

## 大規模構造物の非線形強制振動解析および安定判別に関する研究

佐々木, 卓実  
九州大学工学機械科学知能機械

<https://doi.org/10.11501/3180310>

---

出版情報：九州大学, 2000, 博士（工学）, 課程博士  
バージョン：  
権利関係：



大規模構造物の非線形強制振動解析  
および安定判別に関する研究

佐々木 卓実

①

大規模構造物の非線形強制振動解析および安定判別に関する研究

2001年1月

九州大学大学院工学研究科  
知能機械工学専攻

佐々木卓実

## 目 次

第1章 序 論	1
1.1 多自由度非線形振動解析に関する従来の研究と問題点	2
1.2 本研究の目的	8
第2章 非線形支持された直線状はり構造物の強制振動に対する 増分伝達剛性係数法の提案	11
2.1 解析モデルと非線形基礎支持要素の取扱い	11
2.1.1 解析モデル	11
2.1.2 節点 $j$ の運動方程式	13
2.1.3 運動方程式の増分形表示	13
2.1.4 近似解の仮定	14
2.1.5 力および力のモーメント	15
2.1.6 奇数次解の取扱い	17
2.1.7 分数調波振動の解析	18
2.1.8 調和バランス法の適用	18
2.2 一様はり要素内部自由度の能率的な消去	19
2.2.1 一様はり要素のモデル化	19
2.2.2 自己および相互動的剛性係数行列	20
2.2.3 直列結合則	22
2.2.4 一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係	24
2.3 増分伝達剛性係数法の定式化	25
2.3.1 増分変位振幅ベクトルの計算式	25
2.3.2 漸化形式による高能率計算	26
2.3.3 格間格点伝達則の導出	26
2.3.4 増分変位振幅ベクトルの伝達計算	27
2.3.5 一様はり要素の内部節点の取扱い	27
2.3.6 定数項の取扱い	28

2.4	計算手順のまとめ	28
2.5	必要な計算量（計算能率）に関する検討	29
2.5.1	計算量の理論的検討	29
2.5.2	数値計算結果	31
2.6	まとめ	33
第3章	低次元化モデルによる安定判別法	34
3.1	解析モデルと運動方程式	34
3.1.1	解析モデル	34
3.1.2	節点 $j$ の運動方程式	35
3.2	安定判別に関する基礎的事項と問題点	35
3.3	実モードを利用した次元の縮小法	38
3.3.1	実モードを利用した次元の縮小法の基本的な考え方	38
3.3.2	線形項モードを用いる方法（モード I 法）	39
3.3.3	定数項モードを用いる方法（モード II 法）	41
3.3.4	実モードの適切な抽出法	43
3.3.5	低次元化モデルに対する安定判別	44
3.4	複素モードを利用した次元の縮小法	46
3.4.1	複素モードを利用した次元の縮小法の基本的な考え方	46
3.4.2	複素モードを用いる方法（モード III 法）	47
3.4.3	複素モードの適切な抽出法	49
3.4.4	変分方程式の実数化	50
3.4.5	低次元化モデルに対する安定判別	51
3.5	まとめ	51
第4章	逆反復法に対する伝達剛性係数法の適用	52
4.1	伝達剛性係数法による分布外力が作用する場合の 直線状はり構造物の線形強制振動解析	53
4.1.1	解析モデルおよび基本要素	53
4.1.2	自己および相互動的剛性係数行列	54
4.1.3	直列結合則	56

4.1.4	一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係	57
4.1.5	動的剛性係数行列および力補正ベクトルの導入	58
4.1.6	変位振幅ベクトルの伝達計算	59
4.2	逆反復法の基本原理と計算手順	59
4.2.1	計算手続き	60
4.2.2	収束のメカニズム	60
4.2.3	原点移動による収束率の向上	61
4.2.4	初期ベクトルの一設定法	62
4.3	不減衰系の実固有値解析と伝達剛性係数法の適用	63
4.3.1	不減衰系の実固有値解析	63
4.3.2	伝達剛性係数法の適用	64
4.3.3	計算手順のまとめ	65
4.4	減衰系の複素固有値解析と伝達剛性係数法の適用	66
4.4.1	減衰系の複素固有値解析	66
4.4.2	伝達剛性係数法の適用	67
4.4.3	計算手順のまとめ	68
4.5	まとめ	68
第5章	数値計算結果	70
5.1	計算条件	70
5.2	モード III 法による安定判別の精度の確認	71
5.3	モード III 法およびモード II 法の計算精度の確認	74
5.4	モード I 法およびモード II 法の計算精度の確認	79
5.4.1	安定判別条件	80
5.4.2	周波数応答および安定判別	80
5.5	大規模構造物に対する適用	83
5.6	まとめ	88
第6章	非線形支持された三次元樹状構造物の強制振動解析	89
6.1	解析モデルと非線形基礎支持要素の取扱い	89
6.1.1	解析モデル	89

6.1.2	剛体 $j$ の運動方程式	91
6.1.3	運動方程式の増分形表示	93
6.1.4	近似解の仮定	93
6.1.5	力および力のモーメント	94
6.1.6	奇数次解の取扱い	96
6.1.7	分数調波振動の解析	97
6.1.8	調和バランス法の適用	97
6.2	一様はり要素内部自由度の能率的な消去	98
6.2.1	基本要素のモデル化	98
6.2.2	自己および相互動的剛性係数行列	99
6.2.3	直列結合則	101
6.2.4	一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係	102
6.3	増分伝達剛性係数法の定式化	103
6.3.1	漸化形式による増分変位振幅ベクトルの高能率計算	104
6.3.2	一様はり要素の内部節点の取扱い	107
6.4	計算手順のまとめ	108
6.5	低次元化モデルによる安定判別法の適用	109
6.5.1	安定判別に関する基礎的事項	109
6.5.2	低次元化モデルの構成	111
6.5.3	線形項モードを用いる方法 (モード I 法)	111
6.5.4	定数項モードを用いる方法 (モード II 法)	112
6.5.5	線形項モードおよび定数項モードの適切な抽出法	113
6.5.6	低次元化モデルに対する安定判別	114
6.6	数値計算結果	114
6.6.1	計算条件	114
6.6.2	計算モデル	114
6.6.3	安定判別条件	115
6.6.4	周波数応答および安定判別	115
6.7	まとめ	119

第7章 結論 .....	121
謝 辞 .....	124
参考文献 .....	125
付録1 .....	130
付録2 .....	131

## 第1章 序 論

機械・構造物の高効率化や高精度化に対する社会的要請が高まるにつれて、その軽量化や高速化が志向されるようになってきた。それにともない、大規模な機械・構造物においても、非線形振動に基づくトラブルの発生事例が急増している。このような問題に対処するためには、大規模な自由度の非線形系（以下、大規模非線形系と呼ぶ）を取扱うことのできる高性能な振動解析手法の開発が緊急かつ重要な課題となっており、その実現に向けた研究が各方面で精力的に行われている。

ところで、ここ数年来、パーソナルコンピュータやエンジニアリング・ワークステーションの性能向上と低価格化が急速に進み、かつての大型計算機以上の演算能力を持った計算機が容易に手に入るようになってきた。しかしながら、このような計算環境の著しい改善にもかかわらず、実際の機械・構造物で問題となる非線形振動に関しては、設計段階で十分な検討がなされているとは言い難いのが現状である。その主な原因としては、大規模非線形系に対して実用に耐え得るような振動解析手法の不備が挙げられる。現在の非線形振動解析手法は、市販の CAE ソフトにも組み込まれている時刻歴応答用の数値解析法（いわゆるシミュレーションプログラム）と、専門の研究者がよく用いる数学的あるいは数式的解析法とに大別されるが、前者には、解空間の大域的構造を理解することが困難であり、非線形振動特性に及ぼす主要な設計パラメータの影響を把握しにくいという大きな欠点がある。また、対象系の規模の拡大ともなって膨大な計算時間を必要とするようになるだけでなく、計算精度が急激に悪化するのが通常である。一方、後者の数式的解析法は、非線形系の基本的な振動特性を概略的かつ定性的に把握できるという長所を有するものの、通常は自由度や非線形性の影響が小さな系に適用対象が限定されるため、大規模な自由度を有する実際の機械・構造物で生じる非線形振動現象を定性的かつ定量的に把握しようという目的からすれば、実用に耐えないものが多い。また、モデルの変更にもなう数学解析に多大な労力を必要とするのが通例である。このように、大規模な機械・構造物の非線形振動に対して、設計段階における正確な予測・評価の要求に十分に答え得るような振動

解析手法が存在しないというのが現状であり、高速かつ高精度の解析手法の開発が切望されている。このような状況を踏まえて、本研究では、大規模非線形系に対する高性能な振動解析手法の開発を行うことを目的としている。そこで、以下ではまず、非線形系に対して用いられてきた従来の振動解析手法（主として数式的解析手法）の特徴を簡単に整理することにより、上記の問題点をさらに深く掘り下げるとともに、本研究の位置づけを明確化する。

### 1.1 多自由度非線形振動解析に関する従来の研究と問題点

非線形系の振動解析法として、今日までに数々の手法が開発されてきたが、そのほとんどすべてが何らかの意味での近似に基づく解法である。それらを近似の手続によって分類すると、関数の漸近展開に基づくもの、ガラーキン法に基づくもの、直接数値積分に基づくものの3種類に大別される。そのうち、関数の漸近展開に基づく代表的な解析法としては摂動法、平均法、漸近法、多重尺度法など<sup>(1)~(3)</sup>がある。また、ガラーキン法に基づくものには調和バランス法<sup>(1)</sup>、直接数値積分に基づくものにはシューティング法<sup>(4)</sup>などが挙げられる。以下に、それぞれの手法の特徴を概観する。

まず、関数の漸近展開に基づく手法は、解を非線形性の強さを表す微小パラメータに関するべき級数に展開することによって近似解を計算する方法である。これに基づく手法によれば、一般に非線形系の定常応答だけでなく過渡応答についても解析可能であり、制御工学方面の利用にも適している。また、得られた解に対するオーダー評価も可能である。なかでも、多重尺度法はアルゴリズムの規則性が高く、数式処理プログラムの利用により高次の近似解を求めることができる<sup>(5)</sup>。しかしながら、基盤としている漸近展開の性質上、この系統の解法は厳密解への収束性が保証されないものがほとんどであり、ある有限時間内での精度保証が可能であるにすぎない。また、本来的に非線形性の弱い系を対象に定式化されているので、ガタやヒステリシスに代表されるような強い非線形性を持つ系に対しては高精度な解析を行うことは困難である。さらに、多重尺度法を除いては高次の近似解を求めるための計算過程に規則性が乏しく、非常に煩雑な計算を必要とするため、現在までの解析例にみる限り2次近似程度が実用上の限界のようである。とりわけ大規模非線形系に対しては計算手続が煩

雑になり、適用がほぼ不可能となる。

次に、ガラーキン法に基づく調和バランス法の特徴を挙げる。調和バランス法は数学的基礎付けが明確な解法であり、近似の手続を高次まで拡張することによって厳密解に収束することが占部らにより証明されている<sup>(6),(7)</sup>。このことは、近似解の次数の設定により任意の精度の解が得られることを意味しており、強い非線形性を有する系に対しても近似の次数を上げることによって問題なく解析可能である。また、アルゴリズムの規則性が明瞭なのでコンピュータ利用に適しており、大規模系に対してもかなりの程度まで適用可能である。さらに、内部共振などの多自由度系に特有の現象に関しても、近似項数を適切に設定するだけで、何ら特別な処理を必要とせずに解析を行うことができる。ただし、大規模系に対して高精度な解析を行おうとすればその計算量は膨大なものになり、計算量および必要なメモリ量低減のための何らかの対策が必要となる。また、得られる解は基本的に定常周期解のみで、過渡応答を得ることは困難である。

最後に、直接数値積分に基づくシューティング法の特徴を挙げる。シューティング法は非線形系の定常周期解を2点境界値問題と捉えて解析する手法であり、厳密解への収束性が数学的に保証されている<sup>(10)</sup>。その意味では、任意の精度の解析が可能であるが、その精度は数値積分法の計算精度に依存している。また、強非線形系および大規模非線形系に対してもかなりの程度まで適用可能である。ただし、いずれの場合にも計算量と必要なメモリ量の著しい増大は避けられない。

以上の特徴を踏まえれば、工学的見地から最重要視されるべき定常周期解の解析法としては、調和バランス法系統の手法が大規模非線形系に対する振動解析法としてもっとも大きな可能性を持った手法であると考えられる。しかしながら、その計算量の膨大さゆえに、大規模系に対して十分に高精度の解析を行った事例は、過去にはほとんど存在しないようである。

一方、解空間の大域的構造を解明するためには安定解だけでなく不安定解をも同時に求めることが不可欠であるが、上記の数式的解析手法では、いずれも安定解と不安定解とがまったく同等に求められる。これが、通常は安定解しか求めることのできない時刻歴応答シミュレーションに対する数式的解析手法の優位点の一つである。ところが、両者がまったく区別なく求められる以上、得られた解に対しては必ず安定判別

を行う必要がある。定常周期解の安定判別法としては、定常周期解に付加された微小変分の挙動から定常周期解自身の安定性を調べる無限小安定性の概念に基づく安定判別法がよく利用される。この判別法は、フローケの定理<sup>(11)</sup>に基づいて変分方程式から特性指数または特性乗数を求めることにより、その安定性を判別するという理論的には極めて明快な方法であるが、大規模非線形系の定常周期解に対して適用する際には、次に示すような二つの問題が浮上する。

一つめの問題は、特性指数および特性乗数を求める際の数値計算上の難点に起因するものである。大規模系に対して特性指数を求める際には、非常に大次元（対象系の自由度の数倍～数十倍程度）の非対称行列に対する複素固有値解析が必要となる<sup>(12)</sup>。一方、特性乗数は推移行列の固有値として求められるが、大規模系に対して推移行列を求める際には、一般に硬い周期係数系の直接数値積分が必要となる<sup>(4),(13),(14)</sup>。これら二つの問題（大次元非対称行列に対する複素固有値解析および硬い周期係数線形系に対する直接数値積分）は、いずれも数値解析上の難題であり、計算能率の面でも計算精度的にも十分に満足できるアルゴリズムはまだ知られていない。このことは、特性指数および特性乗数を数値的に求めることが実際には非常に困難であることを示している。

二つめの問題は、定常周期解の計算精度と安定判別の計算精度との間の整合性に関するものである。すなわち、ある定常周期解に対して如何に高精度な安定判別を行ったとしても、定常周期解自身の精度が十分でない場合には、その安定判別がかえって不合理な結果を与えることが多い<sup>(15)</sup>。その問題を克服するために、定常周期解および安定判別をともになるべく高精度で計算しようとする、先に述べた数値計算上の問題がより顕著に現れるようになる。

以上に示したように、大規模非線形系に対する近似解および安定性の解析法に関しては、対象を定常周期振動に限定したとしても数々の問題が残っており、その解決を目指した研究が現在も活発に続けられている。そこで以下では、多自由度非線形系の定常周期解について行われた現在までの研究の動向を概観するとともに、本研究に直接関係する調和バランス法および安定判別法に関連する重要な研究について簡単な査察を試みる。

周知のように、非線形振動の解析法については古くから多種多様な研究が行われて

来た。多自由度非線形系に関する研究は 1950 年代頃から散見されるようになるが、初期から 1970 年代にかけてのものは 2 ないし 3 自由度のばね質点系に関する研究がほとんどである<sup>(16)~(25)</sup>。また、解析モデルを弱非線形系に限定しており、解析手法も摂動法や平均法、多重尺度法などの弱非線形系を対象として開発されたものを用いたものが多い。1980 年代になると、力学系理論の発展に呼応する形で、定常周期解の様々な分岐現象を調べたり、概周期振動やカオス振動の数値シミュレーションを行ったものが見られるようになる<sup>(26)~(31)</sup>。ただし、解析対象は相変わらず高々 2 ないし 3 自由度のものがほとんどである。1990 年代頃になってようやく、実際の機械・構造物に則した複雑かつ大規模な自由度を想定した解析法が開発されるようになってきた<sup>(32)~(37)</sup>。しかしながら、その多くは計算量やメモリ量等に関して不十分な点を抱えているようであり、その克服を目指した研究は現在も活発に行われている。

このような多自由度非線形系の振動解析に対しては、調和バランス法系統の解法が一貫して主流の地位を占めているように見受けられる。なぜなら、上述のように、この系統の手法によれば強非線形を有する多自由度系に対しても厳密解への収束が保証されているばかりでなく、取扱う系の自由度の拡張に対しても柔軟に対処できるからである。

たとえば、近藤ら<sup>(12),(38),(39)</sup>は、任意の自由度の強非線形系に対して定常周期振動の高精度近似解を求めるための計算手法、およびその近似解計算手続との適合性を考慮した安定判別法を提案し、1 自由度 Duffing 方程式に適用してその有効性を実証している。さらに、この手法に基づいて、末岡ら<sup>(40)~(43)</sup>は、大規模自由度系であるローラーチェーンの非線形性振動特性に関する解析的・実験的研究を行っているが、解析モデルの規模（約 40 自由度）に対する当時の計算機能力の制約により、低次の近似解を用いた解析に留まっている。一方、多自由度回転軸系の非線形振動を対象としたものには、富沢ら<sup>(44)</sup>や山内<sup>(45)</sup>による研究が挙げられる。前者は、非線形性を有する真円油膜軸受によって支持された多自由度回転軸系を調和バランス法の 1 次近似解によって解析しており、後者は、非線形性を有する軸受によって支持された多自由度回転軸系の解析において、軸受からの非線形力を FFT を利用して求めたのちに、各振動数成分に対して調和バランス法を適用し、定常周期解の計算を行っている。ところで、調和バランス法によって多自由度非線形系の定常周期解を解析する際には、仮定した近

似解の振幅に関する連立非線形代数方程式に対して、何らかの形で逐次近似反復計算を行う必要があるが、Cheung と Lau は、この逐次近似計算式の導出過程に増分法の概念を取り入れた増分調和バランス法を開発し、非線形一様はり<sup>(46)</sup>、板やシェル<sup>(47)</sup>、および直列形非線形ばね・質点系<sup>(48)</sup>等に適用して、その計算能力を検証している。さらに、この増分調和バランス法を用いて、Pierre ら<sup>(49)・(50)</sup>は、面内周期外力が作用する板および乾燥摩擦力が作用する直列型多自由度系の解析を行っている。

このように、調和バランス法が多自由度非線形系に対するほとんど唯一ともいえるべき強力な振動解析法であることには、ほとんど議論の余地がない。とはいうものの、解析対象の自由度の増大および高精度化のための近似項数の増加にともなって、逐次近似反復計算過程において解くべき線形連立方程式の次元が極めて大きくなるとともに、その計算量が爆発的に増大して計算不能に陥りがちである。そこで、その計算量の低減化が必須の課題となる。

このような問題に対して、現在までに二方向からの解決策が模索されてきたように見受けられる。その一つは、非線形性の存在する要素と線形要素とを運動方程式の段階で分離し、非線形要素のみに対して調和バランス法システムの解法で逐次近似計算を行い、それにより得られた解と線形要素の運動方程式から得られる解との合成により系全体の解を得ようとする方法である。この手法は、とくに非線形性の存在が系の一部に限られるときに計算量を大きく低減化することができる。他の一つは、系全体の運動方程式に対して増分調和バランス法を適用した場合の修正量（線形連立方程式）の計算過程に何らかの数学的計算テクニックを適用して、計算能率を向上させようとする方法である。

まず、前者の解析例では、小林ら<sup>(51)</sup>の回転軸系の解析が挙げられる。彼らは、モード解析で用いられている部分構造合成法を非線形振動の解析に利用し、回転軸系を軸・軸受・ケーシングの三つの部分構造に分離し、非線形性は摩擦ダンパやスキューズフィルムダンパなど軸受部のみに存在するものとして、非線形部分に関して縮小した関係式に対して、FFT を利用して非線形軸受力を求めた後、系全体の応答を求めている。また、同様の手法を用いた研究には、Nataraj ら<sup>(52)</sup>や Shiau ら<sup>(53)</sup>による軸継手部の摩擦やスキューズフィルムダンパの非線形性を考慮した研究や、Dowell<sup>(54)</sup>による部分的に乾燥摩擦が作用するはりに対する研究などがある。断片線形（ガタ）を取

扱ったものとしては Kim ら<sup>(55),(56)</sup>の軸受すきまの影響を考慮した研究がある。しかしながら、これらの解析手法では、いわばモデル化の段階で解析対象に大きな近似を加えているので、高精度な解析を行うことが困難である場合が多い。

次に、後者の研究例では、安田ら<sup>(57)</sup>による増分伝達マトリックス法の開発が挙げられる。この手法は、増分調和バランス法における修正量の逐次近似計算過程に伝達マトリックス法を組み込んだもので、その計算の効率化を実現している。彼らは、この手法を用いて直列形非線形ばね・質点系の振動解析を行っている。また、同様の発想に基づく手法として、近藤ら<sup>(58)~(61)</sup>は増分調和バランス法の計算過程に伝達影響係数法を組み込むことにより、増分伝達影響係数法を提案した。この手法では、多自由度に対して高精度の近似解を仮定しても、比較的高速な処理を行うことが可能である。実際に直列型非線形構造物や非線形支持された直線状はり構造物に対して高精度な数値計算を行い、1次近似とそれ以上の近似による解析によって得られた解特性が定量的のみならず定性的にも大きく異なることを示し、高精度な解析手法の重要性を実証している。また、ガタを含む断片線形系に関しても高精度な取扱いを可能とした区積分法を提案し<sup>(59)</sup>、これを用いた高精度な数値計算も行っている。ただし、より一層大規模な系への適用を図る際には、増分伝達影響係数法に対しても、計算能率の向上や必要な記憶容量の低減化など、さらなる改良の余地も残されている。

上記のような手法を用いて定常周期振動の近似解が得られたならば、その解に対して安定判別を行う必要がある。前述したように、非線形系における定常周期解の安定判別を行う方法としてもっとも有効なのは、無限小安定性に基づく安定判別法であろう。この方法は、定常周期解に付加された微小変分に対する変分方程式を対象とし、その零解の安定性から定常解自身の安定性を調べるものであり、最初の適用例としては月の運動を解析した Hill<sup>(62)</sup>の研究が挙げられる。彼は、周期係数型の変分方程式にフローケの定理を適用することによって無限次元行列式からなる特性方程式を導出し、その解として得られる特性指数により安定判別を行う方法を開発した。この無限次元行列式の収束性については、Whittaker ら<sup>(63)</sup>や McLachlan<sup>(64)</sup>の著書に示されている。また、この方法を用いた安定判別の事例としては、Bolotin<sup>(65)</sup>による弾性系の動的安定性の解析が著名である。一方、近藤ら<sup>(12)</sup>は自然対数の多価性に基づく特性指数の虚部の周期性を考慮することで、得られる特性指数の中からもっとも高精度

な主特性指数を定義し、これのみを用いて安定判別を行うことで安定判別の高精度化を実現している。さらに、多自由度系の無限次元行列式の収束性についても言及している。しかしながら、このタイプの安定判別法では、自由度の増加および安定判別の高精度化にともなって無限次元行列式を有限近似した特性方程式の次元が急速に増大するため、大規模系に対する高精度な安定判別は不可能であり、適用範囲の限られた手法となっている。この問題に対処するために、特性方程式の行列式から周期解の安定性および分岐の種類を特定する簡便法<sup>(58)</sup>や、偏角原理を用いた安定判別法<sup>(60)</sup>を提案しているが、簡便法はすべての不安定領域を見いだすことができないことや、偏角原理を用いた安定判別法では自由度の増大によって計算手続が煩雑になるなど、これらも解決すべき課題の残る手法である。

## 1.2 本研究の目的

1.1 節では、種々の非線形振動解析手法の特徴について説明するとともに、多自由度非線形系に対する有力な解析手法の一つであり、本研究の基盤でもある増分伝達影響係数法の開発に至る経緯を整理した。また、大規模非線形系の定常周期解に対する安定判別法についても、現在までのところ実用的な解析手法は皆無に等しいことを指摘した。増分伝達影響係数法は、従来の手法に比べれば高速かつ高精度に定常周期解を解析できる手法であるが、計算量や必要なメモリ量などの問題から、大規模非線形系に対してはその適用対象が限られたものとならざるを得ない。今日のシステムの大規模化や高効率化を考えると、さらに高性能な振動解析手法とその性能に適合した安定判別法の開発が望まれる。

本研究では、これらの問題を解決するために、大規模非線形構造物に対する高速かつ高精度な振動解析手法および安定判別法を新たに開発することを目的とする。

まず、第2章では、大規模非線形構造物の定常周期解の高速かつ高精度な解析法として、調和バランス法と伝達剛性係数法<sup>(66)</sup>とを増分法の概念を介して結合した増分伝達剛性係数法を新たに提案する。増分伝達剛性係数法は、大規模系や多様な非線形性に柔軟に対応することが可能な手法であるが、本章ではその基本概念の明確化のために、直線状はり構造物の非線形強制振動に対する解析アルゴリズムの詳細を示す。

この手法は、近似項数の増加にともなって厳密解への収束性が保証されるという調和バランス法の長所を保持しつつ、その計算過程に伝達剛性係数法の概念を導入することによって、計算精度を損なうことなく逐次近似計算過程から解析対象の線形要素内部の自由度を完全に消去できるという特長を有している。その結果、機械系などに多く見られるような局所的に強い非線形性の存在する構造物に対しては、従来の増分調和バランス法<sup>(46)~(48)</sup>や増分伝達影響係数法<sup>(58)~(61)</sup>などに比べて、計算能率を劇的に向上させることが可能となる。さらに、非線形性の存在する節点のみの自由度に縮小された逐次近似計算式に、漸化形式による能率的な計算法を導入することにより、計算能率のさらなる向上を図っている。このような増分伝達剛性係数法の計算能率を定量的に把握するために、増分調和バランス法、増分伝達影響係数法および増分伝達剛性係数法の3種類の非線形振動解析手法の間で、逐次近似計算過程の計算量を理論的に比較し、増分伝達剛性係数法の計算能率向上の効果を明らかにする。また、実際の数値計算に基づいて、増分伝達影響係数法と増分伝達剛性係数法との間で計算時間を比較することにより、その効果を検証する。

増分伝達剛性係数法によって大規模非線形系の定常周期解が得られたならば、その解に対する安定判別が必要となる。しかしながら、上述したように、従来からの安定判別法を大規模系に対して適用しようとしても、いずれも数値計算上の難点を抱えているため、高精度の安定性解析は非常に困難である。

そこで、第3章では、大規模非線形系の定常周期解に対して低次元化モデルによる安定判別法を提案する。本安定判別法によれば、従来の安定判別法では数値解析上の問題により不可能であると考えられていた大規模非線形系に対しても、精度をほとんど損なうことなく非常に高速に定常周期解の安定性を判別することが可能となる。具体的には、変分方程式にモード解析の概念を援用して低次元化を図るが、その際、2種類の実モードおよび1種類の複素モードの計3種類のモードを利用した低次元化法を提案する。さらに、低次元化された変分方程式に対して、近似解の安定性に与える影響が小さなモードとフーリエ係数とを合理的に判別し、それらを除くことによって必要最小限の低次元化モデルを作成する方法を示す。なお、本安定判別法は一般的な多自由度係数励振系の安定判別にも適用可能であるが、その基本原理を明確化するために、第3章では、第2章で取扱った直線状はり構造物の定常周期解を対象とし

たアルゴリズムを定式化する。

第3章で定式化した安定判別法では、低次元化モデルの導出に際して大規模系の変分方程式に対する固有値解析によって得られるモード行列を利用するが、その際に必要となる大規模系の固有値解析には一般に膨大な計算量を必要とする。

そこで、第4章では、大規模系の振動解析に適した固有値解析法の一つである逆反復法<sup>(67)</sup>に伝達剛性係数法を適用することによって、逆反復法の計算能率をさらに向上させた固有値解析法を提案する。第2章で定式化した増分伝達剛性係数法の理論的基盤の一つである伝達剛性係数法は、連立1次方程式の効率的な解法とみなすことができる。そこで、逆反復法の主要部である大次元連立1次方程式の反復計算過程に伝達剛性係数法を導入することによって、計算能率を飛躍的に向上させた実固有値解析法および複素固有値解析法の定式化を行う。これにより、低次元化モデルによる安定判別法の全体的な計算能率をより一層向上させることが可能となる。

第5章では、具体的な計算モデルに対して数値計算を行うことにより、第2章から第4章で定式化した増分伝達剛性係数法、低次元化モデルによる安定判別法および伝達剛性係数法を適用した逆反復法の有効性を確認する。

ところで、増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法の適用対象は、直線状はり構造物に限定されるものではない。対象とする機械や構造物の規模が拡大するにつれて、より一層その真価を発揮することが期待される。

そこで、その一例として、第6章では増分伝達剛性係数法および低次元化モデルによる安定判別法を一様はり要素から構成される三次元樹状構造物に適用し、縦・曲げ・ねじり連成非線形強制振動解析アルゴリズムを定式化する。三次元樹状構造物とは、屈曲部や分岐系を有する構造物のことを意味するが、工作機械の基本形態であるΓ形構造物、多関節マニピュレータ、配管系等を一般化したものである。また、具体的なモデルに対する数値計算により、提案したアルゴリズムの有効性を確認する。

第7章では、前章までの内容を総括し、結論とした。

なお、本論文で用いる記号は基本的に各章で独立している。そのため、記号の定義を各章ごとに行っているが、各章間では同一の記号でも別の物理量を示すものがあるので注意されたい。

## 第2章 非線形支持された直線状はり構造物の 強制振動に対する増分伝達剛性係数法の提案

本章では、大規模な自由度を有する非線形構造物の定常周期振動を非常に高速かつ任意の精度で解析し得る手法として、増分伝達剛性係数法を提案する。増分伝達剛性係数法は、非線形系の定常周期振動に対する強力な解析手法である調和バランス法<sup>(1)</sup>と、線形系に対する効率的な解析手法である伝達剛性係数法<sup>(6)</sup>とを増分法の概念を介して結合したものであり、局所的に非線形性を有する大規模系に対しては、線形要素内の内部自由度を完全に消去することによって、計算精度を低下させることなく逐次近似計算における計算効率を劇的に向上させることが可能である。以下では、増分伝達剛性係数法の基本概念の明確化のために、もっとも基本的な構造物である直線状はり構造物の面内曲げ強制振動に対する解析アルゴリズムの詳細を示す。また、計算効率に関して、本手法と他の非線形振動解析手法の計算量を理論的に比較するとともに、実際の数値計算により計算速度の比較を行う。

なお、本章では、増分伝達剛性係数法による近似解の計算法を示すのみに止め、得られた近似解に対する安定判別法については次章で詳論することにする。

### 2.1 解析モデルと非線形基礎支持要素の取扱い

**2.1.1 解析モデル** 本章では、図 2.1 に示すような複数の一様断面真直はり（以下、単に一様はりと呼ぶ）を直線状に結合することによって構成される構造物に、複数の同一周期を有する調和強制外力および調和強制トルクが作用する場合の面内曲げ非線形強制振動を解析の対象とする。

直線状はり構造物は、強制外力または強制トルクの作用点、せん断力や曲げモーメントまたは断面積が不連続となる点、および応答を求めたい点を境にして  $n$  本の線形な一様はり要素に分割されており、各分割点には並進と回転に関する非線形ばねと非線形ダッシュポットとから構成される基礎支持要素によって支持された剛体を取り

付けられているものと仮定する。すなわち，解析対象とするモデルの非線形性は基礎支持要素にのみ存在するものとし，一様はり要素自体の大変形に伴う非線形性は考慮しない。各分割点を系の左端から右端にかけて節点 0～節点  $n$  と呼ぶ。一様はり要素は，さらにいくつかの基本要素に等分割され，各基本要素は線形の集中系としてモデル化される。ここに，基本要素に対しては，一様はり要素の内部に作用する分布粘性減衰を考慮する。また，調和強制外力および調和強制トルクは節点にのみ集中的に作用し，無次元時間  $\tau = \omega t$  ( $\omega$ : 外力の角振動数， $t$ : 実時間) に関して周期  $2\pi$  とする。

なお，一様はり要素に作用する分布強制外力や分布強制トルク，および基礎支持要素を介して作用する強制変位および強制角変位に関しても問題なく取扱うことができるが，本論文では議論の繁雑を避けるため省略する。

以下，変数に付された装飾記号や添字は，原則として次のような物理量であることを意味する。

(1) 「\*」の付された記号は無次元時間  $\tau$  に関する物理量，何も付されていないものは対応する物理量のフーリエ係数。

(2) 右下添字「 $c$ 」および「 $s$ 」はフーリエ係数のそれぞれ余弦成分および正弦成分，右上添字はその次数。

(3) 右下添字「 $j$ 」は，節点  $j$  または  $j$  番め一様はり要素に関する物理量。ただし， $j = 0, 1, \dots, n$  である。

(4) 「 $-$ 」の付された記号は節点左側の物理量，「 $\wedge$ 」の付された記号は非線形基礎支持要素または節点の剛体に関する物理量，何も付されていないものは節点右側または一様はり要素の物理量。

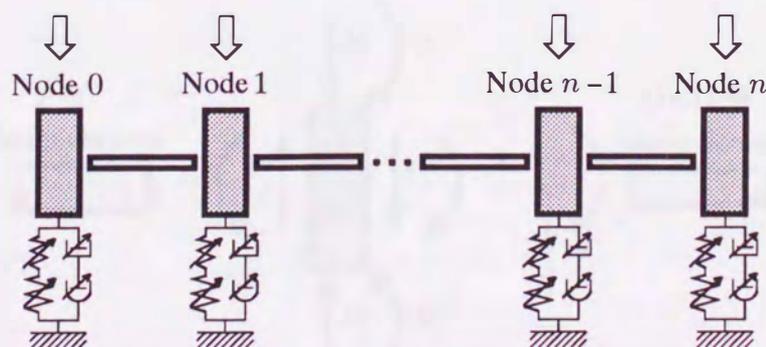


図 2.1 直線状はり構造物の解析モデル

(5) 「 $\Delta$ 」の付された記号は対応する物理量の増分.

(6) 「 $L$ 」および「 $R$ 」は一様はり要素を細分割した基本要素 (図 2.3 参照) のそれぞれ左端および右端に関する物理量.

(7) 「 $\sim$ 」の付された記号は基本要素両端の集中質量の弾性はり側に関する物理量.

**2.1.2 節点  $j$  の運動方程式** 節点  $j$  における剛体重心の横変位  $y_j^*$ , 角変位  $\theta_j^*$ , 剛体に作用する力 ( $\bar{F}_j^*$ ,  $\hat{F}_j^*$ ,  $F_j^*$ ,  $\phi_j^*$ ) および力のモーメント ( $\bar{N}_j^*$ ,  $\hat{N}_j^*$ ,  $N_j^*$ ,  $\psi_j^*$ ) の正方向を図 2.2 に示す. このうち, ( $\bar{F}_j^*$ ,  $\bar{N}_j^*$ ) および ( $F_j^*$ ,  $N_j^*$ ) はそれぞれ  $j$  番めおよび  $j+1$  番め一様はり要素から剛体へ作用する線形の反力であり, ( $\hat{F}_j^*$ ,  $\hat{N}_j^*$ ) は非線形基礎支持要素から剛体へ作用する非線形反力を表す. また,  $\phi_j^*$  および  $\psi_j^*$  は無次元時間  $\tau$  について  $2\pi$  周期の調和強制外力および調和強制トルクである.

このとき, 節点  $j$  ( $= 0, 1, \dots, n$ ) における剛体の並進と回転に関する運動方程式は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 \ddot{y}_j^* + \bar{F}_j^* + \hat{F}_j^* - F_j^* &= \phi_j^* \\ \hat{J}_j \omega^2 \ddot{\theta}_j^* + \bar{N}_j^* + \hat{N}_j^* - N_j^* &= \psi_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに, 「 $\cdot$ 」 $= d/d\tau$ ,  $\hat{m}_j$ ,  $\hat{J}_j$  はそれぞれ剛体の質量および慣性モーメントである.

**2.1.3 運動方程式の増分形表示** 式(2.1)で示される節点  $j$  の剛体の運動方程式は支持要素に非線形性が存在する場合には非線形連立常微分方程式となるので, 解析的に解くことは一般に困難である. そこで, 増分法概念を介した調和バランス法を導入して, 式(2.1)の定常周期振動を逐次近似計算することを考える. そのために必要となる式(2.1)の増分量に関する線形化方程式は次のようになる.

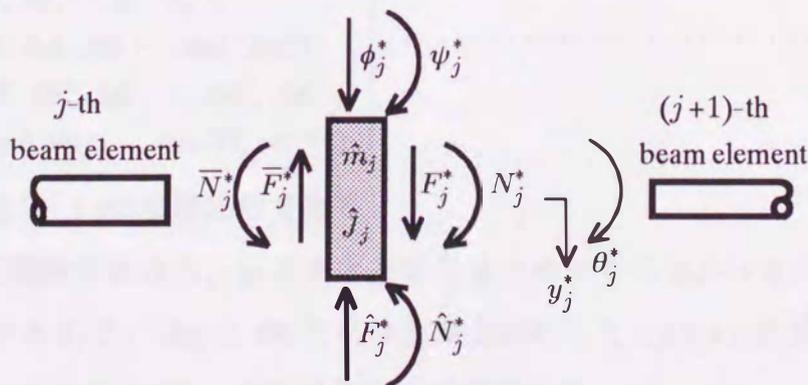


図 2.2 剛体  $j$  の変位および作用する力と力のモーメントの正方向の定義

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 \Delta \hat{y}_j^* + \Delta \bar{F}_j^* + \Delta \hat{F}_j^* - \Delta F_j^* &= r_j^* \\ \hat{J}_j \omega^2 \Delta \hat{\theta}_j^* + \Delta \bar{N}_j^* + \Delta \hat{N}_j^* - \Delta N_j^* &= q_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに、 $r_j^*$ 、 $q_j^*$ は残差を表し、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_j^* &= \phi_j^* - \hat{m}_j \omega^2 \hat{y}_j^* - \bar{F}_j^* - \hat{F}_j^* + F_j^* \\ q_j^* &= \psi_j^* - \hat{J}_j \omega^2 \hat{\theta}_j^* - \bar{N}_j^* - \hat{N}_j^* + N_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

さらに、基礎支持要素から剛体に作用する非線形復元力  $\hat{F}_j^*$  を  $y_j^*$  および  $\dot{y}_j^*$  のみの非線形関数、同じく非線形復元トルク  $\hat{N}_j^*$  を  $\theta_j^*$  および  $\dot{\theta}_j^*$  のみの非線形関数と仮定すると、それらの増分  $\Delta \hat{F}_j^*$  および  $\Delta \hat{N}_j^*$  は次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{F}_j^* &= \hat{V}_{1j}^* \Delta y_j^* + \hat{W}_{1j}^* \Delta \dot{y}_j^* \\ \Delta \hat{N}_j^* &= \hat{V}_{2j}^* \Delta \theta_j^* + \hat{W}_{2j}^* \Delta \dot{\theta}_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{1j}^* &= \frac{\partial \hat{F}_j^*}{\partial y_j^*}, \quad \hat{W}_{1j}^* = \frac{\partial \hat{F}_j^*}{\partial \dot{y}_j^*} \\ \hat{V}_{2j}^* &= \frac{\partial \hat{N}_j^*}{\partial \theta_j^*}, \quad \hat{W}_{2j}^* = \frac{\partial \hat{N}_j^*}{\partial \dot{\theta}_j^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

**2・1・4 近似解の仮定**  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動解を調和バランス法で求め

るために、横変位  $y_j^*$  と角変位  $\theta_j^*$ 、およびそれらの増分  $\Delta y_j^*$  と  $\Delta \theta_j^*$  を、それぞれ次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で仮定する。ただし、 $N$  は正整数である。

$$\left. \begin{aligned} y_j^* &= e y_j, \quad \theta_j^* = e \theta_j \\ \Delta y_j^* &= e \Delta y_j, \quad \Delta \theta_j^* = e \Delta \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

ここに、 $y_j$ 、 $\theta_j$ 、 $\Delta y_j$  および  $\Delta \theta_j$  は、それぞれ  $y_j^*$ 、 $\theta_j^*$ 、 $\Delta y_j^*$  および  $\Delta \theta_j^*$  の 0 次から  $N$  次までの実フーリエ係数をまとめた  $(2N+1)$  次元列ベクトル、 $e$  は  $(2N+1)$  次元行ベクトルであり、それぞれ次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} y_j &= {}^t(y_c^0, y_c^1, y_s^1, \dots, y_c^N, y_s^N)_j \\ \theta_j &= {}^t(\theta_c^0, \theta_c^1, \theta_s^1, \dots, \theta_c^N, \theta_s^N)_j \\ \Delta y_j &= {}^t(\Delta y_c^0, \Delta y_c^1, \Delta y_s^1, \dots, \Delta y_c^N, \Delta y_s^N)_j \\ \Delta \theta_j &= {}^t(\Delta \theta_c^0, \Delta \theta_c^1, \Delta \theta_s^1, \dots, \Delta \theta_c^N, \Delta \theta_s^N)_j \\ e &= (1/2, \cos \tau, \sin \tau, \dots, \cos N\tau, \sin N\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

ここに、左上添字「 $t$ 」は転置記号である。

次に、のちの議論の都合上、 $y_j$  と  $\theta_j$  とをひとまとめにした  $2(2N+1)$  次元の(広義の)変位振幅ベクトル  $d_j$  と、 $\Delta y_j$  と  $\Delta \theta_j$  とをひとまとめにした  $2(2N+1)$  次元の(広義の)増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j$  を、それぞれ次式で定義する。

$$d_j = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_j \dots\dots\dots(2.8)$$

$$\Delta d_j = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_j \dots\dots\dots(2.9)$$

一方、式(2.6)で与えられる  $y_j^*$ ,  $\theta_j^*$ ,  $\Delta y_j^*$  および  $\Delta \theta_j^*$  の  $\tau$  に関する導関数は、それぞれ次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_j^* &= eUy_j, & \dot{y}_j^* &= eU^2y_j \\ \dot{\theta}_j^* &= eU\theta_j, & \dot{\theta}_j^* &= eU^2\theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{y}_j^* &= eU\Delta y_j, & \Delta \dot{y}_j^* &= eU^2\Delta y_j \\ \Delta \dot{\theta}_j^* &= eU\Delta \theta_j, & \Delta \dot{\theta}_j^* &= eU^2\Delta \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.11)$$

ここに、 $U$  は次式で定義される  $(2N+1)$  次ブロック対角行列である。

$$\left. \begin{aligned} U &= \text{Diag}[0, U_1, U_2, \dots, U_N] \\ U_r &= \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}, \quad (r=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.12)$$

なお、 $\text{Diag}[\dots]$  はブロック対角行列を表す。

2.1.5 カおよび力のモーメント 上記の  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  に対しては、剛体に作用する力や力のモーメント、およびそれらの増分もまた  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の関数となる。そこで、これらに関しても次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で近似する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_j^* &= e\bar{F}_j, & \bar{F}_j &= {}^t(\bar{F}_c^0, \bar{F}_c^1, \bar{F}_s^1, \dots, \bar{F}_c^N, \bar{F}_s^N)_j \\ \hat{F}_j^* &= e\hat{F}_j, & \hat{F}_j &= {}^t(\hat{F}_c^0, \hat{F}_c^1, \hat{F}_s^1, \dots, \hat{F}_c^N, \hat{F}_s^N)_j \\ F_j^* &= eF_j, & F_j &= {}^t(F_c^0, F_c^1, F_s^1, \dots, F_c^N, F_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_j^* &= e\bar{N}_j, & \bar{N}_j &= {}^t(\bar{N}_c^0, \bar{N}_c^1, \bar{N}_s^1, \dots, \bar{N}_c^N, \bar{N}_s^N)_j \\ \hat{N}_j^* &= e\hat{N}_j, & \hat{N}_j &= {}^t(\hat{N}_c^0, \hat{N}_c^1, \hat{N}_s^1, \dots, \hat{N}_c^N, \hat{N}_s^N)_j \\ N_j^* &= eN_j, & N_j &= {}^t(N_c^0, N_c^1, N_s^1, \dots, N_c^N, N_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{F}_j^* &= e\Delta \bar{F}_j, & \Delta \bar{F}_j &= {}^t(\Delta \bar{F}_c^0, \Delta \bar{F}_c^1, \Delta \bar{F}_s^1, \dots, \Delta \bar{F}_c^N, \Delta \bar{F}_s^N)_j \\ \Delta \hat{F}_j^* &= e\Delta \hat{F}_j, & \Delta \hat{F}_j &= {}^t(\Delta \hat{F}_c^0, \Delta \hat{F}_c^1, \Delta \hat{F}_s^1, \dots, \Delta \hat{F}_c^N, \Delta \hat{F}_s^N)_j \\ \Delta F_j^* &= e\Delta F_j, & \Delta F_j &= {}^t(\Delta F_c^0, \Delta F_c^1, \Delta F_s^1, \dots, \Delta F_c^N, \Delta F_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{N}_j^* &= e\Delta \bar{N}_j, & \Delta \bar{N}_j &= {}^t(\Delta \bar{N}_c^0, \Delta \bar{N}_c^1, \Delta \bar{N}_s^1, \dots, \Delta \bar{N}_c^N, \Delta \bar{N}_s^N)_j \\ \Delta \hat{N}_j^* &= e\Delta \hat{N}_j, & \Delta \hat{N}_j &= {}^t(\Delta \hat{N}_c^0, \Delta \hat{N}_c^1, \Delta \hat{N}_s^1, \dots, \Delta \hat{N}_c^N, \Delta \hat{N}_s^N)_j \\ \Delta N_j^* &= e\Delta N_j, & \Delta N_j &= {}^t(\Delta N_c^0, \Delta N_c^1, \Delta N_s^1, \dots, \Delta N_c^N, \Delta N_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.16)$$

次に、のちの議論の都合上、 $\bar{F}_j^*$  と  $\bar{N}_j^*$ ,  $\hat{F}_j^*$  と  $\hat{N}_j^*$ ,  $F_j^*$  と  $N_j^*$  をひとまとめにした  $2(2N+1)$

次元の(広義の)力振幅ベクトル  $\bar{f}_j, \hat{f}_j, f_j$  と,  $\Delta\bar{F}_j$  と  $\Delta\bar{N}_j, \Delta\hat{F}_j$  と  $\Delta\hat{N}_j, \Delta F_j$  と  $\Delta N_j$  をひとまとめにした  $2(2N+1)$  次元の(広義の)増分力振幅ベクトル  $\Delta\bar{f}_j, \Delta\hat{f}_j, \Delta f_j$  を次式で定義する.

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{N} \end{bmatrix}_j, \quad \hat{f}_j = \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_j, \quad f_j = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_j \\ \Delta\bar{f}_j &= \begin{bmatrix} \Delta\bar{F} \\ \Delta\bar{N} \end{bmatrix}_j, \quad \Delta\hat{f}_j = \begin{bmatrix} \Delta\hat{F} \\ \Delta\hat{N} \end{bmatrix}_j, \quad \Delta f_j = \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta N \end{bmatrix}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.17)$$

一方,  $\tau$  に関して  $2\pi$  周期の定常振動  $y_j$  および  $\theta_j$  に対しては, 式(2.5)で定義される  $\hat{V}_{pj}^*, \hat{W}_{pj}^*$  ( $p=1, 2$ ) もまた  $2\pi$  周期の関数となるので, 次のような実フーリエ級数で表示する.

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{pj}^* &= \frac{(\hat{V}_c^0)_{pj}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (\hat{V}_c^k)_{pj} \cos k\tau + (\hat{V}_s^k)_{pj} \sin k\tau \} \\ \hat{W}_{pj}^* &= \frac{(\hat{W}_c^0)_{pj}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (\hat{W}_c^k)_{pj} \cos k\tau + (\hat{W}_s^k)_{pj} \sin k\tau \} \end{aligned} \right\} (p=1, 2) \dots\dots\dots (2.18)$$

式(2.18)のように展開されたフーリエ係数を利用すれば,  $\Delta\hat{f}_j$  と  $\Delta d_j$  との関係は次式のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\hat{f}_j &= \hat{K}_j \Delta d_j, \quad \hat{K}_j = \text{Diag}[\hat{K}_1, \hat{K}_2]_j \\ \hat{K}_{pj} &= \hat{V}_{pj}^* + \hat{W}_{pj}^* U, \quad (p=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.19)$$

ここに,  $\hat{V}_{pj}^*, \hat{W}_{pj}^*$  はそれぞれ  $\hat{V}_{pj}^*, \hat{W}_{pj}^*$  のフーリエ係数を要素とする  $(2N+1)$  次正方行列であり, 次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{pj}^* &= \frac{A_{pj}^1 + B_{pj}^1}{2} \\ \hat{W}_{pj}^* &= \frac{A_{pj}^2 + B_{pj}^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{pj}^q &= \begin{bmatrix} 0 & a^1 & a^2 & \dots & a^N \\ 0 & A^2 & A^3 & \dots & A^{N+1} \\ 0 & {}^t A^3 & A^4 & \dots & A^{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & {}^t A^{N+1} & {}^t A^{N+2} & \dots & A^{2N} \end{bmatrix}_{pj}^q \\ B_{pj}^q &= \begin{bmatrix} b^0 & b^1 & b^2 & \dots & b^N \\ {}^t b^1 & B^0 & B^1 & \dots & B^{N-1} \\ {}^t b^2 & {}^t B^1 & B^0 & \dots & B^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t b^N & {}^t B^{N-1} & {}^t B^{N-2} & \dots & B^0 \end{bmatrix}_{pj}^q \end{aligned} \right\} (p, q=1, 2) \dots\dots\dots (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
(A^k)_{pj}^1 &= \begin{bmatrix} \hat{V}_c^k & \hat{V}_s^k \\ \hat{V}_s^k & -\hat{V}_c^k \end{bmatrix}_{pj}, & (B^k)_{pj}^1 &= \begin{bmatrix} \hat{V}_c^k & \hat{V}_s^k \\ -\hat{V}_s^k & \hat{V}_c^k \end{bmatrix}_{pj} \\
(A^k)_{pj}^2 &= \begin{bmatrix} \hat{W}_c^k & \hat{W}_s^k \\ \hat{W}_s^k & -\hat{W}_c^k \end{bmatrix}_{pj}, & (B^k)_{pj}^2 &= \begin{bmatrix} \hat{W}_c^k & \hat{W}_s^k \\ -\hat{W}_s^k & \hat{W}_c^k \end{bmatrix}_{pj} \\
(a^k)_{pj}^1 &= (b^k)_{pj}^1 = [\hat{V}_c^k \ \hat{V}_s^k]_{pj}, & (a^k)_{pj}^2 &= (b^k)_{pj}^2 = [\hat{W}_c^k \ \hat{W}_s^k]_{pj} \\
(b^0)_{pj}^1 &= \hat{V}_c^0, & (b^0)_{pj}^2 &= \hat{W}_c^0, & (\hat{V}_s^0)_{pj} &= (\hat{W}_s^0)_{pj} = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

2・1・6 奇数次解の取扱い 非零の奇数次調波と偶数次調波をともに含む周期解を非奇数次解，偶数次調波成分はすべて零で奇数次調波のみのフーリエ級数に展開できるような周期解を奇数次解と呼ぶ。周知のように，かなり広範な非線形系において奇数次解が発生する。奇数次解に対しては，奇数次調波成分のみを計算すればよいので，近似解の最高次数  $N$  が同一ならば取扱う行列やベクトルの次元を非奇数次解の場合の約半分に縮小できる。したがって，計算時間および必要なメモリ量の両面で極めて有利である。しかも，そのアルゴリズムは計算に必要なベクトルと行列とを奇数次解用に再定義したものに置き換えるだけで，形式的には非奇数次解の場合とまったく同様である。そこで，以下に変更を要する点のみを示す。なお，本論文で奇数次解を取扱う場合は，とくに断ることなく  $N$  は正の奇数とする。

$y_j, \theta_j$  および  $e$  については，次のような  $N$  次までの奇数次調波成分のみからなる  $(N+1)$  次元ベクトルで再定義する。

$$\left. \begin{aligned}
y_j &= {}^t(y_c^1, y_s^1, y_c^3, y_s^3, \dots, y_c^N, y_s^N)_j \\
\theta_j &= {}^t(\theta_c^1, \theta_s^1, \theta_c^3, \theta_s^3, \dots, \theta_c^N, \theta_s^N)_j \\
e &= (\cos \tau, \sin \tau, \cos 3\tau, \sin 3\tau, \dots, \cos N\tau, \sin N\tau)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

同様に，増分変位振幅ベクトル，力振幅ベクトルおよび増分力振幅ベクトルについても，奇数次調波成分のみからなる  $(N+1)$  次元ベクトルで，次のように再定義する。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta y_j &= {}^t(\Delta y_c^1, \Delta y_s^1, \Delta y_c^3, \Delta y_s^3, \dots, \Delta y_c^N, \Delta y_s^N)_j \\
\Delta \theta_j &= {}^t(\Delta \theta_c^1, \Delta \theta_s^1, \Delta \theta_c^3, \Delta \theta_s^3, \dots, \Delta \theta_c^N, \Delta \theta_s^N)_j
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{F}_j &= {}^t(\bar{F}_c^1, \bar{F}_s^1, \bar{F}_c^3, \bar{F}_s^3, \dots, \bar{F}_c^N, \bar{F}_s^N)_j \\
\hat{F}_j &= {}^t(\hat{F}_c^1, \hat{F}_s^1, \hat{F}_c^3, \hat{F}_s^3, \dots, \hat{F}_c^N, \hat{F}_s^N)_j \\
F_j &= {}^t(F_c^1, F_s^1, F_c^3, F_s^3, \dots, F_c^N, F_s^N)_j
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{N}_j &= {}^t(\bar{N}_c^1, \bar{N}_s^1, \bar{N}_c^3, \bar{N}_s^3, \dots, \bar{N}_c^N, \bar{N}_s^N)_j \\
\hat{N}_j &= {}^t(\hat{N}_c^1, \hat{N}_s^1, \hat{N}_c^3, \hat{N}_s^3, \dots, \hat{N}_c^N, \hat{N}_s^N)_j \\
N_j &= {}^t(N_c^1, N_s^1, N_c^3, N_s^3, \dots, N_c^N, N_s^N)_j
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{F}_j &= {}^t(\Delta \bar{F}_c^1, \Delta \bar{F}_s^1, \Delta \bar{F}_c^3, \Delta \bar{F}_s^3, \dots, \Delta \bar{F}_c^N, \Delta \bar{F}_s^N)_j \\ \Delta \hat{F}_j &= {}^t(\Delta \hat{F}_c^1, \Delta \hat{F}_s^1, \Delta \hat{F}_c^3, \Delta \hat{F}_s^3, \dots, \Delta \hat{F}_c^N, \Delta \hat{F}_s^N)_j \\ \Delta F_j &= {}^t(\Delta F_c^1, \Delta F_s^1, \Delta F_c^3, \Delta F_s^3, \dots, \Delta F_c^N, \Delta F_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{N}_j &= {}^t(\Delta \bar{N}_c^1, \Delta \bar{N}_s^1, \Delta \bar{N}_c^3, \Delta \bar{N}_s^3, \dots, \Delta \bar{N}_c^N, \Delta \bar{N}_s^N)_j \\ \Delta \hat{N}_j &= {}^t(\Delta \hat{N}_c^1, \Delta \hat{N}_s^1, \Delta \hat{N}_c^3, \Delta \hat{N}_s^3, \dots, \Delta \hat{N}_c^N, \Delta \hat{N}_s^N)_j \\ \Delta N_j &= {}^t(\Delta N_c^1, \Delta N_s^1, \Delta N_c^3, \Delta N_s^3, \dots, \Delta N_c^N, \Delta N_s^N)_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.28)$$

また、取扱う行列についても次元が約半分に縮小される。このとき、式(2.12)の  $U$  および式(2.20)、式(2.21)の  $A_{pj}^q$ 、 $B_{pj}^q$  は、それぞれ次式のようになる。

$$U = \text{Diag}[U_1, U_3, U_5, \dots, U_N] \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{pj}^q &= \begin{bmatrix} A^2 & A^4 & \dots & A^{N+1} \\ {}^t A^4 & A^6 & \dots & A^{N+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t A^{N+1} & {}^t A^{N+3} & \dots & A^{2N} \end{bmatrix}_{pj} \\ B_{pj}^q &= \begin{bmatrix} B^0 & B^2 & \dots & B^{N-1} \\ {}^t B^2 & B^0 & \dots & B^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t B^{N-1} & {}^t B^{N-3} & \dots & B^0 \end{bmatrix}_{pj} \end{aligned} \right\} (q=1, 2) \dots\dots\dots(2.30)$$

後述するその他の行列やベクトルについても、これらと同様の操作を行うことにより次元を約半分に縮小できる。

**2・1・7 分数調波振動の解析** 本章のアルゴリズムにより、 $1/L$  次分数調波振動 ( $L$  は正整数) の解析も同様に行うことができる。すなわち、 $\omega t = \tau$  の代わりに  $\omega t/L = \tau'$  のような変数変換を行い、 $\tau'$  について  $2\pi$  周期の解を求めればよい。その具体的な計算手順は通常のものと同様である。

**2・1・8 調和バランス法の適用** 節点  $j$  の増分量に関する運動方程式(2.2)、およびその残差を与える式(2.3)に式(2.6)、式(2.10)、式(2.11)および式(2.13)～式(2.16)を代入し、さらに調和バランスの原理を適用することにより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 U^2 \Delta y_j + \Delta \bar{F}_j + \Delta \hat{F}_j - \Delta F_j &= r_j \\ \hat{J}_j \omega^2 U^2 \Delta \theta_j + \Delta \bar{N}_j + \Delta \hat{N}_j - \Delta N_j &= q_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} r_j &= \phi_j - \hat{m}_j \omega^2 U^2 y_j - \bar{F}_j - \hat{F}_j + F_j \\ q_j &= \psi_j - \hat{J}_j \omega^2 U^2 \theta_j - \bar{N}_j - \hat{N}_j + N_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.32)$$

ここに、 $\phi_j$  および  $\psi_j$  は、それぞれ強制外力  $\phi_j^*$  および強制トルク  $\psi_j^*$  を  $N$  次までの実フーリエ級数に展開したときのフーリエ係数をまとめた  $(2N+1)$  次元の振幅ベクトルで

あり、その構造は式(2.7)と同一である。

次に、式(2.19)の関係を考慮して、式(2.8)、式(2.9)および式(2.17)で定義した変位振幅ベクトル、力振幅ベクトルおよびそれらの増分量を用いて式(2.31)および式(2.32)を整理すると、次のようになる。

$$\hat{P}_j \Delta d_j + \Delta \bar{f}_j - \Delta f_j = R_j \dots\dots\dots (2.33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_j &= \hat{K}_j + \hat{M}_j \\ R_j &= \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}_j - \hat{M}_j d_j - \bar{f}_j - \hat{f}_j + f_j \\ \hat{M}_j &= \text{Diag}[\hat{m}_j \omega^2 U^2, \hat{J}_j \omega^2 U^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.34)$$

さて、式(2.33)は、非線形基礎支持要素の存在する節点において、定常振動解の振幅ベクトルをニュートン法により求める際の逐次近似式に相当している。したがって、式(2.33)および式(2.34)に対して  $\bar{f}_j$  および  $f_j$  と  $d_j$  との関係、さらに  $\Delta \bar{f}_j$  および  $\Delta f_j$  と  $\Delta d_j$  との関係、すなわち線形の一様はり両端の状態量ベクトル間関係を求めることができれば、後述のように解析手続きは閉じた形になる。そこで次節では、伝達剛性係数法<sup>(66)</sup>の概念を適用することにより、この関係を極めて能率的に求めるための計算手続きを定式化する。

## 2.2 一様はり要素内部自由度の能率的な消去

**2.2.1 一様はり要素のモデル化** 一様はり要素に対して伝達剛性係数法の概念を適用するにあたり、各一様はり要素をさらに図 2.3 に示すように等分割する。この細分割された要素を基本要素と呼ぶ。基本要素はいずれも左右対称な集中系としてモデル化する。すなわち、基本要素の重心に関する慣性特性値はその両端に等分割し、両端間は質量のない弾性はりで結合されているとみなす。

ここに、 $m$  および  $J$  は基本要素両端に等分された質量および慣性モーメント、 $l$  および  $A$  は基本要素の長さおよび断面積、 $EI$  は曲げ剛性、 $\kappa$  および  $G$  は断面形状係数および横弾性係数を示す。

ところで、非線形支持されたはり構造物を取扱う場合には、一様はり要素自体の構

造減衰を考慮することは困難である。なぜなら、構造減衰を考慮すると状態量が本質的に複素量になり、非線形要素の物理量との対応が不適合となるからである。そこで本節では一様はりの分布粘性減衰を考慮した場合の取扱いについて論じる。分布粘性減衰の集中系へのモデル化にあたっては、一様はりの並進および回転に関する単位長さあたりの分布粘性減衰係数を  $(c^d, C^d)$  としたとき、一基本要素あたり  $(c^c, C^c) = (c^d l/2, C^d l/2)$  の等価な集中粘性減衰係数が基本要素の両端に等分されているものとする。

なお、本節の議論では、煩雑をさけるため  $j$  番め一様はり要素であることを示す右下添字「 $j$ 」を省略する。

2.2.2 自己および相互動的剛性係数行列 上記の仮定のもとで図 2.3 の力の作用図を参考にするると、基本要素両端における集中質量の運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M'\ddot{d}^{*L} + C'\dot{d}^{*L} &= \tilde{f}^{*L} - f^{*L} \\ M'\ddot{d}^{*R} + C'\dot{d}^{*R} &= f^{*R} - \tilde{f}^{*R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.35)$$

$$\left. \begin{aligned} M' &= \text{diag}[m, J] \\ C' &= \text{diag}[c^c, C^c] \\ d^{*L} &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}^{*L}, \quad f^{*L} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}^{*L}, \quad \tilde{f}^{*L} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}^{*L} \\ d^{*R} &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}^{*R}, \quad f^{*R} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}^{*R}, \quad \tilde{f}^{*R} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}^{*R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.36)$$

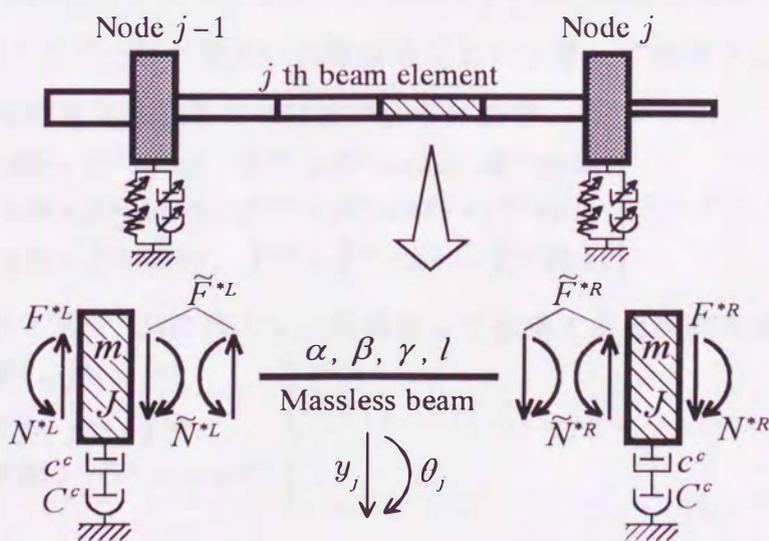


図 2.3 一様はり要素の解析モデルと基本要素

ここで、非線形基礎支持節点での解と対応させるために、式(2.35)の解を次のような  $N$  次までの有限実フーリエ級数で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} d^{*L} &= E_2 d^L, \quad d^{*R} = E_2 d^R \\ f^{*L} &= E_2 f^L, \quad f^{*R} = E_2 f^R \\ \tilde{f}^{*L} &= E_2 \tilde{f}^L, \quad \tilde{f}^{*R} = E_2 \tilde{f}^R \\ E_2 &= [I_2/2, I_2 \cos \tau, I_2 \sin \tau, \dots, I_2 \cos N\tau, I_2 \sin N\tau] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.37)$$

ここに、 $I_2$  は 2 次の単位行列を表し、 $E_2$  は  $2 \times 2(2N+1)$  次実行列である。また、 $d^L, d^R, f^L, f^R, \tilde{f}^L$  および  $\tilde{f}^R$  は  $2(2N+1)$  次元実行ベクトルであり、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} d^L &= {}^t ({}^t d_c^0, {}^t d_c^1, {}^t d_s^1, \dots, {}^t d_c^N, {}^t d_s^N)^L \\ d^R &= {}^t ({}^t d_c^0, {}^t d_c^1, {}^t d_s^1, \dots, {}^t d_c^N, {}^t d_s^N)^R \\ f^L &= {}^t ({}^t f_c^0, {}^t f_c^1, {}^t f_s^1, \dots, {}^t f_c^N, {}^t f_s^N)^L \\ f^R &= {}^t ({}^t f_c^0, {}^t f_c^1, {}^t f_s^1, \dots, {}^t f_c^N, {}^t f_s^N)^R \\ \tilde{f}^L &= {}^t ({}^t \tilde{f}_c^0, {}^t \tilde{f}_c^1, {}^t \tilde{f}_s^1, \dots, {}^t \tilde{f}_c^N, {}^t \tilde{f}_s^N)^L \\ \tilde{f}^R &= {}^t ({}^t \tilde{f}_c^0, {}^t \tilde{f}_c^1, {}^t \tilde{f}_s^1, \dots, {}^t \tilde{f}_c^N, {}^t \tilde{f}_s^N)^R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} d_c^{kL} &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_c^{kL}, \quad d_s^{kL} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_s^{kL}, \quad d_c^{kR} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_c^{kR}, \quad d_s^{kR} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_s^{kR} \\ f_c^{kL} &= \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_c^{kL}, \quad f_s^{kL} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_s^{kL}, \quad f_c^{kR} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_c^{kR}, \quad f_s^{kR} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_s^{kR} \\ \tilde{f}_c^{kL} &= \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_c^{kL}, \quad \tilde{f}_s^{kL} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_s^{kL}, \quad \tilde{f}_c^{kR} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_c^{kR}, \quad \tilde{f}_s^{kR} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_s^{kR} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.39)$$

一様はり要素は線形であると仮定しているので、非線形基礎支持節点における解は、一様はりの内部ではフーリエ級数の次数成分ごとに分離して取扱うことができる。そ

こで、式(2.35)の解を次数成分ごとに次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} d^{*kL} &= d_c^{kL} \cos k\tau + d_s^{kL} \sin k\tau, \quad d^{*kR} = d_c^{kR} \cos k\tau + d_s^{kR} \sin k\tau \\ f^{*kL} &= f_c^{kL} \cos k\tau + f_s^{kL} \sin k\tau, \quad f^{*kR} = f_c^{kR} \cos k\tau + f_s^{kR} \sin k\tau \\ \tilde{f}^{*kL} &= \tilde{f}_c^{kL} \cos k\tau + \tilde{f}_s^{kL} \sin k\tau, \quad \tilde{f}^{*kR} = \tilde{f}_c^{kR} \cos k\tau + \tilde{f}_s^{kR} \sin k\tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.40)$$

さらに式(2.40)を式(2.35)に代入し、複素化して整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (M^k + C^k)d^{kL} &= \tilde{f}^{kL} - f^{kL} \\ (M^k + C^k)d^{kR} &= f^{kR} - \tilde{f}^{kR} \\ M^k &= -(k\omega)^2 M', \quad C^k = -ik\omega C' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.41)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} d^{kL} &= d_c^{kL} + i d_s^{kL}, & d^{kR} &= d_c^{kR} + i d_s^{kR} \\ f^{kL} &= f_c^{kL} + i f_s^{kL}, & f^{kR} &= f_c^{kR} + i f_s^{kR} \\ \tilde{f}^{kL} &= \tilde{f}_c^{kL} + i \tilde{f}_s^{kL}, & \tilde{f}^{kR} &= \tilde{f}_c^{kR} + i \tilde{f}_s^{kR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.42)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ であり、式(2.41)は一様はり要素の分布粘性減衰を考慮した場合の基本要素両端における動的な力のつり合いを表している。

一方、基本要素のはり要素両端における状態量ベクトル間の関係は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} d^{kR} &= {}^t L d^{kL} + F \tilde{f}^{kR} \\ \tilde{f}^{kL} &= L \tilde{f}^{kR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.43)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}, & F &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \\ (\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{\kappa GA}, \frac{l}{EI}, \frac{l^2}{2EI} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.44)$$

ここに、 $\alpha, \beta, \gamma$ は弾性はり要素を片持ちばりとみなした場合の静的影響係数、 $EI$ は曲げ剛性、 $\kappa, G$ および $A$ は断面形状係数、横弾性係数および断面積である。

式(2.41)および式(2.43)から $\tilde{f}^{kL}$ および $\tilde{f}^{kR}$ を消去することにより、基本要素の左端の状態量ベクトル $d^{kL}, f^{kL}$ と右端の状態量ベクトル $d^{kR}, f^{kR}$ との間の関係として、次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} f^{kR} &= S^{ka} d^{kR} + S^{kc} d^{kL} \\ f^{kL} &= s^{kc} d^{kR} + s^{ka} d^{kL} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.45)$$

ここに、 $S^{ka}, s^{ka}$ を自己動的剛性係数行列、 $S^{kc}, s^{kc}$ を相互動的剛性係数行列と呼び、それぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} S^{ka} &= \begin{bmatrix} A^k & \gamma' \\ \gamma' & B^k \end{bmatrix}, & s^{ka} &= \begin{bmatrix} -A^k & \gamma' \\ \gamma' & -B^k \end{bmatrix} \\ S^{kc} &= -{}^t s^{kc} = -\begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma' l \end{bmatrix} \\ A^k &= \alpha' - m(k\omega)^2 - ik\omega C^c \\ B^k &= \beta' - J(k\omega)^2 - ik\omega C^c \\ (\alpha', \beta', \gamma') &= \left( \frac{\beta}{D}, \frac{\alpha}{D}, -\frac{\gamma}{D} \right) \\ D &= \alpha\beta - \gamma^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.46)$$

**2・2・3 直列結合則** 複数の基本要素を直列かつ剛に結合することによって構成される一様はり要素内部の部分系を分系と呼ぶ。分系は明らかに左右対称である。

いま,分系 A の右端に分系 B を直線的かつ剛に結合して新たな分系 C を構成することを考える. この結合過程においても, 自己および相互動的剛性係数行列の結合計算は次数成分ごとに分離することが可能である. このとき, 分系 A と分系 B の両端の第  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列を求めるための直列結合則は次のように求められる. ただし, 各分系に関する物理量を下添字「A, B, C」により区別する.

まず, 分系 A と分系 B の第  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列が既知であり, 両分系の両端における状態量ベクトルが次のように表されているものとする.

$$\left. \begin{aligned} f_A^{kR} &= S_A^{ka} d_A^{kR} + S_A^{kc} d_A^{kL}, & f_A^{kL} &= s_A^{kc} d_A^{kR} + s_A^{ka} d_A^{kL} \\ f_B^{kR} &= S_B^{ka} d_B^{kR} + S_B^{kc} d_B^{kL}, & f_B^{kL} &= s_B^{kc} d_B^{kR} + s_B^{ka} d_B^{kL} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.47)$$

両分系の結合は剛であるので, 結合部における状態量ベクトル間の関係は  $d_A^{kR} = d_B^{kL}$  および  $f_A^{kR} = f_B^{kL}$  で与えられる. また, 両分系と結合後の分系 C の状態量ベクトル間の関係は, 明らかに  $d_C^{kL} = d_A^{kL}, d_C^{kR} = d_B^{kR}$  および  $f_C^{kL} = f_A^{kL}, f_C^{kR} = f_B^{kR}$  である. これらの関係を用いて式(2.47)から結合部の状態量  $d_A^{kR}, d_B^{kL}, f_A^{kR}$  および  $f_B^{kL}$  を消去することにより, 自己および相互動的剛性係数行列の直列結合則として次式を得る. これは, 分系 A と分系 B の  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列  $S_A^{ka}, S_A^{kc}, s_A^{ka}, s_A^{kc}$  および  $S_B^{ka}, S_B^{kc}, s_B^{ka}, s_B^{kc}$  から分系 C の  $k$  次の自己および相互動的剛性係数行列  $S_C^{ka}, S_C^{kc}, s_C^{ka}, s_C^{kc}$  を求めるための関係式である.

$$\left. \begin{aligned} S_C^{ka} &= {}^t S_C^{ka} = S_B^{ka} + S_B^{kc} T_{AB}^k s_B^{kc} \\ S_C^{kc} &= -{}^t s_C^{kc} = -S_B^{kc} T_{AB}^k S_A^{kc} \\ s_C^{ka} &= {}^t s_C^{ka} = s_A^{ka} - s_A^{kc} T_{AB}^k S_A^{kc} \\ T_{AB}^k &= {}^t T_{AB}^k = (S_A^{ka} - s_B^{ka})^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.48)$$

この直列結合則は, 以下に示すような計算能率上極めて有利な種々の特長を有している.

- (1) 基本要素を出発点とする帰納法により,  $S_C^{ka} = {}^t S_C^{ka}, s_C^{ka} = {}^t s_C^{ka}$  および  $S_C^{kc} = -{}^t s_C^{kc}$  なる関係が成立する.
- (2) 直列結合によって得られる分系 C は明らかに左右対称なので,  $S_C^{ka}$  と  $s_C^{ka}$  の要素間および  $S_C^{kc}$  と  $s_C^{kc}$  の要素間はそれぞれ対角要素の符号のみが異なる. したがって, これらの内のいずれか一方のみを計算すればよい.
- (3) 分系 A と分系 B が同一であれば式(2.48)に示した直列結合計算において, 結合後の自己および相互動的剛性係数行列  $S_C^{ka}$  と  $S_C^{kc}$  の要素には共通項がかなり多く存在

する。したがって、いずれか一方の要素のみを計算すればよく、上記(2)の性質も考慮すれば結合計算が簡潔かつ能率的になる(付録1参照)。

(4) 基本要素から一様はりを再構成する際、2個の同一な分系 A, B を直列結合して得られる分系 C を新たな同一分系 A, B として、これらを再度結合するというように直列結合則を再帰的に適用すれば、一様はり両端間の自己および相互動的剛性係数行列を効率よく計算することができる。また、この場合には上記(2)および(3)の性質も同時に成立するので、計算のさらなる高速化が実現できる。したがって、一様はりの基本要素への分割数は、2のべき乗個とするのが最適である。

以上のように、上記の直列結合則を適用することによって、非常に少ない計算量ではりの内部節点の自由度を消去して、一様はり両端の状態量間の関係を求めることができる。ただし、内部自由度の消去過程そのものには近似が含まれていないので、これにより計算精度が損なわれることはない。

**2・2・4 一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係** 各一様はり要素に対して次数成分ごとに前節の直列結合則を再帰的に適用することにより、一様はり要素内部の自由度は完全に消去される。その結果、節点  $j-1$  と節点  $j$  の間における  $j$  番め一様はり要素の両端における複素状態量ベクトル間の関係が、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j^k &= S_j^{ka} d_j^k + S_j^{kc} d_{j-1}^k \\ f_{j-1}^k &= s_j^{kc} d_j^k + s_j^{ka} d_{j-1}^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.49)$$

一様はり要素両端間の自己および相互動的剛性係数行列  $S_j^{ka}, S_j^{kc}, s_j^{ka}, s_j^{kc}$  を求めるまでの一様はり要素内部の計算には、前項で示したように複素量を用いた方が便利であり、しかも能率的である。一方、式(2.33)の計算に利用するには、これらを次式により実数表示に変換する必要がある。ただし、下添字「 $r$ 」および「 $i$ 」は、それぞれ対応する変数の実部および虚部を示す。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{f}_c \\ \bar{f}_s \end{bmatrix}_j^k &= \begin{bmatrix} S_r^a & -S_i^a \\ S_i^a & S_r^a \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k + \begin{bmatrix} S_r^c & -S_i^c \\ S_i^c & S_r^c \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_{j-1}^k \\ \begin{bmatrix} f_c \\ f_s \end{bmatrix}_{j-1}^k &= \begin{bmatrix} s_r^c & -s_i^c \\ s_i^c & s_r^c \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_j^k + \begin{bmatrix} s_r^a & -s_i^a \\ s_i^a & s_r^a \end{bmatrix}_j^k \begin{bmatrix} d_c \\ d_s \end{bmatrix}_{j-1}^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.50)$$

さらに、式(2.8)および式(2.17)で定義される各節点の変位振幅ベクトルおよび力振幅ベクトルの構造に適合するように、式(2.50)を  $k=0, 1, \dots, N$  について再構成すること

により，次式を得る．

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= S_j^a d_j + S_j^c d_{j-1} \\ f_{j-1} &= s_j^c d_j + s_j^a d_{j-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.51)$$

一様はり要素は線形であるので，式(2.51)の関係は増分量に対してもまったく同様に成立する．すなわち，

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{f}_j &= S_j^a \Delta d_j + S_j^c \Delta d_{j-1} \\ \Delta f_{j-1} &= s_j^c \Delta d_j + s_j^a \Delta d_{j-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.52)$$

これが一様はり要素に対して求めるべき  $\Delta \bar{f}_j$  および  $\Delta f_j$  と  $\Delta d_j$  との関係である．

### 2.3 増分伝達剛性係数法の定式化

2.3.1 増分変位振幅ベクトルの計算式 式(2.33)および式(2.52)から増分力振幅ベクトル  $\Delta \bar{f}_j$  および  $\Delta f_j$  を消去し，さらに  $j=0, 1, \dots, n$  について整理することにより，修正量としての増分変位振幅ベクトル  $\Delta d_j$  を求めるための連立線形方程式が，次のように求められる．

$$Q \Delta d = R \dots\dots\dots (2.53)$$

ここに， $Q$  は次式に表されるような  $2(2N+1)(n+1)$  次元ブロック三重対角行列， $\Delta d$  は  $2(2N+1)(n+1)$  次元ベクトルである．

$$Q = \left. \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{S}_0 & -s_1^c & 0 & \dots & 0 \\ S_1^c & \hat{S}_1 & -s_2^c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & S_{n-1}^c & \hat{S}_{n-1} & -s_n^c \\ 0 & \dots & 0 & S_n^c & \hat{S}_n \end{bmatrix} \\ &\hat{S}_j = \hat{P}_j + S_j^a - s_{j+1}^a, \quad S_0^a = s_{n+1}^a = 0 \\ &\Delta d = {}^t(\Delta d_0, \Delta d_1, \dots, \Delta d_n) \\ &R = {}^t(R_0, R_1, \dots, R_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.54)$$

式(2.53)を用いて  $d + \Delta d \rightarrow d$  なる反復計算を実行することにより，変位振幅ベクトル  $d_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ) が逐次近似計算される．

式(2.53)および式(2.54)において注目すべき点は，一様はり要素内部の自由度が計算精度を損なうことなく完全に消去されて，節点のみの自由度に縮小されていることである．この点だけからみても，一様はり要素の内部自由度をも含む全節点の計算を必

要とする増分調和バランス法<sup>(46)~(48)</sup>や増分伝達影響係数法<sup>(58)~(61)</sup>よりも、本論文の手法はかなりの計算能率の向上が達成されていることがわかる。この点に関しては、2.5.1項で改めて議論する。

一方、式(2.53)の係数行列の $Q$ はブロック三重対角行列であるので、この性質を積極的に活用することによって、計算能率をより一層向上させることができる。そこで、以下では、式(2.53)の解法として伝達影響係数法的な計算法を導入することにより高能率の計算手続きを定式化する。

**2.3.2 漸化形式による高能率計算** 節点 $j$ の左側および右側における増分変位振幅ベクトルと増分力振幅ベクトルとの間の関係を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{f}_j &= \bar{S}_j \Delta d_j + \bar{s}_j \\ \Delta f_j &= S_j \Delta d_j + s_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.55)$$

ここに、 $\bar{S}_j$ および $S_j$ は節点 $j$ より左側の部分構造物の情報をすべて集約した行列で動的剛性係数行列と呼ぶ。また、 $\bar{s}_j$ および $s_j$ は節点 $j$ より左側に作用する強制外力および強制トルクの影響を集約したベクトルで増分力補正ベクトルと呼ぶ。これらの次元はいずれも $2(2N+1)$ である。増分伝達剛性係数法では、まず動的剛性係数行列と増分力補正ベクトルとを系の左端(節点0)から系の右端(節点 $n$ )まで漸化的に伝達計算したのちに、その計算結果を用いて系の右端から左端にかけて増分変位振幅ベクトルを計算する。その伝達計算則は次のように求められる。

**2.3.3 格間格点伝達則の導出** 式(2.52)の下添字 $j$ を $j-1$ に変更した式および式(2.55)から、 $S_{j-1}$ 、 $s_{j-1}$ に基づいて $\bar{S}_j$ 、 $\bar{s}_j$ を計算する一様はり要素両端間の格間伝達則が、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_j &= S_j^a + S_j^c V_j \\ \bar{s}_j &= -S_j^c G_j^{-1} s_{j-1} \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (2.56)$$

$$\left. \begin{aligned} G_j &= S_{j-1} - s_j^a \\ V_j &= G_j^{-1} s_j^c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.57)$$

ただし、 $j=1$ に対する伝達計算の初期値 $S_0$ 、 $s_0$ は、系の左端の条件から次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \hat{P}_0 \\ s_0 &= -R_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.58)$$

次に、式(2.33)および式(2.55)から、 $\bar{S}_j$ 、 $\bar{s}_j$ に基づいて $S_j$ 、 $s_j$ を計算する節点 $j$ の両

側間の格点伝達則が、次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} S_j &= \bar{S}_j + \hat{P}_j \\ s_j &= \bar{s}_j - R_j \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(2.59)$$

さらに、式(2.56)および式(2.59)から  $\bar{S}_j, \bar{s}_j$  を消去することにより、 $S_{j-1}, s_{j-1}$  から  $S_j, s_j$  を計算する格間格点伝達則が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} S_j &= \hat{P}_j + S_j^q + S_j^c V_j \\ s_j &= -S_j^c G_j^{-1} s_{j-1} - R_j \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(2.60)$$

以上のように、式(2.58)を初期値として式(2.60)を伝達計算することにより、動的剛性係数行列  $S_j$  と増分力補正ベクトル  $s_j$  が、それぞれ系の左端から右端にかけて漸化的に求められる。

**2・3・4 増分変位振幅ベクトルの伝達計算** いま、各節点の動的剛性係数行列  $S_j$  と増分力補正ベクトル  $s_j$  がすべて計算されているものとする。系の右端の右側は常に自由 ( $\Delta f_n = 0$ ) とみなせるので、式(2.55)の第2式から  $\Delta d_j$  が次式のように求められる。

$$\Delta d_n = -S_n^{-1} s_n \quad \dots\dots\dots(2.61)$$

また、 $\Delta d_{j-1}$  と  $\Delta d_j$  との関係式が式(2.33)、式(2.52)および式(2.55)から求められ、次式のようになる。

$$\Delta d_{j-1} = V_j \Delta d_j - G_j^{-1} s_{j-1} \quad (j=n, n-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots(2.62)$$

以上により、各節点の増分変位振幅ベクトルは式(2.61)で求められる  $\Delta d_n$  を初期値として、式(2.62)により系の右端から左端にかけて漸化的に計算される。このように、式(2.53)の解  $\Delta d$  が次元の小さな行列を用いた漸化計算により能率的に求められる。

**2・3・5 一様はり要素の内部節点の取扱い** 逐次近似計算により近似解が求められた時点で、一様はり要素の内部節点の変位振幅ベクトルは、各次数成分ごとに次のようにして求められる。

まず、2・2・3項で説明した分系 A と分系 B の両端における状態量間の関係は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} f_A^{kR} &= S_A^{ka} d_A^{kR} + S_A^{kc} d_A^{kL} \\ f_B^{kL} &= s_B^{kc} d_B^{kR} + s_B^{ka} d_B^{kL} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.63)$$

逐次近似計算を開始するにあたり、 $S_A^{ka}, S_A^{kc}, s_A^{ka}, s_A^{kc}$  は既に求められている筈である。いま、分系 A の左端および分系 B の右端の変位振幅ベクトル  $d_A^{kL}, d_B^{kR}$  が既知であるとすれば、 $f_A^{kR} = f_B^{kL}$  であるから、両分系の結合部の変位振幅ベクトル  $d_A^{kR}, d_B^{kL}$  は、式

(2.63)から次のように求められる。

$$d_A^{kR} = d_B^{kL} = T_{AB}^k (s_B^{kc} d_B^{kR} - S_A^{kc} d_A^{kL}) \quad \dots\dots\dots (2.64)$$

よって、式(2.64)を一様はりに対して再帰的に適用することにより、2・2・3 項とは逆の順序で、内部節点の変位振幅ベクトルが次数成分ごとに分離して求められる。

**2・3・6 定数項の取扱い** 増分伝達影響係数法では、系の左端の基礎支持要素に並進と回転に関するばねの少なくとも一方が存在しない構造物の非奇数次解を求める場合、 $\hat{P}_0$ の定数項成分に関する対角要素の数值が零（したがって、 $\hat{P}_0$ は特異行列）となるので、初期値として $\hat{P}_0^{-1}$ が必要な増分伝達影響係数法の伝達計算が不可能となる。この問題を回避するために、増分伝達影響係数法では、並進および回転に関する極めて小さなばね定数の線形ばねが左端の基礎支持要素に仮想的に存在するものとして計算を行っていた。

一方、本報で提案した増分伝達剛性係数法では、式(2.56)および式(2.57)の伝達計算を開始するにあたって $G_1^{-1}$ が必要であるが、 $G_1 = \hat{P}_0 - s_1^q$ 中の $s_1^q$ が正則なので、 $G_1^{-1}$ が問題なく求められる。したがって、定数項成分に対する特別な取扱いを必要とはしない。この点もまた、増分伝達剛性係数法の長所のひとつである。

## 2・4 計算手順のまとめ

以上を整理すると、増分伝達剛性係数法による直線状はり構造物の面内曲げ非線形強制振動の計算手順は、次のようになる。

(1) 与えられた強制外力の角振動数 $\omega$ に対して、2・2・2 項および 2・2・3 項の手順を適用して、各節点間における一様はり要素両端間の自己および相互動的剛性係数行列 $S_j^q, S_j^r, s_j^q, s_j^r$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )を求める。ただし、一様はり要素が同一である場合には、自己および相互動的剛性係数行列もまた同一となるので、いずれか一本の一様はり要素に対してのみこの計算を行えばよい。

(2)  $d_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ )の初期値を仮定する。

(3)  $d_j$ から $\bar{f}_j, \hat{f}_j$ および $f_j$ を計算する。このうち、 $\hat{f}_j$ は基礎支持要素の非線形特性を表す関数形（連続非線形系や断片線形系など）に依存するので、その非線形特性に適した計算方法<sup>(59)</sup>を利用すればよい。また、 $\bar{f}_j, f_j$ の計算は式(2.51)による。

- (4) 各節点において，式(2.34)より  $\hat{P}_j, R_j$  を計算する．
- (5) 2・3・2 項～2・3・4 項の手順により，まず系の左端から右端にかけて  $S_j, s_j$  を伝達計算し，次に修正量としての  $\Delta d_j$  を系の右端から左端にかけて伝達計算する．
- (6)  $\|\Delta d\|$  が収束判定値以下となれば逐次近似計算は収束したものとみなして手順(7)へ．そうでなければ  $d_j + \Delta d_j$  を新たな初期値  $d_j$  として手順(3)へ戻る．
- (7) 必要があれば式(2.64)を利用して一様はりの内部節点の変位振幅ベクトルを求める．
- (8) 新しい  $\omega$  を設定して手順(1)へ戻る．

上記の手順からも分かるように，本章で定式化した手法では，最も大きな計算量を必要とする手順(3)～手順(6)の間の反復計算のループから，一様はり要素内部の節点に関する計算が完全に除去されている．また，手順(1)における一様はり要素の内部節点の自由度消去計算においても，各次数成分ごとに分離したうえで，直列結合則の能率的な伝達計算則が導入されている．さらに，反復計算ループ(3)～(6)の中では計算量の最も大きな手順(5)の  $\Delta d_j$  の伝達計算過程に対しても，漸化形式による能率的な計算方法を導入することにより，計算量と必要なメモリ量の両面で効率化が図られている．このように，本章で提案した手法は，計算手続きの各段階で計算能率向上のための可能な限りの対策が施された手法であるといえる．

一方，計算精度の面では，一様はり要素の内部節点の自由度を消去しない増分伝達影響係数法の計算精度と原理的にはまったく同等であり，近似解の最高次数の設定次第で任意の精度の近似解を求めることができる．

## 2・5 必要な計算量（計算能率）に関する検討

**2・5・1 計算量の理論的検討** 増分伝達剛性係数法の計算量を定量的に把握するための一つの目安として，2・4節の手順(5)の  $\Delta d_j$  の計算に用いられる線形連立代数方程式の元数と反復計算1回あたりにその方程式を解くべき回数とを，増分調和バランス法 (IHBM)，増分伝達影響係数法 (ITICM) および増分伝達剛性係数法 (ITSCM) の間で比較する．2・4節でも述べたように，逐次近似計算過程においてはこの  $\Delta d_j$  の計算が最も大きな計算量を必要とする．したがって， $\Delta d_j$  の計算量を比較することに

より、各手法の全体的な計算能率の概算値を比較することができる。

いま、 $n$ 本の一様はり要素を直線状に結合し、各一様はり要素を $2^m$ 個の基本要素に分割した直線状構造物の逐次近似計算過程における計算量について考える。増分調和バランス法では一様はりの内部節点（この節点数は $(2^m - 1)n$ となる）をも含むすべての節点（したがって、節点総数は $2^m \times n + 1$ ）に対して修正量の計算を一度にまとめて行うので、 $2(2N + 1)(2^m \times n + 1)$ 元の方程式を1回解かなければならない。一方、増分伝達影響係数法と増分伝達剛性係数法は、いずれも節点ごとの伝達計算に分解されるので、方程式の元数は $2(2N + 1)$ となる。ただし、前者では一様はりの内部節点をも含むすべての節点の計算が必要なので $2^m \times n + 1$ 回の計算が必要なのに対して、後者では内部節点を除去した $n + 1$ 個の節点に対する $n + 1$ 回の計算だけでよい。 $\Delta d$ の計算以外に要する計算量は、ITICMとITSCMでほぼ同等であるので、両者の計算速度の比はほぼ連立線形代数方程式の反復計算回数の比に依存する。すなわち、 $[(ITICM)/(ITSCM)]_{CPU\ time} \cong (2^m \times n + 1)/(n + 1)$ となることが予想される。

以上に示した3手法の計算量を表2.1にまとめて示す。本章で対象としている局所的に非線形性が存在するような系では一般に $n$ に比べて内部節点の節点数 $(2^m - 1)n$ が遙かに大きくなること、および線形連立代数方程式の計算量は元数のほぼ3乗に比例すること等を考慮すると、増分伝達剛性係数法における計算能率向上の効果が理解される。

表 2.1 3手法の計算量の比較

	反復計算過程において 取扱う方程式の元数		$\Delta d$ を求めるための 方程式の計算回数
	非奇数次解	奇数次解	
増分調和バランス法	$2(2N + 1)(2^m \times n + 1)$	$2(N + 1)(2^m \times n + 1)$	1
増分伝達影響係数法	$2(2N + 1)$	$2(N + 1)$	$2^m \times n + 1$
増分伝達剛性係数法	$2(2N + 1)$	$2(N + 1)$	$n + 1$

2.5.2 数値計算結果 本章で定式化した増分伝達剛性係数法の計算効率の優位性を検証するために、増分伝達剛性係数法 (ITSCM) と増分伝達影響係数法 (ITICM) との間の計算速度の比較を行った。解析対象とした計算モデルを図 2.4 に示す。計算モデルは、長さ 400 mm、直径 10 mm の中実な一様はり要素  $n$  本を直線状に結合した構造物である。各はり要素はすべて  $2^m$  個の基本要素に等分割した。また、各節点には並進に関する 3 次の連続非線形を考慮した基礎支持要素を配置した。いずれの手法についても、奇数次解用アルゴリズムを用いて 9 次近似解を求めた。図 2.5 および図 2.6 に両手法による計算時間の比を示す。図中の実線は増分伝達剛性係数法 (ITSCM) の計算時間を 1 としたときの増分伝達影響係数法 (ITICM) の計算時間の比を示したものである。また、比較のため、前項に示した連立線形代数方程式の反復計算回数の比の理論値  $(2^m \times n + 1)/(n + 1)$  を破線で示す。図 2.5 は  $m$  (分割数) を固定して  $n$  (はり本数) を変化させたときの計算時間の比、図 2.6 は  $n$  を固定して  $m$  を変化させたときの計算時間の比を表している。図 2.5 および図 2.6 いずれの場合においても、増分伝達剛性係数法の計算能率の優位性が確認される。とくに分割数  $m$  の増大にともなって計算速度の差は急速に拡大することがわかる。さらに、計算時間の実測値 (実線) と理論値 (破線) とを比較すると、前者の方が ITSCM の速度向上率がより大きくなっている。なお、増分調和バランス法によって同様の計算を行おうとしたとき、図 2.5 および図 2.6 程度の計算でも  $m$  および  $n$  の増大にともなって、必要なメモリ量や計算時間の問題で、実際の計算が不能となる。以上のことから、2.5.1 項にも述べたように、増分伝達影響係数法が増分調和バランス法などに比べて十分高速化されている手法であることを考慮すれば、増分伝達剛性係数法が大規模構造物の非線形振動解析に対して計算能率の面で非常に有利な手法であることが確認される。

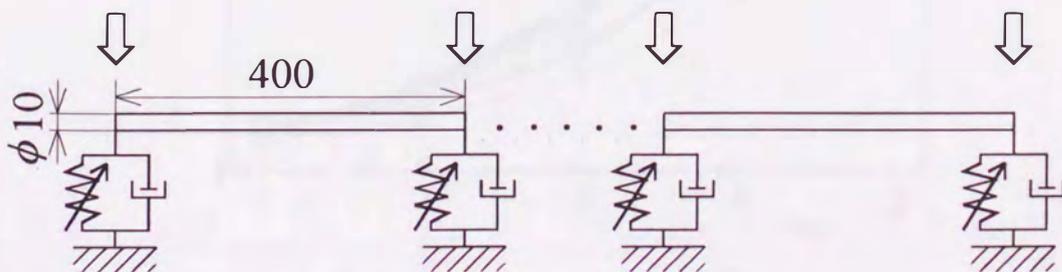


図 2.4 計算モデル 2-1

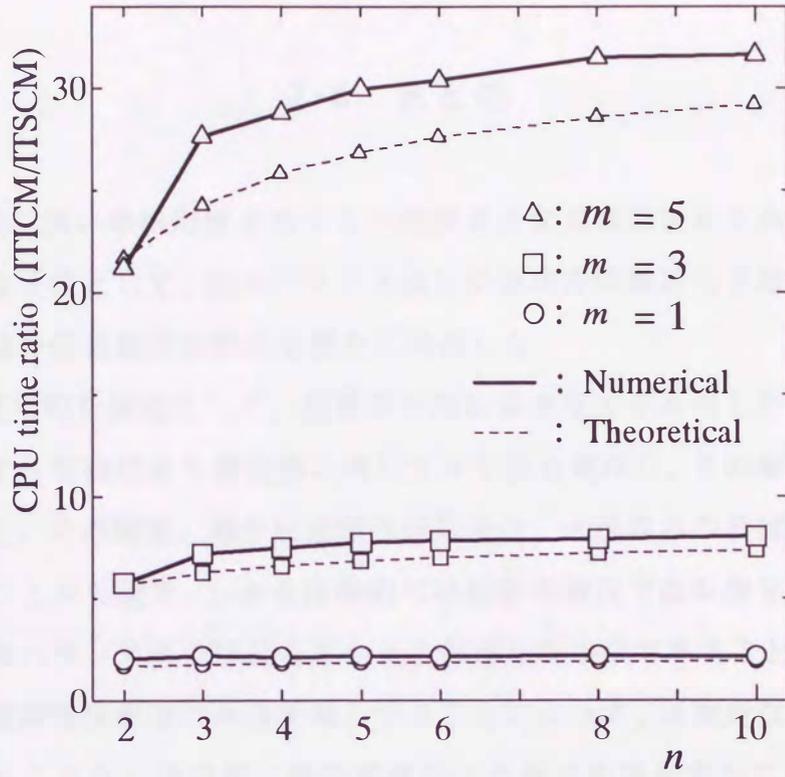


図 2.5 ITSCM と ITICM の計算時間の比

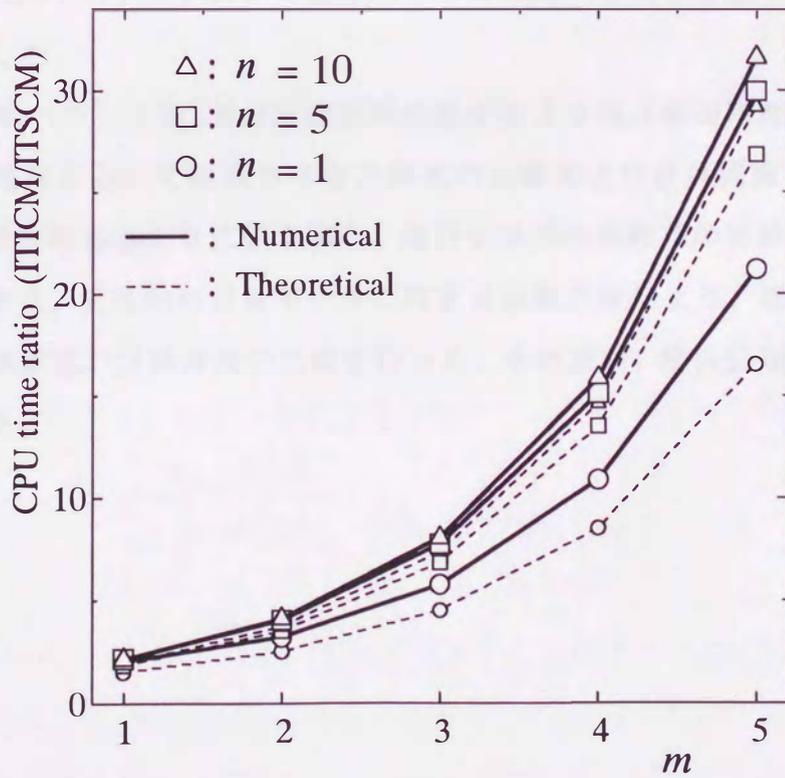


図 2.6 ITSCM と ITICM の計算時間の比

## 2・6 まとめ

(1) 局所的に強い非線形性を有する大規模系の定常周期振動を高速かつ任意の精度で解析可能な手法として、調和バランス法と伝達剛性係数法とを増分法概念を介して結合した増分伝達剛性係数法を新たに開発した。

(2) 最も基本的な例題として、配管系や回転軸系をモデル化した複数個の非線形支持要素を有する直線状はり構造物に対して本手法を適用し、その解析アルゴリズムの詳細を示した。その結果、増分伝達剛性係数法は、大規模系や多様な非線形性に柔軟に対応することが可能で、しかも原理的には任意の精度で近似解を求めることができるという調和バランス法の特長をそのまま保持した手法であることを示した。また、計算過程に伝達剛性係数法概念を導入することによって、逐次近似計算過程から計算精度を損なうことなく高能率に線形要素内の内部自由度を完全に消去するとともに、漸化形式による能率的な計算法を導入した。このように、大規模非線形系の定常周期解の計算に対して、本手法が可能な限りの計算能率の向上を図ったものであることを明らかにした。

(3) 増分調和バランス法、増分伝達影響係数法および増分伝達剛性係数法の間で、逐次近似計算過程において取扱うべき方程式の元数および計算回数を比較することにより、計算能率の理論的な比較を試み、増分伝達剛性係数法の計算能率向上の効果を確認した。また、具体的な計算モデルに対する数値計算により、増分伝達剛性係数法と伝達影響係数法の計算速度の比較を行った。その結果、増分伝達剛性係数法の優位性を実証した。

## 第3章 低次元化モデルによる安定判別法

前章で定式化を行った増分伝達剛性係数法では，その論理的基盤の一つである調和バランス法の性質から，安定解と不安定解とはまったく同等に近似計算される．このことは，非線形系の複雑な解構造の全体的な様相を明らかにするという観点からは非常に有意義なことであるが，工学的な見地からは得られた解の安定性を知ることが非常に重要な課題となる．したがって，得られた近似解に対して必ず安定判別を行う必要がある．

近似解（非線形系の定常周期振動解）の無限小安定性は，近似解に対する変分方程式の零解の安定性問題に帰着される．定常周期振動解に対しては変分方程式は周期係数型の連立線形常微分方程式となり，その零解の安定性は，フローケの定理<sup>(11)</sup>に基づいて，原理的には変分方程式に付随する特性乗数または特性指数を求めることによって判別することができる．しかしながら，大規模系に対してこれらを数値的に求めることは，計算量および計算精度の両面から事実上不可能であることが多い．そこで，大規模系に対して自由度の適切な低減化処理を導入することにより，上記のような難点を克服することが期待される．

以上のような観点から，本章では，変分方程式の安定性解析にモード解析の概念を援用することによって，安定判別のための適切な低次元化モデルを合理的に作成する方法を提案する．その際，2種類の実固有モードおよび1種類の複素固有モードの計3種類のモードを利用して低次元化モデルを構成する方法について定式化する．

### 3.1 解析モデルと運動方程式

**3.1.1 解析モデル** 本章においても，図3.1に示すような非線形支持された $n$ 本の一様断面真直はりに，複数の同一周期を有する調和強制外力が作用する場合の面内曲げ強制振動を解析の対象とする．なお，以下で使用する記号の物理的意味および装飾記号や添字の使用法は，とくに断ることがない限り，前章と同様である．

3・1・2 節点  $j$  の運動方程式 節点  $j$  における剛体重心の横変位  $y_j^*$ , 角変位  $\theta_j^*$ , 剛体に作用する力 ( $\bar{F}_j^*, \hat{F}_j^*, F_j^*, \phi_j^*$ ) および力のモーメント ( $\bar{N}_j^*, \hat{N}_j^*, N_j^*, \psi_j^*$ ) の正方向は前章と同様に図 3.2 に示す通りである。このとき, 節点  $j$  ( $= 0, 1, \dots, n$ ) における剛体の並進と回転に関する運動方程式は,

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 \ddot{y}_j^* + \bar{F}_j^* + \hat{F}_j^* - F_j^* &= \phi_j^* \\ \hat{J}_j \omega^2 \ddot{\theta}_j^* + \bar{N}_j^* + \hat{N}_j^* - N_j^* &= \psi_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

となる。ここに, 「 $\cdot$ 」 $= d/d\tau$ ,  $\hat{m}_j, \hat{J}_j$  はそれぞれ剛体の質量および慣性モーメントである。

### 3・2 安定判別に関する基礎的事項と問題点

図3.1の解析モデルに対して, 前章で定式化した増分伝達剛性係数法を適用することにより, 定常周期振動の近似解  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  が求められているものとする。この近似解  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  に対する微小変分をそれぞれ  $\delta y_j^*$  および  $\delta \theta_j^*$  とし, それに基づく力および力

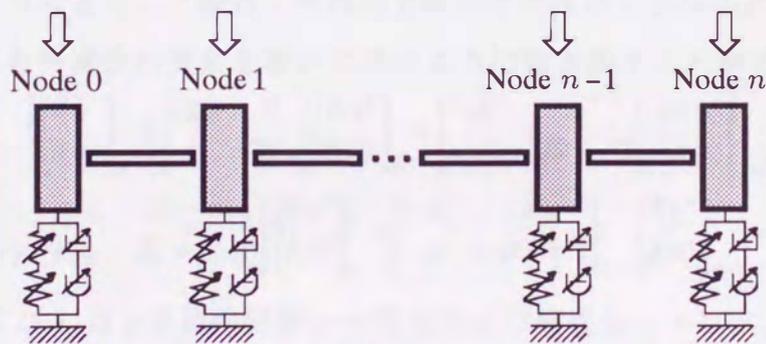


図 3.1 直線状はり構造物の解析モデル

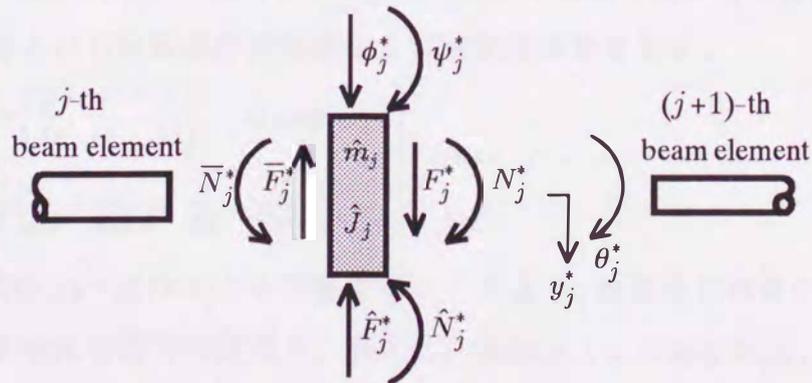


図 3.2 剛体  $j$  の変位および作用する力と力のモーメントの正方向の定義

のモーメントの微小変分をそれぞれ  $(\delta \bar{F}_j^*, \delta \hat{F}_j^*, \delta F_j^*)$  および  $(\delta \bar{N}_j^*, \delta \hat{N}_j^*, \delta N_j^*)$  で表すものとするれば、式(3.1)の  $y_j$  および  $\theta_j$  に関する変分方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{m}_j \omega^2 \delta \ddot{y}_j^* + \delta \bar{F}_j^* + \delta \hat{F}_j^* - \delta F_j^* &= 0 \\ \hat{J}_j \omega^2 \delta \ddot{\theta}_j^* + \delta \bar{N}_j^* + \delta \hat{N}_j^* - \delta N_j^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \delta \hat{F}_j^* &= \hat{V}_{1j}^* \delta y_j^* + \hat{W}_{1j}^* \delta \dot{y}_j^* \\ \delta \hat{N}_j^* &= \hat{V}_{2j}^* \delta \theta_j^* + \hat{W}_{2j}^* \delta \dot{\theta}_j^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{1j}^* &= \frac{\partial \hat{F}_j^*}{\partial y_j^*}, \quad \hat{W}_{1j}^* = \frac{\partial \hat{F}_j^*}{\partial \dot{y}_j^*} \\ \hat{V}_{2j}^* &= \frac{\partial \hat{N}_j^*}{\partial \theta_j^*}, \quad \hat{W}_{2j}^* = \frac{\partial \hat{N}_j^*}{\partial \dot{\theta}_j^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

一方、一様はり要素を等分割した基本要素を、並進と回転に関する慣性特性値を有する集中質量と質量のない弾性はり要素とからなる集中系でモデル化したとき、集中質量に関する変分方程式は、形式的に式(3.2)から  $\delta \hat{F}_j^*$  および  $\delta \hat{N}_j^*$  を除去した式で与えられる。また、質量のない弾性はり要素両端間での力および力のモーメントの釣り合いを考慮することにより、一様はり要素の  $p$  番め内部節点における変分方程式は、集中質量の横変位と角変位の変分を用いて次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_p \omega^2 & 0 \\ 0 & J_p \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \ddot{y}^* \\ \delta \ddot{\theta}^* \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} c_p^* \omega & 0 \\ 0 & C_p^* \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \dot{y}^* \\ \delta \dot{\theta}^* \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} -\alpha' & \gamma' \\ -\gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} \delta y^* \\ \delta \theta^* \end{bmatrix}_{p-1} \\ + \begin{bmatrix} \alpha'_p + \alpha'_{p+1} & \gamma'_p - \gamma'_{p+1} \\ \gamma'_p - \gamma'_{p+1} & \beta'_p + \beta'_{p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y^* \\ \delta \theta^* \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} -\alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & -\beta' - \gamma' l \end{bmatrix}_{p+1} \begin{bmatrix} \delta y^* \\ \delta \theta^* \end{bmatrix}_{p+1} = 0 \quad \dots (3.5) \end{aligned}$$

ここに、 $m_p$  および  $J_p$  は  $p$  番め内部節点の質量および慣性モーメント、 $c_p^*$  および  $C_p^*$  は  $p$  番め内部節点に作用する等価集中粘性減衰系数である。また、 $(\alpha', \beta', \gamma')$  は前章と同様に、次式で定義される。ただし、 $l$  および  $A$  は基本要素の長さおよび断面積、 $EI$  は曲げ剛性、 $\kappa$  および  $G$  は断面形状系数および横弾性系数を示す。

$$\left. \begin{aligned} (\alpha', \beta', \gamma') &= \left( \frac{\beta}{D}, \frac{\alpha}{D}, -\frac{\gamma}{D} \right), \quad D = \alpha\beta - \gamma^2 \\ (\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{\kappa GA}, \frac{l}{EI}, \frac{l^2}{2EI} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

この関係と式(3.2)～式(3.4)とを考慮することにより、横変位と角変位の変分によって表現された系全体の変分方程式が、形式的に次のように求められる。

$$\omega^2 M \ddot{\eta}^* + \omega C^* \dot{\eta}^* + K^* \eta^* = 0 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

ここに、 $\eta^* [= \eta^*(\tau)]$ は一様はり要素の内部節点をも含む系内の全節点における横変位と角変位の変分をまとめた変位変分ベクトルであり、総節点数を  $M$  とすれば  $2M$  次元の大規模なベクトルになる。また、質量行列  $M$ 、減衰行列  $C^* [= C^*(\tau)]$  および剛性行列  $K^* [= K^*(\tau)]$  もいずれも  $2M$  次正方行列となり、非常に大規模な行列となる。ただし、これらの行列は一般的な機械や構造物においては対称行列になる場合がほとんどである。また、 $\tau$  について  $2\pi$  周期の定常周期振動に対しては、式(3.4)の  $\hat{V}_{1j}$ 、 $\hat{V}_{2j}$ 、 $\hat{W}_{1j}$ 、 $\hat{W}_{2j}$  もまた  $2\pi$  周期の関数となるので、これらを要素として持つ  $K^*$  および  $C^*$  も  $2\pi$  周期の関数になる。そこで、 $K^*$  および  $C^*$  を次のようなフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} K^* &= K_c^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (K_c^k \cos k\tau + K_s^k \sin k\tau) \\ C^* &= C_c^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_c^k \cos k\tau + C_s^k \sin k\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

周期解  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  の無限小安定性は式(3.7)の零解 ( $\eta^* = 0$ ) の安定性から判別できる。式(3.7)は  $2M$  次元の周期係数型線形常微分方程式であるため、フロークの定理<sup>(11)</sup>を適用することができる。それによれば、式(3.7)は次のような基本解を持ち、一般解は基本解の線形結合で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta^*(\tau) &= e^{\mu\tau} \hat{\eta}^*(\tau), \quad \hat{\eta}^*(\tau + 2\pi) = \hat{\eta}^*(\tau) \\ \eta^*(\tau + 2\pi) &= \lambda \eta^*(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

ここに、 $\mu$  は特性指数、 $\lambda$  は特性乗数であり、これらは一般に複素数である。また、式(3.9)から、両者の間には次の関係が成立する。

$$\lambda = e^{2\pi\mu} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2\pi} \ln \lambda \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

フロークの定理に基づいて式(3.7)の零解の安定性、したがって周期解  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  の無限小安定性を判別するには、特性指数  $\mu$  または特性乗数  $\lambda$  を求めることによって判別できる。すなわち、特性指数の実部がすべて負であるか特性乗数の絶対値がすべて1よりも小であれば周期解は安定、そうでなければ一般に不安定と判別することができる。

ところで、特性指数または特性乗数の計算過程では、前章で定式化した増分伝達剛性係数法による周期解の逐次近似計算過程とは異なり、式(3.9)に示すように  $\delta y_j^*$  および  $\delta \theta_j^*$  が  $\tau$  に関する指数関数部と周期関数部の積によって表されることに起因して、一様はり要素の内部節点の自由度を消去することは容易ではない。したがって、原理

的には大規模な自由度を有する式(3.7)をそのまま取扱う必要がある。その際、一般に次のような数値計算上の困難が生じる。

(1) 特性指数は、式(3.8)および周期関数部  $\hat{\eta}^*(\tau)$  をフーリエ級数に展開した式(3.9)の基本解を変分方程式(3.7)に代入し、調和バランスの原理および  $\hat{\eta}^*(\tau) \neq 0$  の非自明な解が存在するための条件から導出される無限次元行列式を、有限次元に近似した特性方程式から求められる。その計算には、一般に元の変分方程式よりもかなり大規模な次元の非対称行列の固有値計算が必要となる<sup>(12)</sup>。

(2) 特性乗数は、1階常微分方程式に変換した変分方程式に対する推移行列(単位行列を初期値とする基本解行列)の固有値として求められる。この推移行列の計算には、一般に大規模かつスティフな常微分方程式の数値積分が必要となる<sup>(4),(13),(14)</sup>。

これら二つの問題(大規模非対称行列の固有値解析および大規模スティフ系の数値積分)は、いずれも数値解析分野の難問であり、現在のところ高速かつ高精度の解法は確立されていないといってよい。したがって、大規模非線形系に対して特性指数や特性乗数を数値的に求めることは、事実上不可能である場合が多い。そこで、以下では、変分方程式の解析にモード解析の概念を援用することによって、なるべく合理的にこの問題を克服する方法、すなわち合理的に変分方程式の次元を縮小する方法を提案する。まず、次節では2種類の実固有モードを利用した次元の縮小法を、さらに、3・4節では複素固有モードを利用した次元の縮小法を示す。

### 3・3 実モードを利用した次元の縮小法

**3・3・1 実モードを利用した次元の縮小法の基本的な考え方** 変分方程式(3.7)は線形ではあるが、係数行列  $K^*$  および  $C^*$  が周期関数であるので、通常モード解析を適用することはできない。なぜなら、 $M$  と  $K^*$  とを同時にかつ完全に対角化し得るような定数行列としてのモード行列を見いだすことは、一般には不可能であるからである。

一方、何らかの方法で、大規模系の解の安定性をよく反映するような少数の変数からなる近似的な部分空間を見いだすことができれば、そのような部分空間に式(3.7)を変数変換(射影)することによって、安定判別に利用する変分方程式の次元を低減

化できるはずである。そこで、もとの  $2M$  次元ベクトル  $\eta^*$  よりも非常に小さい  $M'$  次元ベクトル  $\xi^* [= \xi^*(\tau) = {}^t(\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{M'}^*)$ , 左上添字「 $t$ 」は転置記号] が上述のような部分空間を形成する少数の変数に対応し、 $\eta^*$  と  $\xi^*$  との関係が  $2M \times M'$  の定数行列  $\Phi$  によって次のように表されるものとする。

$$\eta^* = \Phi \xi^* \dots \dots \dots (3.11)$$

さらに、大規模系の変分方程式(3.7)を部分空間に射影する  $M' \times 2M$  の定数行列を  $\Psi$  とすれば、変分方程式(3.7)は次のように低次元化できる。

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \widehat{M} \ddot{\xi}^* + \omega \widehat{C}^* \dot{\xi}^* + \widehat{K}^* \xi^* &= 0 \\ \widehat{M} &= \Psi M \Phi, \quad \widehat{C}^* = \Psi C^* \Phi, \quad \widehat{K}^* = \Psi K^* \Phi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.12)$$

ここに、 $\widehat{M}$ 、 $\widehat{C}^*$  および  $\widehat{K}^*$  は  $M'$  次正方行列である。

上記の方法は、計算精度と計算量の両面から適切であるような定数行列  $\Phi$  および  $\Psi$  を見出すことが出来さえすれば、極めて有効であると考えられる。しかしながら、その難点は、このような  $\Phi$  および  $\Psi$  を決定する方法が確立していないことである。そこで、本節では、変分方程式に実モード解析を援用することによって求められる2種類のモード行列を、上記の  $\Phi$  および  $\Psi$  として用いる方法を提案する。なお、2種類の実モードの優劣については、第5章で数値計算によって比較検討する。

### 3.3.2 線形項モードを用いる方法 (モード I 法)      まず、もっとも基本的な方法

として、変分方程式(3.7)において  $C^* = 0$  および  $\omega = 1$  と置き、式(3.4)の  $\widehat{V}_{1j}^*$ 、 $\widehat{V}_{2j}^*$ 、 $\widehat{W}_{1j}^*$  および  $\widehat{W}_{2j}^*$  の定数項のみを残した次式を考える。

$$M \ddot{\eta}^* + K_0 \eta^* = 0 \dots \dots \dots (3.13)$$

これは、元の系の非線形成分を無視し、線形項のみを考慮した線形化系において、不減衰自由振動を考えることに相当する。

式(3.13)に通常モード解析の手順を適用することにより、次のような一般的な固有値問題が導出される。

$$\left. \begin{aligned} (K_0 - \sigma^2 M) \phi^1 &= 0 \\ \det(K_0 - \sigma^2 M) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.14)$$

仮定により、 $M$  および  $K_0$  は対称行列であるから、式(3.14)から実固有値と対応する実固有ベクトルが求められる。この実固有ベクトルを線形項モードと呼び、最低次から  $M^1 (\ll 2M)$  個の線形項モードを  $\phi_p^1$  ( $p=1, 2, \dots, M^1$ ) で表す。また、 $\phi_p^1$  から構成される  $2M \times M^1$  モード行列を以下のように定義する。

$$\Phi^I = [\phi_1^I, \phi_2^I, \dots, \phi_{M^I}^I] \dots\dots\dots (3.15)$$

ただし、モード行列  $\Phi^I$  は、次のように質量行列  $M$  を介して正規化されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} {}^t\Phi^I M \Phi^I &= I^I, \quad {}^t\Phi^I K_0 \Phi^I = (\Omega^I)^2 \\ \Omega^I &= \text{diag}[\sqrt{\sigma_1^I}, \sqrt{\sigma_2^I}, \dots, \sqrt{\sigma_{M^I}^I}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

ここに、 $I^I$  は  $M^I$  次単位行列である。また、 $\sigma_p^I$  ( $p=1, 2, \dots, M^I$ ) は、式(3.13)から求められる最低次から  $M^I$  個の実固有値であり、式(3.13)で表される線形化系の固有角振動数の 2 乗に相当する。

さて、元の非線形系においても、その系に特有の共振現象は、経験的に式(3.13)で表される線形化系の固有振動数の近傍で発生しがちである。したがって、その際の振動モードは線形項モードと類似している可能性が高い。そこで、線形項モードから構成されるモード行列  $\Phi^I$  を式(3.11)の定数行列  $\Phi$  として利用する方法が考えられる。また、 $\Psi$  としては、式(3.16)の関係を利用するために  ${}^t\Phi^I$  を利用するのが妥当であろう。このように線形項モードを用いる方法をモード I 法と呼び、関連する物理量には上添字「I」を付して区別する。

以上の考察に基づいて、モード I 法では、式(3.12)相当の低次元化方程式が次のように求められる。

$$\omega^2 \ddot{\xi}^I + \omega {}^t\Phi^I C^* \Phi^I \dot{\xi}^I + {}^t\Phi^I K^* \Phi^I \xi^I = 0 \dots\dots\dots (3.17)$$

モード I 法では、低次元化行列  $\Phi^I$  を非線形系の周期解とは独立に求めることができるので、計算能率的には有利である。その反面、周期解の振動形態によらず常に同一の部分空間上に近似してその安定性を議論するわけであるから、安定判別に利用する線形項モードの個数  $M^I$  が小さいときには、振動形態によっては解析の精度が悪化する可能性があることに注意を要する。

なお、後述する周期解の安定性に対する影響度の大きいモードを合理的に抽出する方法を定式化するための準備として、次のような  $M^I$  次元ベクトル  $\xi^I$  を導入する。

$$\xi^I = \Omega^I \xi^I \dots\dots\dots (3.18)$$

さらに、式(3.17)の両辺に左から  $\Omega^I$  を乗じた式に式(3.18)を代入し、式(3.8)をも考慮して整理すると、

$$\omega^2 \ddot{\xi}^I + (\Omega^I)^2 [\omega \widehat{C}^I \dot{\xi}^I + \widehat{K}^I \xi^I] = 0 \dots\dots\dots (3.19)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \widehat{C}^{\cdot 1} &= \widehat{C}_c^{01} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{C}_c^{k1} \cos k\tau + \widehat{C}_s^{k1} \sin k\tau) \\ \widehat{K}^{\cdot 1} &= I^1 + \widehat{K}_c^{01} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{K}_c^{k1} \cos k\tau + \widehat{K}_s^{k1} \sin k\tau) \\ \widehat{K}_c^{01} &= {}^t\widehat{\Phi}^1 (K_c^0 - K_0) \widehat{\Phi}^1 \\ \widehat{K}_c^{k1} &= {}^t\widehat{\Phi}^1 K_c^k \widehat{\Phi}^1, \quad \widehat{K}_s^{k1} = {}^t\widehat{\Phi}^1 K_s^k \widehat{\Phi}^1 \\ \widehat{C}_c^{k1} &= {}^t\widehat{\Phi}^1 C_c^k \widehat{\Phi}^1, \quad \widehat{C}_s^{k1} = {}^t\widehat{\Phi}^1 C_s^k \widehat{\Phi}^1 \\ \widehat{\Phi}^1 &= \Phi^1 (\Omega^1)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.20)$$

3.3.3 定数項モードを用いる方法 (モード II 法) 次に、元の非線形系における周期解の影響を低次元化モデルにも考慮する方法として、式(3.7)において  $C^* = 0$  および  $\omega = 1$  と置き、式(3.8)で定義される  $K^*$  の定数項  $K^0$  のみを残した次式を考える。

$$M\dot{\eta}^* + K^0\eta^* = 0 \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

ここで考慮する  $K^0$  は、式(3.13)の剛性行列  $K_0$  とは一般に異なる。なぜなら、 $K^0$  は元の非線形系の周期解  $y_j^*$  および  $\theta_j^*$  の振動形態に依存する量であるが、 $K_0$  は解析モデルの構成要素および基礎支持特性の線形成分のみによって決定される量で元の非線形系の周期解には依存しないからである。

前項の議論と同様に、式(3.21)に通常モード解析の手順を適用することによって、次のような一般的な固有値問題が導出される。

$$\left. \begin{aligned} (K^0 - \sigma^{\text{II}} M)\phi^{\text{II}} &= 0 \\ \det(K^0 - \sigma^{\text{II}} M) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.22)$$

仮定により、 $M$  および  $K^0$  は対称行列であるから、式(3.22)から実固有値と対応する実固有ベクトルが求められる。この実固有ベクトルを定数項モードと呼び、最低次から  $M^{\text{II}} (<< 2M)$  個の定数項モードを  $\phi_p^{\text{II}} (p=1, 2, \dots, M^{\text{II}})$  で表す。また、 $\phi_p^{\text{II}}$  から構成される  $2M \times M^{\text{II}}$  モード行列を次のように定義する。

$$\Phi^{\text{II}} = [\phi_1^{\text{II}}, \phi_2^{\text{II}}, \dots, \phi_{M^{\text{II}}}^{\text{II}}] \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

ただし、モード行列  $\Phi^{\text{II}}$  は、次のように質量行列  $M$  を介して正規化されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} {}^t\Phi^{\text{II}} M \Phi^{\text{II}} &= I^{\text{II}}, \quad {}^t\Phi^{\text{II}} K^0 \Phi^{\text{II}} = (\Omega^{\text{II}})^2 \\ \Omega^{\text{II}} &= \text{diag}[\sqrt{\sigma_1^{\text{II}}}, \sqrt{\sigma_2^{\text{II}}}, \dots, \sqrt{\sigma_{M^{\text{II}}}^{\text{II}}}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.24)$$

ここに、 $I^{\text{II}}$  は  $M^{\text{II}}$  次単位行列である。また、 $\sigma_p^{\text{II}} (p=1, 2, \dots, M^{\text{II}})$  は、式(3.21)から求められる最低次から  $M^{\text{II}}$  個の実固有値であり、式(3.21)で表される系の固有角振動数の 2

乗に相当する。

ところで、変分方程式(3.7)の零解の安定性は、式(3.21)の系の固有振動数と固有モードに強く影響される。そこで、定数項モードから構成されるモード行列  $\Phi^{\text{II}}$  を式(3.11)の定数行列  $\Phi$  として利用する方法が考えられる。また、 $\Psi$  としては、式(3.24)の関係を利用するために  ${}^t\Phi^{\text{II}}$  を利用するのが妥当であろう。このように定数項モードを用いる方法をモード II 法と呼び、この方法に関する物理量には上添字「II」を付して区別する。

以上の考察に基づいて、モード II 法では、式(3.12)相当の低次元化方程式が次のように求められる。

$$\omega^2 \ddot{\xi}^{\text{II}} + \omega {}^t\Phi^{\text{II}} C^{\text{II}} \dot{\xi}^{\text{II}} + {}^t\Phi^{\text{II}} K^{\text{II}} \xi^{\text{II}} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

また、次項で周期解の安定性に対して影響度の大きいモードの合理的な抽出法を定式化するための準備として、次のような  $M^{\text{II}}$  次元ベクトル  $\xi^{\text{II}}$  を導入する。

$$\xi^{\text{II}} = \Omega^{\text{II}} \xi^{\text{I}} \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

さらに、式(3.25)の両辺に左から  $\Omega^{\text{II}}$  を乗じた式に式(3.26)を代入し、式(3.8)をも考慮して整理すると、

$$\omega^2 \ddot{\xi}^{\text{II}} + (\Omega^{\text{II}})^2 [\omega \widehat{C}^{\text{II}} \dot{\xi}^{\text{II}} + \widehat{K}^{\text{II}} \xi^{\text{II}}] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \widehat{C}^{\text{II}} &= \widehat{C}^{\text{0II}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{C}_c^{k\text{II}} \cos k\tau + \widehat{C}_s^{k\text{II}} \sin k\tau) \\ \widehat{K}^{\text{II}} &= I^{\text{II}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{K}_c^{k\text{II}} \cos k\tau + \widehat{K}_s^{k\text{II}} \sin k\tau) \\ \widehat{K}_c^{k\text{II}} &= {}^t\widehat{\Phi}^{\text{II}} K_c^k \widehat{\Phi}^{\text{II}}, \quad \widehat{K}_s^{k\text{II}} = {}^t\widehat{\Phi}^{\text{II}} K_s^k \widehat{\Phi}^{\text{II}} \\ \widehat{C}_c^{k\text{II}} &= {}^t\widehat{\Phi}^{\text{II}} C_c^k \widehat{\Phi}^{\text{II}}, \quad \widehat{C}_s^{k\text{II}} = {}^t\widehat{\Phi}^{\text{II}} C_s^k \widehat{\Phi}^{\text{II}} \\ \widehat{\Phi}^{\text{II}} &= \Phi^{\text{II}} (\Omega^{\text{II}})^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.28)$$

このように、モード II 法では式(3.27)の  $\widehat{K}^{\text{II}}$  の定数項は完全に対角化され、単位行列  $I^{\text{II}}$  となる。

ところで、モード II 法では、非線形系の周期解が求められることに固有値と低次元化行列  $\Phi^{\text{II}}$  とを計算する必要があるので、モード I 法と比べると計算能率的には不利である。その反面、常に周期解の振動形態を反映した部分空間上に近似してその安定性を議論するわけであるから、安定判別に利用するモードの個数  $M^{\text{II}}$  が  $M^{\text{I}}$  と等しい

ときには、モード I 法よりも高精度であることが期待できる。

**3.3.4 実モードの適切な抽出法** 低次元化モデル作成の際に用いた 1 次から  $M^I$  および  $M^{II}$  次までの実固有モードの中には、解の安定性に及ぼす影響が小さいモードも含まれている可能性がある。そこで、以下のようにしてこれらを除去し、影響の大きなモードのみを抽出することによって、更なる低次元化を実現する。

まず、系内に非線形性が存在しない場合には、剛性に関する行列  $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の 1 次以上の成分  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^I, \hat{K}_{\varepsilon^k}^I$  および  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}, \hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}$  ( $k \geq 1$ ) は明らかに零行列になるので、その要素の絶対値が大きなものほど非線形性の影響が大きいとみなすことができる。なかでも、各モードに及ぼす非線形性の直接的な影響は  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^I, \hat{K}_{\varepsilon^k}^I$  および  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}, \hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}$  の対角要素に現れ、間接的な影響であるモード間の相互作用の大きさはこれらの非対角要素に現れる。そこで、これらの行列の、あるモードに対応する要素の絶対値が基準となる定数項行列（単位行列）の対角要素である 1 に比べて十分に小さな値であれば、安定性に及ぼす影響は小さいとみなしてそのモードを除去してもよいであろう。

また、非線形性の影響は、一般に  $\hat{K}^I$  および  $\hat{K}^{II}$  の高次のフーリエ係数になるほど小さくなる。そこで、ある次数以上の  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^I, \hat{K}_{\varepsilon^k}^I$  および  $\hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}, \hat{K}_{\varepsilon^k}^{II}$  の要素の絶対値がすべて 1 に比べて十分に小さな値であれば、安定性に与える影響は小さいので、それらも除去することができるであろう。

一方、減衰に関する行列  $\hat{C}^I, \hat{C}^{II}$  に関しても、上記と同様にして影響の大きいモードとフーリエ係数の次数を定めることが可能であるが、通常は非線形系の解の安定性に対してもっとも大きい影響を持つと考えられる  $\hat{K}^I, \hat{K}^{II}$  に対して選択されたものに一致させればよい。

以上のように、合理的に抽出された必要最低限のモードおよびフーリエ係数からなる低次元化モデルを再構成することによって、安定判別の精度を悪化させることなく計算能率を劇的に向上させることができる可能性が示された。この考え方の妥当性については、第 5 章において、具体的な数値計算に基づいて検証する。

なお、式(3.13)または(3.21)の実固有値と実固有ベクトルは、第 4 章に述べる伝達剛性係数法を結合した逆反復法により非常に高速かつ高精度に求められるので、低次元化行列  $\Phi^I$  または  $\Phi^{II}$  を求めるために必要な計算量は、低次元化モデルに対する安定判別の計算量よりも通常は少なく済む。そこで、式(3.19)または式(3.27)の導出にあ

たつては、モード個数  $M^I$  または  $M^{II}$  をなるべく大きくとっておき、本項の方法で最終的な低次元化モデルを導出すればよい。

**3.3.5 低次元化モデルに対する安定判別** モード I 法またはモード II 法にモード抽出法を組み合わせることによって、最終的に  $M$  個のモードからなる低次元化方程式が次のように得られたとする（上添字「I」および「II」は省略）。

$$\omega^2 \zeta^* + \Omega^2 [\omega \widehat{C}^* \zeta^* + \widehat{K}^* \zeta^*] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

式(3.29)から特性指数または特性乗数を求めるためには、通常は次のような 1 階の  $2M$  元連立常微分方程式に書き換える必要がある。

$$\zeta'^* = \widehat{A}^* \zeta^* \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \zeta'^* &= \begin{bmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}^* = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 \widehat{K}^* & -\Omega^2 \widehat{C}^* \end{bmatrix} \\ \zeta_1^* &= \zeta^*, \quad \zeta_2^* = \omega \zeta^* \\ \zeta'^* &= e^{\mu \tau} \widehat{\zeta}'^*(\tau), \quad \widehat{\zeta}'^*(\tau + 2\pi) = \lambda \widehat{\zeta}'^*(\tau) \\ \widehat{A}^* &= \widehat{A}_c^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{A}_c^k \cos k\tau + \widehat{A}_s^k \sin k\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.31)$$

特性指数  $\mu$  は、周期関数部  $\widehat{\zeta}'^*(\tau)$  をフーリエ級数に展開した  $\zeta^*$  を式(3.30)に代入し、調和バランスの原理および  $\widehat{\zeta}'^*(\tau) \neq 0$  の非自明な解が存在するための条件から導出される次のような特性方程式から求められる。

$$\det[J - \mu I] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

ここに、 $J$  は一般に  $2M$  よりもかなり大次元の行列になり、次のように式(3.30)の係数行列  $\widehat{A}^*$  のフーリエ係数  $\widehat{A}_c^k$  および  $\widehat{A}_s^k$  から構成される無限次元行列を有限近似したもので与えられる。

$$J = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 - \widehat{A}_I \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

$$\widehat{A}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{2M} & \widehat{A}_c^1 & \widehat{A}_s^1 & \widehat{A}_c^2 & \widehat{A}_s^2 & \dots & \widehat{A}_c^N & \widehat{A}_s^N \\ 0_{2M} & \widehat{A}_c^2 & \widehat{A}_s^2 & \widehat{A}_c^3 & \widehat{A}_s^3 & \dots & \widehat{A}_c^{N+1} & \widehat{A}_s^{N+1} \\ & & -\widehat{A}_c^2 & \widehat{A}_s^3 & -\widehat{A}_c^3 & \dots & \widehat{A}_s^{N+1} & -\widehat{A}_c^{N+1} \\ & & & \widehat{A}_c^4 & \widehat{A}_s^4 & \dots & \widehat{A}_c^{N+2} & \widehat{A}_s^{N+2} \\ & & & & -\widehat{A}_c^4 & \dots & \widehat{A}_s^{N+2} & -\widehat{A}_c^{N+2} \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & \widehat{A}_c^{2N} & \widehat{A}_s^{2N} \\ 0_{2M} & & & & & & & -\widehat{A}_c^{2N} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

(ブロック 対称)





まず、全系の変分方程式(3.7)を次のような $4M$ 元の1階微分方程式に変換する。

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1^* \\ \dot{\eta}_2^* \end{bmatrix} - \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K^* & -C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \end{bmatrix} = 0 \\ & \eta_1^* = \eta^*, \eta_2^* = \omega \dot{\eta}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.42)$$

ここで、前節と同様の考え方で、式(3.42)の零解の安定性をよく反映する部分空間を形成する少数の変数 $\xi^*$ と式(3.42)の ${}^t(\eta_1^*, \eta_2^*)$ との間の関係が $4M \times M'$ の定数行列 $\Phi$ によって次のように表されるものとする。

$$\begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \end{bmatrix} = \Phi \xi^* \dots\dots\dots (3.43)$$

また、変分方程式(3.42)を部分空間に射影する $M' \times 4M$ の定数行列を $\Psi$ とすれば、式(3.42)は次のように $M'$ 次の変分方程式に低次元化できる。

$$\left. \begin{aligned} & B \dot{\xi}^* + A^* \xi^* = 0 \\ & A^* = \Psi \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K^* & -C^* \end{bmatrix} \Phi, \quad B = \Psi \begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.44)$$

3・4・2 複素モードを用いる方法 (モード III 法) 減衰要素による影響を考慮す

るために、式(3.42)において $\omega = 1$ と置き、式(3.8)で定義される $C^*$ の定数項 $C_c^0$ および $K^*$ の定数項 $K_c^0$ を残した次式を考える。

$$\begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1^* \\ \dot{\eta}_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K_c^0 & -C_c^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (3.45)$$

なお、式(3.45)のそれぞれの係数行列は、仮定により対称行列となる。

式(3.45)に通常モード解析の手順を適用することによって、次のような一般的な固有値問題が導出される。

$$\left. \begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K_c^0 & -C_c^0 \end{bmatrix} - \sigma^{\text{III}} \begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \right) \phi^{\text{III}} = 0 \\ & \det \left( \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K_c^0 & -C_c^0 \end{bmatrix} - \sigma^{\text{III}} \begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.46)$$

式(3.46)から複素固有値と対応する複素固有ベクトル (いくつかは実固有値、実固有ベクトルとなり得る) が求められる。ここで求められた固有ベクトルを複素モードと呼び、 $M_R$ 個のすべての実固有ベクトルを $\phi_{pR}^{\text{III}}$  ( $p=1, 2, \dots, M_R$ )、低次から $M_C$ 個の複素固有ベクトルを $\phi_{pC}^{\text{III}}$  ( $p=1, 2, \dots, M_C$ )で表す。ただし、複素固有ベクトル $\phi_{pC}^{\text{III}} [= (\phi_r + i\phi_i)_{pC}^{\text{III}}]$ の共役なベクトルもまた固有ベクトルであり、 $\bar{\phi}_{pC}^{\text{III}} [= (\phi_r - i\phi_i)_{pC}^{\text{III}}]$ で表す。本項ではこのように、同一記号で「-」付きのものは、共役複素数を表すものとする。

また、 $(\phi_r)_{pC}^{III}$  および  $(\phi_i)_{pC}^{III}$  は複素固有ベクトル  $\phi_{pC}^{III}$  の実部および虚部を表す  $4M$  次元列ベクトルである。また、 $\phi_{pR}^{III}$  および  $\phi_{pC}^{III}$  から構成される  $4M \times M^{III}$  モード行列を次のように定義する。ここに、 $M^{III} = (M_R + 2M_C) \ll 4M$  である。

$$\Phi^{III} = \left[ \overbrace{(\phi_1, \dots, \phi_{M_R})_R^{III}}^{M_R \text{個}}, \overbrace{(\phi_1, \bar{\phi}_1, \dots, \phi_{M_C}, \bar{\phi}_{M_C})_C^{III}}^{M_C \text{組}} \right] \dots \dots \dots (3.47)$$

ただし、モード行列  $\Phi^{III}$  は、式(3.45)の係数行列を介して次のように正規化されているものとする。

$$\left. \begin{aligned} {}^t\Phi^{III} \begin{bmatrix} -K_c^0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \Phi^{III} = I^{III}, \quad {}^t\Phi^{III} \begin{bmatrix} 0 & -K_c^0 \\ -K_c^0 & -C_c^0 \end{bmatrix} \Phi^{III} = \Omega^{III} \\ \Omega^{III} = \text{diag} \left[ \overbrace{(\sigma_1, \dots, \sigma_{M_R})_R^{III}}^{M_R \text{個}}, \overbrace{(\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_{M_C}, \bar{\sigma}_{M_C})_C^{III}}^{M_C \text{組}} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.48)$$

ここに、 $I^{III}$  は  $M^{III}$  次単位行列である。また、 $\sigma_{pR}^{III}$  は式(3.45)から求められる  $M_R$  個のすべての実固有値、 $\sigma_{pC}^{III} = (\sigma_r + i\sigma_i)_{pC}^{III}$  および  $\bar{\sigma}_{pC}^{III} = (\sigma_r - i\sigma_i)_{pC}^{III}$  は式(3.45)から求められる最低次から  $M_C$  組の複素固有値である。

前節の場合と同様に、変分方程式(3.7)の零解の安定性は、式(3.45)の系の固有振動数と固有モードに強く影響される。そこで、複素モードから構成される  $\Phi^{III}$  を式(3.43)の定数行列  $\Phi$  として利用する方法が考えられる。また、式(3.44)の  $\Psi$  には式(3.48)の関係を利用するために  ${}^t\Phi^{III}$  を利用するのが妥当であろう。このように複素モードを用いる方法をモード III 法と呼び、この方法に関する物理量には上添字「III」を付して区別する。

以上の考察により、モード III 法では、式(3.44)相当の低次元化方程式は以下のように与えられる。

$$\dot{\xi}^{*III} - \frac{1}{\omega} A^{*III} \xi^{*III} = 0 \quad \dots \dots \dots (3.49)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A^{*III} &= A_c^{0III} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_c^{kIII} \cos k\tau + A_s^{kIII} \sin k\tau) \\ A_c^{0III} &= \Omega^{III} \\ A_c^{kIII} &= {}^t\Phi^{III} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_c^k & -C_c^k \end{bmatrix} \Phi^{III}, \quad A_s^{kIII} = {}^t\Phi^{III} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_s^k & -C_s^k \end{bmatrix} \Phi^{III} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.50)$$

また、次項で周期解の安定性に対して影響度の大きいモードの合理的な抽出法を定式化するための準備として、次のような  $M^{III}$  次元ベクトル  $\xi^{*III}$  を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \zeta'^{\text{III}} &= (\Omega^{\text{III}})^{\frac{1}{2}} \xi'^{\text{III}} \\ (\Omega^{\text{III}})^{\frac{1}{2}} &= \text{diag} \left[ \overbrace{(\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_{M_n}})}^{M_n}, \overbrace{(\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_{M_o}}, \sqrt{\sigma_{M_o}})}^{2M_o} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.51)$$

さらに、式(3.49)の両辺に左から  $(\Omega^{\text{III}})^{\frac{1}{2}}$  を乗じた式に式(3.51)を代入し、式(3.50)をも考慮して整理すると、次式を得る。

$$\zeta'^{\text{III}} - \frac{1}{\omega} \Omega^{\text{III}} A'^{\text{III}} \zeta'^{\text{III}} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.52)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} A'^{\text{III}} &= I^{\text{III}} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_c'^{k\text{III}} \cos k\tau + A_s'^{k\text{III}} \sin k\tau) \\ A_c'^{k\text{III}} &= {}^t \Phi'^{\text{III}} A_c^{k\text{III}} \Phi'^{\text{III}}, \quad A_s'^{k\text{III}} = {}^t \Phi'^{\text{III}} A_s^{k\text{III}} \Phi'^{\text{III}} \\ \Phi'^{\text{III}} &= \Phi^{\text{III}} (\Omega^{\text{III}})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.53)$$

**3・4・3 複素モードの適切な抽出法** 低次元化モデル作成の際に用いた1次から  $M^{\text{III}}$  次までの複素固有モードの中には、解の安定性に及ぼす影響が小さいモードも含まれている可能性がある。そこで、以下のようにしてこれらを除去し、影響の大きなモードのみを抽出することによって、更なる低次元化を実現する。

前節の議論と同様に、系内に非線形性が存在しない場合には、式(3.52)の係数行列  $A'^{\text{III}}$  の1次以上の成分  $A_c'^{k\text{III}}$  および  $A_s'^{k\text{III}}$  ( $k \geq 1$ ) は明らかに零行列になるので、その要素の絶対値が大きなものほど非線形性の影響が大きいとみなすことができる。また、各モードに及ぼす非線形性の直接的な影響は  $A_c'^{k\text{III}}$  および  $A_s'^{k\text{III}}$  の対角要素に現れ、間接的な影響であるモード間の相互作用の大きさはこれらの非対角要素に現れる。そこで、これらの行列の、あるモードに対応する要素の絶対値が基準となる定数項行列(単位行列)の対角要素である1に比べて十分に小さな値であれば、安定性に及ぼす影響は小さいとみなしてそのモードを除去してもよいであろう。

また、非線形性の影響は、一般に  $A'^{\text{III}}$  の高次のフーリエ係数になるほど小さくなる。そこで、ある次数以上の  $A_c'^{k\text{III}}$  および  $A_s'^{k\text{III}}$  の要素の絶対値がすべて1に比べて十分に小さな値であれば、安定性に与える影響は小さいので、それらも除去することができるであろう。

以上のように、合理的に抽出された必要最低限のモードおよびフーリエ係数からなる低次元化モデルを再構成することによって、安定判別の精度を悪化させることなく計算能率を劇的に向上させることができる可能性が示された。

なお、前節と同様に、式(3.45)の複素固有値と複素固有ベクトルは、第4章に述べる伝達剛性係数法を結合した逆反復法により高速かつ高精度に求められるので、低次元化行列  $\Phi^{III}$  を求めるために必要な計算量は、低次元化モデルに対する安定判別の計算量よりも通常は少なく済む。そこで、式(3.52)の導出にあたっては、モード個数  $M^{III}$  をなるべく大きくとっておき、本項の方法で採用するモードを決定すればよい。

**3.4.4 変分方程式の実数化** 前項に示した抽出法によって選択された複素モードのみを用いて、モード行列  $\Phi^{III}$  を再構成することにより、低次元化モデルの変分方程式が式(3.49)および式(3.50)の形式で得られているものとする。ところで、式(3.49)は複素数の周期係数をもつ微分方程式である。したがって、式(3.49)は実数表記に変換した方が実際の数値計算の面では一般に能率的である。そのため、次のような  $M^{III}$  次元ベクトル  $\xi^{*III}$  を導入する。

$$\xi^{*III} = T^{-1}\zeta^{*III} \left. \begin{aligned} T = \begin{bmatrix} I_{M_R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_{M_\sigma} \end{bmatrix}, \quad T_{M_\sigma} = \text{Diag}[\overbrace{T_I, \dots, T_I}^{2M_\sigma}], \quad T_I = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.54)$$

ここに、 $I_{M_R}$  は  $M_R$  次単位行列である。さらに、式(3.49)の両辺に左から  $T^{-1}$  を乗じた式に式(3.54)を代入すると式(3.49)は次のように実数化される。

$$\dot{\xi}^{*III} - \frac{1}{\omega} \hat{A}^{III} \xi^{*III} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots(3.55)$$

ここに、係数行列  $\hat{A}^{III}$  は実数化された  $2M^{III}$  次元の周期係数であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}^{III} &= \hat{A}_c^{0III} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{A}_c^{kIII} \cos k\tau + \hat{A}_s^{kIII} \sin k\tau) \\ \hat{A}_c^{0III} &= \text{Diag}[(\sigma_1, \dots, \sigma_{M_R})_R^{III}, (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{M_\sigma})_C^{III}] \\ \Lambda_{pC}^{III} &= \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_i \\ -\sigma_i & \sigma_r \end{bmatrix}_{pC}^{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_c^{kIII} &= \hat{\Psi}^{III} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -K_c^k & -C_c^k \end{bmatrix} \hat{\Phi}^{III}, \quad \hat{A}_s^{kIII} = \hat{\Psi}^{III} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -K_s^k & -C_s^k \end{bmatrix} \hat{\Phi}^{III} \\ \hat{\Phi}^{III} &= \Phi^{III} T = \left[ \overbrace{(\phi_1, \dots, \phi_{M_R})_R^{III}}^{M_R}, \overbrace{(2\phi_{r1}, 2\phi_{i1}, \dots, 2\phi_{rM_\sigma}, 2\phi_{iM_\sigma})_C^{III}}^{2M_\sigma} \right] \\ \hat{\Psi}^{III} &= T^{-1t} \Phi^{III} = \left[ \overbrace{(\phi_1, \dots, \phi_{M_R})_R^{III}}^{M_R}, \overbrace{(\phi_{r1}, -\phi_{i1}, \dots, \phi_{rM_\sigma}, -\phi_{iM_\sigma})_C^{III}}^{2M_\sigma} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.57)$$

なお、モード III 法では、周期解が求められるごとに複素固有値解析を行って  $\Phi^{III}$  を計算する必要があるため、計算能率の面ではモード I 法、モード II 法よりも不利である。その反面、近似解の振動形態およびモード I 法、モード II 法では無視していた減

衰の影響をも考慮したモードを用いて低次元化モデルを構成するので、計算精度としてはモード I 法，モード II 法，モード III 法の順に向上することが期待される。

**3・4・5 低次元化モデルに対する安定判別** モード III 法によって低次元化された変分方程式(3.55)に対して、前節に示した式(3.33)～式(3.39)の中の単位行列および零行列を  $I_{4M}$ ,  $0_{4M}$  に変更した式を用いて、 $4M$  個の主特性指数または特性乗数を求めることが可能である。しかも、前節と同様、式(3.55)は元の変分方程式(3.7)に比べて大幅な低次元化が実現されているので、3・2 節で指摘した数値計算上の問題点はかなり克服されることが期待できる。

### 3・5 まとめ

(1) 大規模非線形系の定常周期解に対する安定判別法として、変分方程式の解析にモード解析の概念を援用した低次元化モデルによる安定判別法を提案した。これにより、従来の手法では、種々の数値計算上の問題から不可能であると考えられていた大規模非線形系に対する安定判別に対して、計算精度を損なうことなく数値計算上の問題点を克服できる可能性を示した。

(2) 低次元化モデルの構成に際しては、不減衰線形系に対する実固有モードを用いる方法(モード I 法)、定常周期解の影響を考慮した実固有モードを用いる方法(モード II 法)、および定常周期解の影響と減衰要素の影響をも考慮したモードを用いる方法(モード III 法)の計 3 種類を提案した。計算能率的には、モード I 法、モード II 法、モード III 法の順に有利であるが、計算精度の面からは、モード III 法、モード II 法、モード I 法の順に高精度が期待されることを明らかにした。

(3) 各モード法に対して、近似解の安定性に大きな影響を及ぼすモードおよびフーリエ係数のみを合理的に抽出し、必要最小限の次元および次数の低次元化モデルを構成する方法を提案した。

(4) モード III 法では、複素数の周期係数を持つ変分方程式に対して、変数変換を行うことにより、方程式の実数化を行った。

なお、本章で提案した低次元化モデルによる安定判別法の有効性に関しては、第 5 章で具体的な数値計算により検証する。

## 第4章 逆反復法に対する伝達剛性係数法の適用

前章で定式化した低次元化モデルによる安定判別法では，大規模系の変分方程式に対して得られた低次から比較的少数の固有値と固有ベクトルとを用いて，系全体の変分方程式の次元を低減化する．ところが，一般に系の次元が増大するにつれて，その系に対する固有値解析の計算量は急激に増大する．本論文で取扱う大規模構造物においても，低次元化モデルを構成するためのモード行列の導出に必要な計算量は，膨大なものになる可能性が高い．したがって，固有値解析の計算法に対して計算能率の向上を図ることが期待される．

一方，大規模線形系に対して固有値と固有ベクトルとを高速かつ高精度に求めることのできる有効な固有値解析法のひとつとして，逆反復法<sup>(67)</sup>があげられる．逆反復法は，大次元連立1次方程式を反復的に解くことによって，大規模系の固有ベクトルおよび固有値が低次のもの（絶対値の小さなもの）から必要な次数まで順番に求めることが可能な解法であり，工学の様々な分野で従来から多用されてきた．

ところで，第2章で定式化した増分伝達剛性係数法の論理的基盤の一つである伝達剛性係数法は，振幅ベクトル表示された系全体の運動方程式としての大次元連立1次方程式に対する非常に高速かつ高精度な解析手法と見なすことができる．そこで本章では，逆反復法の主要部である大次元連立1次方程式の計算過程に伝達剛性係数法の概念を導入し，計算効率を飛躍的に向上させた逆反復法の定式化を行う．

後述のように，逆反復法の大次元連立1次方程式の計算過程は，形式的には，一様はり要素内部に分布外力が作用する直線状はり構造物の線形強制振動解析問題とみなすことができる．そこで，本章ではまず，伝達剛性係数法の概念を逆反復法に適用するための第1段階として，分布外力が作用する場合の直線状はり構造物の線形強制振動解析の計算手続きを定式化する．次に，逆反復法の計算過程を分布外力が作用する系の強制振動解析とみなして，伝達剛性係数法の計算手続きを適用する．

## 4.1 伝達剛性係数法による分布外力が作用する場合の 直線状はり構造物の線形強制振動解析

4.1.1 解析モデルおよび基本要素 本節においては、 $n$ 本の一様断面真直はりからなる直線状はり構造物に対して、分布外力が作用する場合の面内曲げ線形強制振動を解析の対象とする。図 4.1 に示すように、各節点には、並進と回転に関する線形ばねと線形ダッシュポットからなる基礎支持要素によって支持された剛体が存在するものとする。また、各節点には同一周期を有する調和強制外力、調和強制トルク、調和強制変位および調和強制角変位が集中的に作用しており、各一様はり要素内部には集中外力と同一周期の調和強制分布外力および調和強制分布トルクが作用しているものとする。一様はり要素内部の減衰要素としては分布粘性減衰を考慮する。

解析にあたり、各一様はり要素を基本要素に等分割し、さらに各基本要素は図 4.1 に示すような集中系としてモデル化する。すなわち、基本要素の重心に関する慣性特性値は両端に等分され、両端間は質量のない弾性はりで連結されているものとする。

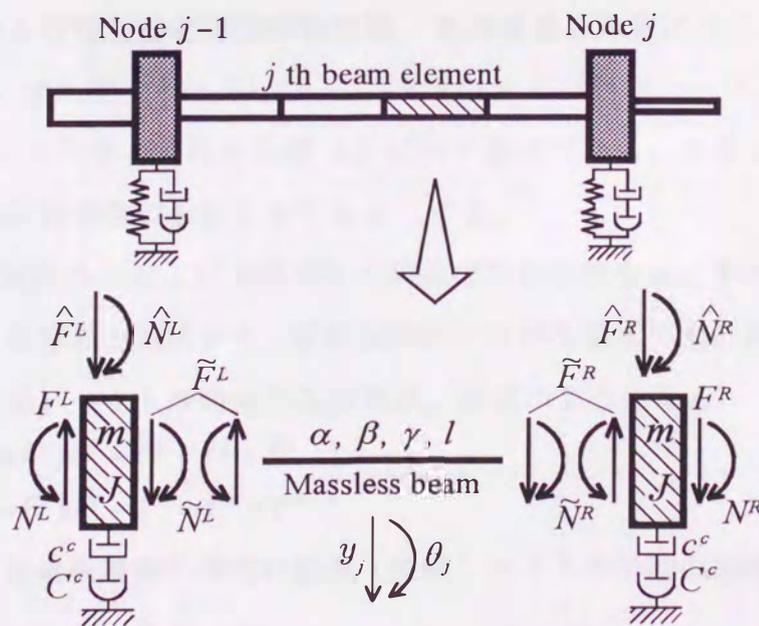


図 4.1 分布外力が作用する直線状はり構造物の解析モデル

これにより基本要素は左右対称になる。また、一様はり要素内部に作用する調和強制分布外力，および調和強制分布トルクについても，基本要素の両端に力学的に等価な集中外力  $\hat{F}^L, \hat{F}^R$  および集中トルク  $\hat{N}^L, \hat{N}^R$  として分配する。また，分布粘性減衰力については，一様はり要素の並進および回転に関する単位長さあたりの分布粘性減衰係数を  $(c^d, C^d)$  としたとき，長さ  $l$  の一基本要素あたり  $(c^c, C^c) = (c^d l/2, C^d l/2)$  の等価な集中粘性減衰係数が基本要素の両端に配置されているものとする。

ここで，本節で用いる記号の使用法に関しては，以下に示す通りである。

(1) 右肩号「 $L$ 」および「 $R$ 」の付された記号は，基本要素の左端および右端に関する物理量。

(2) 頭号「 $\sim$ 」の付された記号は，基本要素の両端に振り分けた集中質量の弾性はり側に関する物理量，頭号「 $\wedge$ 」の付された記号は，集中外力，分布外力および各節点の剛体に関する物理量を示す。

(3) 下添字「 $c$ 」および「 $s$ 」は，それぞれ対応する実状態量ベクトルの余弦成分および正弦成分を表す。

(4) 下添字「 $j$ 」は節点  $j$  ないし  $j$  番め一様はりの物理量を表し，同一記号で頭号「 $-$ 」付きのものは節点  $j$  の左側（したがって  $j$  番め一様はりの右端）の物理量，付いていないものは節点  $j$  の右側（したがって  $j+1$  番め一様はりの左端）の物理量を示す。

**4.1.2 自己および相互動的剛性係数行列** 基本要素の両端における変位  $(y^L, y^R)$ ，角変位  $(\theta^L, \theta^R)$ ，せん断力  $(F^L, \tilde{F}^L, \hat{F}^L, F^R, \tilde{F}^R, \hat{F}^R)$  および曲げモーメント  $(N^L, \tilde{N}^L, \hat{N}^L, N^R, \tilde{N}^R, \hat{N}^R)$  の正方向は，それぞれ図 4.1 に示す通りである。ただし，これらの記号は，いずれも当該物理量の振幅を表すものとする。

系に作用する強制外力および強制変位の共通の角振動数を  $\omega$  とすれば，基本要素の両端質量に関する運動方程式から，定常振動時における基本要素の両端質量に関する複素状態量（振幅）ベクトルの動的な関係は，次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} -(\omega^2 M' + i\omega C')d^L &= \tilde{f}^L - f^L + \hat{f}^L \\ -(\omega^2 M' + i\omega C')d^R &= f^R - \tilde{f}^R + \hat{f}^R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

また，弾性はり要素両端間の複素状態量（振幅）ベクトルの間の関係は，次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} d^R &= {}^t L d^L + F \tilde{f}^R \\ \tilde{f}^L &= L \tilde{f}^R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} d^L &= d_c^L + i d_s^L, & d^R &= d_c^R + i d_s^R \\ f^L &= f_c^L + i f_s^L, & f^R &= f_c^R + i f_s^R \\ \tilde{f}^L &= \tilde{f}_c^L + i \tilde{f}_s^L, & \tilde{f}^R &= \tilde{f}_c^R + i \tilde{f}_s^R \\ \hat{f}^L &= \hat{f}_c^L + i \hat{f}_s^L, & \hat{f}^R &= \hat{f}_c^R + i \hat{f}_s^R \\ d_c^L &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_c^L, & d_s^L &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_s^L, & d_c^R &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_c^R, & d_s^R &= \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_s^R \\ f_c^L &= \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_c^L, & f_s^L &= \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_s^L, & f_c^R &= \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_c^R, & f_s^R &= \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}_s^R \\ \tilde{f}_c^L &= \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_c^L, & \tilde{f}_s^L &= \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_s^L, & \tilde{f}_c^R &= \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_c^R, & \tilde{f}_s^R &= \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}_s^R \\ \hat{f}_c^L &= \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_c^L, & \hat{f}_s^L &= \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_s^L, & \hat{f}_c^R &= \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_c^R, & \hat{f}_s^R &= \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_s^R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M' &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, & C' &= \begin{bmatrix} c^c & 0 \\ 0 & C^c \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}, & F &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \\ (\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{\kappa GA}, \frac{l}{EI}, \frac{l^2}{2EI} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.4)$$

である。式(4.4)の  $m$  および  $J$  は基本要素両端に等分された質量および慣性モーメント、 $l$  は基本要素の長さを示す。また第2章と同様に、 $(\alpha, \beta, \gamma)$  は質量のない弾性はり要素を片持ちはりと見なした場合の静的影響係数、 $EI$  は曲げ剛性、 $\kappa, G$  および  $A$  は断面形状係数、横弾性係数および断面積である。

式(4.1)および式(4.2)から頭号「 $\sim$ 」付きの物理量を消去することにより、基本要素両端間における複素状態量ベクトルの関係は、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} f^R &= S^a d^R + S^c d^L + q^R \\ f^L &= s^c d^R + s^a d^L + q^L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
S^a &= -(\omega^2 M + i\omega C) + F^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha' - m\omega^2) - ic^c\omega & \gamma' \\ \gamma' & (\beta' - J\omega^2) - iC^c\omega \end{bmatrix} \\
s^a &= (\omega^2 M + i\omega C) - LF^{-1t}L \\
&= \begin{bmatrix} -(\alpha' - m\omega^2) + ic^c\omega & \gamma' \\ \gamma' & -(\beta' - J\omega^2) + iC^c\omega \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.6) \\
S^c &= -{}^t s^c = -F^{-1t}L = -\begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma'l \end{bmatrix} \\
F^{-1} &= \begin{bmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \gamma' & \beta' \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2} \begin{bmatrix} \beta' & -\gamma' \\ -\gamma' & \alpha' \end{bmatrix} \\
q^R &= -\hat{f}^R, \quad q^L = \hat{f}^L \dots\dots\dots (4.7)
\end{aligned} \right\}$$

である。第 2 章と同様に、 $S^a, s^a$  を自己動的剛性係数行列、 $S^c, s^c$  を相互動的剛性係数行列と呼ぶ。また、 $q^R, q^L$  を等価集中外力ベクトルと呼ぶ。

**4・1・3 直列結合則** 第 2 章で定式化した増分伝達剛性係数法と同様に、複数の基本要素から構成される一様はり内部の部分系を分系と呼ぶ。分系は明らかに左右対称である。ここで、分系 A の右端に分系 B を直線状にかつ剛に結合して新たな分系 C を構成することを考える。このとき、分系 A と分系 B の両端の自己動的剛性係数行列、相互動的剛性係数行列および等価集中外力ベクトルから、分系 C の自己動的剛性係数行列、相互動的剛性係数行列および等価集中外力ベクトルを求めるための直列結合則は、以下のように求められる。ただし、各分系に関する物理量を下添字「A, B, C」によって区別する。

まず、分系 A と分系 B の自己および相互動的剛性係数行列および等価集中外力ベクトルが既知であり、両分系の両端における状態量ベクトルの関係が次のように表されているものとする。

$$\left. \begin{aligned}
f_A^R &= S_A^a d_A^R + S_A^c d_A^L + q_A^R, & f_A^L &= s_A^a d_A^R + s_A^c d_A^L + q_A^L \\
f_B^R &= S_B^a d_B^R + S_B^c d_B^L + q_B^R, & f_B^L &= s_B^a d_B^R + s_B^c d_B^L + q_B^L
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

両分系の結合は剛であるので、結合部における複素状態量ベクトル間の関係は  $d_A^R = d_B^L$  および  $f_A^R = f_B^L$  で与えられる。また、両分系と結合後の分系 C の複素状態量ベクトル間の関係は、明らかに  $d_C^L = d_A^L, d_C^R = d_B^R$  および  $f_C^L = f_A^L, f_C^R = f_B^R$  である。これらの関係を用いて式(4.8)から結合部の状態量を消去することにより、自己および相互動的剛性係数行列と等価集中外力ベクトルの直列結合則としてそれぞれ次式を得る。これは、 $S_A^a, S_A^c, s_A^a, s_A^c, q_A^R, q_A^L$  および  $S_B^a, S_B^c, s_B^a, s_B^c, q_B^R, q_B^L$  から  $S_C^a, S_C^c, s_C^a, s_C^c, q_C^R, q_C^L$

を求めるための関係式である。

$$\left. \begin{aligned} f_C^R &= S_C^a d_C^R + S_C^c d_C^L + q_C^R, & f_C^L &= s_C^c d_C^R + s_C^a d_C^L + q_C^L \\ S_C^a &= S_B^a + S_B^c T_{AB} s_B^c, & S_C^c &= -S_B^c T_{AB} S_A^a \\ s_C^a &= s_A^a - s_A^c T_{AB} S_A^a, & s_C^c &= s_A^c T_{AB} s_B^c \\ T_{AB} &= (S_A^a - s_A^a)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} q_C^R &= S_B^c T_{AB} (q_B^L - q_A^R) + q_B^R \\ q_C^L &= s_A^c T_{AB} (q_B^L - q_A^R) + q_A^L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.10)$$

式(4.9)を再帰的に適用することによって、一様はり要素両端間の自己および相互動的剛性係数を効率よく計算することが可能である。この結合計算則は、2・2・3項に示した直列結合則の種々の特長を保持している。また、式(4.10)により、一様はり要素内部に作用する分布外力と等価な外力を、一様はり要素両端に作用する集中外力として求めることができる。ただし、等価集中外力の計算では、一様分布荷重の場合をのぞいて再帰的な結合則の適用による計算能率の向上は不可能であり、すべての内部節点に対する計算が必要である。

4・1・4 一様はり要素両端の状態量ベクトル間の関係

いま、各一様はり要素に対して前項で導出した直列結合則を適用することによって、 $j$ 番め一様はり要素両端間における自己および相互動的剛性係数行列、および等価集中外力ベクトルが、次のように求められているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= S_j^a d_j + S_j^c d_{j-1} + \bar{q}_j \\ f_{j-1} &= s_j^c d_j + s_j^a d_{j-1} + q_{j-1} \\ S_j^a &= {}^t S_j^a, \quad s_j^a = {}^t s_j^a, \quad S_j^c = -{}^t s_j^c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.11)$$

次に、節点  $j$  に複素振幅ベクトル  $\hat{q}_j$  の強制外力が、節点  $j$  の基礎に複素振幅ベクトル  $\hat{u}_j$  の強制変位がそれぞれ作用しているものとするれば、節点  $j$  における複素状態量ベクトル間の動的な関係は、節点  $j$  の剛体に関する運動方程式から、次式のようなになる。

$$\hat{P}_j d_j = f_j - \bar{f}_j + \hat{r}_j \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}_j &= \hat{q}_j + (\hat{K}_j - i\omega \hat{C}_j) \hat{u}_j \\ \hat{P}_j &= (\hat{K}_j - \omega^2 \hat{M}_j) - i\omega \hat{C}_j \\ \hat{M}_j &= \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{J} \end{bmatrix}_j, \quad \hat{C}_j = \begin{bmatrix} \hat{c} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{bmatrix}_j, \quad \hat{K}_j = \begin{bmatrix} \hat{k} & 0 \\ 0 & \hat{K} \end{bmatrix}_j \\ \hat{q}_j &= \hat{q}_{cj} + i\hat{q}_{sj}, \quad \hat{u}_j = \hat{u}_{cj} + i\hat{u}_{sj} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.13)$$

であり、 $\hat{m}_j, \hat{J}_j$ は節点  $j$  に取り付けられている剛体の質量および慣性モーメントである。また、 $\hat{c}_j, \hat{C}_j$ は節点  $j$  における基礎支持要素の並進と回転に関する粘性減衰係数、 $\hat{k}_j, \hat{K}_j$ は節点  $j$  における基礎支持要素の並進と回転に関するばね定数を表す。

**4.1.5 動的剛性係数行列および力補正ベクトルの導入** 伝達剛性係数法で強制振動を解析する場合には、第2章と同様に、まず節点  $j$  における複素変位振幅ベクトルと複素力振幅ベクトルの関係を次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_j &= \bar{S}_j d_j + \bar{s}_j \\ f_j &= S_j d_j + s_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.14)$$

ここに、 $\bar{S}_j$  および  $S_j$  は  $2 \times 2$  次元の動的剛性係数行列（複素対称）であり、 $\bar{s}_j$  および  $s_j$  は2次元の力補正ベクトルを示す。

節点  $j-1$  の右側における動的剛性係数行列  $S_{j-1}$  および力補正ベクトル  $s_{j-1}$  から、節点  $j$  の左側の動的剛性係数行列  $\bar{S}_j$  および力補正ベクトル  $\bar{s}_j$  を求めるための格間伝達則は、式(4.14)の第2式の下添字  $j$  を  $j-1$  に変更した式と式(4.11)とから、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_j &= S_j^a + S_j^c V_j \\ \bar{s}_j &= \bar{q}_j + {}^t V_j (s_{j-1} - q_{j-1}) \\ G_j &= {}^t G_j = S_{j-1} - s_j^a \\ V_j &= G_j^{-1} s_j^c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.15)$$

ただし、 $j=1, 2, \dots, n$  であり、 $j=1$  に対して必要な伝達計算の初期値は、系の左端の境界条件から次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \hat{P}_0 \\ s_0 &= -\hat{r}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.16)$$

また、節点  $j$  両端における動的剛性係数行列間および力補正ベクトル間の格点伝達則は、式(4.12)と式(4.14)から次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} S_j &= \bar{S}_j + \hat{P}_j \\ s_j &= \bar{s}_j - \hat{r}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.17)$$

さらに、式(4.15)および式(4.17)から「-」付きの物理量を消去することにより、 $S_{j-1}, s_{j-1}$  から  $S_j, s_j$  を直接求めるための格間格点伝達則が、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} S_j &= \hat{P}_j + S_j^a + S_j^c V_j \\ s_j &= {}^t V_j (s_{j-1} - q_{j-1}) + \bar{q}_j - \hat{r}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.18)$$

以上のように、式(4.16)を初期値として式(4.18)の伝達計算を行うことにより、動的

剛性係数行列と力補正ベクトルが系の左端から右端にかけて漸化的に求められる。

**4・1・6 変位振幅ベクトルの伝達計算** 前項に示した方法で、各節点の動的剛性係数行列  $S_j$  と増分力補正ベクトル  $s_j$  がすべて計算されているものとする。系の右端の右側では常に  $f_n = 0$  であるので、式(4.14)の第2式で  $j = n$  とおいた式から、系の右端の複素変位ベクトル  $d_n$  が次式のように求められる。

$$d_n = -S_n^{-1} s_n \quad \dots\dots\dots(4.19)$$

次に、 $d_{j-1}$  と  $d_j$  との関係式が、式(4.14)の第2式の下添字  $j$  を  $j-1$  に変更した式と式(4.11)とから求められ、次のようになる。

$$d_{j-1} = V_j d_j - G_j^{-1} (s_{j-1} - q_{j-1}) \quad \dots\dots\dots(4.20)$$

よって、各節点の複素変位振幅ベクトル  $d_j$  は、式(4.19)で求められる  $d_n$  を初期値として、式(4.20)により系の右端から左端にかけて漸化的に求められる。

一方、一様はり要素の計算過程で消去した内部節点の複素変位振幅ベクトルは、式(4.8)から次の手順で求められる。すなわち、分系 A の左端および分系 B の右端の複素変位振幅ベクトル  $d_A^L$  および  $d_B^R$  が既知であれば、両分系の結合点の複素変位振幅ベクトルは、

$$d_A^R = d_B^L = T_{AB} (s_B^c d_B^R - S_A^c d_A^L + q_B^L - q_A^R) \quad \dots\dots\dots(4.21)$$

となる。よって、式(4.21)を再帰的に適用することにより、一様はり要素内部の計算過程で内部節点の自由度を消去したときとは逆の順序で、内部節点の複素変位振幅ベクトルが求められる。

以上の手順で、一様はり要素の内部節点をも含むすべての節点の複素変位振幅ベクトルが次元の小さな行列を用いた漸化計算により求められる。

## 4・2 逆反復法の基本原理と計算手順

逆反復法<sup>(67)</sup>は、計算機が発達する以前から工学の諸分野で固有値問題の実用解法として広く利用されてきた累乘法の改良版で、反復計算により固有ベクトルを高速かつ高精度に計算し得る手法である。また、得られた固有ベクトルから固有値も求められる。この手法の特徴としては、(i) 累乘法に比べて反復計算 1 回ごとに連立 1 次方程式を解かなければならないため、計算量は増大するが収束は断然早いこと（ただし、

必要な範囲の固有値のみを求めることが可能なので、全体的な計算量としては他の手法よりも少なくなることが多い) , (ii) 通常は固有値の絶対値の小さいものに対応する固有ベクトルから順に求められるので、振動解析や構造解析などに適していること、などが挙げられる。以下に、逆反復法の基本原理の概要を説明する。

**4.2.1 計算手続き** いま、次のような標準固有値問題を考える。

$$Ax = \lambda x \quad \dots\dots\dots(4.22)$$

ここに、 $A$ は非対称行列であっても複素行列であってもよい。いま、 $A$ の次元を  $M$  とする。逆反復法とは、適当な初期ベクトル  $x^{(0)}$ から次のような連立方程式：

$$Ax^{(k)} = x^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots(4.23)$$

を反復計算すると、後述のように、 $k \rightarrow \infty$ にともなって  $x^{(k)}$ が絶対値の最も小さな固有値に対応する固有ベクトルに収束するという性質に基づく解法である。ここに、本節では上添字「 $(k)$ 」は反復計算の回数を示す。また、 $x^{(k)}$ がある程度固有ベクトルに収束すれば、この反復段階における固有値の近似値  $\lambda^{(k)}$ と  $x^{(k)}$ および  $x^{(k-1)}$ との間には、近似的に次の関係が成立する。

$$\lambda^{(k)}x^{(k)} = x^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots(4.24)$$

したがって、式(4.24)に最小二乗法を適用することにより、 $\lambda^{(k)}$ は次のように求められる。

$$\lambda^{(k)} = \frac{{}^t x^{(k)} \cdot x^{(k-1)}}{{}^t x^{(k)} \cdot x^{(k)}} \quad \dots\dots\dots(4.25)$$

**4.2.2 収束のメカニズム** いま、式(4.22)の  $A$ の固有値が、絶対値の小さなものから  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M$  , および対応する固有ベクトルが  $x_1, x_2, \dots, x_M$  のように表されるものとする。また、逆反復法において  $p$  次の固有ペア  $\lambda_p, x_p$  を求めるための  $k$  回めの反復計算ベクトルを  $x_p^{(k)}$ と表すものとする。

さて、無作為に選んだ1次の固有ペアを求めるための反復計算の初期ベクトル  $x_1^{(0)}$ は、特別な場合を除いて  $M$  個の独立な固有ベクトル  $x_1, x_2, \dots, x_M$  の線形結合によって次のように表される。

$$x_1^{(0)} = h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_M x_M \quad \dots\dots\dots(4.26)$$

ここに、 $h_1 \sim h_M$  は定数を表す。

式(4.22)の関係を考慮すれば、式(4.26)のような初期ベクトルから式(4.23)の反復計

算は以下のように行われる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1^{(1)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1^{(0)} \\
 &= h_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 + h_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_M \\
 &= h_1\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{x}_1 + h_2\frac{1}{\lambda_2}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\frac{1}{\lambda_M}\mathbf{x}_M \\
 &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{h_1\mathbf{x}_1 + h_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\mathbf{x}_M\right\} \cdots \cdots (4.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1^{(2)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1^{(1)} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{h_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 + h_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_M\right\} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{h_1\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{x}_1 + h_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2^2}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\frac{\lambda_1}{\lambda_M^2}\mathbf{x}_M\right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2\left\{h_1\mathbf{x}_1 + h_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\right)^2\mathbf{x}_M\right\} \cdots \cdots (4.28)
 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1^{(k)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1^{(k-1)} \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{k-1}\left\{h_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 + h_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\right)^{k-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_M\right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{k-1}\left\{h_1\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{x}_1 + h_2\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\frac{1}{\lambda_M}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\right)^{k-1}\mathbf{x}_M\right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k\left\{h_1\mathbf{x}_1 + h_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k\mathbf{x}_2 + \cdots + h_M\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_M}\right)^k\mathbf{x}_M\right\} \cdots \cdots (4.29)
 \end{aligned}$$

よって、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_M$  ( $|\lambda_1/\lambda_p| < 1, p = 2, \dots, M$ )であるので、式(4.29)によれば  $k \rightarrow \infty$  となるにともなって高次の固有ベクトルの係数から順に  $h_p(\lambda_1/\lambda_p)^k \rightarrow 0$  となり、反復ベクトル  $\mathbf{x}_1^{(k)}$  は  $h_1(1/\lambda_1)^k \mathbf{x}_1$  に収束する。このときの収束率  $c$  は、次式となる。

$$c \equiv \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} \cdots \cdots (4.30)$$

また、式(4.29)から、近似的に式(4.24)が成立することがわかる。

**4.2.3 原点移動による収束率の向上** 逆反復法では、 $\lambda^{(k-1)}$  がある程度収束した時点で、この  $\lambda^{(k-1)}$  を新たな原点とする原点移動を行い、式(4.23)の代わりに次式を反復計算することにより、 $\mathbf{x}^{(k)}$  の収束を大幅に加速することができる。

$$(\mathbf{A} - \lambda^{(k-1)}\mathbf{I})\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} \cdots \cdots (4.31)$$

このとき、求めるべき固有値は、式(4.31)から計算される固有値の修正量  $\lambda^{(k)}$  に  $\lambda^{(k-1)}$  を加えたもので与えられる。なお、原点移動によって固有ベクトルは変化しない。参考

のために、以下に収束率向上の根拠を示す。

原点移動量として  $\lambda^{(k-1)}$  を設定した場合、式(4.31)の係数行列  $(A - \lambda^{(k-1)}I)$  の固有値は、低次から順に  $(\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}) < (\lambda_2 - \lambda^{(k-1)}) < \dots < (\lambda_M - \lambda^{(k-1)})$  となる。このことを踏まえれば、式(4.31)の  $k$  回めの反復計算における  $\mathbf{x}_1^{(k)}$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k)} &= A^{-1}\mathbf{x}_1^{(k-1)} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} \left\{ h_1 A^{-1}\mathbf{x}_1 + h_2 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_2 - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} A^{-1}\mathbf{x}_2 + \dots + h_M \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_M - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} A^{-1}\mathbf{x}_M \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} \left\{ h_1 \frac{1}{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}} \mathbf{x}_1 + h_2 \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda^{(k-1)})} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_2 - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} \mathbf{x}_2 + \right. \\ &\quad \left. \dots + h_M \frac{1}{(\lambda_M - \lambda^{(k-1)})} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_M - \lambda^{(k-1)}}\right)^{k-1} \mathbf{x}_M \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}\right)^k \left\{ h_1 \mathbf{x}_1 + h_2 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_2 - \lambda^{(k-1)}}\right)^k \mathbf{x}_2 + \dots + h_M \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}}{\lambda_M - \lambda^{(k-1)}}\right)^k \mathbf{x}_M \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots(4.32) \end{aligned}$$

このときの収束率  $c'$  は、次式となる。

$$c' \equiv \frac{|\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda_2 - \lambda^{(k-1)}|} \dots\dots\dots(4.33)$$

このとき、 $\lambda_1$  に対する  $\lambda^{(k-1)}$  の近似の精度がよければ、式(4.33)の分子  $|\lambda_1 - \lambda^{(k-1)}|$  は小さな値となるので、 $|c| \ll |c'|$  となり、収束率は大幅に向上する。

**4.2.4 初期ベクトルの一設定法** 逆反復法で絶対値の大きさが 2 番め以降の固有値を求めるには、原点移動量と初期ベクトルを適切に設定する必要がある。本項では初期ベクトルの一設定法について述べる。

いま、 $\mathbf{x}_1^{(0)}$  を初期ベクトルとして  $\lambda_1$  と  $\mathbf{x}_1$  が求められたとすれば、2 番めの  $\lambda_2$  を求めるための初期ベクトル  $\mathbf{x}_2^{(0)}$  は、 $\mathbf{x}_2$  成分は含むが  $\mathbf{x}_1$  成分を含まないことが条件である。したがって、 $\mathbf{x}_1^{(0)}$  から  $\mathbf{x}_1$  成分を抜き取ったものを  $\mathbf{x}_2^{(0)}$  とおけばよい。同様に  $\mathbf{x}_2^{(0)}$  を初期ベクトルとして  $\lambda_2$  と  $\mathbf{x}_2$  が求められたとすれば、3 番めの  $\lambda_3$  を求めるための初期ベクトル  $\mathbf{x}_3^{(0)}$  は、 $\mathbf{x}_3$  成分は含むが  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  成分を含まないことが条件である。ここで、すでに  $\mathbf{x}_2^{(0)}$  が  $\mathbf{x}_1$  成分を含んでいないので、 $\mathbf{x}_3^{(0)}$  は  $\mathbf{x}_2^{(0)}$  から  $\mathbf{x}_2$  成分のみを抜き取ればよい。このような方法で初期ベクトルを設定すれば、一般に  $p$  次の固有値を求めるための初期ベクトル  $\mathbf{x}_p^{(0)}$  は、 $p-1$  次の固有値の計算に用いた初期ベクトル  $\mathbf{x}_{p-1}^{(0)}$  が  $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_{p-2}$  の成分を含んでいないので、 $\mathbf{x}_{p-1}^{(0)}$  から  $\mathbf{x}_{p-1}$  の成分のみを抜き取ればよく、次のように設定される。

$$\mathbf{x}_p^{(0)} = \mathbf{x}_{p-1}^{(0)} - \frac{{}^t \mathbf{x}_{p-1} \cdot \mathbf{x}_{p-1}^{(0)}}{{}^t \mathbf{x}_{p-1} \cdot \mathbf{x}_{p-1}} \mathbf{x}_{p-1} \cdots \cdots (4.34)$$

### 4.3 不減衰系の実固有値解析と伝達剛性係数法の適用

**4.3.1 不減衰系の実固有値解析** 本項では、前章で定式化したモード I 法およびモード II 法への応用を念頭において、逆反復法の概念を、直線状はり構造物の不減衰自由振動解析へ適用する。直線状はり構造物は、図 4.1 に示す解析モデルと同様に、 $n$ 本の線形な一様はり要素を直線状に結合することにより構成されているものとする。また、各一様はり要素は、いくつかの基本要素に等分割され、基本要素は線形の集中系としてモデル化する。ただし、本節では図 4.1 で考慮したすべての強制外力、強制変位および粘性減衰は考慮しない。このようにモデル化された系（総節点数を  $M$  とする）の特性方程式は、 $M$  および  $K$  をそれぞれ  $2M$  次元の質量行列および剛性行列、 $d$  を系内の全節点の変位および角変位を表す  $2M$  次元の変位振幅実ベクトル、 $i\lambda$  を固有振動数とすると、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} (K - \sigma M)d = \mathbf{0} \\ \sigma = -\lambda^2 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4.35)$$

ここに、 $M, K$  ともに実対称行列となるが、それらの構造は省略する。

式(4.35)のように表される特性方程式に対して、逆反復法により実固有値解析を行う場合の  $k$  回目の反復計算式は、式(4.23)を考慮すれば、次のようになる。

$$Kd^{(k)} = Md^{(k-1)} \quad (k=1, 2, \dots) \cdots \cdots (4.36)$$

ここで、式(4.35)の実固有値の近似値  $\sigma^{(k)}$  は、式(4.25)および固有ベクトルの  $M$  を介した直交性を考慮すれば、 $M$  を重みとする最小二乗法により、次のように求められる。

$$\sigma^{(k)} = \frac{{}^t \mathbf{x}^{(k)} M \mathbf{x}^{(k-1)}}{{}^t \mathbf{x}^{(k)} M \mathbf{x}^{(k)}} \cdots \cdots (4.37)$$

一方、原点移動を考慮した  $k$  回めの反復計算式は、式(4.31)を考慮すれば、次のように表される。

$$(K - \sigma^{(k-1)} M)d^{(k)} = Md^{(k-1)} \cdots \cdots (4.38)$$

上式を反復計算することにより、不減衰系の実固有値  $\sigma$  と実固有ベクトル  $d$  が高速

かつ高精度に求められる。そこでいま、 $p-1$ 次の実固有値  $\sigma_{p-1}$  と実固有ベクトル  $d_{p-1}$  が求められているとすれば、 $p$  次の固有値を求めるための初期ベクトル  $d_p^{(0)}$  は、式(4.34)を考慮することにより、次のように計算される。

$$d_p^{(0)} = d_{p-1}^{(0)} - \frac{{}^t d_{p-1} M d_{p-1}^{(0)}}{{}^t d_{p-1} M d_{p-1}} d_{p-1} \dots \dots \dots (4.39)$$

不減衰系では固有値  $\sigma_p$  は正の実数となるので、 $\sigma_{p-1}$  を求めた後に  $\sigma_p$  を求める場合には、 $\sigma_{p-1}$  を少し正方向に移動させた  $\sigma_p^{(0)}$  を初期原点とし、式(4.39)により求めた  $d_p^{(0)}$  から反復計算を行うことが合理的である。ただし、この  $\sigma_p^{(0)}$  から  $\sigma_p$  の近傍まで新たに原点移動するまでの間は、誤差の蓄積により  $d_p^{(k)}$  がすでに求めた固有ベクトルへ再び収束する恐れがあるため、反復計算過程でこれらの成分を抜き取る必要がある。その際、逆反復法の基本原理を考慮すれば、初期原点  $\sigma_p^{(0)}$  に最も近い固有値  $\sigma_{p-1}$  に対応する固有ベクトル  $d_{p-1}$  の影響が最も大きいため、誤差についてもその成分が最も拡大されやすいと考えられる。したがって、反復計算過程では、通常は次式により  $d_{p-1}$  成分のみを  $d_p^{(k)}$  から抜き取ったものを新たな  $d_p^{(k)}$  とすれば十分である。

$$d_p^{(k)} \leftarrow d_p^{(k)} - \frac{{}^t d_{p-1} M d_{p-1}^{(k)}}{{}^t d_{p-1} M d_{p-1}} d_{p-1} \dots \dots \dots (4.40)$$

また、 $\sigma_p^{(k)}$  が  $\sigma_p$  にある程度収束すれば、 $d_p$  の影響が支配的になるため、上式の抜き取り操作は行わなくてよい。

**4.3.2 伝達剛性係数法の適用** 原点移動を考慮した  $k$  回めの反復計算式(4.38)は、形式的には、振幅が  $M d^{(k-1)}$  で振動数が  $\sqrt{\sigma^{(k-1)}}$  の分布外力が作用しているような強制振動解析の問題であると見なすことができる。よって、式(4.38)の連立1次方程式を解く問題は、前節で定式化した伝達剛性係数法の分布外力が作用する場合の強制振動解析を行う問題と同値であり、その計算手続きを適用することにより、非常に高速に解を得ることができる。

ここで、式(4.38)の連立方程式の解法として伝達剛性係数法を適用する場合、前節で基本要素に対して定式化した式(4.6)および式(4.7)を、次のように変更すればよい。

$$\left. \begin{aligned}
 S^a &= \begin{bmatrix} \alpha' - m\sigma^{k-1} & \gamma' \\ \gamma' & \beta - J\sigma^{k-1} \end{bmatrix} \\
 s^a &= \begin{bmatrix} -(\alpha' - m\sigma^{k-1}) & \gamma' \\ \gamma' & -(\beta - J\sigma^{k-1}) \end{bmatrix} \\
 S^c &= \begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma'l \end{bmatrix} \\
 q^R &= -Md^{(k-1)} \\
 q^L &= Md^{(k-1)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.41)$$

$$\left. \begin{aligned}
 q^R &= -Md^{(k-1)} \\
 q^L &= Md^{(k-1)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.42)$$

基本要素に対するこれらの行列とベクトルとを基にして、4・1 節に示した計算手続きを適用することにより、式(4.38)の連立 1 次方程式の解  $d^{(k)}$  は高速・高精度に計算される。なお、この場合 4・1 節に示した計算手続きは、すべて実数のみの計算に置き換えられる。そのことを考慮すれば、計算はさらに高速化される。このように、逆反復法の計算過程の中で、最も主要な部分である連立 1 次方程式の計算に伝達剛性係数法を適用することにより、不減衰系の固有値と固有ベクトルが逆反復法により非常に高速かつ高精度に求められる。

**4・3・3 計算手順のまとめ** 以上を整理すると、伝達剛性係数法を適用した逆反復法による直線状はり構造物の実固有値解析の計算手順は、次のようになる。

- (1)  $\sigma_1^{(0)}$  および  $d_1^{(0)}$  の初期値を設定する。
- (2)  $\sigma_p^{(k-1)}$  および  $d_p^{(k-1)}$  より得られる基本要素に対する式(4.41)および式(4.42)を基に 4・1 節に示した計算手続きを適用することにより、内部節点も含むすべての節点に対して  $d_p^{(k)}$  を計算する。
- (3) 式(4.37)より固有値の修正値  $\sigma_p^{(k)}$  を計算し、 $\sigma_p^{(k)}$  が十分収束していれば手順(6)へ。そうでなければ、手順(4)へ進む。
- (4)  $p \geq 2$  の場合で、必要であれば式(4.40)によって新たに  $d_p^{(k)}$  を計算する。
- (5)  $d_p^{(k-1)} \leftarrow d_p^{(k)}$ ,  $\sigma_p^{(k-1)} \leftarrow \sigma_p^{(k-1)} + \sigma_p^{(k)}$  として手順(2)へ戻る。
- (6) 次の固有値および固有ベクトルを求めるための初期値  $\sigma_{p+1}^{(0)}$  および  $d_{p+1}^{(0)}$  を設定して手順(2)へ戻る。このとき、 $d_{p+1}^{(0)}$  の設定は式(4.39)による。

この計算手続きは、前章で提案した実モードを利用した低次元化法であるモード I 法およびモード II 法のための低次元化モード行列の導出に適用することができる。

#### 4.4 減衰系の複素固有値解析と伝達剛性係数法の適用

4.4.1 減衰系の複素固有値解析 本節では、前章で定式化したモード III 法への適用を念頭において、前節で用いた解析モデルにおいて、基礎支持部に作用する粘性減衰および一様はり要素に作用する分布粘性減衰を考慮したモデルに対する複素固有値問題を解析の対象とする。このモデル（総節点数を  $M$  とする）の特性方程式は  $M, C$  および  $K$  をそれぞれ  $2M$  次元の質量行列、減衰行列および剛性行列、 $d$  を  $2M$  次元の変位振幅複素ベクトル、 $\lambda$  を複素固有値とすると、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} (A - \lambda B)z &= 0 \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & -K \\ -K & -C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} d \\ w \end{bmatrix} \\ w &= \lambda d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.43)$$

ここに、 $M, C, K$  とともに実対称行列となるが、それらの構造は省略する。

式(4.43)のように表される特性方程式に対して、原点移動を考慮した  $k$  回目の反復計算式は式(4.31)を考慮すれば、次のようになる。

$$(A - \lambda^{(k-1)}B)z^{(k)} = Bz^{(k-1)} \quad (k=1,2,\dots) \dots\dots\dots (4.44)$$

ここで、複素固有値の修正値  $\lambda^{(k)}$  は、固有ベクトルの  $B$  を介した直交性を利用して、次のように求められる。

$$\lambda^{(k)} = \frac{{}^t z^{(k)} B z^{(k-1)}}{{}^t z^{(k)} B z^{(k)}} \dots\dots\dots (4.45)$$

式(4.44)および式(4.45)を反復計算することにより、複素固有値  $\lambda$  と複素固有ベクトル  $d$  および  $w$  が高速かつ高精度に求められる。そこでいま、 $p-1$  次の複素固有値  $\lambda_{p-1}$  と複素固有ベクトル  $d_{p-1}$  および  $w_{p-1}$  が求められているとすれば、 $p$  次の固有値を求めるための初期ベクトル  $d_p^{(0)}$  および  $w_p^{(0)}$  は式(4.34)を考慮すれば次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} d_p^{(0)} &= d_{p-1}^{(0)} - s_{p-1} d_{p-1} \\ w_p^{(0)} &= w_{p-1}^{(0)} - s_{p-1} \lambda_{p-1} d_{p-1} \\ s_{p-1} &= \frac{{}^t v_{p-1} d_{p-1}^{(0)} + {}^t d_{p-1} M w_{p-1}^{(0)}}{{}^t v_{p-1} d_{p-1} + \lambda_{p-1} {}^t d_{p-1} M d_{p-1}} \\ v_{p-1} &= (C + \lambda_{p-1} M) d_{p-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.46)$$

また、式(4.40)に対応する反復計算過程での抜き取り操作は次式により行われる。

$$\left. \begin{aligned} d_p^{(k)} &\leftarrow d_p^{(k)} - s_{p-1} d_{p-1} \\ w_p^{(k)} &\leftarrow w_{p-1}^{(k)} - s_{p-1} \lambda_{p-1} d_{p-1} \\ s_{p-1} &= \frac{{}^t v_{p-1} d_{p-1}^{(k)} + {}^t d_{p-1} M w_{p-1}^{(k)}}{{}^t v_{p-1} d_{p-1} + \lambda_{p-1} {}^t d_{p-1} M d_{p-1}} \\ v_{p-1} &= (C + \lambda_{p-1} M) d_{p-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.47)$$

また、複素固有値問題では求められた固有値  $\lambda_p$  および固有ベクトル  $d_p$  に対応して、これらの複素共役である  $\bar{\lambda}_p$  および  $\bar{d}_p$  もまた固有値および固有ベクトルであるので、これらの成分も抜き取った方がよい。これらの成分の抜き取りは式(4.46)および式(4.47)の  $\lambda_p$  を  $\bar{\lambda}_p$  に、 $d_p$  を  $\bar{d}_p$  に置き換えて実行できる。

4・4・2 伝達剛性係数法の適用 原点移動を考慮した  $k$  回めの反復計算式(4.44)は、

$A, B$  および  $z$  の構造を考慮すれば次の 2 式に分離される。

$$\left. \begin{aligned} \{M(\lambda^{(k-1)})^2 + C\lambda^{(k-1)} + K\}d^{(k)} &= -(M\lambda^{(k-1)} + C)d^{(k-1)} - Mw^{(k-1)} \\ w^{(k)} &= \lambda^{(k-1)}d^{(k)} + d^{(k-1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.48)$$

したがって、解くべき連立 1 次方程式は式(4.48)の第一式のみとなり、その次元は半減される。さらに、式(4.48)の第一式は、形式的には、振幅が  $-(M\lambda^{(k-1)} + C)d^{(k-1)} - Mw^{(k-1)}$  で振動数が  $\lambda^{(k-1)}$  の複素外力が作用しているような強制振動解析の問題であると見なすことができる。よって、式(4.48)の第一式の連立方程式を解く問題は、4・1 節で定式化した伝達剛性係数法の分布外力が作用する場合の強制振動解析を行う問題と同値であり、前節と同様にその計算手続きを適用することにより、非常に高速に解を得ることができる。

ここで、式(4.48)の第 1 式の連立 1 次方程式の解法として伝達剛性係数法を適用する場合、4・1 節で基本要素に対して定式化した式(4.6)および式(4.7)に、次のような変更を施せばよい。

$$\left. \begin{aligned} S^a &= \begin{bmatrix} A' & \gamma' \\ \gamma' & B' \end{bmatrix}, \quad s^a = \begin{bmatrix} -A' & \gamma' \\ \gamma' & -B' \end{bmatrix} \\ S^c &= \begin{bmatrix} \alpha' & -\gamma' \\ \gamma' & \beta' + \gamma' l \end{bmatrix} \\ A' &= \alpha' + m(\lambda^{(k-1)})^2 + c^c \lambda^{k-1} \\ B' &= \beta + J(\lambda^{(k-1)})^2 + C^c \lambda^{k-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.49)$$

$$\left. \begin{aligned} q^R &= (\lambda^{(k-1)}M + C)(d^{(k-1)})^R + M(g^{(k-1)})^R \\ q^L &= -(\lambda^{(k-1)}M + C)(d^{(k-1)})^L - M(g^{(k-1)})^L \\ (g^{(k)})^R &= \lambda^{(k-1)}(d^{(k)})^R + (d^{(k-1)})^R \\ (g^{(k)})^L &= \lambda^{(k-1)}(d^{(k)})^L + (d^{(k-1)})^L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.50)$$

基本要素に対するこれらの行列とベクトルとを基にして、4・1節に表した計算手続きを適用することにより、式(4.48)の第1式の連立1次方程式の解 $d^{(k)}$ は高速・高精度に計算される。さらに、式(4.48)の第2式より $w^{(k)}$ が求められ、式(4.44)の方程式の解 $z^{(k)}$ が高速かつ高精度に求められる。このように、逆反復法の計算過程の中で、最も主要な部分である連立1次方程式の計算に伝達剛性係数法を適用することにより、不減衰系の固有値と固有ベクトルが逆反復法により非常に高速かつ高精度に求められる。

**4・4・3 計算手順のまとめ** 以上を整理すると、伝達剛性係数法を適用した逆反復法による直線状はり構造物の複素固有値解析の計算手順は、次のようになる。

- (1)  $\lambda_1^{(0)}$  および  $d_1^{(0)}$  の初期値を設定する。
- (2)  $\lambda_p^{(k-1)}$  および  $d_p^{(k-1)}$  より得られる基本要素に対する式(4.49)および式(4.50)を基に4・1項に示した計算手続きを適用することにより、内部節点も含むすべての節点に対して $d_p^{(k)}$ を計算する。
- (3) 式(4.45)より固有値の修正値 $\lambda_p^{(k)}$ を計算し、 $\lambda_p^{(k)}$ が十分収束していれば手順(6)へ。そうでなければ、手順(4)へ進む。
- (4)  $p \geq 2$ の場合で、必要であれば式(4.47)によって新たに $d_p^{(k)}$ ,  $w_p^{(k)}$ を計算する。
- (5)  $d_p^{(k-1)} \leftarrow d_p^{(k)}$ ,  $\lambda_p^{(k-1)} \leftarrow \lambda_p^{(k-1)} + \lambda_p^{(k)}$ として手順(2)へ戻る。
- (6) 次の固有値および固有ベクトルを求めるための初期値 $\lambda_{p+1}^{(0)}$ および $d_{p+1}^{(0)}$ ,  $w_{p+1}^{(0)}$ を設定して手順(2)へ戻る。このとき、 $d_{p+1}^{(0)}$ ,  $w_{p+1}^{(0)}$ の設定は式(4.46)による。

この計算手続きは、前章で提案した複素モードを利用した低次元化法であるモードIII法のための低次元化モード行列の導出に利用することができる。

## 4・5 まとめ

(1) 分布外力が作用する直線状はり構造物の線形強制振動解析に対して伝達剛性係数法の定式化を行うことにより、系の変位振幅を高速かつ高精度に計算可能であることを示した。

(2) 逆反復法により構造物の実固有値解析または複素固有値解析を行う場合、その計算過程の主要部である大次元連立1次方程式が、形式的には分布外力が作用する

場合の線形強制振動解析問題とみなすことができる。そこで、方程式の解法に伝達剛性係数法を適用することにより、大次元連立 1 次方程式の計算量を大幅に低減化し、逆反復法の計算能率をさらに向上させた。

(3) 本章で提案した伝達剛性係数法を適用した逆反復法を用いて、前章で提案した 3 種類の低次元化法のためのモード行列を高速かつ高精度に導出することが可能となった。これによって、低次元化モデルによる安定判別法の全体的な計算能率が、さらに向上することが期待される。