{ka} &= S_{xB}^{ka} + \frac{S_{xB}^{kc} s_{xB}^{kc}}{S_{xA}^{ka} - s_{xB}^{ka}} \\ S_{\theta C}^{ka} &= S_{\theta B}^{ka} + \frac{S_{\theta B}^{kc} s_{\theta B}^{kc}}{S_{\theta A}^{ka} - s_{\theta B}^{ka}} \\ S_{yC}^{ka} &= S_{yB}^{ka} + S_{yB}^{kc} T_y^k s_{yB}^{kc} \\ S_{zC}^{ka} &= S_{zB}^{ka} + S_{zB}^{kc} T_z^k s_{zB}^{kc} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-4)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{xC}^{kc} &= -\frac{S_{xB}^{kc} S_{xA}^{kc}}{S_{xA}^{ka} - s_{xB}^{ka}} \\ S_{\theta C}^{kc} &= -\frac{S_{\theta B}^{kc} S_{\theta A}^{kc}}{S_{\theta A}^{ka} - s_{\theta B}^{ka}} \\ S_{yC}^{kc} &= -S_{yB}^{kc} T_y^k S_{yA}^{kc} \\ S_{zC}^{kc} &= -S_{zB}^{kc} T_z^k S_{zA}^{kc} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-5)$$

$$\left. \begin{aligned} T_y^k &= (S_{yA}^{ka} - s_{yA}^{ka})^{-1} \\ T_z^k &= (S_{zA}^{ka} - s_{zA}^{ka})^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-6)$$

以上に示した，式(2-4)～式(2-6)の小さな次元の計算によって，能率的に再結合計算を実行することができる．この結合計算においても，2・2・3項および付録1に示した特長が成立するので，それらを利用すれば，さらに能率的な結合計算を行うことができる．



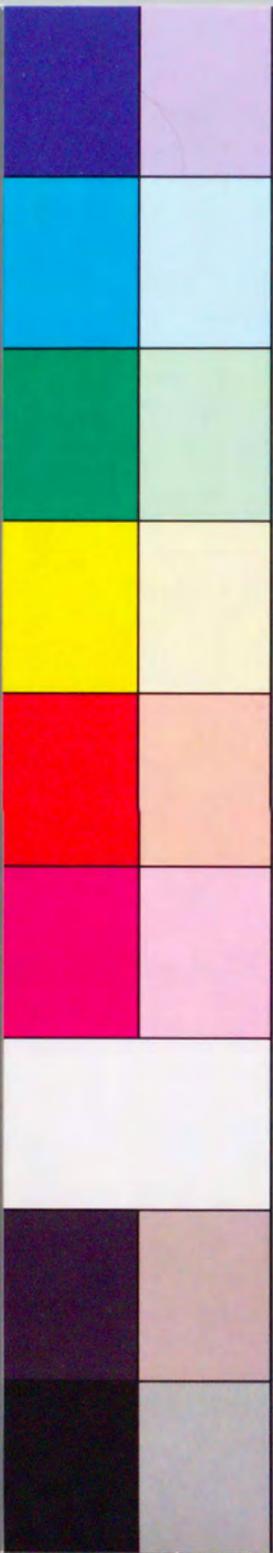


Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

