

## 分布するだ円孔群, 介在物群, き裂群をもつ弾性体の 応力と変形

井川, 秀信

<https://doi.org/10.11501/3106971>

---

出版情報 : 九州大学, 1995, 博士 (工学), 論文博士  
バージョン :  
権利関係 :

## 第4章 長方形配置及び千鳥配置のき裂群をもつ無限体の引張り

### 4.1 緒言

材料や構造物の破壊にさいして、これらの中に先在する複数個の欠陥からき裂が発生し、これらが互いに干渉しつつ最終破壊に至る場合が多い。従って各方向に分布するき裂の応力拡大係数を知ることは材料強度上きわめて重要である。このような場合の典型的な二つのモデルとして長方形配置や千鳥配置のき裂群をもつ無限体の引張りを取扱った。解析は複素応力関数の固有関数展開から出発し、境界条件を前章と同様に合力と変位で表わして、これから展開の未知係数を定める。き裂の長さとその配列の種々の場合について数値計算を行ない、応力拡大係数およびき裂群の存在による引張剛性の低下を調べる。また、これらの数値結果に精度良く当てはまる計算式を与えた。

## 4.2 解析方法

次の二つの問題を統一的に解析する。

(a) 長方形配置のき裂群をもつ無限体の引張り (図4.1(a))

(b) 千鳥配置のき裂群をもつ無限体の引張り (図4.1(b))

両問題を通じてき裂長さを  $2a$  とし、き裂の一つの中心に原点をとった座標系  $Oxy$  を図のように定める。それぞれの場合について、 $x$  方向および  $y$  方向のき裂間隔を与えるパラメータ  $b, c$  を図4.1(a), 図4.1(b) のように定め、 $y$  方向に作用する平均応力を  $\sigma$  とする。

解析には前章と同様に適当な単位領域を考え、 $x, y$  両軸に関する応力状態の対称条件およびき裂縁の境界条件を完全に満たす複素応力関数を導き、その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった。この単位領域としては前章の諸問題と同様に問題(a)では長方形領域  $ODHKO$  を用い、問題(b)では三角形領域  $ODFO$  を用いた。

まずこれらの解析領域に適合する複素応力関数として次の固有関数展開を仮定する。

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( G_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2-a^2}} + H_n z^{2n-2} \right) \\ \Omega(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( G_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2-a^2}} - H_n z^{2n-2} \right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここに展開係数  $G_n, H_n$  は実数である。

(4.1) は、応力状態が  $x$  軸と  $y$  軸に関して対称となるべき条件およびき裂  $O$  の縁が自由縁となるべき条件を満たしている。従って未知係数  $G_n, H_n$  は単位領域の  $x, y$  両軸以外の辺の境界条件だけから定めればよい。しかし、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、前章と同様に合力と変位に基づく境界分割法を適用した。

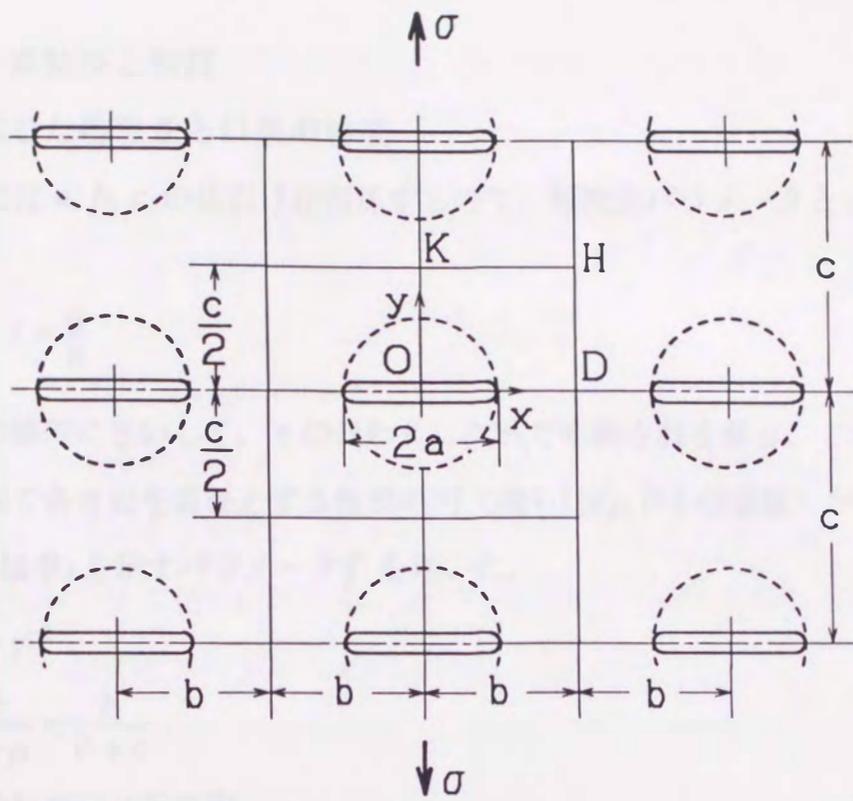


図4.1(a) 長方形配置き裂群をもつ無限体の引張り

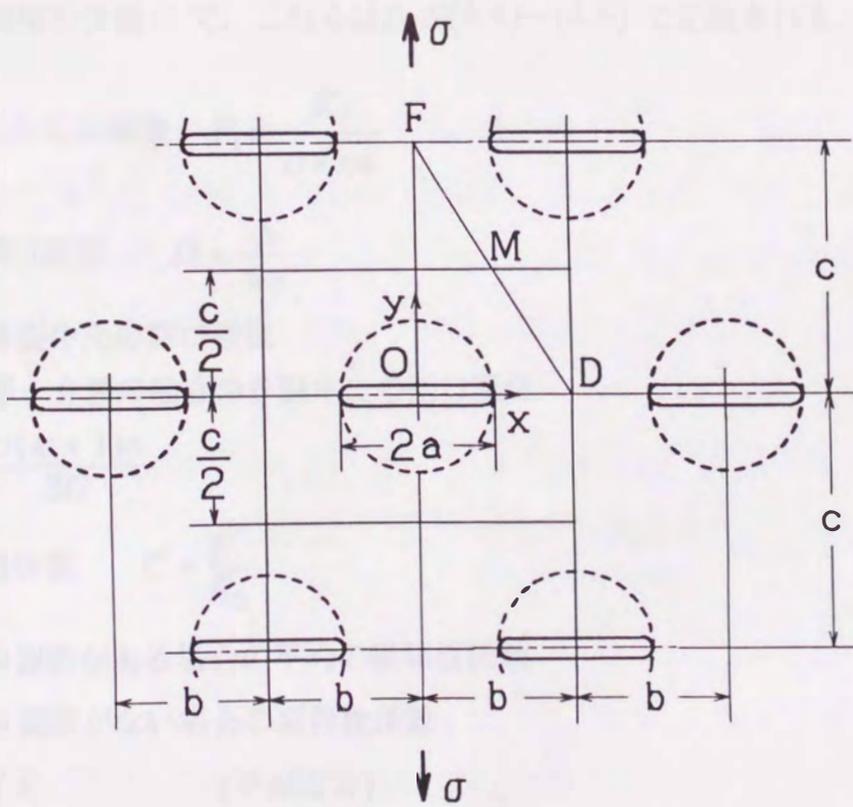


図4.1(b) 千鳥配置き裂群をもつ無限体の引張り

### 4.3 数値計算結果と検討

#### 4.3.1 計算した物理量と結果の精度

計算結果には  $a, b, c$  の比だけが関係するので、無次元パラメータとして次の  $\gamma, \lambda$  を用いた。

$$\gamma = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \quad (4.2)$$

また結果の整理にさいして、 $\gamma$  の代わりに次式で定義される量  $\mu, \zeta$  および、後で述べる理由で各き裂を直径とする仮想の円 (図4.1(a), (b) の破線) が全領域に占める割合 (面積率) を示すパラメータ  $f$  を用いた。

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b}{c} = \gamma^{-1} \\ \zeta &= \frac{\mu}{1 + \mu} = \frac{b}{b + c} \\ f &= \text{き裂包絡円の面積率} \\ &= \frac{\pi a^2}{2bc} = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \mu \end{aligned} \quad (4.3)$$

計算した物理量は き裂先端の無次元応力拡大係数  $F_I$ , き裂中央の無次元開口変位  $D$  および引張剛性係数  $C$  で、これらは次式(4.4)~(4.6) で定義される。

$$\text{無次元応力拡大係数} \quad F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (4.4)$$

$$\text{無次元開口変位} \quad D = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$\Phi$  = き裂中央の開口変位

$\Phi_0$  = 単一き裂の場合のき裂中央の開口変位

$$= \frac{\sigma(\kappa + 1)a}{2G} \quad (4.5)$$

$$\text{引張剛性係数} \quad C = \frac{E^*}{E_0}$$

$E^*$  = き裂群がある場合の平均の縦弾性係数

$E_0$  = き裂群がない場合の縦弾性係数

$$= \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E / (1 - \nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (4.6)$$

表4.1 精度の検討例 (問題(a) ;  $c/b = 2, a/b = 0.8$  )

$N$	$F_I$	$\Phi/\Phi_0$	$E^*/E_0$
8	1.5525	1.4191	0.4081
16	1.5577	1.4297	0.4054
24	1.5577	1.4298	0.4054
32	1.5577	1.4300	0.4052

ここに  $E$  は母材の薄板試験片で測定した縦弾性係数,  $\nu$  はそのポアソン比である.

本解析による数値結果の精度は, 領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる. 表4.1 は, 問題(a) で  $c/b = 2, a/b = 0.8$  の場合について, 正方形単位領域を用い分割数  $N$  を 8, 16, 24, 32 とし得た解析値である.  $F_I, \Phi/\Phi_0$  と  $E^*/E_0$  の値は  $N$  の増加とともに極めて良い収束を示している. 以下に述べるすべての結果は  $N = 20, 30, 40$  とし行なって得た値を比較して正確さを確かめてある.

#### 4.3.2 数値計算結果

(a), (b) の両問題についてパラメータ  $\gamma, \lambda$  の種々の組合せについて計算を行ない, 結果を横軸に  $\lambda = a/b$  あるいは面積率  $f$  をとり,  $\gamma = c/b$  をパラメータとして図4.2.(a) ~ 図4.5.(b) にそれぞれ実線で示した. 図4.2 は  $F_I$ , 図4.3 は  $\Phi/\Phi_0$ , 図4.4 と図4.5 は  $E^*/E_0$  の結果で, 図番に付した (a), (b) はそれぞれ長方形配置き裂群, 千鳥配置き裂群を示す. なお  $F_I$  の値を表4.2(a), (b) に,  $E^*/E_0$  の値を表4.3(a), (b) に与えてある.

まず最も重要な無次元応力拡大係数  $F_I$  に対する図4.2(a), (b) について述べる. 特に  $c/b \rightarrow \infty$  の極限で, 両問題の  $F_I$  はいずれも一列周期き裂群に対する次の結果に収束する<sup>(2, 1)</sup>.

$$(F_I)_{c/b \rightarrow \infty} = \left( \frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

しかし  $c/b$  の変動による  $F_I$  の変動は両問題でかなり異なる. すなわち問題(a) では  $c/b$  の減少とともに曲線群は下降するのに対して, 問題(b) では  $c/b$  の減少と

ともに斜め方向のき裂同士の干渉によって曲線群は急激に上昇する。また  $c/b$  が小さくなければ  $\lambda$  の増大とともに  $F_I$  も単調に増大するが、 $c/b$  が小さい場合は  $\lambda = 0.65$  の付近で  $F_I$  は極大値をとり、それより大きい  $\lambda$  ではかえって減少する。そして、さらに  $\lambda$  が増すと  $F_I$  は再び増大して  $\lambda \rightarrow 1$  のとき無限大に発散することになる。このことは次のように説明される。すなわち  $\lambda$  がある値以下では、 $\lambda$  の増大とともに斜め方向に位置するき裂同士の干渉によって  $F_I$  が増大するが、 $c/b$  が小さくて  $\lambda$  がある程度大きくなると、き裂先端がその上下にあるき裂の陰に入るため  $F_I$  が逆に減少する。そして、さらに  $\lambda$  が増すと、横方向に並ぶき裂間の断面の減少により再び  $F_I$  が増大すると考えられる。

次に無次元開口変位  $\Phi / \Phi_0$  の曲線群 (図4.3(a), (b)) は、 $F_I$  の図4.2(a), (b) と似た傾向を示す。但し図4.3(b) の曲線群は図4.2(b) のそれらのように極大値をもたず、 $\Phi / \Phi_0$  は  $\lambda$  が増すとともに単調に増大する。これは開口変位としてき裂の先端付近ではなくその中央における値を考えており、この中央点は  $\lambda$  が大きくても上下のき裂に妨げられることなく引張応力にさらされるためと考えられる。なお  $c/b \rightarrow \infty$  の極限で両問題の  $\Phi / \Phi_0$  は一列周期き裂群の結果に収束する。これはその場合の複素応力関数から次のように求められる<sup>(2, 1)</sup>。

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)_{c/b \rightarrow \infty} = \frac{2}{\pi\lambda} \log \left( \frac{1 + \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \quad (4.8)$$

最後にき裂群の存在による縦弾性係数の低下を表わす無次元値  $C = E^* / E_0$  について述べる。図4.4(a), (b) からわかるように、いずれの問題でも  $c/b \rightarrow \infty$  (一列周期き裂群) のときは  $\lambda$  に関係なく 1 であり、 $c/b$  の減少とともに曲線は低下する。その低下の程度は  $c/b$  が大きいときは両場合であり異ならないが、 $c/b$  が小さくなるに従って、千鳥配置の場合の低下が著しくなる。そして  $c/b \rightarrow 0$  の極限では両図に示す直線となり、次式で与えられる。

$$\left(\frac{E^*}{E_0}\right)_{c/b \rightarrow 0} = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{(長方形配置き裂群)} \\ 1 - 2\lambda \quad (\lambda \leq 0.5), \quad 0 \quad (\lambda \geq 0.5) & \text{(千鳥配置き裂群)} \end{cases} \quad (4.9)$$

さて、この縦弾性係数の低下は、力の流れがき裂によって妨げられる程度に密接に関係する筈である。すなわちき裂があると、その上下のある範囲では力が流れ難いので、最も簡単に各き裂を直径とする円（図4.1(a), (b)の破線）の内部が近似的に死領域になると仮定すれば、 $E^*/E_0$ は第4章の円孔群をもつ無限体の引張りと同様の挙動を示すことが予想される。ところで前章の千鳥配置円孔群の場合の $E^*/E_0$ は、円孔の面積率 $f$ をパラメータにとるとよくまとまることがわかった。そこで今のき裂群の場合についても、各き裂を直径とする円（包絡円）を仮定してそれらの円が全領域に占める割合を $f$ とし、図4.4(a), (b)の横座標 $a/b$ の代わりに $f$ をとって $E^*/E_0$ を示せば図4.5(a), (b)を得る。千鳥配置き裂群の場合の図4.5(b)を図4.4(b)と比較すれば明らかなように、曲線群は $c/b$ にあまり関係なく狭い範囲にまとまっており、 $E^*/E_0$ と $f$ の間の強い相関が認められ、その程度は前章の千鳥配置円孔群の場合（図3.14(b)）より著しい。千鳥配置き裂群を実際にランダムに分布するき裂群のモデルと考えることがしばしば行なわれている<sup>(3, 4)</sup>。従って上の事実は実際のき裂群の場合も、 $E^*/E_0$ が統計的な意味で近似的に包絡円面積率 $f$ だけの関数と考えてよいことを示唆するように思われる。

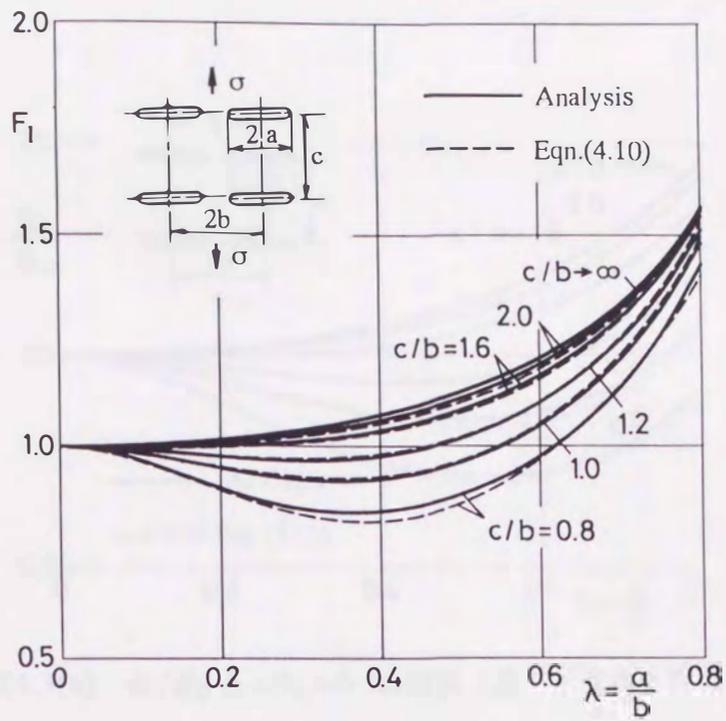


図4.2(a)  $F_I$ と  $c/b, a/b$  の関係 (長方形配置き裂群)

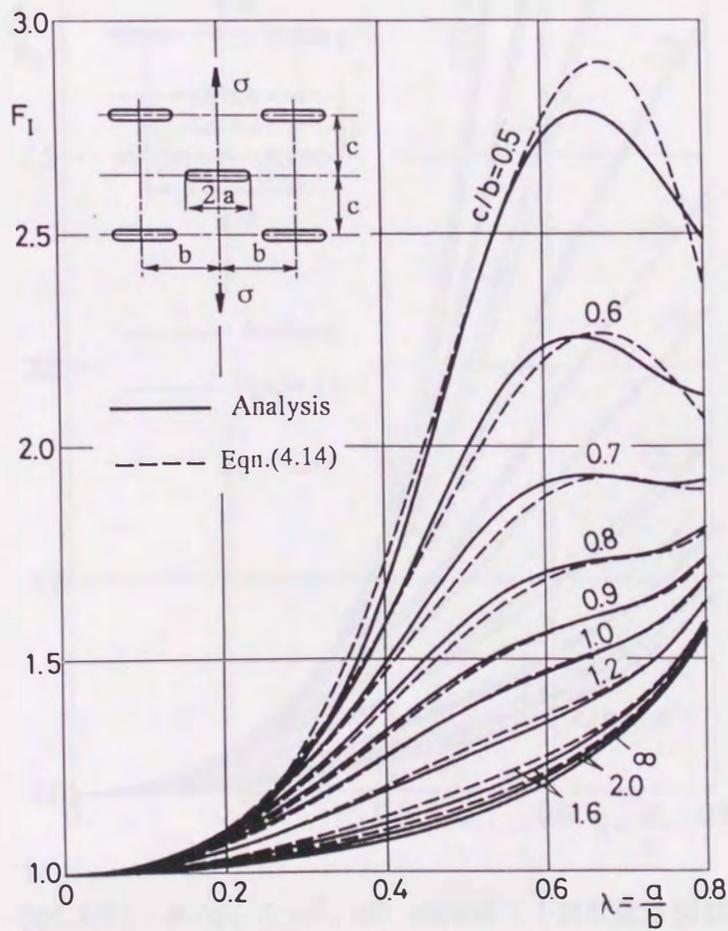


図4.2(b)  $F_I$ と  $c/b, a/b$  の関係 (千鳥配置き裂群)

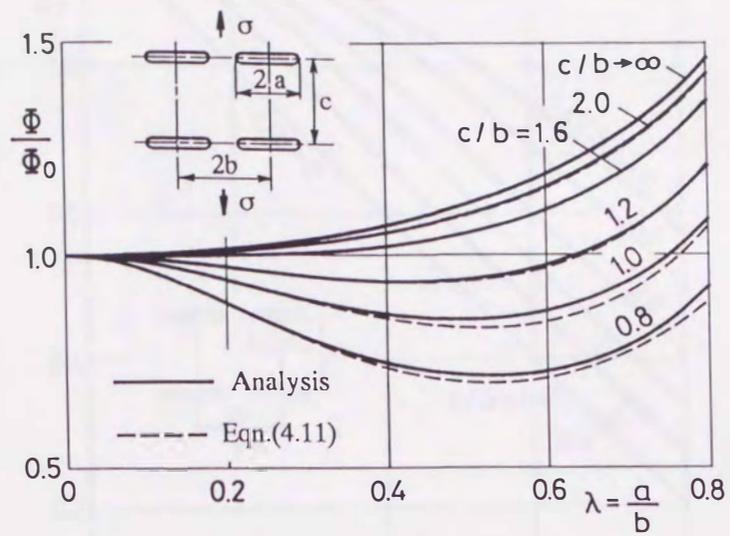


図4.3(a)  $\Phi/\Phi_0$  と  $c/b, a/b$  の関係 (長方形配置き裂群)

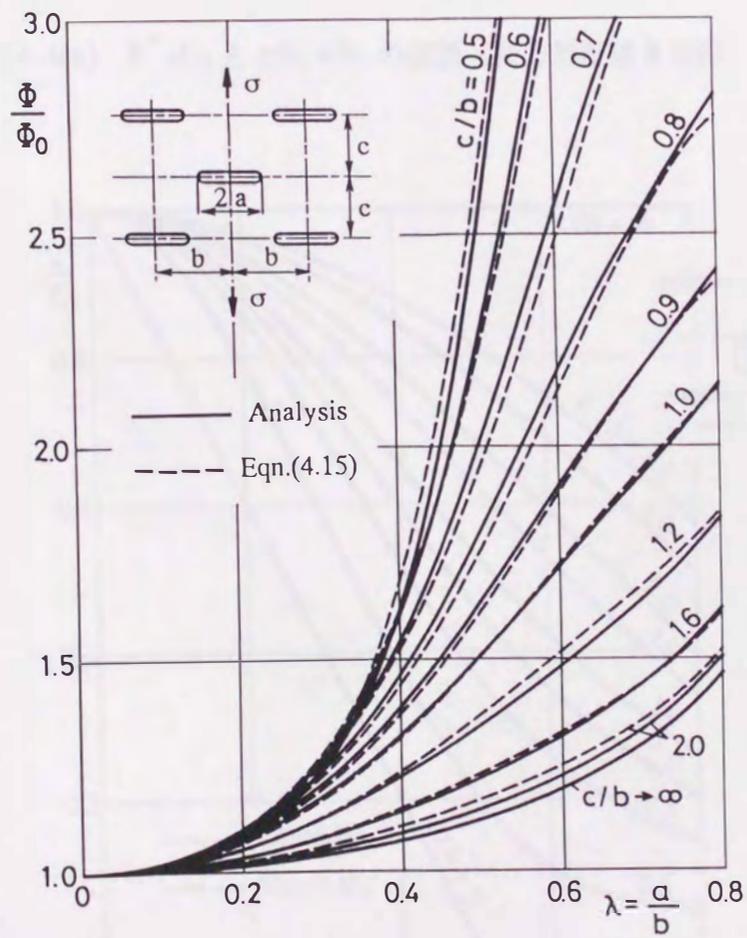


図4.3(b)  $\Phi/\Phi_0$  と  $c/b, a/b$  の関係 (千鳥配置き裂群)

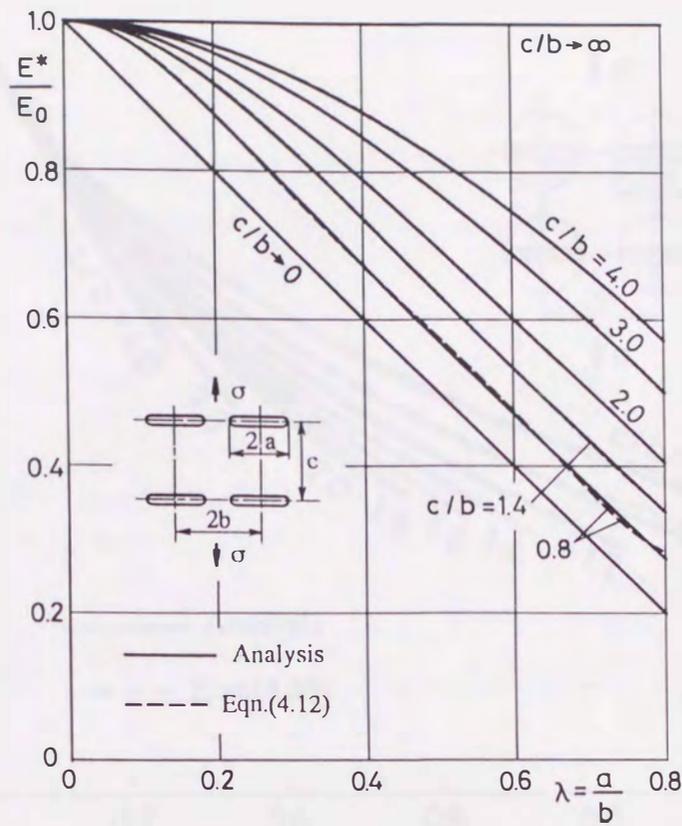


図4.4(a)  $E^*/E_0$  と  $c/b, a/b$  の関係 (長方形配置き裂群)

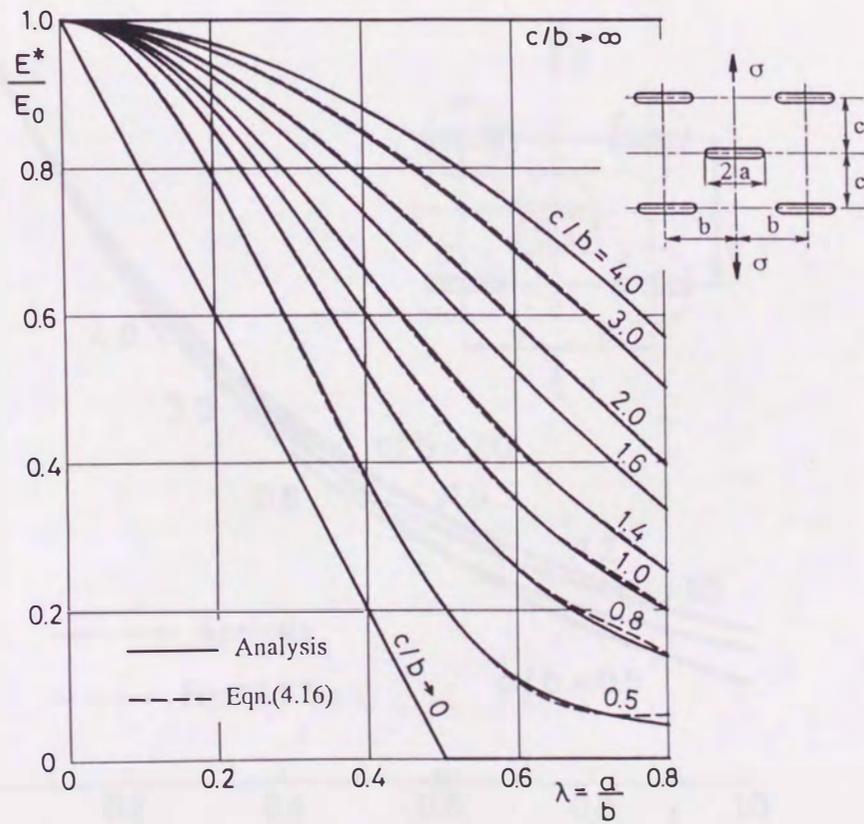


図4.4(b)  $E^*/E_0$  と  $c/b, a/b$  の関係 (千鳥配置き裂群)

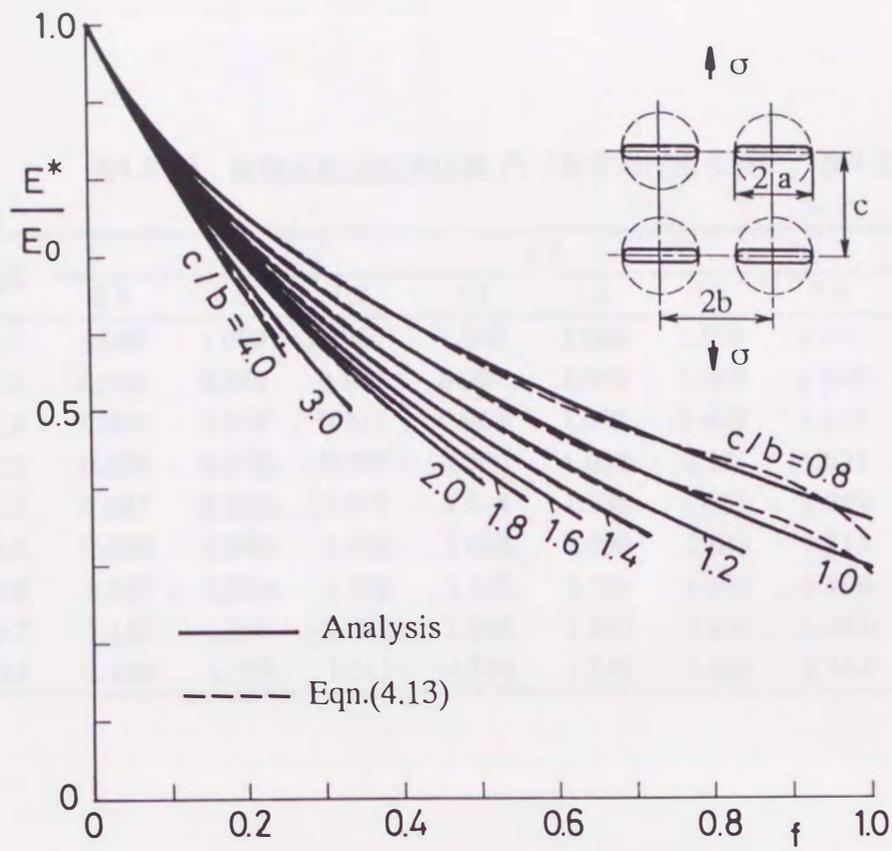


図4.5(a)  $E^*/E_0$  と  $c/b, f$  の関係 (長方形配置き裂群)

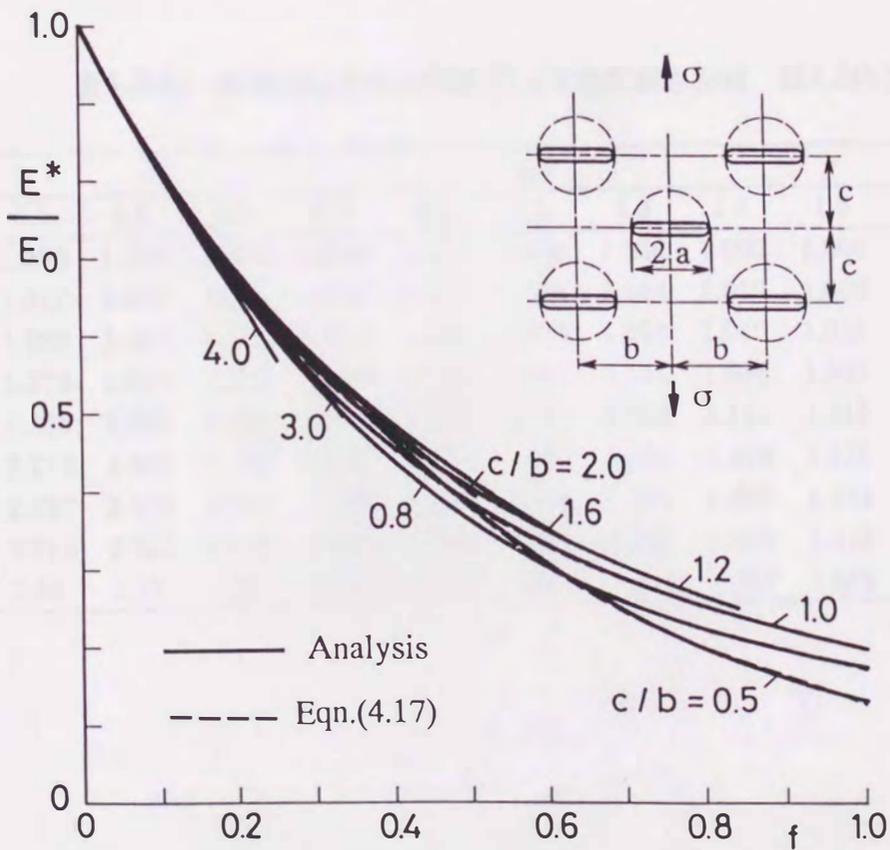


図4.5(b)  $E^*/E_0$  と  $c/b, f$  の関係 (千鳥配置き裂群)

表4.2(a) 無次元応力拡大係数  $F_I$  (長方形配置き裂群, 図4.2(a))

$a/b$	$c/b$							
	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	$\infty$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.966	0.984	0.993	0.997	1.000	1.002	1.003	1.004
0.2	0.900	0.948	0.977	0.993	1.003	1.009	1.012	1.017
0.3	0.853	0.922	0.967	0.995	1.013	1.024	1.031	1.040
0.4	0.847	0.923	0.977	1.014	1.038	1.058	1.062	1.075
0.5	0.886	0.962	1.019	1.059	1.086	1.103	1.113	1.128
0.6	0.977	1.050	1.104	1.142	1.168	1.184	1.194	1.208
0.7	1.140	1.206	1.252	1.283	1.303	1.316	1.324	1.336
0.8	1.430	1.480	1.511	1.532	1.545	1.553	1.558	1.565

表4.2(b) 無次元応力拡大係数  $F_I$  (千鳥配置き裂群, 図4.2(b))

$a/b$	$c/b$										
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	2.0	$\infty$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.017	1.022	1.023	1.022	1.020	1.018	1.014	1.010	1.008	1.005	1.005
0.2	1.089	1.101	1.101	1.094	1.084	1.073	1.053	1.040	1.031	1.022	1.017
0.3	1.272	1.274	1.254	1.223	1.191	1.162	1.116	1.086	1.067	1.049	1.040
0.4	1.666	1.585	1.492	1.405	1.332	1.273	1.192	1.144	1.115	1.089	1.075
0.5	2.273	1.981	1.757	1.591	1.470	1.383	1.271	1.210	1.175	1.144	1.128
0.6	2.727	2.234	1.914	1.705	1.564	1.468	1.351	1.289	1.254	1.224	1.208
0.7	2.744	2.223	1.923	1.740	1.623	1.544	1.450	1.400	1.373	1.348	1.336
0.8	2.49	2.12	1.92	1.809	1.738	1.691	1.634	1.604	1.588	1.572	1.565

表4.3(a) 引張剛性係数  $E^*/E_0$  (長方形配置き裂群, 図4.4(a))

$a/b$	$c/b$									
	0	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	2.0	3.0	4.0	$\infty$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.900	0.963	0.970	0.975	0.978	0.981	0.984	0.990	0.992	1.000
0.2	0.800	0.877	0.894	0.907	0.918	0.927	0.940	0.956	0.969	1.000
0.3	0.700	0.776	0.797	0.816	0.834	0.849	0.873	0.911	0.932	1.000
0.4	0.600	0.673	0.694	0.716	0.736	0.756	0.790	0.848	0.881	1.000
0.5	0.500	0.572	0.592	0.613	0.635	0.657	0.698	0.773	0.819	1.000
0.6	0.400	0.471	0.491	0.512	0.534	0.557	0.602	0.689	0.747	1.000
0.7	0.300	0.372	0.392	0.413	0.435	0.458	0.504	0.599	0.665	1.000
0.8	0.200	0.274	0.295	0.316	0.338	0.361	0.405	0.501	-	1.000

表4.3(b) 引張剛性係数  $E^*/E_0$  (千鳥配置き裂群, 図4.4(b))

$a/b$	$c/b$										
	0	0.5	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	2.0	3.0	4.0	$\infty$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.800	0.940	0.961	0.969	0.974	0.978	0.981	0.984	0.990	0.992	1.000
0.2	0.600	0.786	0.853	0.881	0.901	0.915	0.925	0.940	0.959	0.969	1.000
0.3	0.400	0.586	0.697	0.751	0.791	0.820	0.841	0.871	0.911	0.932	1.000
0.4	0.200	0.378	0.523	0.603	0.663	0.706	0.739	0.785	0.847	0.881	1.000
0.5	0	0.206	0.369	0.463	0.535	0.590	0.631	0.690	0.772	0.819	1.000
0.6	0	0.107	0.256	0.349	0.423	0.481	0.525	0.591	0.689	0.747	1.000
0.7	0	0.064	0.184	0.264	0.330	0.384	0.427	0.493	0.598	0.665	1.000
0.8	0	0.045	0.138	0.200	0.253	0.298	0.336	0.396	0.501	-	1.000

### 4.3.3 $F_1$ , $\Phi/\Phi_0$ , $E^*/E_0$ の計算式

以上の数値計算結果に良く適合する計算式を求めることを考えた。そのさい  $F_1$  と  $\Phi/\Phi_0$  は,  $c/b \rightarrow \infty$  に対応する一列周期き裂群の結果 (4.7), (4.8) に補正項を加えた形で表わすこととし, 補正項をべき級数として求める。そのためパラメータ  $\gamma = c/b$  の代わりにその逆数  $\mu = b/c$  を用いることとし, 解析値に最小二乗法を適用してこれらの量を  $\mu$ ,  $\lambda$  のべき級数として表わした。  $E^*/E_0$  についても上と同様に  $\mu$ ,  $\lambda$  のべき級数で表わしてみたが, 特に  $c/b$  が小さい場合の精度が十分でなかった。そこで, 試行錯誤により  $\mu$  の代わりに  $\xi = \mu/(1+\mu)$  を用いるとよいことがわかったので,  $E^*/E_0$  だけは  $\xi$  と  $\lambda$  のべき級数として与えた。また千鳥配置き裂群については,  $E^*/E_0$  と  $f$  の間の強い相関 (図4.5(b)) を考えて, これを  $\mu$ ,  $f$  による級数でも表わし, 代表的な  $c/b = 1$  の場合の特別な表示も与えた。

得られた計算式は次のようになる。なおこれらの諸式の末尾括弧内に示した「平均誤差」は, 解析値と式による値の相対誤差 (%) の平均値であり, 式の正確さの目安となる。

#### (a) 長方形配置き裂群

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \left( \frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda^2 \mu \left[ 0.217 + 0.167\mu - 2.755\mu^2 \right. \\
 & + \lambda(1.254 - 7.020\mu + 10.300\mu^2) \\
 & \left. + \lambda^2(-1.957 + 8.760\mu - 8.935\mu^2) \right] \\
 & \text{(平均誤差 0.4\%)}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi}{\Phi_0} = & \frac{2}{\pi\lambda} \log \left( \frac{1 + \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \\
 & + \lambda^2 \mu \left[ -0.697 + 4.893\mu - 9.662\mu^2 + 3.051\mu^3 \right. \\
 & + \lambda(0.949 - 4.169\mu + 3.377\mu^2 + 2.802\mu^3) \\
 & \left. + \lambda^2(-0.332 - 0.388\mu + 5.816\mu^2 - 5.947\mu^3) \right] \\
 & \text{(平均誤差 0.2\%)}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E^*}{E_0} &= 1 + \lambda^2 \zeta \left[ -4.477 + 6.136 \zeta - 20.145 \zeta^2 \right. \\
&\quad + \lambda (13.494 - 85.014 \zeta + 127.33 \zeta^2) \\
&\quad + \lambda^2 (-29.629 + 144.97 \zeta - 81.274 \zeta^2) \\
&\quad + \lambda^3 (16.433 - 0.723 \zeta - 232.07 \zeta^2) \\
&\quad \left. + \lambda^4 (-0.128 - 62.149 \zeta + 213.20 \zeta^2) \right] \\
&\quad \text{(平均誤差 0.2\%)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E^*}{E_0} &= 1 + f (-1.980 - 0.200 \zeta + 0.395 \zeta^2) \\
&\quad + f^2 (0.650 + 6.323 \zeta + 5.131 \zeta^2) \\
&\quad + f^3 (-7.019 + 18.480 \zeta - 50.903 \zeta^2) \\
&\quad + f^4 (26.079 - 95.029 \zeta + 129.76 \zeta^2) \\
&\quad + f^5 (-23.134 + 87.591 \zeta - 99.941 \zeta^2) \\
&\quad \text{(平均誤差 0.3\%)}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

(b) 千鳥配置き裂群

$$\begin{aligned}
F_I &= \left( \frac{2}{\pi \lambda} \tan \frac{\pi \lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda^2 \mu \left[ -1.080 + 3.761 \mu - 1.354 \mu^2 \right. \\
&\quad + \lambda (0.224 + 1.428 \mu - 3.411 \mu^2) \\
&\quad + \lambda^2 (-5.923 + 1.521 \mu + 17.642 \mu^2) \\
&\quad + \lambda^3 (23.351 - 45.083 \mu - 9.849 \mu^2) \\
&\quad \left. + \lambda^4 (-17.959 + 42.526 \mu - 5.103 \mu^2) \right] \\
&\quad \text{(平均誤差 0.8\%)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\Phi_0} &= \frac{2}{\pi\lambda} \log \left( \frac{1 + \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \\ &+ \lambda^2 \mu \left[ -1.234 + 4.301\mu - 1.735\mu^2 \right. \\ &+ \lambda(3.558 - 10.460\mu + 5.190\mu^2) \\ &+ \lambda^2(-24.865 + 73.096\mu - 36.571\mu^2) \\ &+ \lambda^3(52.175 - 163.22\mu + 92.372\mu^2) \\ &\left. + \lambda^4(-31.087 + 101.26\mu - 62.386\mu^2) \right] \\ &\quad \text{(平均誤差 1.1\%)} \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} &= 1 + \lambda^2 \zeta \left[ -2.328 - 12.932 \zeta + 31.897 \zeta^2 - 43.282 \zeta^3 \right. \\ &+ \lambda(-1.773 + 39.006 \zeta - 164.46 \zeta^2 + 181.25 \zeta^3) \\ &+ \lambda^2(-60.515 + 451.66 \zeta - 979.39 \zeta^2 + 718.99 \zeta^3) \\ &+ \lambda^3(153.51 - 1234.4 \zeta + 3045.4 \zeta^2 - 2374.4 \zeta^3) \\ &\left. + \lambda^4(-100.76 + 824.04 \zeta - 2087.9 \zeta^2 + 1632.1 \zeta^3) \right] \\ &\quad \text{(平均誤差 0.1\%)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} &= 1 + f(-2.092 + 0.715 \zeta - 1.707 \zeta^2 + 1.283 \zeta^3) \\ &+ f^2(-4.623 + 59.460 \zeta - 156.24 \zeta^2 + 125.72 \zeta^3) \\ &+ f^3(-0.893 - 44.552 \zeta + 191.21 \zeta^2 - 198.59 \zeta^3) \\ &+ f^4(3.279 + 4.174 \zeta - 85.586 \zeta^2 + 122.97 \zeta^3) \\ &+ f^5(-0.101 + 0.483 \zeta + 15.421 \zeta^2 - 29.647 \zeta^3) \\ &\quad \text{(平均誤差 0.1\%)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{E^*}{E_0} \right)_{c/b=1} &= 1 - 1.996f + 1.595f^2 + 0.842f^3 - 2.937f^4 \\ &+ 2.395f^5 - 0.699f^6 \quad \text{(平均誤差 0.02\%)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.10) ~ (4.17) による結果を図4.2(a) ~ 図4.5(b) に破線で示してあり、解析値と極めて近い値を与えることがわかる。また千鳥分布き裂群の場合は  $c/b$  に関係なく  $c/b = 1$  の場合の式 (4.18) を用いても実用上十分正確である。

#### 4.4 結 論

長方形配置(a)及び千鳥分布配置(b)のき裂群をもつ無限体の引張りについて、適当な単位領域を考え、合力と変位による境界条件を用いて精度良く解析した。き裂の大きさおよび横方向と縦方向の間隔の種々の組合せについて数値計算を行ない、無次元応力拡大係数 $F_1$ 、き裂中央の無次元開口変位 $\Phi / \Phi_0$ 及びき裂群をもつ弾性体の剛性係数 $E^* / E_0$ を求めた。き裂が引張方向に密になるに従って、長方形配置き裂群の場合の応力拡大係数と開口変位はいずれも単調に減少するが、千鳥配置き裂群の場合は斜め方向のき裂同士の干渉によってこれらの値が増大する。引張剛性係数 $E^* / E_0$ は、き裂密度が同じ場合、長方形配置き裂群より千鳥配置き裂群の方が低くなる。また千鳥配置き裂群の場合の $E^* / E_0$ は、パラメータの広い範囲で近似的にき裂包絡円の面積率 $f$ だけの関数と考えてよい。これは実際のランダムなき裂群の場合も $E^* / E_0$ が統計的な意味で近似的に $f$ だけに依存することを示唆するように思われる。さらに $F_1$ 、 $\Phi / \Phi_0$ 及び $E^* / E_0$ の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えて、パラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められるようにした。以上の結果は平面応力と平面ひずみに関係なく、 $E$ 、 $\nu$ などの弾性定数にも無関係である。

参考文献

- (1) 石田 誠, 日本機械学会論文集, **21** (1955), 502.
- (2) Westergaard, H. M., J. Appl. Mech., Trans. ASME, **66** (1939), A49.
- (3) Sammis, C. G. and Ashby, M. F., Acta Metall, **34** (1986), 511.
- (4) Isida, M. and Nemat-Nasser, S., Acta Metall, **35** (1987), 2887.

## 第5章 長方形配置及び千鳥配置の だ円孔群や だ円形介在物群をもつ無限体の引張り

### 5.1 緒言

本章では、長方形配置及び千鳥配置の だ円孔群や だ円形介在物群をもつ無限体の引張りを解析する。

だ円孔群の解析には、だ円孔縁自由条件を満たす Laurent 展開法と第3章で用いたと同じ合力と変位に基づく境界分割法を組合せて行なった。だ円形介在物群の解析には体積力法を用いた。だ円孔やだ円形介在物の形状・大きさおよび介在物と母材の剛性比の種々の組合せについて計算し、だ円孔縁応力および弾性体の引張剛性に及ぼす だ円孔や だ円形介在物の影響について検討した。さらにそれらの結果に精度良く適合する計算式を与える。

## 5.2 だ円孔群の場合

### 5.2.1 解析方法

本節では次の二つの問題を解析する.

(a) 長方形配置の だ円孔群をもつ無限体の引張り (図5.1(a))

(b) 千鳥配置の だ円孔群をもつ無限体の引張り (図5.1(b))

両問題を通じて だ円孔の主軸長を  $2a, 2b$ , 主軸 (長さ  $2a$ ) の端の曲率半径を  $\rho$  とし, だ円孔の一つの中心に原点をとった座標系  $Oxy$  を図のように定める. それぞれの場合について,  $x$  方向および  $y$  方向の だ円孔の間隔を与えるパラメータ  $c, d$  を図5.1(a), (b) のように定め,  $y$  方向に作用する平均応力を  $\sigma$  とする.

解析には第3章と同様に適当な単位領域を考え,  $x, y$  両軸に関する応力状態の対称条件および だ円孔縁の境界条件を完全に満たす複素応力関数を導き, その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった. この単位領域としては第3章の諸問題と同様に問題(a) では長方形領域  $ODHKO$  を用い, 問題(b) では三角形領域  $ODFO$  を用いた.

まずこれらの解析領域に適合する複素応力関数として次の Laurent 展開を仮定する<sup>(1, 2)</sup>.

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_{2n} z^{-2n-1} + M_{2n} z^{2n+1}) \\ \psi(z) &= -D_0 \log z + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{2n+2} z^{-2n-2} + K_{2n} z^{2n+2})\end{aligned}\quad (5.1)$$

式中の展開係数はすべて実数であり, またこれらは  $x, y$  両軸に関する対称条件を満たしている.

複素応力関数の Laurent 展開が だ円孔を自由縁とする場合に, 係数間に成立つ関係が石田によって求められており<sup>(1, 2)</sup>, この条件を書くと次のようになる.

$$\begin{aligned}D_{2n} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (P_{2p}^{2n} K_{2p} + R_{2p}^{2n} M_{2p}) \\ G_{2n} &= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (Q_{2p}^{2n} K_{2p} + S_{2p}^{2n} M_{2p})\end{aligned}\quad (5.2)$$

ここに, 右辺の係数  $P_{2p}^{2n}$  等は だ円孔の形  $b/a$  ( $=\sqrt{\rho/a}$ ) の関数である.

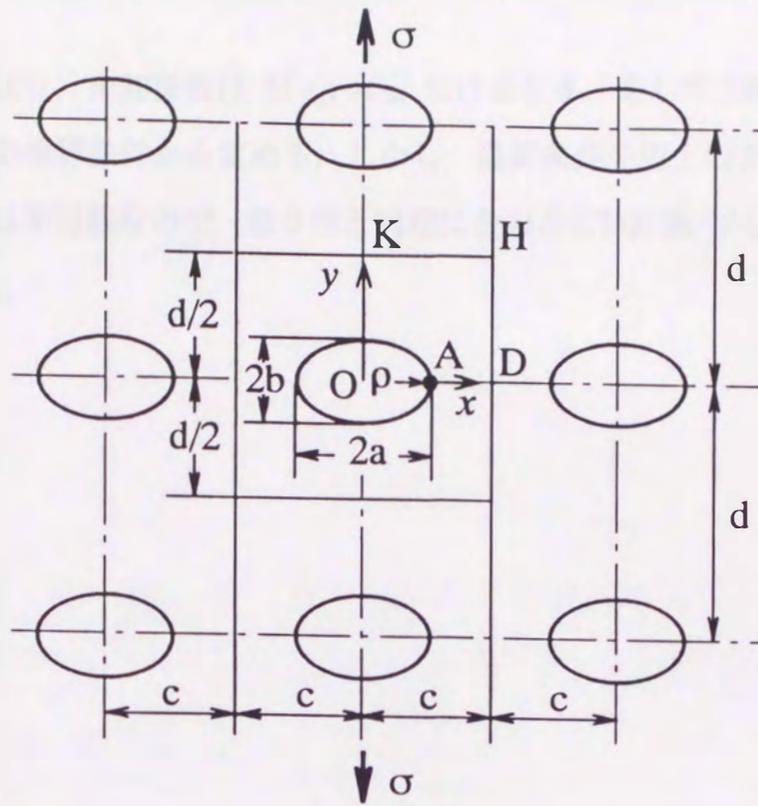


図5.1(a) 問題(a) : 長方形配置の だ円孔群

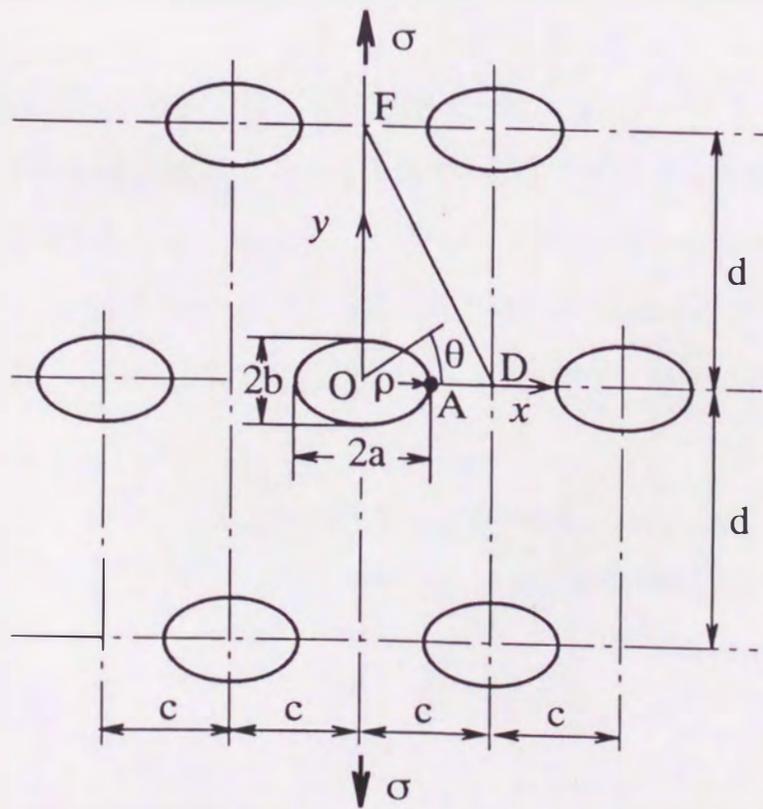


図5.1(b) 問題(b) : 千鳥配置の だ円孔群

以上の関係により、未知係数は  $M_{2i}, K_{2i}$  だけとなる。そしてこれらの未知係数を単位領域外周の境界条件から定める。しかし、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

$$M_{2i} = \dots$$

$$K_{2i} = \dots$$

このようにして、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

$$M_{2i} = \dots$$

このようにして、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

このようにして、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

$$\begin{cases} M_{2i} = \dots & (3.4.10) \\ K_{2i} = \dots & (3.4.11) \end{cases} \quad (3.4)$$

このようにして、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

このようにして、境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

表3.4 境界条件を辺上のすべての点で完全に満たすことは不可能なので、第3章と同様に合力と変位に基づく境界分割法<sup>(3.4.5)</sup>を適用した。

境界条件	未知係数	境界条件
1. 固定	$M_{2i}$	$K_{2i}$
2. 自由	$K_{2i}$	$M_{2i}$
3. 滑り	$M_{2i}$	$K_{2i}$
4. 回転	$K_{2i}$	$M_{2i}$

## 5.2.2 計算結果

### 5.2.2.1 精度の検討

計算結果には  $a, b, c, d$  の比だけが関係するので、無次元パラメータとして次の  $\mu, \lambda, \varepsilon$  を用いた。

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{c}{d}, \quad \lambda = \frac{a}{c} \\ \varepsilon &= \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\rho}{a}}\end{aligned}\tag{5.3}$$

$\mu, \lambda, \varepsilon$  の種々の組合せについて計算を行ない、各場合について、だ円孔縁に沿う接線応力  $\sigma_t$  の分布とその最大値及び次式で定義される引張剛性係数  $C$  を求めた。

$$\begin{aligned}C &= \frac{E^*}{E_0} = \text{引張剛性係数} \\ E^* &= \text{だ円孔群がある場合の見かけの縦弾性係数} \\ E_0 &= \text{穴のない弾性体の見かけの縦弾性係数} \\ &= \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E / (1 - \nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}\end{aligned}\tag{5.4}$$

ここに  $E$  は母材の薄板試験片で測定した縦弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

本解析による数値結果の精度は、領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる。表5.1は、問題(a)で  $c/d = 0.5, a/c = 0.8, \rho/a = 0.25$  の場合について長方形単位領域を用い、分割数  $N$  を8, 16, 24, 32として得た解析値である。なお  $\sigma_A$  は図5.1(a)に示す引張方向に直角な孔軸端Aの

表5.1 正方形配置 だ円孔群の精度検討例 ( $c/d = 0.5, a/c = 0.8, \rho/a = 0.25$ , 長方形単位領域使用)

$N$	$\sigma_A/\sigma$	$E^*/E_0$
8	7.9465	0.3533
16	7.9251	0.3535
24	7.9251	0.3536
32	7.9251	0.3536

接線応力である。  $\sigma_A/\sigma$  と  $E^*/E_0$  の値は  $N$  の増加とともに極めて良い収束を示している。

本法によれば、図5.1(a), (b) に示す穴の横方向および縦方向間隔  $c, d$  を自由にとることができるが、以下では問題(a) について  $\mu (= c/d) = 0.5$  の正方形配置および問題(b) について  $\mu (= c/d) = 1$  の千鳥正方形配置を解析する。なお計算結果は、先に述べた理由により  $N \approx 20, 30, 40$  として行なって得た値を比較して正確さを確かめた。

### 5.2.2.2 だ円孔無次元応力とその計算式

問題(a) では最大応力  $\sigma_{\max}$  は引張方向に直角な主軸端 A (図5.1(a)) に生ずる。一方、問題(b) では最大応力  $\sigma_{\max}$  は計算した多くの場合、点 A ( $\theta = 0^\circ$ ) に生ずるが、ある範囲の  $\rho/a, \lambda$  では斜め方向の穴同士の干渉によって点 A から離れた位置 B ( $\theta \neq 0^\circ$ ) に生ずることもある。その場合の例を図5.2 に示す。

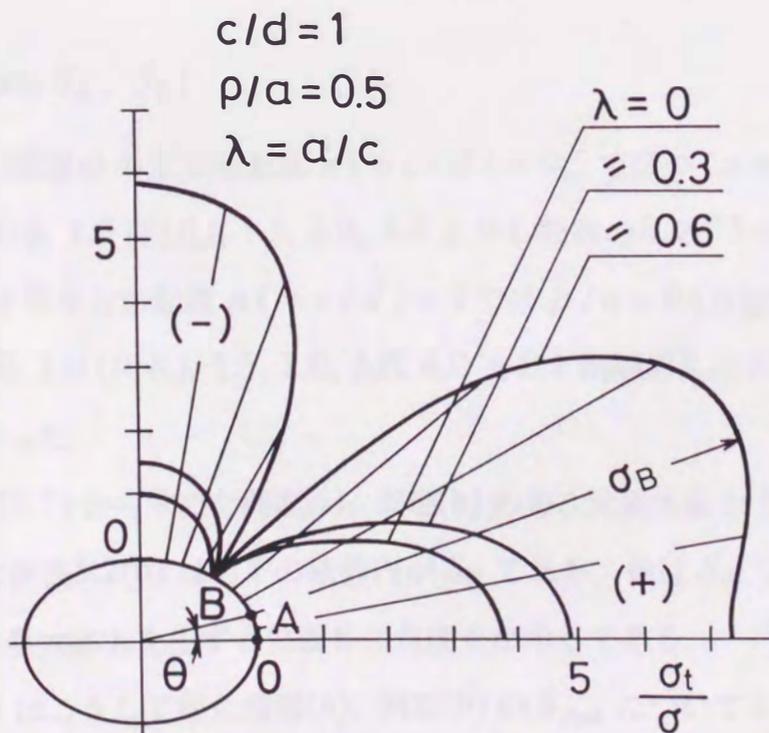


図5.2 問題(b) :  $\mu=1$  の  $\sigma_t/\sigma$  の分布

これらの応力  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  の無次元表示としては、第2章の場合と同様に、円孔からき裂を含む穴の形の全範囲で有限値を与える次の無次元応力  $S_A$ ,  $S_B$  を用いた。

$$S_A = \frac{\sigma_A}{\sigma_0}, \quad S_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_0}$$

$\sigma_0 =$  無限板にだ円孔が一個の場合の最大応力

$$= \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (5.5)$$

$S_A$ ,  $S_B$  は応力  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  が他の穴の存在によって1個の場合の何倍となるかを表わす干渉効果係数に相当する。

穴が細長くなった極限にあたるき裂の場合、 $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  と  $\sigma_0$  は同位の無限大となるので、 $S_A$ ,  $S_B$  は有限確定値となる。そして、これらはき裂先端Aにおける次の無次元応力拡大係数に一致する。

$$(S_A)_{\rho \rightarrow 0} = (S_B)_{\rho \rightarrow 0} = \frac{K_{I,A}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (5.6)$$

そして  $S_A$ ,  $S_B$  の大きい方を取って得る無次元応力を  $S_{\max}$  とした。すなわち次式を得る。

$$S_{\max} = \max(S_A, S_B) \quad (5.7)$$

数値計算は、問題(a)の正方形配置  $\mu (= c/d) = 0.5$  では  $\rho/a = 0$  (き裂), 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔), 1.5, 2.0, 4.0 と 0.1 間隔の  $\lambda$  の 75 の組合せについて、問題(b)の千鳥正方形配置  $\mu (= c/d) = 1$  では  $\rho/a = 0$  (き裂), 0.2, 1/3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔), 1.5, 2.0, 3.0, 4.0 と 0.1 間隔の  $\lambda$  の 67 の組合せについて計算を行なった。

(5.5), (5.6), (5.7) から求めた問題(a), 問題(b)の無次元最大応力  $S_{\max}$  を表5.2(a), (b) に示す。なお表5.2(b) は右下の破線内が  $S_B$  であり、他は  $S_A$  である。そして表中の ( ) は最大応力を生ずる位置Bの角度  $\theta$  が示してある。

図5.3(a), (b) はこうして得た問題(a), 問題(b)の  $S_{\max}$  について  $\lambda$  を横軸にとり  $\rho/a$  をパラメータとして太い実線で描いたものである。図5.3(b)の細かい実線は  $S_B > S_A$  となる範囲における  $S_A$  を示している。

表5.2(a)  $S_{\max}$  の値 (正方形配置だ円孔群;  $\mu=0.5$ )

$a/c$	$\rho/a$									
	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.003	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997
0.2	1.012	1.007	1.005	1.004	1.003	1.002	1.001	0.999	0.998	0.994
0.3	1.031	1.019	1.016	1.014	1.013	1.011	1.010	1.008	1.006	1.008
0.4	1.062	1.045	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036	1.037	1.041	1.065
0.5	1.113	1.090	1.087	1.086	1.087	1.089	1.093	1.106	1.121	
0.6	1.194	1.166	1.168	1.172	1.177	1.189	1.203	1.239	1.276	
0.7	1.324	1.296	1.319	1.335	1.351	1.386	1.421	1.502	1.574	
0.8	1.558	1.563	1.657	1.706	1.753	1.843	1.924	2.097		

表5.2(b)  $S_{\max}$  の値 (千鳥正方形配置だ円孔群;  $\mu=1$ )

$a/c$	$\rho/a$											
	0	0.2	1/3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.018	1.024	1.026	1.027	1.028	1.029	1.031	1.033	1.037	1.041	1.047	1.052
0.2	1.073	1.097	1.106	1.110	1.115	1.120	1.130	1.139	1.160	1.179	1.217	1.253
0.3	1.162	1.218	1.240	1.250	1.265	1.280	1.309	1.339	1.413	1.489	1.640	1.772
0.4	1.273	1.365	1.411	1.434	1.470	1.508	1.588	1.677	1.921	2.177	2.641	3.007
0.5	1.383	1.491	1.572	1.619	1.699	1.789	2.019	2.335	3.285	4.383		
							(11°)	(17°)	(23°)	(26°)		
0.6	1.468	1.546	1.669	1.789	2.111	2.532	3.643	5.238	14.98			
				(9°)	(15°)	(18°)	(24°)	(27°)	(33°)			

( ): 最大応力を生ずる位置  $\theta$  の値.

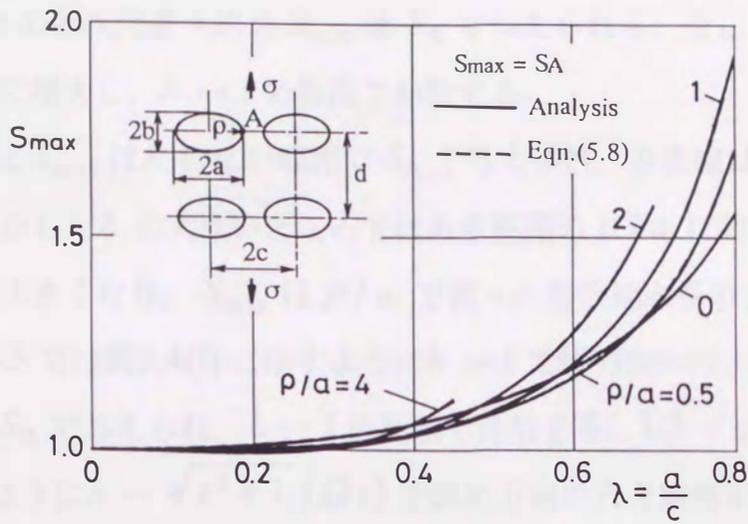


図5.3(a) 問題(a) (正方形配置だ円孔群) :  
 $S_{max}$  と  $\rho/a$ ,  $\lambda$  の関係

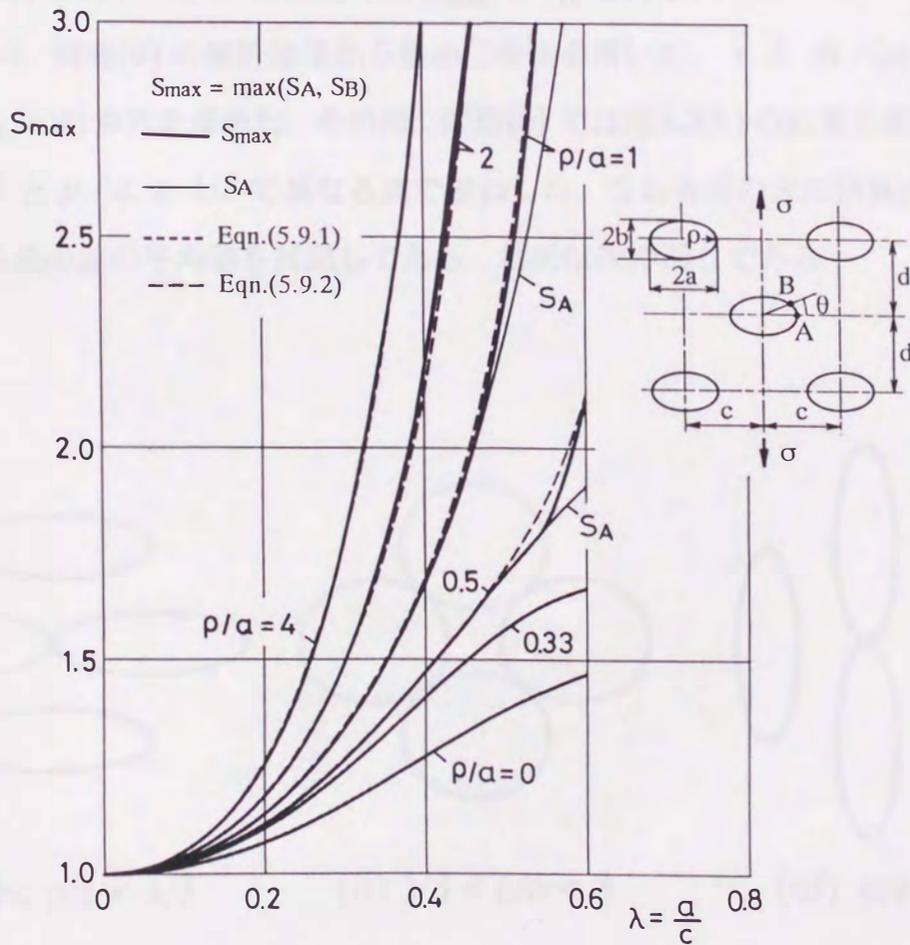


図5.3(b) 問題(b) (千鳥正方形配置だ円孔群) :  
 $S_{max}$  と  $\rho/a$ ,  $\lambda$  の関係

さて問題(a)の無次元最大応力  $S_{\max}$  は  $S_A$  で与えられる。そして各曲線は  $\lambda$  の増大でほぼ単調に増大し、 $\lambda \rightarrow 1$  の極限で発散する。

問題(b)では  $S_{\max}$  は  $\lambda$  の広い範囲で  $S_A$  で与えられ、各曲線は  $\lambda$  の増大で単調に増大する。しかし、 $\lambda$  の大きいところではある範囲の  $\rho/a$  に対して斜め方向の穴同士の干渉が大きくなり、 $S_{\max}$  は  $\rho/a$  で異った発散傾向を示す。すなわち、 $0 \leq \rho/a < 1/3$  では図5.4(i)に示すように  $\lambda \rightarrow 1$  で横方向の穴と接触する。この場合の  $S_{\max}$  は  $S_A$  で与えられ、 $\lambda \rightarrow 1$  の極限で発散する。 $1/3 < \rho/a < 3$  では図5.4(ii)に示すように  $\lambda \rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 + 1} / (2\varepsilon)$  で斜め方向の穴と接触する。 $\lambda$  が  $0.4 \sim 0.5$  付近から斜め方向の穴との干渉が大きくなり、 $S_{\max}$  は  $S_B$  で与えられる(図5.2)。この場合の  $S_{\max}$  は  $\lambda \rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 + 1} / (2\varepsilon)$  の極限で発散する。

さらに、 $\rho/a > 3$  では図5.4(iii)に示すように  $\lambda \rightarrow 1/\varepsilon$  で上下方向の穴と接触する。しかし計算した  $\rho/a, \lambda$  の範囲では  $S_{\max}$  は  $S_A$  である。

さて問題(a)、問題(b)の解析結果から最小二乗法を用いて、 $\varepsilon, \lambda$  のベキ級数表示による  $S_{\max}$  の計算式を求めた。その際、問題(b)では図5.3(b)の結果を考慮して、 $\rho/a \leq 1/3$  と  $\rho/a \geq 1/3$  で異なる式で表わした。なお各式の末尾括弧内に解析値と式による値の差の平均値を付記してある。結果は次の通りである。

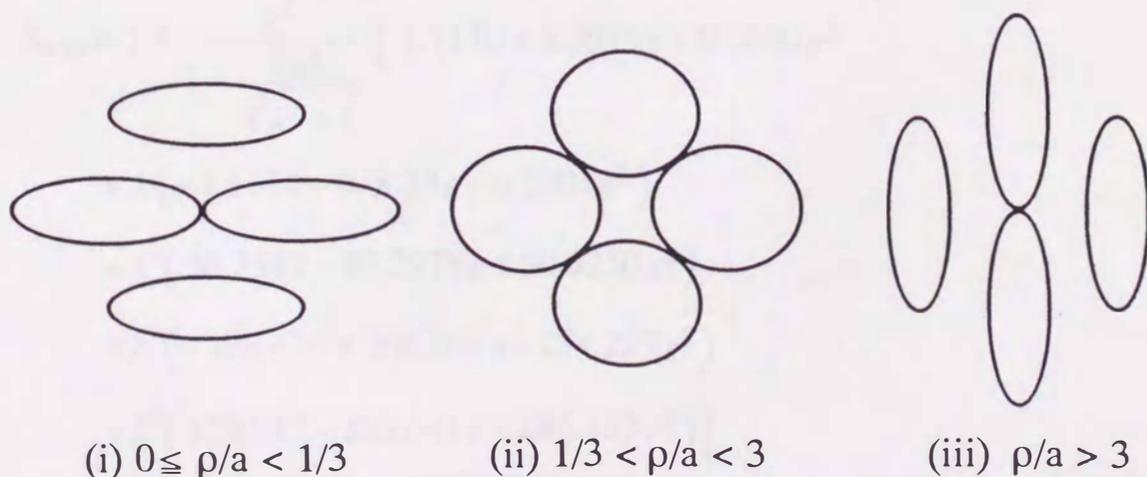


図5.4 問題(b): だ円孔が接触する極限

問題(a) : 正方形配置 ( $\mu = 0.5$ )

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left[ 0.2757 - 0.4126\varepsilon + 0.1302\varepsilon^2 - 0.0376\varepsilon^3 \right. \\
 & + \lambda(-0.2764 + 1.1465\varepsilon - 1.4701\varepsilon^2 + 0.5137\varepsilon^3) \\
 & + \lambda^2(0.7736 - 2.5802\varepsilon + 6.9170\varepsilon^2 - 2.2693\varepsilon^3) \\
 & + \lambda^3(-1.0006 + 3.7412\varepsilon - 11.9176\varepsilon^2 + 4.4548\varepsilon^3) \\
 & \left. + \lambda^4(0.3349 - 2.2530\varepsilon + 7.6266\varepsilon^2 - 3.2603\varepsilon^3) \right] \\
 & \text{(平均誤差 0.05\%)} \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

問題(b) : 千鳥正方形配置 ( $\mu = 1$ )

$\rho/a \leq 1/3$  について

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left[ 1.8169 + 1.0436\varepsilon + 0.5876\varepsilon^2 \right. \\
 & + \lambda(-2.1638 + 1.1838\varepsilon - 6.2676\varepsilon^2) \\
 & + \lambda^2(3.8925 - 9.3537\varepsilon + 35.7642\varepsilon^2) \\
 & + \lambda^3(-12.7934 + 3.9338\varepsilon - 56.6534\varepsilon^2) \\
 & \left. + \lambda^4(10.5138 + 1.9845\varepsilon + 31.5175\varepsilon^2) \right] \\
 & \text{(平均誤差 0.04\%)} \tag{5.9.1}
 \end{aligned}$$

$\rho/a \geq 1/3$  について

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \frac{2\varepsilon\lambda}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}} \left[ 1.7170 + 1.3916\varepsilon + 0.2840\varepsilon^2 \right. \\
 & + \lambda(-1.6954 - 0.0039\varepsilon - 6.7001\varepsilon^2) \\
 & + \lambda^2(36.2512 - 83.2978\varepsilon + 80.8250\varepsilon^2) \\
 & + \lambda^3(-138.479 + 306.085\varepsilon - 254.227\varepsilon^2) \\
 & \left. + \lambda^4(129.517 - 298.641\varepsilon + 246.157\varepsilon^2) \right] \\
 & \text{(平均誤差 0.6\%)} \tag{5.9.2}
 \end{aligned}$$

(5.8) による結果を図5.3(a)に破線で、(5.9.1)、(5.9.2)による結果を図5.3(b)に点線と破線で示しており、解析値と良く一致している。

### 5.2.2.3 引張剛性係数とその計算式

表5.3(a), (b) は、前節と同じ  $\rho/a$ ,  $\lambda$  の組合せについて求めた引張剛性係数  $C = E^*/E_0$  を示したものである。

図5.5(a), (b) はこうして得た  $E^*/E_0$  を  $\lambda$  を横軸に取り  $\rho/a$  をパラメータとして描いたものである。両問題とも  $\rho/a$  が大きくなると曲線群は低下し、その低下の程度は千鳥配置の場合の低下が著しい。

さて、この縦弾性係数の低下は、力の流れがだ円孔によって妨げられる程度に密接に関係する筈である。すなわち領域内に穴が存在する場合の力の流れは、だ円孔面積とその周辺のデッドゾーンの面積に依存すると考えられる。そこで、だ円孔群が領域全体に占める面積率を  $f$ 、デッドゾーンの面積率を  $q$  とし、両方の和で表わされるパラメータを有効面積率  $f_e$  とする。だ円孔面積率  $f$  は一般に閉じた形で表わすことができる。しかしデッドゾーンの面積率  $q$  を閉じた形で表わすことが困難であるため、表5.3(a), (b) の解析値をもとに  $\varepsilon$  と  $\lambda$  のべき級数で表わした。その際、第4章で述べたように  $\rho/a \rightarrow 0$  (き裂) では  $q$  として き裂包絡円面積率を用いることが最も有効であったので、これを満足する形で与えた。そして曲線群が き裂群の結果に最もまとまるように べき級数の係数を試行錯誤によって定めた。結果は問題(a), (b) で以下の通りである。

問題(a) : 正方形配置 ( $c/d = 0.5$ )

$$\begin{aligned} f_e &= f + q \\ f &= \frac{\pi}{4} \lambda^2 \varepsilon \\ q &= \frac{\pi}{4} \lambda^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{4} \lambda^2 \varepsilon^2 \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

問題(b) : 千鳥正方形配置 ( $c/d = 1$ )

$$\begin{aligned} f_e &= f + q \\ f &= \frac{\pi}{2} \lambda^2 \varepsilon \\ q &= \frac{\pi}{2} \lambda^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon + 5 \lambda^3 \varepsilon^2 \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

表5.3(a) 種々の  $\rho/a$ ,  $a/c$  に対する  $C = E^*/E_0$  の値  
 (正方形配置だ円孔群;  $\mu=0.5$ )

$a/c$	$\rho/a$									
	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.984	0.981	0.980	0.979	0.979	0.978	0.977	0.975	0.974	0.970
0.2	0.940	0.928	0.923	0.921	0.920	0.917	0.914	0.908	0.903	0.889
0.3	0.873	0.850	0.842	0.838	0.835	0.829	0.824	0.814	0.806	0.782
0.4	0.790	0.758	0.746	0.741	0.737	0.729	0.722	0.709	0.698	0.670
0.5	0.698	0.660	0.645	0.639	0.634	0.625	0.617	0.601	0.589	
0.6	0.602	0.560	0.543	0.537	0.531	0.520	0.512	0.495	0.483	
0.7	0.504	0.461	0.442	0.434	0.428	0.416	0.407	0.389	0.376	
0.8	0.405	0.360	0.338	0.330	0.322	0.310	0.300	0.282		

表5.3(b) 種々の  $\rho/a$ ,  $a/c$  に対する  $C = E^*/E_0$  の値  
 (千鳥正方形配置だ円孔群;  $\mu=1$ )

$a/c$	$\rho/a$											
	0	0.2	1/3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.969	0.962	0.960	0.959	0.958	0.957	0.955	0.954	0.950	0.947	0.942	0.938
0.2	0.881	0.855	0.848	0.844	0.840	0.836	0.829	0.822	0.809	0.797	0.778	0.762
0.3	0.751	0.699	0.684	0.677	0.668	0.659	0.644	0.631	0.602	0.578	0.542	0.517
0.4	0.603	0.526	0.501	0.490	0.475	0.461	0.436	0.414	0.370	0.337	0.298	0.278
0.5	0.463	0.368	0.335	0.320	0.299	0.279	0.245	0.216	0.164	0.132		
0.6	0.349	0.245	0.204	0.185	0.160	0.137	0.100	0.072	0.028			

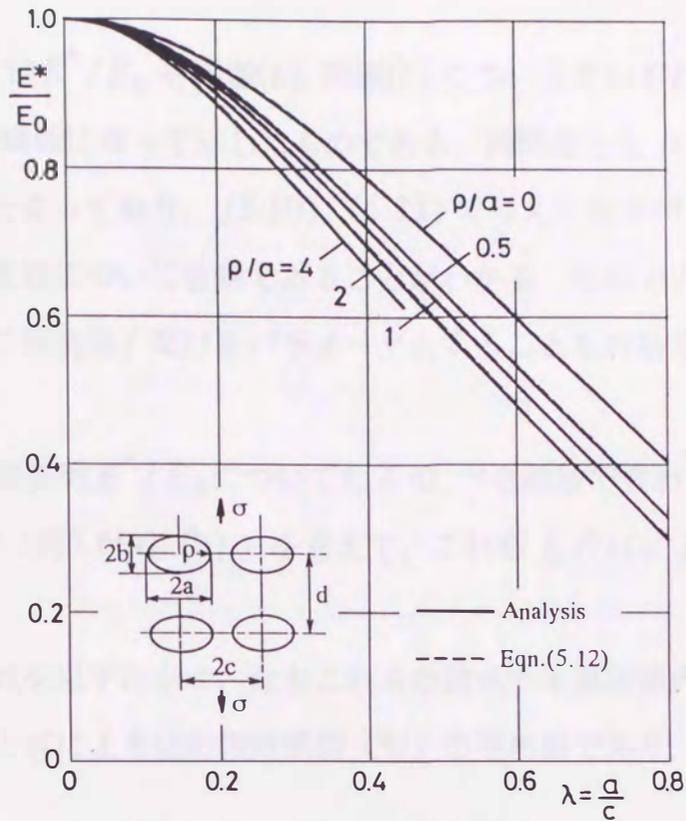


図5.5(a)  $C = E^*/E_0$  と  $\rho/a$ ,  $\lambda$  の関係  
(正方形配置だ円孔群 ;  $\mu=0.5$  )

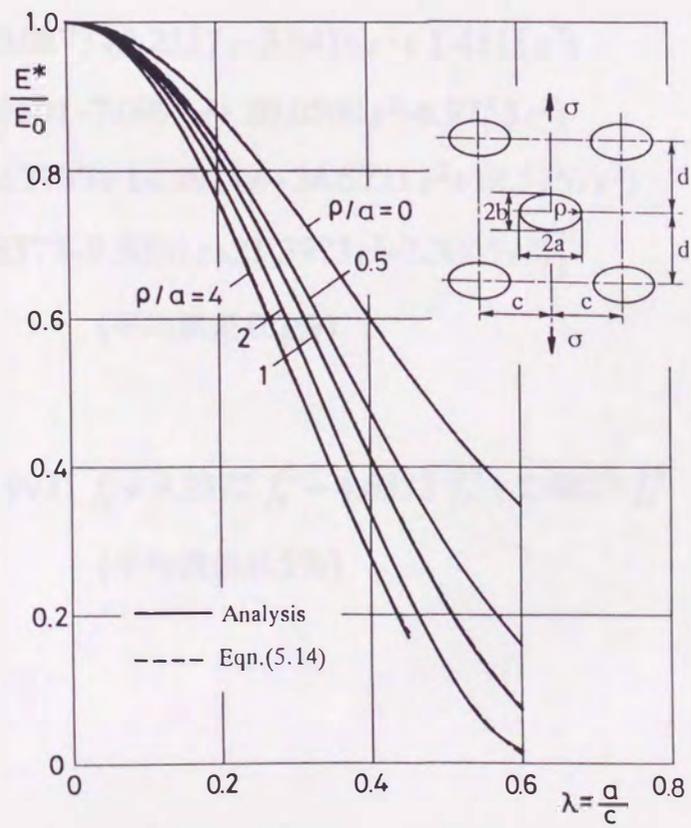


図5.5(b)  $C = E^*/E_0$  と  $\rho/a$ ,  $\lambda$  の関係  
(千鳥正方形配置だ円孔群 ;  $\mu=1$  )

図5.6(a), (b) は  $E^*/E_0$  を問題(a), 問題(b) についてそれぞれ (5.10), (5.11) で与えられる  $f_e$  を横軸に取って示したものである。両問題とも  $\rho/a$  に関係なく非常に狭い範囲にまとまっており, (5.10), (5.11) で与えられるパラメータ  $f_e$  がだ円孔群の引張剛性係数について有効であることがわかる。なお  $\rho/a = 1$  (円孔) の場合には最も簡単に面積率  $f$  だけをパラメータとすることも有効である (図3.14(a), (b))。

以上の引張剛性係数  $E^*/E_0$  について  $\varepsilon, \lambda$  のべき級数で表わした。また  $E^*/E_0$  と  $f_e$  の間の関係 (図5.6(a), (b)) を考えて, これを  $f_e$  だけによる級数でも表わした。

得られた計算式を以下に示す。なおこれらの諸式の末尾括弧内に示した「平均誤差」は, 解析値と式による値の相対誤差 (%) の平均値であり, 式の正確さの目安となる。

問題(a) : 正方形配置 ( $c/d = 0.5$ )

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 + \lambda^2 [-1.5676 - 0.9146\varepsilon + 0.2219\varepsilon^2 - 0.0803\varepsilon^3 \\ & + \lambda(-0.0873 + 2.2217\varepsilon - 3.9416\varepsilon^2 + 1.4311\varepsilon^3) \\ & + \lambda^2(2.7891 - 7.0999\varepsilon + 20.0590\varepsilon^2 - 6.9753\varepsilon^3) \\ & + \lambda^3(-2.7733 + 14.4914\varepsilon - 36.5721\varepsilon^2 + 12.5757\varepsilon^3) \\ & + \lambda^4(0.8377 - 9.5030\varepsilon + 21.3973\varepsilon^2 - 7.3065\varepsilon^3)] \\ & \text{(平均誤差 0.1\%)} \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 - 1.9931 f_e + 3.3372 f_e^2 - 4.6333 f_e^3 + 2.6823 f_e^4 \\ & \text{(平均誤差 0.5\%)} \end{aligned} \tag{5.13}$$

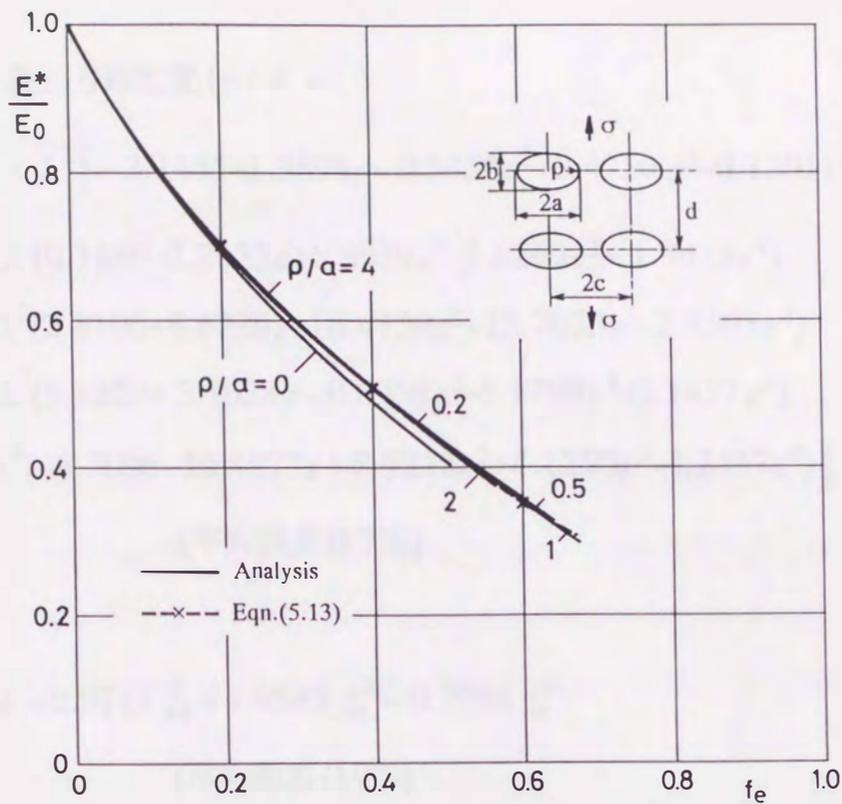


図5.6(a)  $C = E^*/E_0$  と  $\rho/a$ ,  $f_e$  の関係  
 (正方形配置だ円孔群 ;  $\mu=0.5$ )

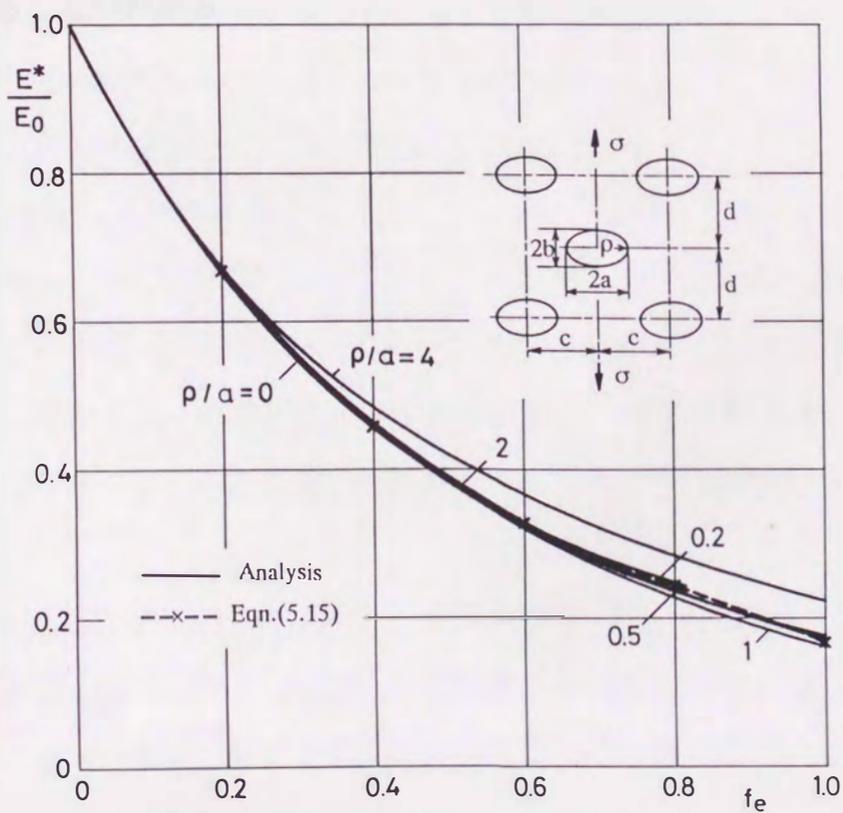


図5.6(b)  $C = E^*/E_0$  と  $\rho/a$ ,  $f_e$  の関係  
 (千鳥正方形配置だ円孔群 ;  $\mu=1$ )

問題(b) : 千鳥正方形配置 ( $c/d = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 + \lambda^2 [-3.1465 - 1.3896\varepsilon - 0.5452\varepsilon^2 + 0.4750\varepsilon^3 - 0.1201\varepsilon^4 \\ & + \lambda(0.1489 - 2.2622\varepsilon + 6.6989\varepsilon^2 - 5.6249\varepsilon^3 + 1.3413\varepsilon^4) \\ & + \lambda^2(2.8106 + 8.6220\varepsilon - 16.4720\varepsilon^2 + 12.7023\varepsilon^3 - 2.8505\varepsilon^4) \\ & + \lambda^3(5.1229 + 3.7628\varepsilon - 0.6958\varepsilon^2 - 5.1790\varepsilon^3 + 3.1437\varepsilon^4) \\ & + \lambda^4(-6.7096 - 10.4973\varepsilon + 8.9222\varepsilon^2 + 4.1250\varepsilon^3 - 4.2437\varepsilon^4)] \end{aligned}$$

(平均誤差 0.7%) (5.14)

$$\frac{E^*}{E_0} = 1 - 2.0111 f_e + 1.9583 f_e^2 - 0.7786 f_e^3$$

(平均誤差 0.9%) (5.15)

(5.12), (5.14) による結果を図5.5(a), (b) に破線で, (5.13), (5.15) による結果を図5.6(a), (b) に×印付き破線で示してあり, いずれの計算式も解析値と極めて近い値を与えることがわかる.

### 5.3 だ円形介在物群の場合

#### 5.3.1 解析方法

本節では次の二つの問題を解析する。

(a) 長方形配置の だ円形介在物群をもつ無限体の引張り (図5.7(a))

(b) 千鳥配置の だ円形介在物群をもつ無限体の引張り (図5.7(b))

両問題を通じて だ円形介在物の主軸長を  $2a, 2b$ , 主軸 (長さ  $2a$ ) の端の曲率半径を  $\rho$  とし, 介在物の一つの中心に原点をとった座標系  $Oxy$  を図のように定める。それぞれの場合について,  $x$  方向および  $y$  方向の だ円形介在物の間隔を与えるパラメータ  $c, d$  を図5.7(a), (b) のように定め,  $x$  方向に作用する遠方応力を  $\sigma_{x\infty}$ ,  $y$  方向に作用する遠方応力を  $\sigma_{y\infty}$  とする。母材の部分を (I), 介在物の部分を (II) とし, これらに対する弾性定数を  $E_I, \nu_I$  および  $E_{II}, \nu_{II}$  とする。

本節の問題の解析には体積力法を用い, 村上らによる周期的に配列された介在物問題の解法に基づいて解析した<sup>(6, 7)</sup>。詳しい説明は省略するが, 基本解となる集中力による応力場と変位場 (Green 関数) としては母材に関する Green 関数と介在物に関する Green 関数を用いることによって境界条件を満たす方法をとった<sup>(6)</sup>。これによって介在物が有限個配列した場合の解析が可能となる。そして, 以下の手順に従って介在物が周期的に配列した場合を解析した<sup>(7)</sup>。

(1) 図5.8 に示すように介在物を有限個配列した場合を解き, 配列する介在物の行方向と列方向の数を変えて得られた値を外挿することにより無限個の場合の解とする。

(2) 介在物は  $x$  方向,  $y$  方向に配列し, 対称性を考慮して中央の介在物の境界のみに注目する。仮想境界に分布させる体積力の密度は, 全ての介在物について分布が等しいとする。そして, その境界の境界条件を満たすように体積力の密度を決める (図5.9)。

(3) 数値積分は (2) で説明した注目する境界のみ行ない, 他の境界では境界の分割区間の midpoint に集中力が作用するものとして計算する (図5.9)。つまり注目境界以外の境界では, 分布させる体積力を区間の midpoint に働く集中力で置きかえる。その大きさ ( $F_\xi, F_\eta$ ) は, 次のようになる。

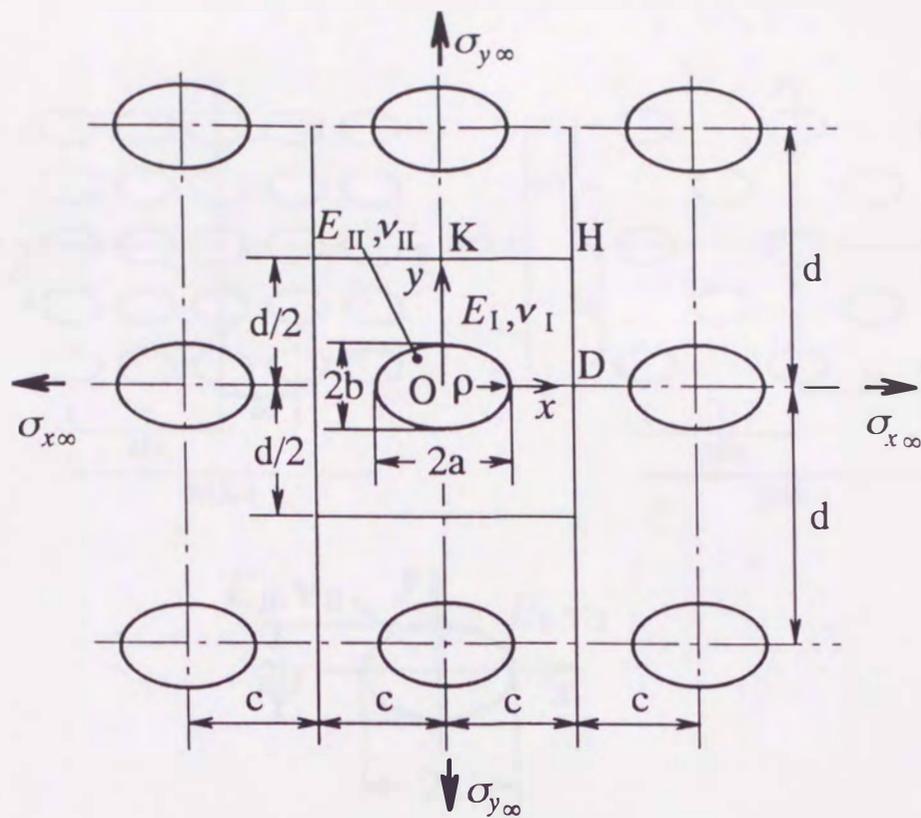


図5.7(a) 問題(a) : 長方形配置の だ円形介在物群

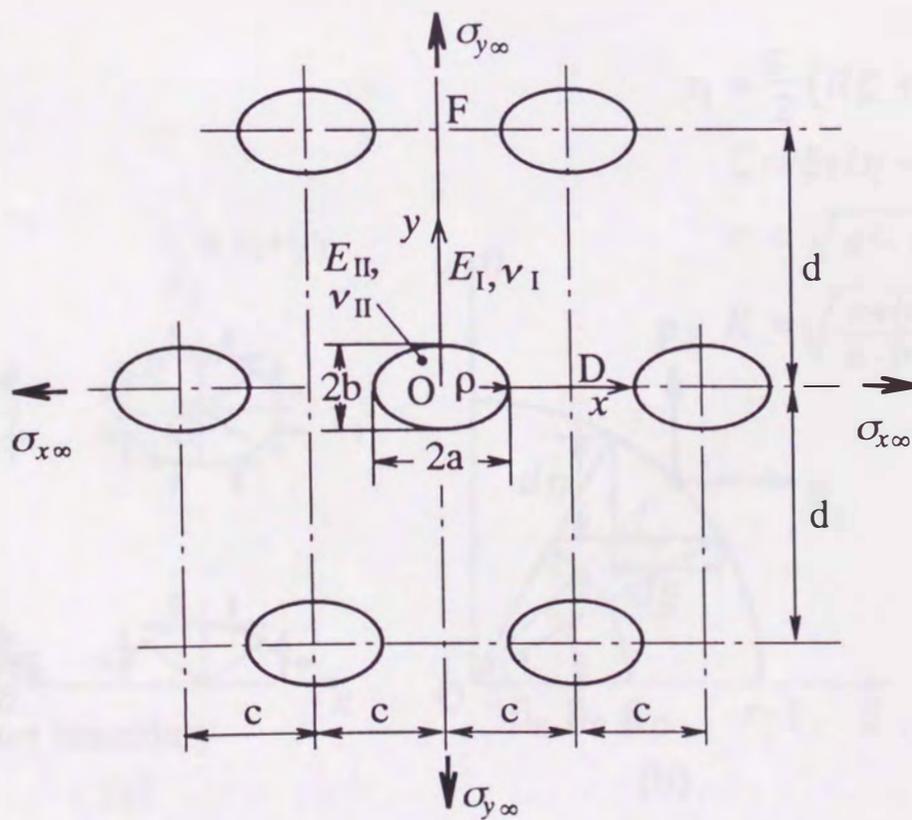


図5.7(b) 問題(b) : 千鳥配置の だ円形介在物群

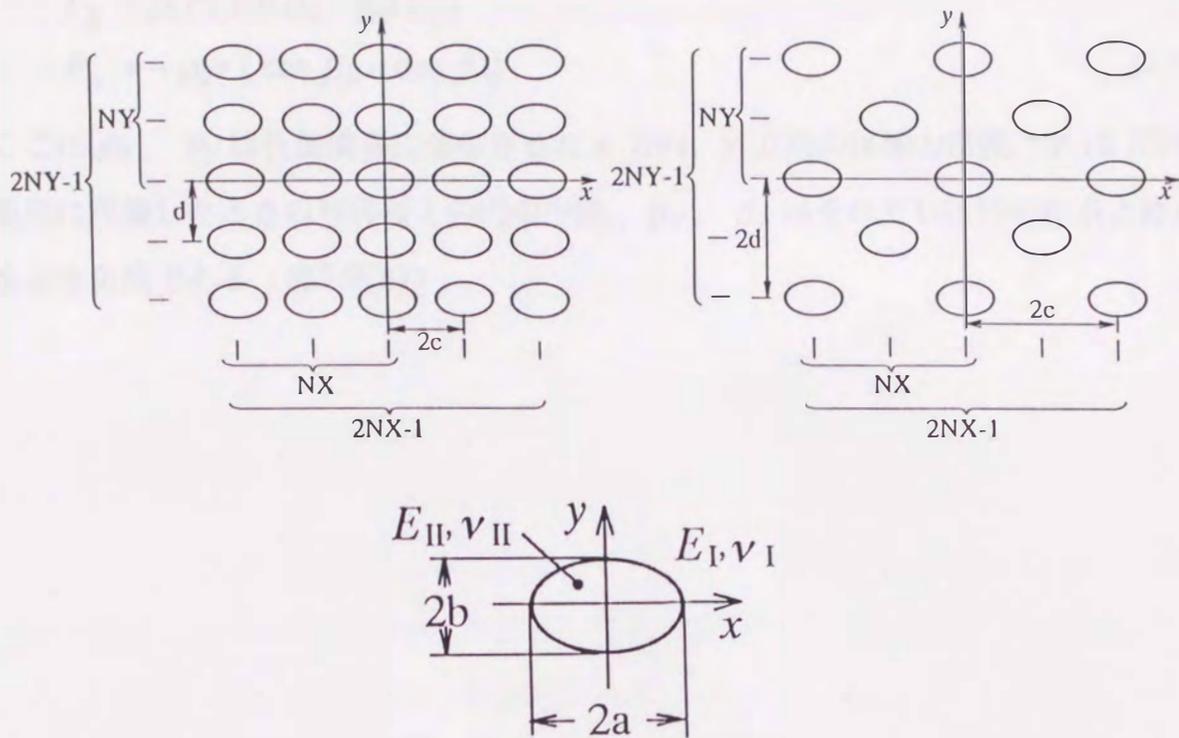


図5.8 計算で用いた介在物群の配列

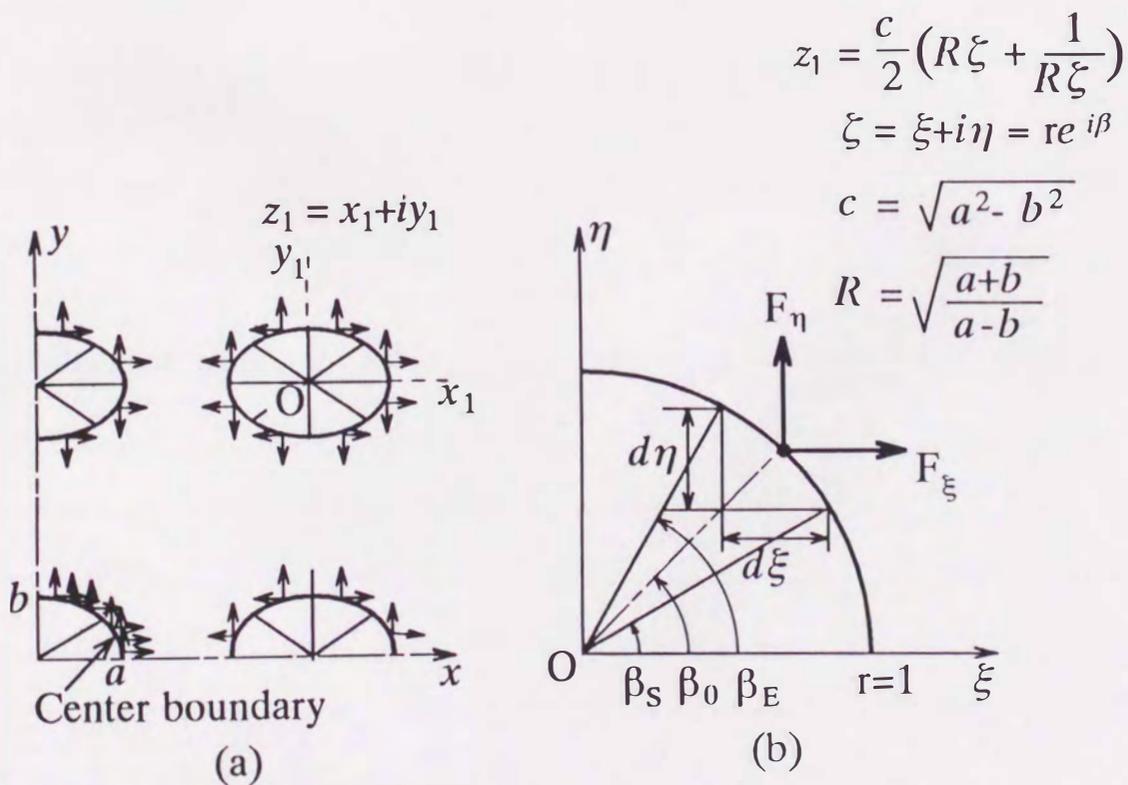


図5.9 分布体積力の集中力近似

$$F_{\xi} = \rho_x r (\sin \beta_E - \sin \beta_S)$$

$$F_{\eta} = -\rho_y r (\cos \beta_E - \cos \beta_S) \quad (5.16)$$

ここに  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  は仮想境界に分布させた  $x$  方向,  $y$  方向の体積力密度,  $r$  はだ円を円に写像したときの写像面上の円の半径,  $\beta_S$ ,  $\beta_E$  はそれぞれ区間の始点と終点を示す角度である (図5.9(b)).

## 5.3.2 だ円形介在物群の結果と引張剛性の計算式

### 5.3.2.1 精度の検討と引張剛性

数値計算は平面ひずみ問題として行ない、 $\nu_I$ 、 $\nu_{II}$ が結果にあまり関係しないことを考慮して、便宜上、 $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ とした。

数値結果には次の4つのパラメータが関係する。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\rho}{a}}, \quad \mu = \frac{c}{d}, \quad \lambda = \frac{a}{c} \\ \Gamma &= \frac{E_{II}}{E_I} \quad (\nu_I = \nu_{II})\end{aligned}\tag{5.17}$$

これらのパラメータの種々の組合せについて計算を行ない、各場合について介在物の存在による板の弾性係数を求めた。実際の計算では、遠方応力  $\sigma_{x\infty} = 0$ 、 $\sigma_{y\infty} = 1$  としているが、中央の介在物が置かれている応力場  $\sigma'_{x\infty}$ 、 $\sigma'_{y\infty}$  は  $\sigma_{x\infty}$ 、 $\sigma_{y\infty}$  と異なる応力状態にある。すなわち  $\sigma'_{x\infty} \neq \sigma_{x\infty}$ 、 $\sigma'_{y\infty} \neq \sigma_{y\infty}$  の二軸応力状態にある。また介在物形状の非対称性により  $x$  方向、 $y$  方向で弾性係数が異なる。そこで、以下の方法により弾性係数を求めた<sup>(7)</sup>。

平面ひずみ状態における  $x$ 、 $y$  軸に関するヤング率 ( $E_x^*$ 、 $E_y^*$ )、ポアソン比 ( $\nu_x^*$ 、 $\nu_y^*$ ) とすると応力-ひずみ関係は一般に次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \sigma'_{x\infty} / E_x^* - \sigma'_{y\infty} \nu_y^* / E_y^* \\ \varepsilon_y &= \sigma'_{y\infty} / E_y^* - \sigma'_{x\infty} \nu_x^* / E_x^*\end{aligned}\tag{5.18}$$

実際の計算において遠方応力が ( $\sigma_{x\infty} = 1$ 、 $\sigma_{y\infty} = 0$ )、( $\sigma_{x\infty} = 0$ 、 $\sigma_{y\infty} = 1$ ) の二つの場合を計算し、それぞれ、( $\sigma'_{x\infty}$ 、 $\sigma'_{y\infty}$ ) を求めれば、2組の ( $\sigma'_{x\infty}$ 、 $\sigma'_{y\infty}$ 、 $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ ) が得られるので  $E_x^*$ 、 $E_y^*$ 、 $\nu_x^*$ 、 $\nu_y^*$  が求まる。ただし  $\sigma'_{x\infty}$ 、 $\sigma'_{y\infty}$  は、問題(a)では図5.7(a)に示した辺OD、OKについて、問題(b)では図5.7(b)に示した辺OD、OFについて各辺の応力を積分した合力から求めた。また  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  は問題(a)では点D、K、問題(b)では点D、Fの変位から決定した。以下に述べる結果はすべて  $y$  方向引張りと考えたときの値を示す。

こうして求めた弾性係数を次の無次元表示で与えた。

$$C = \frac{E^*}{E_0} = \text{引張剛性係数}$$

$$E^* = \text{介在物群がある場合の見かけの縦弾性係数}$$

$$E_0 = \text{母材の見かけの縦弾性係数}$$

$$= E_I / (1 - \nu_I^2) \quad (\text{平面ひずみ}) \quad (5.19)$$

この  $C$  は介在物が全領域に占める割合 (面積率)  $f$  に強く依存すると思われるので、結果の整理にはこのことを考慮した。ここで  $f$  は次のように与えられる。

$$f = \text{だ円形介在物面積率}$$

$$= \frac{\pi ab}{2cd} = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \mu \varepsilon \quad (5.20)$$

また、実用に便利のため、数値計算結果によくあてはまるべき級数表示を与えたが、第3章3.4節の円形介在物群の場合と同様に次で定義される  $\beta$  を用いた。

$$\beta = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} = \frac{E_{II} - E_I}{E_{II} + E_I} \quad (\nu_I = \nu_{II} \text{ の場合}) \quad (5.21)$$

次に本法による結果の精度について検討する。表5.4は、問題(a)の正方形配置円形介在物群 ( $c/d = 0.5$ ) と問題(b)の千鳥正方形配置円形介在物群 ( $c/d = 1$ ) の  $E^*/E_0$  について本法による結果と第3章3.4.2節のLaurent展開法による結果を示したものである。表注釈の  $n$  は中央介在物境界の  $\beta = 0^\circ \sim 90^\circ$  の区間を  $n$  等分する分割数であり、 $NX, NY$  は図5.8に示すように中央列からいちばん端の列までの  $x$  方向、 $y$  方向に並ぶ列数である。そして表5.4に示した解析値は、問題(a)では  $n = 5, NX = NY = 5$ 、問題(b)では  $n = 5, NX = NY = 7$  として得たものである。本法による結果は  $\Gamma$  の全範囲でLaurent展開法による結果と有効数字3桁までほぼ一致しており、外挿なしにこれらの分割数、列数による結果をそのまま採用しても実用上十分な精度を有していることがわかる。

### 5.3.2.2 引張剛性係数とその計算式

本法によれば、図5.7(a), (b)に示す穴の横方向および縦方向間隔  $c, d$  を自由に

表5.4 計算精度の検討例 (正方形配置円形介在物群 ( $\mu=0.5$ )

と千鳥正方形配置円形介在物群 ( $\mu=1$ ) の  $E^*/E_0$  の値)

$E_{II}/E_I$	$a/c$	正方形配置 (問題 (a))		千鳥正方形配置 (問題 (b))	
		本法* <sup>1</sup>	Laurent 展開法* <sup>2</sup>	本法* <sup>3</sup>	Laurent 展開法* <sup>4</sup>
$10^{-5}$ $\simeq 0$ (hole)	0.2	0.9143	0.9139	0.8224	0.8225
	0.4	0.7230	0.7224	0.4142	0.4143
	0.6	0.5125	0.5117	0.0756	0.0724
	0.8	0.3010	0.3000	-	-
0.5	0.2	0.9771	0.9770	0.9535	0.9536
	0.4	0.9141	0.9140	0.8240	0.8244
	0.6	0.8230	0.8228	0.6526	0.6535
	0.8	0.7119	0.7119	-	-
2.0	0.2	1.0191	1.0193	1.0381	1.0382
	0.4	1.0813	1.0819	1.1602	1.1603
	0.6	1.2022	1.2025	1.4169	1.4169
	0.8	1.4049	1.4045	-	-
$10^5$ $\simeq \infty$ (rigid inc.)	0.2	1.0496	1.0500	1.0973	1.0974
	0.4	1.2351	1.2362	1.4417	1.4434
	0.6	1.7226	1.7220	2.6417	2.6532
	0.8	3.1935	3.1890	-	-

\*1 :  $n=5$ ,  $NX=NY=5$ ,  $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ , 平面ひずみ.

\*2 : 第3章 3.4.2 節, 図 3.20(a) の解析値 ( $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ , 平面ひずみ).

\*3 :  $n=5$ ,  $NX=NY=7$ ,  $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ , 平面ひずみ.

\*4 : 第3章 3.4.2 節, 図 3.20(b) の解析値 ( $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ , 平面ひずみ).

とることができるが、以下では問題(a) について  $\mu (= c/d) = 0.5$  の正方形配置および問題(b) について  $\mu (= c/d) = 1$  の千鳥正方形配置を解析する。そして前述の理由により以下の数値結果は、問題(a) では  $n = 5, NX = NY = 5$ , 問題(b) では  $n = 5, NX = NY = 7$  として得た値をそのまま用いた。

数値計算は、問題(a) では  $\Gamma = 10^{-5}, 0.05, 0.1, 0.5, 0.75, 1.5, 2, 5, 20, 10^3, 10^5$ ;  $\varepsilon (= \sqrt{\rho/a}) = 0.25, 0.5, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$  と 0.1 間隔の  $\lambda$  の 504 の組合せについて、問題(b) では  $\Gamma = 10^{-5}, 0.05, 0.1, 0.5, 0.75, 1.5, 2, 5, 20, 10^3, 10^5$ ;  $\varepsilon = 0.25, 0.5, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$  と 0.1 間隔の  $\lambda$  の 456 の組合せについて行なった。

図5.10(a), (b) は、種々の  $\Gamma$  について  $\varepsilon$  をパラメータとし  $\lambda$  を横軸に取って引張剛性係数  $C (= E^*/E_0)$  を示したものである。各図番に付した(a), (b) はそれぞれ正方形配置だ円形介在物群、千鳥正方形配置だ円形介在物群を示す。

問題(a), 問題(b) とともに  $C - \lambda$  曲線は  $\varepsilon$  によってかなり変動する。しかし、 $\lambda$  の代わりに (5.19) で定義される介在物面積率  $f$  を横軸に取って  $C$  を示せば図5.11(a), (b) を得る。明らかに  $\Gamma = 1$  のとき  $\varepsilon, f$  に関係なく  $C = 1$  であり、 $\Gamma$  の増加とともに、 $C$  は単調に増大する。また  $\Gamma$  が 0 に近い場合を除いて  $C - f$  曲線の  $\varepsilon$  による変動は小さく、 $0.5 \leq \Gamma \leq 2$  の範囲では特にそうである。そして  $\Gamma \geq 0.2$  ではだ円形介在物群の引張剛性係数と面積率  $f$  は比較的良い相関が認められた。

次にこれらの引張剛性係数に良く適合するべき級数を最小二乗法で求めた。ただし、 $\Gamma \rightarrow 0, \Gamma \rightarrow \infty$  に対する値を考慮し易いように、剛性比  $\Gamma$  の代りに (5.21) で定義されるパラメータ  $\beta$  を用いた。なお計算式を  $\lambda, \varepsilon, \beta$  のべき級数とした場合には  $\Gamma \leq 1$  と  $\Gamma \geq 1$  の二つに分けて異なる式で表わした。

上の方針に基づいて問題(a), (b) について共通の型の計算式(5.22), (5.23) を得た。

$$C = \frac{E^*}{E_0} = 1 + \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 A_{lmn} \lambda^{l+2} \varepsilon^m \beta^{n+1} \quad (5.22)$$

$$C = \frac{E^*}{E_0} = 1 + \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 B_{lmn} f^{l+1} \varepsilon^m \beta^{n+1} \quad (5.23)$$

問題(a), (b) における (5.22), (5.23) の係数値を表5.5 に示す。

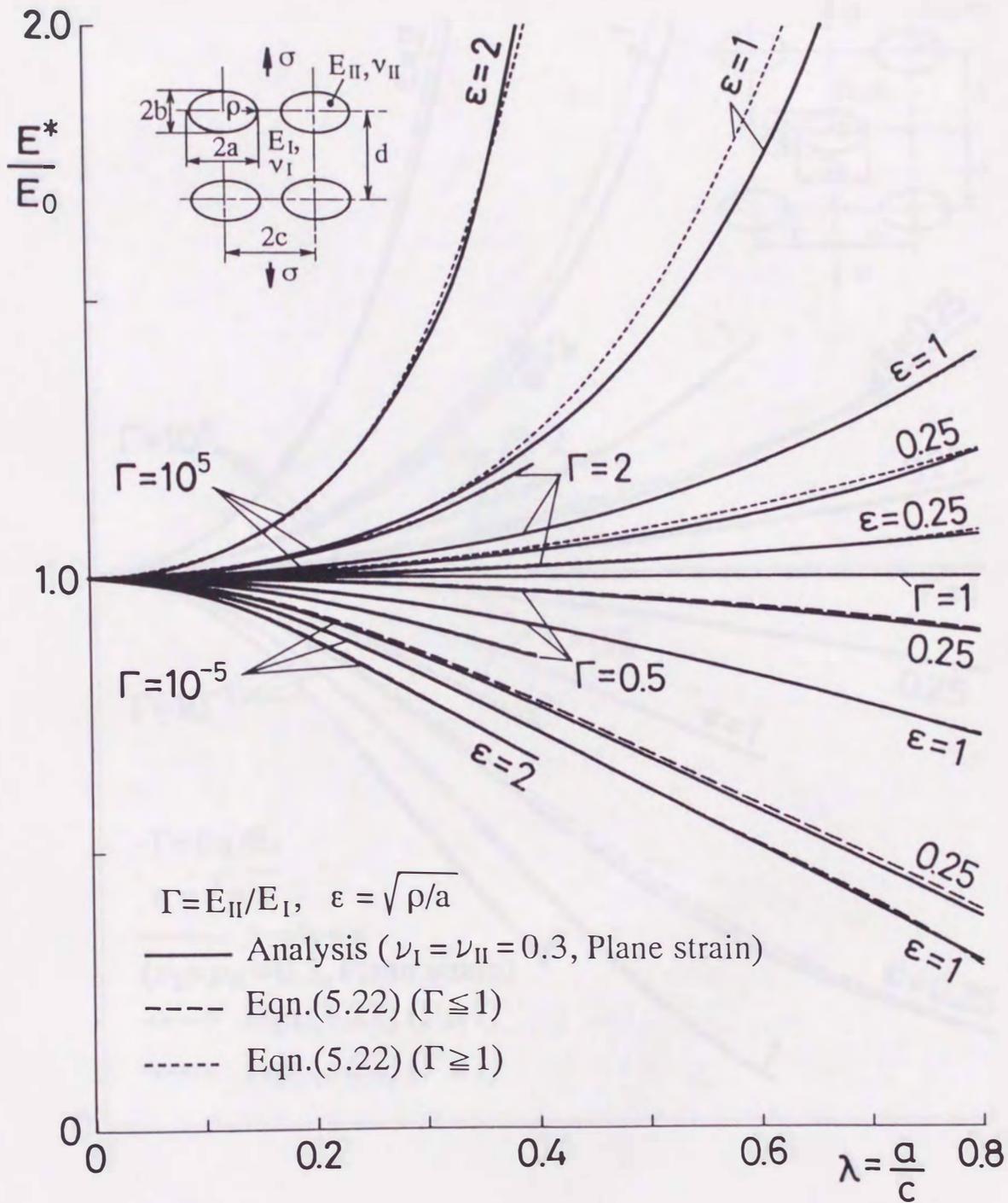


図5.10(a) 種々の  $\Gamma, \epsilon$  に対する  $E^*/E_0$  と  $\lambda$  の関係  
 (正方形配置だ円形介在物群 ;  $\mu=0.5$  )

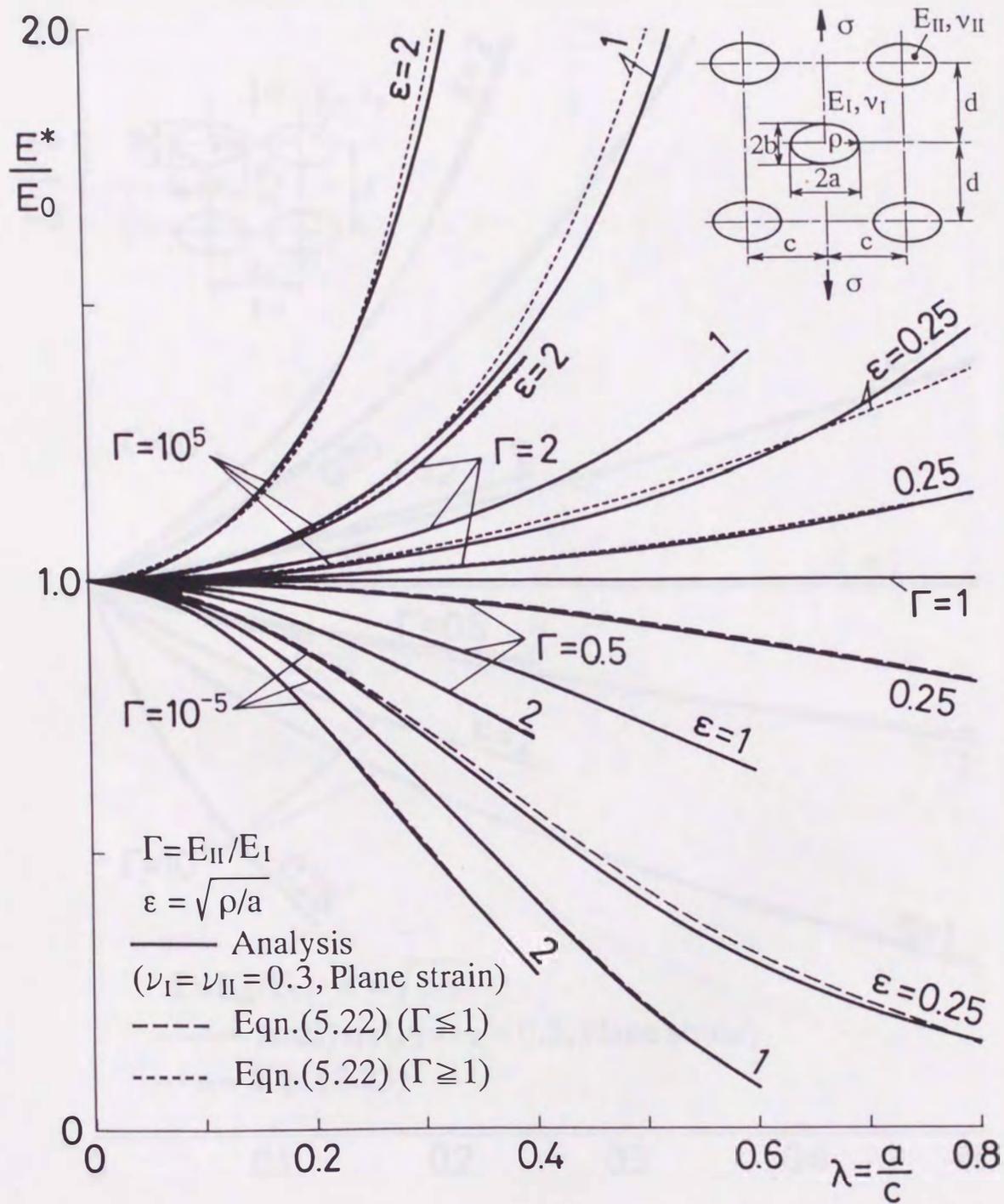


図5.10(b) 種々の  $\Gamma, \epsilon$  に対する  $E^*/E_0$  と  $\lambda$  の関係  
 (千鳥正方形配置だ円形介在物群;  $\mu=1$ )

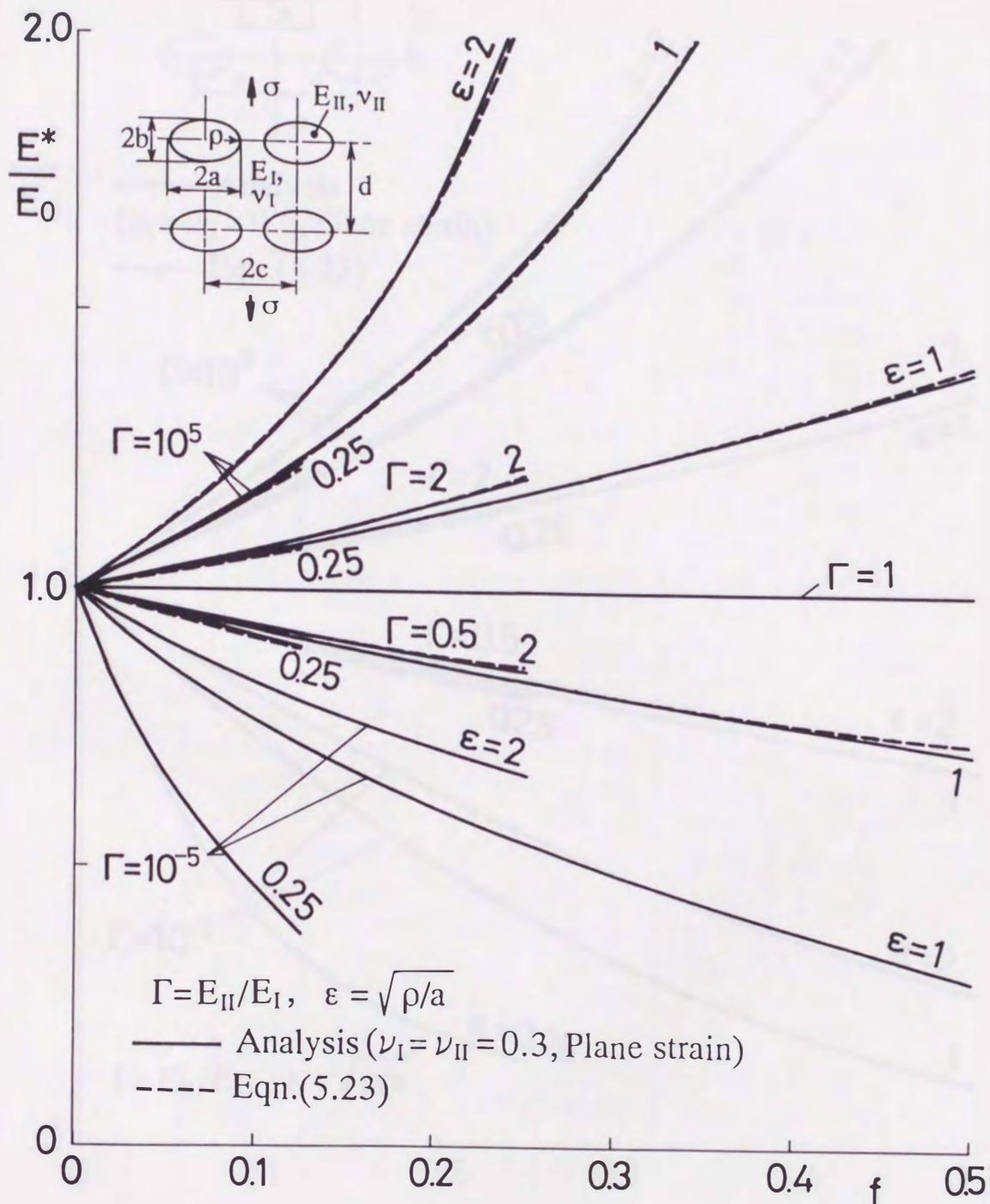


図5.11(a) 種々の  $\Gamma, \epsilon$  に対する  $E^*/E_0$  と  $f$  の関係  
 (正方形配置だ円形介在物群 ;  $\mu=0.5$  )

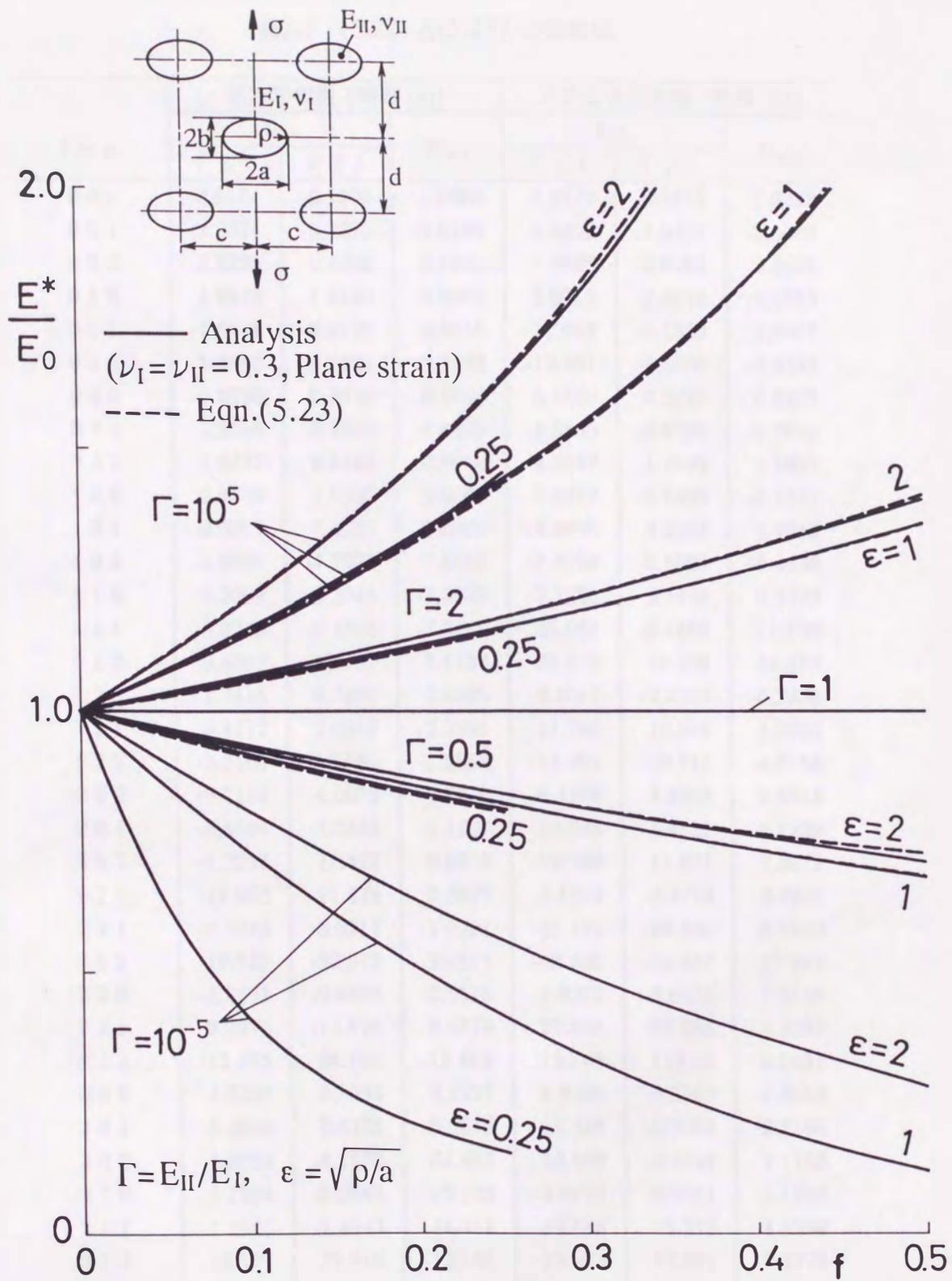


図5.11(b) 種々の  $\Gamma, \epsilon$  に対する  $E^*/E_0$  と  $f$  の関係  
 (千鳥正方形配置だ円形介在物群;  $\mu=1$ )

表5.5 (5.22) と(5.23) の係数値

$l m n$	正方形配置 (問題 (a))			千鳥正方形配置 (問題 (b))		
	$A_{lmn}$		$B_{lmn}$	$A_{lmn}$		$B_{lmn}$
	$\Gamma \leq 1$	$\Gamma \geq 1$		$\Gamma \leq 1$	$\Gamma \geq 1$	
0 0 0	0.0164	-0.1507	1.9860	0.6279	0.3470	2.0293
0 0 1	2.2524	-0.2875	-2.6105	5.4399	-1.0820	-2.8080
0 0 2	3.6225	0.4806	2.1961	7.8658	0.8762	2.3689
0 1 0	1.6573	1.8130	0.0062	2.0512	2.4844	-0.0555
0 1 1	-4.6449	-0.0135	2.5815	-11.643	-0.1520	-2.9047
0 1 2	-5.2583	-1.1164	-3.0492	-12.251	-1.5689	-3.3335
0 2 0	-0.0796	-0.0525	-0.0036	0.3560	0.2626	0.0210
0 2 1	1.8166	-0.2235	-0.6495	4.5665	-0.0798	-0.7640
0 2 2	1.8337	0.9322	0.9940	4.2047	1.8232	1.1047
1 0 0	2.4536	1.5597	0.9504	0.8279	-2.8828	-0.1521
1 0 1	-0.5901	3.4005	9.6099	-4.2925	8.4944	8.7343
1 0 2	-2.6890	-4.7291	-7.5766	-5.2209	-6.8993	-9.4459
1 1 0	-4.2009	-3.3044	-1.3937	0.7268	4.1498	0.5723
1 1 1	5.9345	-8.4834	-7.3107	23.961	-9.1809	-11.838
1 1 2	9.4862	12.787	7.1137	25.872	19.238	14.273
1 2 0	1.7414	0.7393	0.4505	-0.1547	-2.0562	-0.2636
1 2 1	-3.4112	7.4919	2.3991	-11.760	10.949	4.0005
1 2 2	-5.3100	-12.166	-1.2862	-11.369	-28.711	-4.8756
2 0 0	-6.7199	-4.9073	-6.2049	-5.4278	3.4889	0.8916
2 0 1	-5.6598	-4.3483	-5.1207	-10.908	-1.4522	-2.7239
2 0 2	-1.2297	11.427	-5.9823	-12.783	11.624	7.5679
2 1 0	11.095	11.875	9.3627	3.1319	-0.2172	-2.7987
2 1 1	-6.5946	5.9217	-1.0281	-36.121	-28.590	6.5369
2 1 2	-19.749	-32.373	26.577	-43.520	-56.467	-17.948
2 2 0	-4.5491	-2.6865	-2.6510	-2.0372	3.6321	1.3145
2 2 1	9.0278	-13.528	0.9379	22.686	-25.908	-1.8299
2 2 2	13.815	38.185	-15.502	19.705	115.68	6.9631
3 0 0	4.8338	3.7093	8.1227	4.8039	-0.8562	-1.5613
3 0 1	5.4040	2.5375	-9.2675	12.518	-6.2983	-2.1168
3 0 2	1.8930	-8.1570	54.483	13.520	-9.8144	9.1163
3 1 0	-8.1384	-9.2848	-10.100	-4.9723	-2.9551	4.1296
3 1 1	1.8675	-1.4943	14.411	15.646	28.210	4.6330
3 1 2	12.101	21.410	-120.65	19.282	67.891	-4.2770
3 2 0	3.4801	1.8912	0.5025	4.1493	-4.6537	-1.9947
3 2 1	-3.6054	11.490	2.3557	2.4018	50.103	-1.7025
3 2 2	-7.1214	-25.986	69.851	4.8350	-131.47	2.1044
平均誤差 [%]	0.3	0.8	0.3	0.6	0.9	0.4

(5.22) は  $\Gamma$  の全範囲で十分正確な値を与える. (5.23) は  $\Gamma \geq 0.1$  ( $1 \geq \beta \geq -0.82$ ) の範囲で  $f \leq 0.5$  について十分正確な値を与える. なおこれらの式による値と解析値の差の平均値を表5.5 の最下行に与えておいた.

図5.10(a) ~ 5.11(b) に (5.22), (5.23) による値を破線および点線 (図5.10(a), (b) のみ) で示し, 解析値と比較してある. いずれの式も解析値と極めて近い値を与えている.

## 5.4 結 論

本章では長方形配置（問題(a)）および千鳥配置（問題(b)）のだ円孔群やだ円形介在物群をもつ無限体の引張りを解析した。

(1) だ円孔群の場合には、だ円孔縁自由条件を満たす Laurent 展開法と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて精度良く解析した。問題(a)の $\sigma_{\max}$ は引張方向に直角な主軸端A ( $\theta=0^\circ$ ) に生ずる。問題(b)の $\sigma_{\max}$ は引張方向に直角な主軸端A ( $\theta=0^\circ$ ) に生ずることが多いが、斜め方向の穴との干渉が大きい場合には $\sigma_{\max}$ はその穴に近い点B ( $\theta \neq 0^\circ$ ) に移動する。そして問題(a), 問題(b)について無次元最大応力 $S_{\max}$ （き裂の場合は無次元応力拡大係数）を求めた。穴の存在は弾性体の引張剛性を低下させる。引張剛性係数 $C$ を一義的に定めるパラメータとしてだ円孔面積率とその周辺のデッドゾーン面積率の和で与えられる有効面積率 $f_e$ を提案し、その有効性を確かめた。さらに、 $S_{\max}$ と $C$ の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。以上のだ円孔群の場合の結果は平面応力と平面ひずみに関係なく、 $E$ ,  $\nu$ などの弾性定数にも無関係である。

(2) だ円形介在物群の場合には、体積力法を用いて精度良く解析した。種々の形状をもつだ円形介在物の存在が弾性体の引張剛性に及ぼす影響を検討し、引張剛性係数 $C$ が介在物の剛性と介在物の面積率によってほぼ定まることを示した。さらに、引張剛性係数 $C$ の解析値に良く適合する計算式をべき級数表示の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。

(3) 本章の解析は円孔群、円形介在物群、き裂群についても有効で、それらの結果は第3, 4章の結果に一致する。

## 参考文献

- (1) 石田 誠, 日本機械学会論文集, **21** (1955), 502.
- (2) Isida, M., *Mechanics of Fracture 1*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1973), 56.
- (3) Isida, M., *Int. J. Frac. Mech.*, **7** (1971), 301.
- (4) 石田・野口, 日本機械学会論文集, **48A** (1972), 888.
- (5) 石田, 日本機械学会論文集, **48A** (1972), 1239.
- (6) 八田・村上・石田, 日本機械学会論文集, **51A** (1985), 1057.
- (7) 内山・八田・村上, 日本複合材料学会誌, **11-6** (1985), 275.

## 第6章 結 言

本研究では複数個の だ円孔，介在物あるいは き裂が典型的な分布をする場合として，一列に分布する だ円孔群，き裂群をもつ無限体の引張りと長方形配置および千鳥配置の穴群・き裂群，介在物群をもつ無限体の引張りを考えた．そしてこれらの問題を高精度に解析し，穴や介在物の形状・大きさ，母材と介在物の剛性比およびそれらの配列が材料強度・剛性に与える影響について検討した．

得られた主な結論はすでに各章の終わりに示したが，それらを要約すると以下の通りである．

第2章では，一列等間隔に分布する等しい だ円孔群をもつ無限体が孔列方向あるいは孔列に直角方向の引張りを受ける場合を Laurent 展開法と摂動法を組合せて精度良く解析した．き裂から円孔までを含む だ円孔の種々の形状・大きさと種々の個数に対する解を示し，孔の形状，寸法，配置のパラメータが各孔縁の応力に及ぼす影響を調べた．孔列に直角方向の引張りでは，各穴の最大応力は孔列中央で最大となり，この場合の無次元最大応力は孔数  $N$  の逆数  $1/N$  とほぼ直線関係にある．孔列方向の引張りでは，各穴の最大応力は孔列最外側で最大となり，この場合の無次元最大応力は  $1/(N-0.5)$  とほぼ直線関係にある．そしてこれらの関係を理論的に証明した．またこの特性は だ円孔だけでなく，無限体内に一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物の周縁応力にも成立つ一般的関係である．さらに本章の だ円孔群の結果や従来のき裂群の多くの場合の結果をもとに孔数が2個から無限個までの場合の最大応力・最大応力拡大係数を精度良く求めることができる計算式を与えた．

第3章では長方形配置及び千鳥配置の円孔群や円形介在物群の引張りについて適当な単位領域を考え，Laurent 展開法と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて精度良く解析した．幾何的および力学的パラメータが円孔や介在物の周縁の各応力成分の最大値とそれらの位置に及ぼす影響や弾性体の引張剛性に及ぼす介在物の影響を検討し，引張剛性係数が介在物の剛性と介在物の面積率によってほぼ定まることを示した．さらに円孔の応力集中係数，介在物境界の各応力成分の最大値，引張

剛性係数の解析値に良く適合する計算式を与え、これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められるようにした。

第4章では長方形配置及び千鳥配置のき裂群をもつ無限体の引張りについて適当な単位領域を考え、固有関数展開法と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて精度良く解析した。そして応力拡大係数、き裂開口変位、き裂の存在による引張剛性の低下を詳細に調べ、千鳥配置の場合、引張剛性係数がき裂包絡円の面積率によってほぼ定まることを示した。さらに応力拡大係数、き裂開口変位、引張剛性係数の解析値に精度良く当てはまる計算式を与えた。

第5章では、長方形配置及び千鳥配置のだ円孔群、だ円形介在物群をもつ無限体の引張りについて解析した。だ円孔群の場合には Laurent 展開法と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて行なった。だ円形介在物群の場合には体積力法を用いた。だ円孔縁応力および、弾性体の引張剛性に及ぼすだ円孔やだ円形介在物の影響について調べ、だ円孔群の場合、引張剛性係数がだ円孔面積率とその周辺のデッドゾーン面積率の和で与えられる有効面積率によってほぼ定まることを示した。また、だ円形介在物群の場合、引張剛性係数は介在物の剛性と介在物の面積率によってほぼ定まる。さらに最大応力（だ円孔群のみ）、引張剛性係数の解析値に精度良く当てはまる計算式を与えた。本章の解析は円孔群、円形介在物群、き裂群についても有効で、それらの結果は第3、4章の結果に一致する。

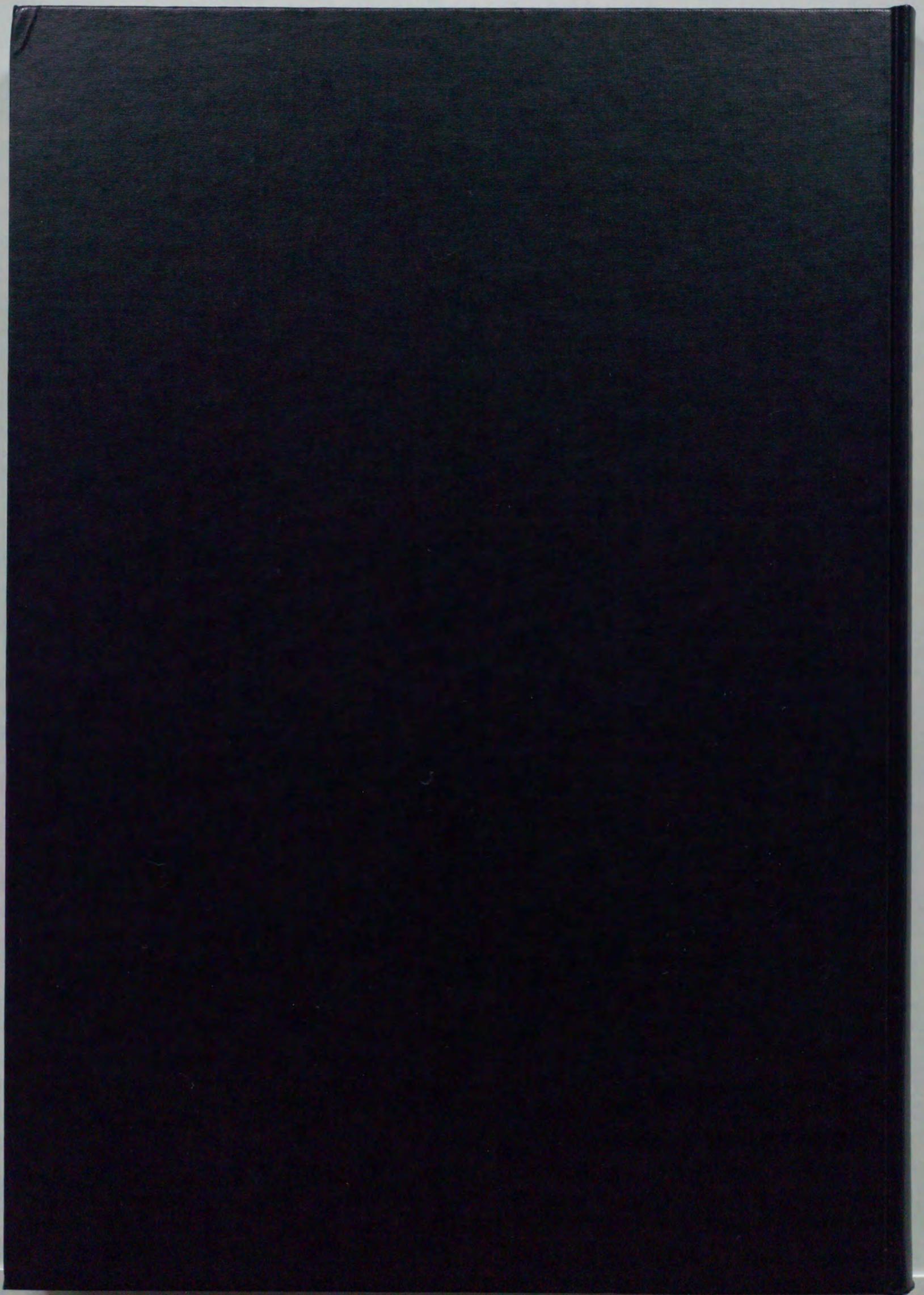
## 謝 辞

本研究は昭和59年から久留米工業大学機械工学教室において行なわれた結果をまとめたものである。

本論文作成以前から現在に至るまで、ご多忙中にもかかわらず終始、懇切丁寧なご指導、ご鞭撻を賜りました九州大学工学部の 村上敬宜 教授 ならびに研究頭初から一貫して懇切丁寧なご指導、ご鞭撻を賜りました 石田 誠 博士（元久留米工業大学教授）に衷心より感謝の意を表わします。

また、ご多忙の中、九州大学工学部の 末岡淳男 教授、平川賢爾 教授 ならびに 久能和夫 教授 には本論文の懇切な校閲、ご指導を賜りました。ここに、謹んで諸先生方に感謝の意を表わします。

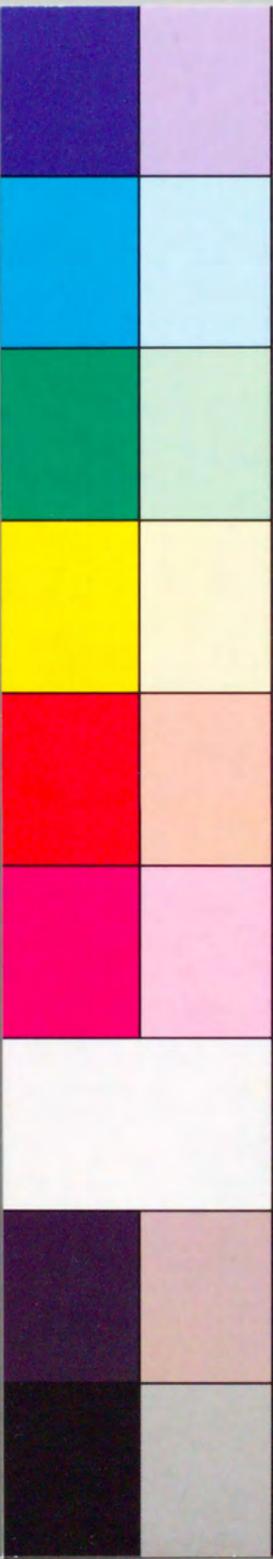
さらに、本研究の遂行にあたり終始御援助と御協力をいただいた久留米工業大学機械工学科材料力学講座の皆様に厚く御礼申し上げます。



inches  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 8  
cm

# Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



# Kodak Gray Scale

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19



© Kodak, 2007 TM: Kodak