

分布するだ円孔群, 介在物群, き裂群をもつ弾性体の 応力と変形

井川, 秀信

<https://doi.org/10.11501/3106971>

出版情報 : 九州大学, 1995, 博士 (工学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :

第3章 長方形配置及び千鳥配置の円孔群や円形介在物群をもつ無限体の引張り

3.1 緒言

本章では、穴や介在物が各方向に分布する場合の典型的なモデルとして、長方形配置及び千鳥配置の円孔群や円形介在物群をもつ無限体の引張りを統一的に解析する。これらの結果は、円孔群や円形介在物群による応力集中の解析結果を与えるほか、実用的には材料内の介在物や繊維強化複合材料の強度・剛性評価の基礎を与える意味で重要と考えられる。

解析には、まず円形介在物をもつ適当な単位領域を考え、その領域に適当で円孔や円形介在物周縁の境界条件を厳密に満たす複素応力関数の Laurent 展開表示を導く。そして、この単位領域外周の境界条件を合力と変位で表わし、これらによって展開の未知係数を定めた。円孔や介在物の相対位置および介在物と母材の剛性比の種々の組合せについて数値計算を行なって、円孔や円形介在物周縁の応力およびこれらの存在による弾性体の引張剛性の変化を調べた。また、それらの結果に精度良く適合する計算式を与える。

3.2 解析方法

3.2.1 複素応力関数

本章では次の二つの問題を統一的に解析する.

(a) 長方形配置の円孔群や円形介在物群をもつ無限体の引張り (図3.1)

(b) 千鳥配置の円孔群や円形介在物群をもつ無限体の引張り (図3.2)

両問題を通じて円孔や円形介在物の半径を a とし, 介在物の一つの中心に原点をとった座標系 Oxy を図のように定める. それぞれの場合について, x 方向および y 方向の円孔や介在物の間隔を与えるパラメータ b, c を図3.1, 図3.2のように定め, y 方向に作用する平均応力を σ とする. 以下では介在物として解析するが, 円孔はその特別な場合として解析に含まれる.

解析には問題の対称性を考慮した適当な単位領域を考え, x, y 両軸に関する対称条件と介在物境界の条件を完全に満たす応力関数を導き, その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった. この単位領域としては問題(a)では図3.3の長方形領域 $ODHKO$ を用いた. また, 問題(b)では主として図3.4の三角形領域 $ODFO$ を用い, $c \gg b$ の場合に限り図3.3の長方形領域 $ODHKO$ を用いた. 上の解析領域における母材の部分を (I), 介在物の部分を (II) とし, これらに対する弾性定数を $E_I, G_I, \nu_I, \kappa_I$ および $E_{II}, G_{II}, \nu_{II}, \kappa_{II}$ とする.

さて母材 (I) および介在物 (II) に対する複素応力関数はそれぞれ次の展開形で表わすことができる.

$$\begin{aligned}\varphi_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (K_{2n} z^{2n+1} + F_{2n} z^{-2n-1}) \\ \psi_I'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (L_{2n} z^{2n+1} + H_{2n} z^{-2n-1})\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{II}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} z^{2n+1} \\ \psi_{II}'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} l_{2n} z^{2n+1}\end{aligned}\quad (3.2)$$

式中の展開係数はすべて実数であり, また, z の奇数次項のみを含むことによって, これらは x, y 両軸に関する対称条件を満たしている.

複素応力関数(3.1), (3.2) による領域 (I), (II) に対する変位と合力は, これら

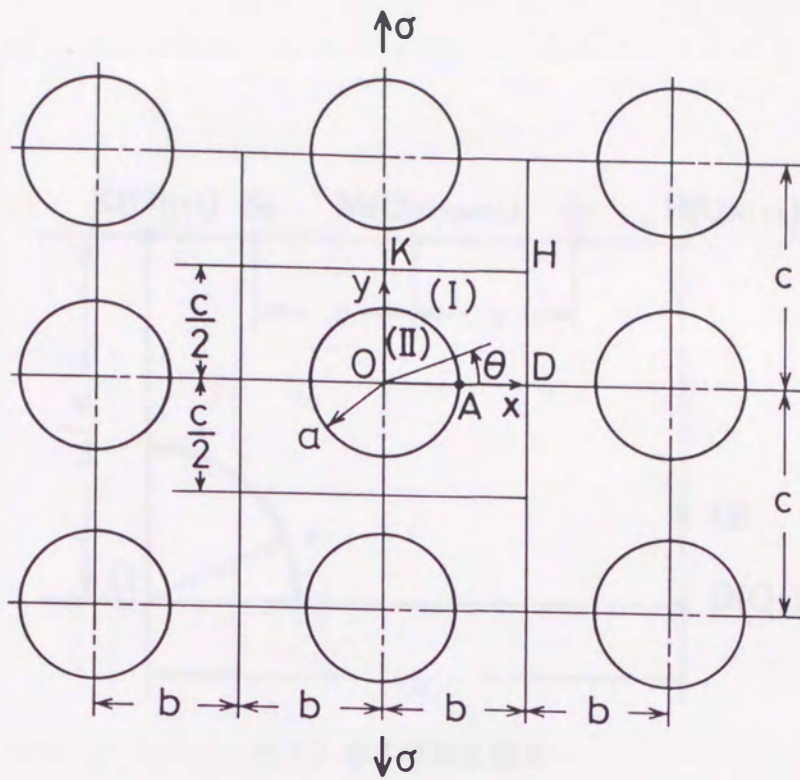


図3.1 問題(a) : 長方形配置の円孔群や円形介在物群

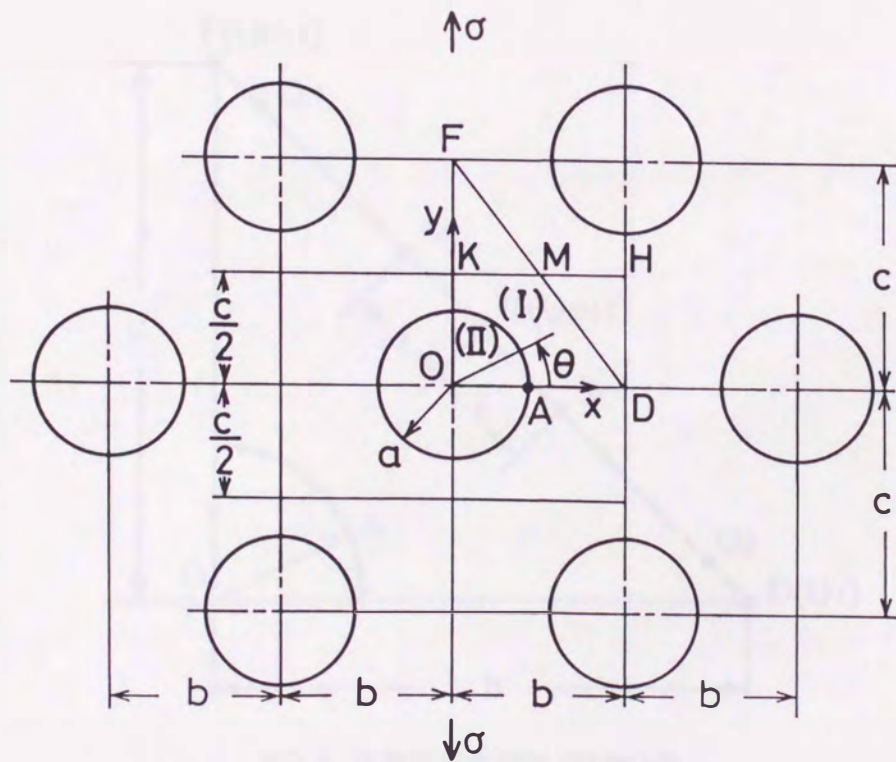


図3.2 問題(b) : 千鳥配置の円孔群や円形介在物群

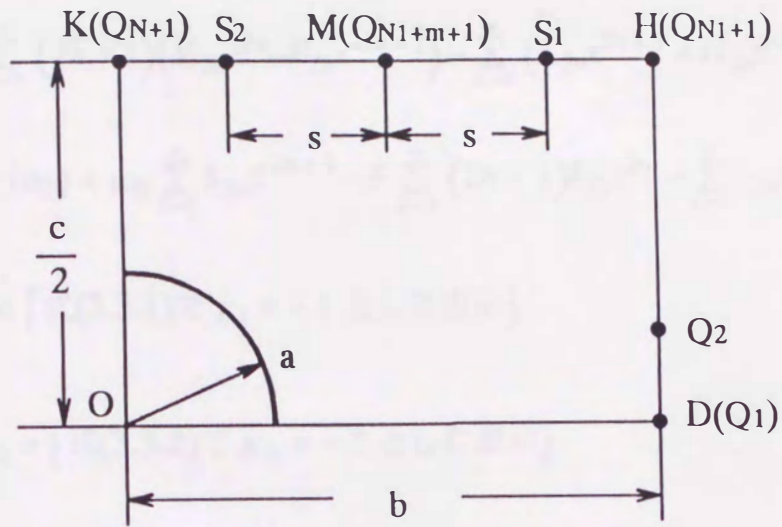


图3.3 长方形单位领域

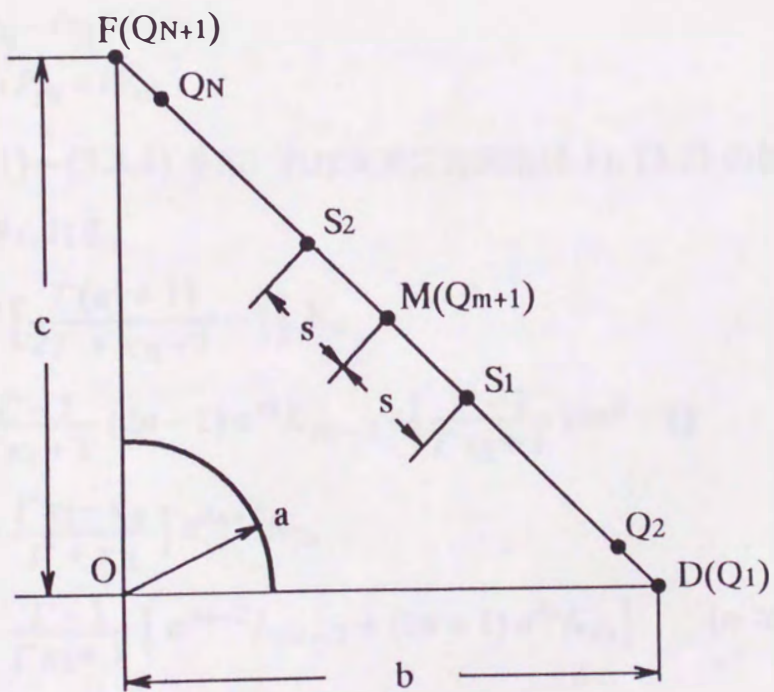


图3.4 三角形单位领域 (问题(b))

を (2.5), (2.6) に用いることによって, 次の諸式で与えられる.

$$2G_{\text{I}}(u_{\text{I}} - iv_{\text{I}}) = \kappa_{\text{I}} \sum_{n=0}^{\infty} (K_{2n} \bar{z}^{2n+1} + F_{2n} \bar{z}^{-2n-1}) - \bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(K_{2n} z^{2n} - F_{2n} z^{-2n-2}) - \sum_{n=0}^{\infty} (L_{2n} z^{2n+1} + H_{2n} z^{-2n-1}) \quad (3.3.1)$$

$$2G_{\text{II}}(u_{\text{II}} - iv_{\text{II}}) = \kappa_{\text{II}} \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} \bar{z}^{2n+1} - \bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)k_{2n} z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} l_{2n} z^{2n+1} \quad (3.3.2)$$

$$P_{y\text{I}} + iP_{x\text{I}} = [\text{式(3.3.1)で } \kappa_{\text{I}} = -1 \text{ とした表示}] \quad (3.3.3)$$

$$P_{y\text{II}} + iP_{x\text{II}} = [\text{式(3.3.2)で } \kappa_{\text{II}} = -1 \text{ とした表示}] \quad (3.3.4)$$

3.2.2 介在物周縁の境界条件

まず介在物境界における変位と応力の連続条件は変位と合力によって次のように表わすことができる.

$z = a e^{i\theta}$ (θ は任意) において

$$u_{\text{I}} - iv_{\text{I}} = u_{\text{II}} - iv_{\text{II}}$$

$$P_{y\text{I}} + iP_{x\text{I}} = P_{y\text{II}} + iP_{x\text{II}} \quad (3.4)$$

これらに (3.3.1)~(3.3.4) を用いれば複素応力関数(3.1), (3.2) の係数間に成立つ次の諸関係が得られる.

$$H_0 = 2a^2 \left[\frac{\Gamma(\kappa_{\text{I}} + 1)}{2\Gamma + \kappa_{\text{II}} - 1} - 1 \right] K_0$$

$$H_{2n} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma \kappa_{\text{I}} + 1} (2n - 1) a^{4n} L_{2n-2} + \left[\frac{\Gamma - 1}{\Gamma \kappa_{\text{I}} + 1} (4n^2 - 1) + \frac{\Gamma \kappa_{\text{I}} - \kappa_{\text{II}}}{\Gamma + \kappa_{\text{II}}} \right] a^{4n+2} K_{2n}$$

$$F_{2n-2} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma \kappa_{\text{I}} + 1} \left[a^{4n-2} L_{2n-2} + (2n + 1) a^{4n} K_{2n} \right] \quad (n \geq 1) \quad (3.5.1)$$

$$k_0 = \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} K_0, \quad k_{2n} = \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{\Gamma + \kappa_{II}} K_{2n}$$

$$l_{2n-2} = \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} L_{2n-2}$$

$$+ \Gamma(\kappa_I + 1) \left(\frac{1}{\Gamma\kappa_I + 1} - \frac{1}{\Gamma + \kappa_{II}} \right) (2n-1) a^2 K_{2n} \quad (n \geq 1) \quad (3.5.2)$$

ここに κ_I, κ_{II} は ν_I, ν_{II} と (2.7) の関係をもつ弾性定数であり、 Γ は介在物と母材の横弾性係数の比によって次式で与えられる。

$$\Gamma = \frac{G_{II}}{G_I} \quad (3.6)$$

(3.5.1) は領域 (I) に対する (3.1) の負べき項の係数 F_{2n}, H_{2n} を正べき項の係数 K_{2n}, L_{2n} で表わし、(3.5.2) は領域 (II) に対する (3.2) の係数 k_{2n}, l_{2n} を K_{2n}, L_{2n} で表わしている。(3.5.1), (3.5.2) を (3.1), (3.2) に代入すれば介在物周縁の境界条件を厳密に満たす複素応力関数が得られ、含まれる未知係数は K_{2n}, L_{2n} だけとなる。

3.2.3 解析領域外周の境界条件と未知係数の決定

3.2.1節で述べたように、(3.1) は x, y 両軸に関する対称条件を完全に満たしている。従って独立な未知係数 K_{2n}, L_{2n} は単位領域の x, y 両軸以外の境界条件から定めればよいが、これを辺上の全ての点で満たすことは不可能である。そこで、このような場合に高精度の解を得る方法として合力と変位に基づく境界分割法^(2.4)を適用した。両問題に対する境界条件の表示は次のようになる。

3.2.3.1 長方形配置の円形介在物群 (問題 (a))

図3.3のように辺DHを N_1 個の等区間に辺HKを N_2 個の等区間に分割し、分点を $Q_j (j = 1, 2, \dots, N+1; N = N_1 + N_2)$ とすれば、辺DH, HKの境界条件は次のようになる。

辺DHの条件:

応力状態の対称性から辺DHに沿ってせん断応力は零で法線変位 u は一定である。

これらは各区間の合力と変位によって次式で置きかえられる。

$$\begin{aligned} [P_{yl}]_j &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \\ [u_l]_{j+1} - [u_l]_j &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1 - 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここに j は区間番号である。 $[P_{yl}]_j$ としては (3.3.3) の実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の差をとればよく、 $[u_l]_j$ としては (3.3.1) の実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の平均値を用いた。 すなわち

$$\begin{aligned} [P_{yl}]_j &= P_{yl, Q_{j+1}} - P_{yl, Q_j} \\ [u_l]_j &= (u_{l, Q_{j+1}} + u_{l, Q_j}) / 2 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

辺HKの条件：

辺HKに関しても応力状態は対称なので、(3.7) と類似の次の関係が成立つ。

$$\begin{aligned} [P_{xl}]_j &= 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N) \\ [v_l]_{j+1} - [v_l]_j &= 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N - 1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここに $[P_{xl}]_j$, $[v_l]_j$ は (3.8) と同様に

$$\begin{aligned} [P_{xl}]_j &= P_{xl, Q_{j+1}} - P_{xl, Q_j} \\ [v_l]_j &= (v_{l, Q_{j+1}} + v_{l, Q_j}) / 2 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.10)$$

さらにこの長方形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_{xl}]_D^H = 0, \quad [P_{yl}]_H^K = \sigma b \quad (3.11)$$

以上により境界条件の数は (3.7), (3.9), (3.11) の $2N$ 個となる。これに対応して (3.1) の未知係数としては K_{2n} ($n \leq N - 1$), L_{2n} ($n \leq N - 1$) を残し、これらより高次の項を零と置く。そして、境界条件式を解いて K_{2n} , L_{2n} を定めた。

3.2.3.2 千鳥配置の円形介在物群（問題（b））

主として用いた三角形単位領域の場合（図3.4）についてのみ述べる。斜辺DFの中点をMとすると、応力状態のx方向およびy方向の周期性から、点Mの両側でMから等距離sにある二点は同じ応力状態であり、また、これらの点Mに対する相対変位も同じである。そこで、便宜上、斜辺DFを偶数N個の等しい区間に分割し、分点を Q_t ($t = 1, 2, \dots, N+1$; $N=2m$) とする。

まず、点Mから等距離にある分点 Q_t と Q_{2m+2-t} ($t = 1, 2, \dots, m$) における等応力の条件は、これらの点と点M（すなわち点 Q_{m+1} ）における合力の差によって次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [P_{xl}]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_{xl}]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [P_{yl}]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_{yl}]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \end{aligned} \quad (t = 1, 2, \dots, m; m = N/2) \quad (3.12)$$

また、点Mと点 Q_t の相対変位が点 Q_{2m+2-t} と点Mの相対変位に等しい条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} [u_l]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [u_l]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [v_l]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [v_l]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \end{aligned} \quad (t = 1, 2, \dots, m; m = N/2) \quad (3.13)$$

さらに、この三角形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_{xl}]_D^F = 0, [P_{yl}]_D^F = \sigma b \quad (3.14)$$

(3.12)~(3.14)により、 K_{2n}, L_{2n} を定めるための境界条件は $(2N+2)$ 個となる。そこで(3.1)の未知係数として K_{2n} ($n \leq N$)と L_{2n} ($n \leq N$)の $(2N+2)$ 個を残して、これらより高次の項を零と置き、境界条件式を解いて K_{2n}, L_{2n} を定めた。

3.2.4 介在物が非常に小さい場合

特に介在物が非常に小さい場合は、一個の円形介在物をもつ無限体として厳密に解析することができる。そして最も重要な介在物境界における領域(I), (II)の応力成分は $z = a e^{i\theta}$ とおくことにより次の諸式で与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta I} &= \frac{\sigma}{2} \left(2 - \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} + \left\{ 1 - \frac{3(\Gamma - 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} \right\} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_{\theta II} &= \frac{\sigma}{2} \Gamma(\kappa_I + 1) \left(\frac{1}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} + \frac{1}{\Gamma\kappa_I + 1} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_{r I} = \sigma_{r II} &= \frac{\sigma}{2} \Gamma(\kappa_I + 1) \left(\frac{1}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} - \frac{1}{\Gamma\kappa_I + 1} \cos 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta I} = \tau_{r\theta II} &= \frac{\sigma}{2} \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} \sin 2\theta\end{aligned}\tag{3.15}$$

また介在物境界における各応力成分の最大値とそれらの位置は次式で与えられる。

$$\sigma_{\theta I, \max} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \left(3 - \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} - \frac{3(\Gamma - 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} \right) & \left(\text{at } \theta = 0 \text{ if } \Gamma < \frac{4}{3 - \kappa_I} \right) \\ \sigma \left(1 - \frac{2(\kappa_I + 1)}{8 + (3 - \kappa_I)(\kappa_{II} - 1)} \right) & \left(\text{at any } \theta \text{ if } \Gamma = \frac{4}{3 - \kappa_I} \right) \\ \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} + \frac{3(\Gamma - 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} \right) & \left(\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ if } \Gamma > \frac{4}{3 - \kappa_I} \right) \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta II, \max} = \frac{\sigma}{2} \Gamma(\kappa_I + 1) \left(\frac{1}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} + \frac{1}{\Gamma\kappa_I + 1} \right) \quad (\text{at } \theta = 0)$$

$$\sigma_{r I, \max} = \sigma_{r II, \max} = \frac{\sigma}{2} \Gamma(\kappa_I + 1) \left(\frac{1}{2\Gamma + \kappa_{II} - 1} + \frac{1}{\Gamma\kappa_I + 1} \right) \quad (\text{at } \theta = \frac{\pi}{2})$$

$$\tau_{r\theta I, \max} = \tau_{r\theta II, \max} = \frac{\sigma}{2} \frac{\Gamma(\kappa_I + 1)}{\Gamma\kappa_I + 1} \quad (\text{at } \theta = \frac{\pi}{4})\tag{3.16}$$

3.3 円孔群の場合 ($\Gamma=0$) の応力, 引張剛性とそれらの計算式

3.3.1 計算した物理量と結果の精度

計算結果には図3.1, 3.2における a, b, c の比だけが関係するので, 本質的な2個のパラメータとして便宜上次の μ, λ を用いた.

$$\mu = \frac{b}{c}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \quad (3.17)$$

また結果の整理に際して, 必要に応じて次の量を用いた.

$$f = \frac{\pi a^2}{2bc} = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \mu \quad (3.18)$$

ここに f は円孔が全領域に占める割合 (面積率) で, 次に述べる E^*/E_0 と重要な関係がある.

μ, λ の種々の組合せについて計算を行ない, 各場合について, 円孔縁に沿う接線応力 σ_θ の分布とその最大値及び次式で定義される引張剛性係数 C を求めた.

$$C = \frac{E^*}{E_0} = \text{引張剛性係数}$$

E^* = 円孔群がある場合の見かけの縦弾性係数
 E_0 = 穴のない弾性体の見かけの縦弾性係数

$$= \begin{cases} E_1 & (\text{平面応力}) \\ E_1 / (1 - \nu_1^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (3.19)$$

ここに E_1 は母材の薄板試験片で測定した縦弾性係数, ν_1 はポアソン比である. E^* と E_0 は平面応力と平面ひずみで異なり, また ν_1 の値によって異なる値をとる. しかし, 本節の円孔群の問題に関する限り, 両者の比で定義される引張剛性係数 C は応力分布と同様に, 平面応力と平面ひずみに関係なく, また ν_1 の値にも関係しない.

$\mu = b/c$ を固定して λ を増大すると, ある値 λ_0 で隣接する穴が接触するにいたる (図3.5, 3.6). ここでは計算コストをも考慮して, $\lambda \leq 0.8 \lambda_0$ の範囲で解析を行なった.

さて本解析による結果の精度は, 単位解析領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる. 表3.1(a), (b) は両問題の典型的な場合を例として, それぞれ長方形領域, 三角形領域によって解析した結果を示す.

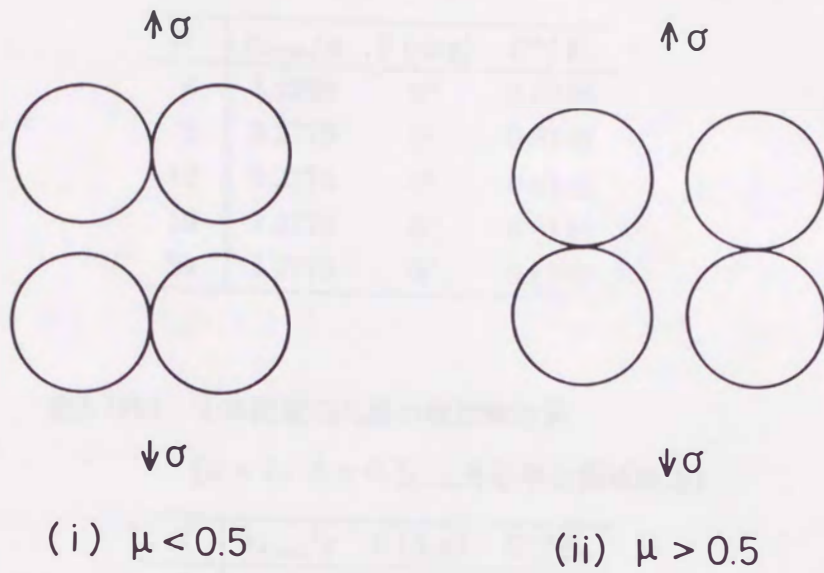


図3.5 問題(a) : 円孔が接触する極限

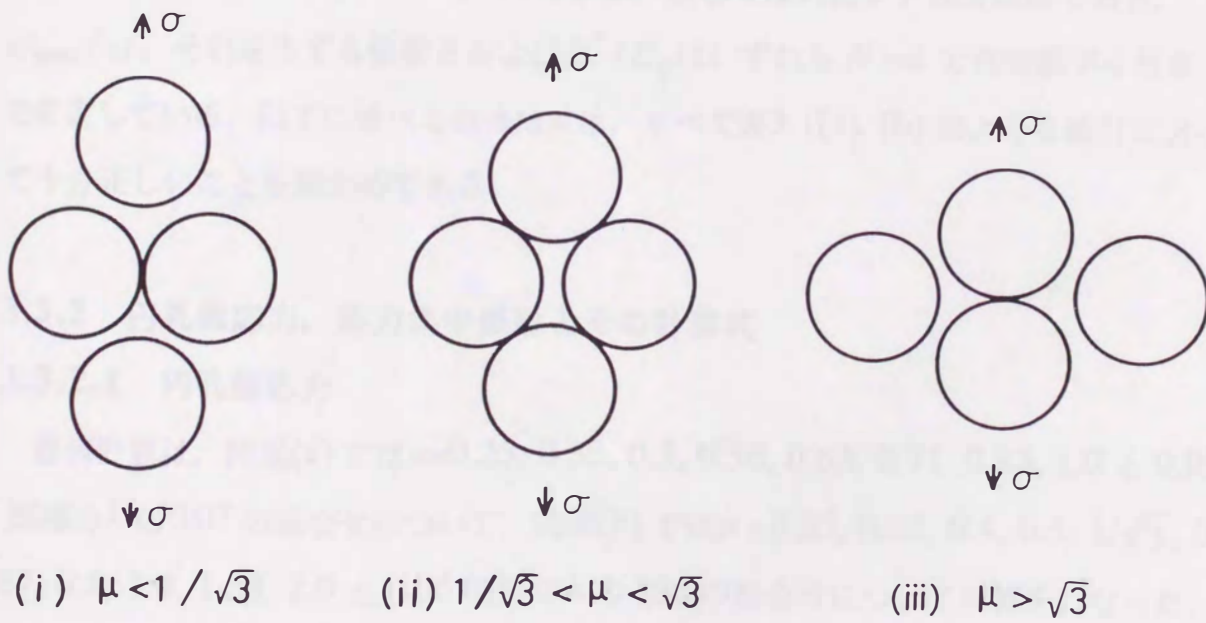


図3.6 問題(b) : 円孔が接触する極限

表3.1(a) 長方形配置円孔群の精度検討例

($\mu = 0.5, \lambda = 0.5$, 長方形単位領域使用)

N	σ_{max}/σ	θ (deg)	E^*/E_0
4	3.2269	0°	0.6306
8	3.2779	0°	0.6168
12	3.2779	0°	0.6168
16	3.2779	0°	0.6168
24	3.2779	0°	0.6168

表3.1(b) 千鳥配置円孔群の精度検討例

($\mu = 1, \lambda = 0.5$, 三角形単位領域使用)

N	σ_{max}/σ	θ (deg)	E^*/E_0
4	7.1485	16°	0.2133
8	7.0053	16°	0.2164
12	7.0047	17°	0.2164
16	7.0046	17°	0.2164
24	7.0046	17°	0.2164

ここに N は前者では辺 DH , HK の分割数, 後者では斜辺 DF の分割数である。
 σ_{max}/σ , それを生ずる位置 θ および E^*/E_0 はいずれも $N=8$ で有効数字 4 桁まで安定している。以下に述べる数値結果は, すべて表3.1(a), (b) のような検討によって十分正しいことを確かめてある。

3.3.2 円孔縁応力, 応力集中係数とその計算式

3.3.2.1 円孔縁応力

数値計算は, 問題(a) では $\mu=0.25, 0.33, 0.5, 0.56, 0.63, 0.71, 0.83, 1.0$ と 0.05 間隔の λ の 107 の組合せについて, 問題(b) では $\mu=0.25, 0.33, 0.4, 0.5, 1/\sqrt{3}, 0.67, 0.8, 1.0, 1.33, 2.0$ と 0.05 間隔の λ の 138 の組合せについて計算を行なった。

問題(a) では最大応力 σ_{max} は引張方向に直角な直径の端 A (図3.1) に生ずる。種々の μ, λ について得た点 A の応力 σ_A/σ の値を表3.2 に示す。表中の $\mu=0$ に対する値は一系列円孔群の特別な解析による結果である。

一方、問題(b)では最大応力 σ_{\max} は計算した多くの場合点Aに生ずるが、ある範囲の μ 、 λ では斜め方向の穴同士の干渉によって点Aから離れた位置Bに生ずることもある。その場合の例を図3.7に示す。

表3.3は種々の μ 、 λ について得た点Aの応力 σ_A/σ を示す。これらはパラメータの組合せの大部分に対して σ_{\max}/σ を与えるが、右下の破線内の範囲では、 σ_{\max} は点Aでなく点B($\theta \neq 0^\circ$)に生ずる。表3.4はこの範囲における σ_B/σ すなわち σ_{\max}/σ とそれを生ずる位置 θ を示してある。なおこれらの最大値は、 1° 間隔で σ_θ/σ を計算し、それらの最大値をとって定めた。

図3.8はこうして求めた σ_{\max}/σ を、 μ を横軸にとり λ をパラメータとして描いた。 λ あるいは μ が大きいほど、円孔間の干渉が大きくなるため σ_{\max}/σ が著しく増大している。なお図中の破線は、円孔縁の応力分布で点A($\theta=0^\circ$)と点B($\theta \neq 0^\circ$)の二つの位置に応力ピークが現われたものについて、最大応力につぐ応力ピークを示す。 $\lambda=0.8$ について $\mu=0.53$ 付近で曲線上に折れ曲がり点がみられが、図中の破線からもわかるように、この付近では円孔縁周辺の応力分布に二つの応力ピークが現われ、この折れ曲がり点を境として最大応力の生じる位置が移動する。

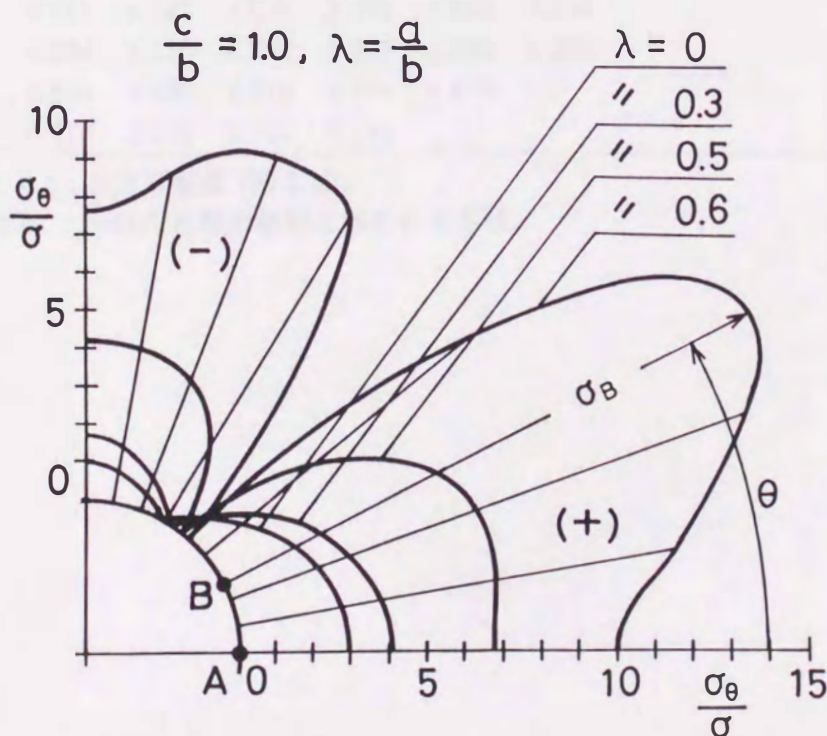


図3.7 問題(b) : $\mu=1$ の σ_θ/σ の分布

表3.2 σ_A/σ の値 (長方形配置円孔群)

λ	μ								
	0	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	3.000	3.001	3.001	3.000	2.998	2.996	2.992	2.984	2.971
0.10	3.000	3.004	3.005	2.999	2.994	2.984	2.968	2.941	2.893
0.15	3.002	3.010	3.011	3.000	2.988	2.969	2.937	2.883	2.795
0.20	3.006	3.019	3.022	3.003	2.985	2.956	2.907	2.828	2.708
0.25	3.015	3.033	3.036	3.012	2.989	2.950	2.887	2.792	2.658
0.30	3.031	3.052	3.058	3.030	3.003	2.958	2.889	2.788	2.656
0.35	3.056	3.081	3.088	3.061	3.033	2.987	2.918	2.822	2.701
0.40	3.096	3.122	3.130	3.108	3.084	3.043	2.981	2.897	2.786
0.45	3.155	3.181	3.190	3.178	3.160	3.129	3.080	3.010	
0.50	3.241	3.265	3.275	3.278	3.269	3.250	3.217	3.162	
0.55	3.366	3.386	3.396	3.416	3.417	3.412	3.395		
0.60	3.546	3.562	3.572	3.608	3.618	3.625	3.623		
0.65	3.811	3.822	3.831	3.876	3.892	3.908			
0.70	4.204	4.210	4.218	4.262	4.280	4.300			
0.75	4.803	4.805	4.810	4.844	4.858				
0.80	5.756	5.756	5.758	5.774					

$\mu = 0.5$: 正方形配置 (図 3.10).

$\mu = 0$: 一列円孔群の特別な解析による値.

表3.3 σ_A/σ の値 (千鳥配置円孔群)

λ	μ											
	0	0.25	0.33	0.4	0.5	$1/\sqrt{3}$	0.67	0.8	1.0	1.33	2.0	
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	3.000	3.001	3.002	3.002	3.004	3.007	3.011	3.017	3.024	3.028	3.012	3.012
0.10	3.000	3.004	3.006	3.009	3.017	3.027	3.041	3.066	3.099	3.118	3.058	3.058
0.15	3.002	3.010	3.014	3.020	3.037	3.058	3.091	3.148	3.227	3.283	3.167	3.167
0.20	3.006	3.019	3.025	3.035	3.063	3.100	3.156	3.260	3.416	3.547	3.386	3.386
0.25	3.015	3.033	3.042	3.055	3.095	3.148	3.233	3.400	3.675	3.949	3.784	3.784
0.30	3.031	3.053	3.064	3.081	3.132	3.201	3.317	3.563	4.016	4.544	4.470	4.470
0.35	3.056	3.081	3.094	3.113	3.172	3.255	3.403	3.746	4.458	5.409	5.645	5.645
0.40	3.096	3.123	3.136	3.156	3.218	3.310	3.488	3.946	5.030	6.663	7.735	7.735
0.45	3.155	3.181	3.194	3.213	3.272	3.366	3.568	4.162	5.777	8.510		
0.50	3.241	3.265	3.277	3.291	3.340	3.428	3.645	4.398	6.770	11.38		
0.55	3.366	3.386	3.395	3.404	3.435	3.506	3.724	4.652	8.124			
0.60	3.546	3.562	3.567	3.569	3.576	3.618	3.815	4.914	10.02			
0.65	3.811	3.821	3.823	3.818	3.799	3.799	3.935	5.153				
0.70	4.204	4.209	4.208	4.198	4.156	4.106	4.129	5.326				
0.75	4.803	4.805	4.802	4.792	4.740	4.644						
0.80	5.756	5.756	5.754	5.747	5.707	5.600						

$\mu = 1.0$: 正方形配置 (図 3.11).

$\mu = 1/\sqrt{3}$: 正三角形配置 (図 3.12).

$\mu = 0$: 一列円孔群の特別な解析による値.

表3.4 σ_B/σ とその位置 θ (deg) (表3.3 の破線内)

λ	μ			
	$1/\sqrt{3}$	0.67	0.8	1.0
0.50		3.645	4.571	7.005
		(3°)	(19°)	(17°)
0.55		3.902	5.552	9.628
		(22°)	(26°)	(23°)
0.60	3.650	4.539	7.413	15.71
	(17°)	(29°)	(29°)	(27°)
0.65	4.011	5.703	11.00	
	(27°)	(33°)	(32°)	
0.70	4.698	7.764	19.09	
	(34°)	(36°)	(35°)	
0.75	5.924			
	(38°)			
0.80	8.138			
	(41°)			

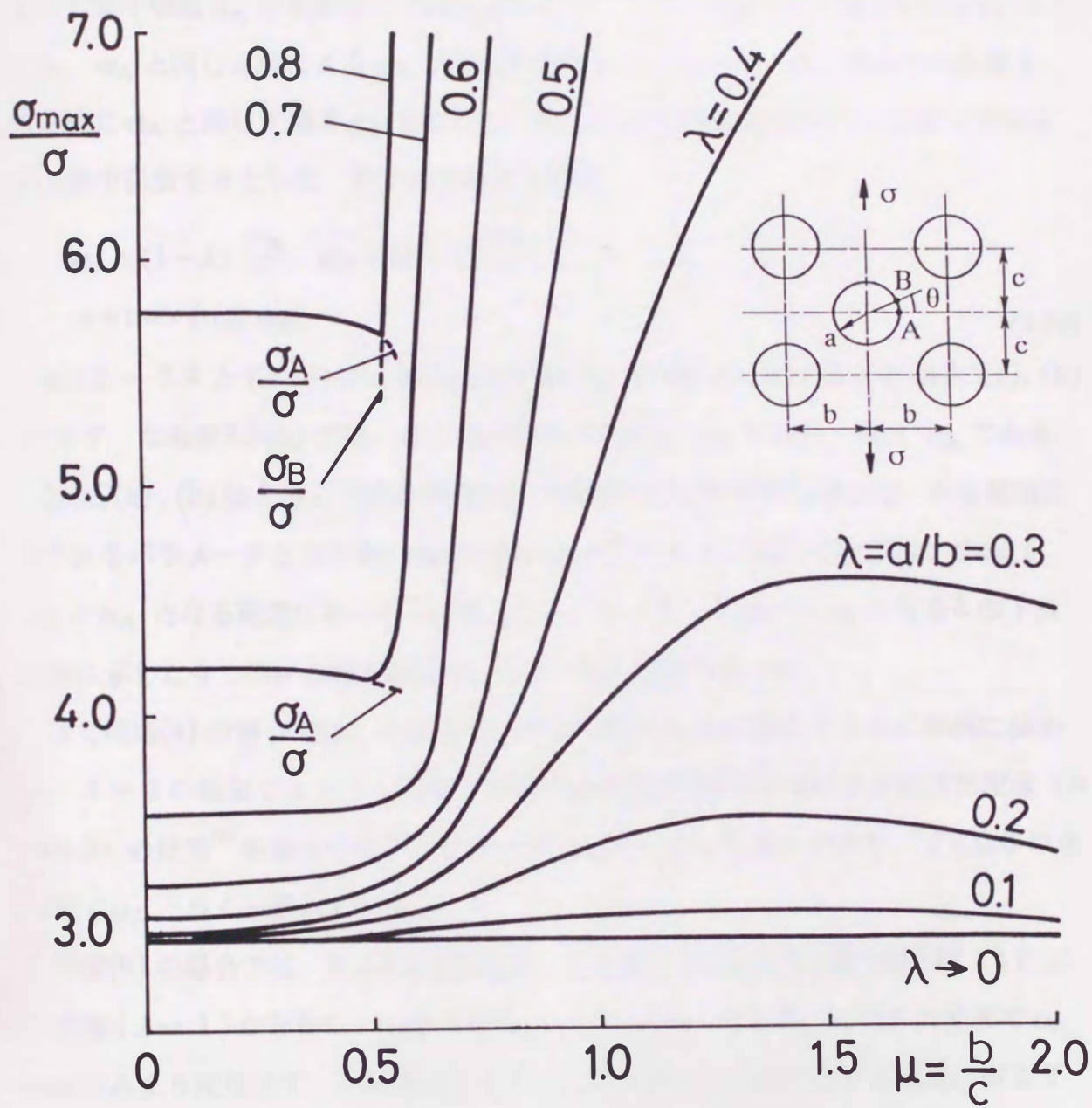


図3.8 問題(b) : σ_{\max}/σ と μ, λ の関係

3.3.2.2 応力集中係数とその計算式

前項で述べたように、 σ_A は問題(a)、問題(b)ともにパラメータ μ 、 λ の広い範囲で σ_{\max} を与える。従って σ_A を x 方向の隣接2円孔間の断面の平均応力で除して得る応力集中係数 α_A を求めることは意義がある。一方、問題(b)の場合の σ_B については、 α_A と同じ定義による α_B は物理的意味をもたないが、後の議論での必要上、形式的に α_A と同じ定義で α_B も定めた。そして α_A と α_B の大きい方を取って得る応力集中係数を α とした。すなわち次式を得る。

$$\begin{aligned}\alpha_A &= (1-\lambda) \frac{\sigma_A}{\sigma}, \quad \alpha_B = (1-\lambda) \frac{\sigma_B}{\sigma} \\ \alpha &= \max(\alpha_A, \alpha_B)\end{aligned}\tag{3.20}$$

表3.2～3.4と(3.20)から得られる問題(a)、問題(b)に対する α を表3.5(a)、(b)に示す。なお表3.5(b)では、右下の点線内の数値が α_B であり、他は α_A である。

図3.9(a)、(b)はこうして得た問題(a)、問題(b)の応力集中係数 α を、 λ を横軸にとり μ をパラメータとして太い実線で描いたものである。図3.9(b)の細い実線は $\alpha_B > \alpha_A$ となる範囲における α_A を示している。そして $\alpha_B > \alpha_A$ となる λ の下限は図に示した4つの μ に関する限り、0.45～0.5付近であった。

さて問題(a)の場合では、 α は μ のいずれの場合も λ の増大とともに単調に減少し、 $\lambda \rightarrow 1$ の極限で $\alpha \rightarrow 1$ になる。図中の三角印はBailey等による正方形配置($\mu = 0.5$)の結果⁽¹⁾を論文中のグラフから読み取って示したものであり、 $\lambda \leq 0.8$ の全範囲で α_A と良く一致している。

問題(b)の場合では、 $\mu \leq 1/\sqrt{3}$ の場合、 λ を増大すると3.3.1節の図3.6(i)に示す極限($\lambda \rightarrow 1$)が存在し、このとき $\alpha_A \rightarrow 1$ となる。そして、この μ の範囲で α_A 曲線はあまり変化せず、 μ が減少するとともに急速に $\mu \rightarrow 0$ に対する曲線に収束する。 $\mu > 1/\sqrt{3}$ の場合は、物理的に可能な λ の上限が図3.6(ii)や図3.6(iii)で与えられるので、 $\lambda \rightarrow 1$ における極限は存在しない。また正方形配置($\mu = 1$)に対するBailey等の結果⁽¹⁾(三角印)は $\lambda \leq 0.6$ の範囲で本解析の α_A と良く一致している。

さて本解析では、問題(a)では107個、問題(b)では138個の μ 、 λ の組合せについて計算を行なった。しかしそれでも、任意の μ 、 λ に対する値を求めようとする

表3.5(a) 応力集中係数 α の値 (長方形配置円孔群)

λ	μ								
	0	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	2.850	2.851	2.851	2.850	2.848	2.846	2.842	2.835	2.822
0.10	2.700	2.704	2.704	2.699	2.694	2.686	2.672	2.647	2.604
0.15	2.552	2.558	2.560	2.550	2.540	2.524	2.496	2.451	2.376
0.20	2.405	2.415	2.417	2.402	2.388	2.365	2.325	2.263	2.167
0.25	2.261	2.274	2.277	2.259	2.242	2.212	2.165	2.095	1.994
0.30	2.122	2.137	2.140	2.121	2.102	2.071	2.022	1.951	1.859
0.35	1.986	2.003	2.007	1.989	1.971	1.942	1.897	1.834	1.756
0.40	1.858	1.873	1.878	1.856	1.850	1.826	1.789	1.738	1.672
0.45	1.735	1.749	1.754	1.748	1.738	1.721	1.694	1.655	
0.50	1.621	1.632	1.637	1.639	1.634	1.625	1.609	1.581	
0.55	1.515	1.524	1.528	1.537	1.538	1.535	1.528		
0.60	1.418	1.425	1.429	1.443	1.447	1.450	1.449		
0.65	1.334	1.338	1.341	1.357	1.362	1.368			
0.70	1.261	1.263	1.256	1.279	1.284	1.290			
0.75	1.201	1.201	1.203	1.211	1.215				
0.80	1.151	1.151	1.152	1.155					

$\mu = 0.5$: 正方形配置 (図 3.10).

$\mu = 0$: 一列円孔群の特別な解析による値.

表3.5(b) 応力集中係数 α の値 (千鳥配置円孔群)

λ	μ										
	0	0.25	0.33	0.4	0.5	$1/\sqrt{3}$	0.67	0.8	1.0	1.33	2.0
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	2.850	2.851	2.851	2.852	2.854	2.857	2.860	2.866	2.873	2.877	2.861
0.10	2.700	2.704	2.705	2.708	2.715	2.724	2.737	2.760	2.789	2.806	2.752
0.15	2.552	2.558	2.562	2.567	2.581	2.600	2.627	2.676	2.743	2.791	2.692
0.20	2.405	2.415	2.420	2.428	2.451	2.480	2.525	2.608	2.733	2.838	2.709
0.25	2.261	2.275	2.281	2.291	2.321	2.361	2.425	2.550	2.756	2.962	2.838
0.30	2.122	2.137	2.145	2.157	2.192	2.240	2.322	2.494	2.811	3.181	3.129
0.35	1.986	2.003	2.011	2.023	2.062	2.116	2.212	2.435	2.898	3.516	3.669
0.40	1.858	1.874	1.882	1.894	1.931	1.986	2.093	2.367	3.018	3.998	4.641
0.45	1.735	1.750	1.757	1.767	1.799	1.851	1.962	2.289	3.177	4.680	
0.50	1.621	1.633	1.638	1.646	1.670	1.714	1.823	2.286	3.502	5.800	
0.55	1.515	1.524	1.528	1.532	1.546	1.578	1.756	2.498	4.333		
0.60	1.419	1.425	1.427	1.428	1.431	1.460	1.816	2.965	6.285		
0.65	1.334	1.337	1.338	1.336	1.330	1.404	1.996	3.851			
0.70	1.261	1.263	1.262	1.259	1.247	1.409	2.329	5.726			
0.75	1.201	1.201	1.201	1.198	1.185	1.481					
0.80	1.151	1.151	1.151	1.149	1.141	1.628					

$\mu = 1.0$: 正方形配置 (図 3.11).

$\mu = 1/\sqrt{3}$: 正三角形配置 (図 3.12).

$\mu = 0$: 一列円孔群の特別な解析による値.

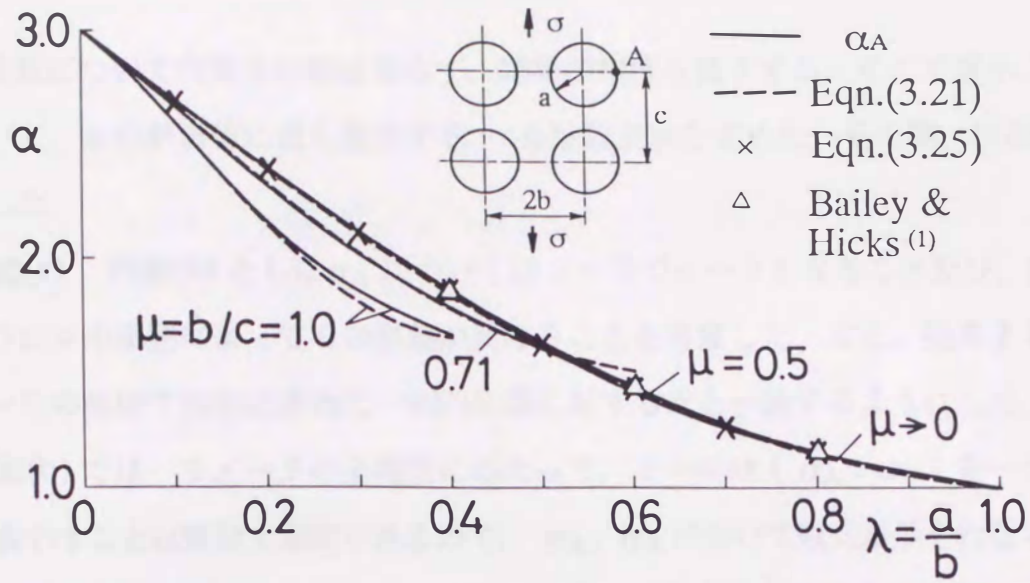


图3.9(a) 应力集中系数 α (长方形配置円孔群)

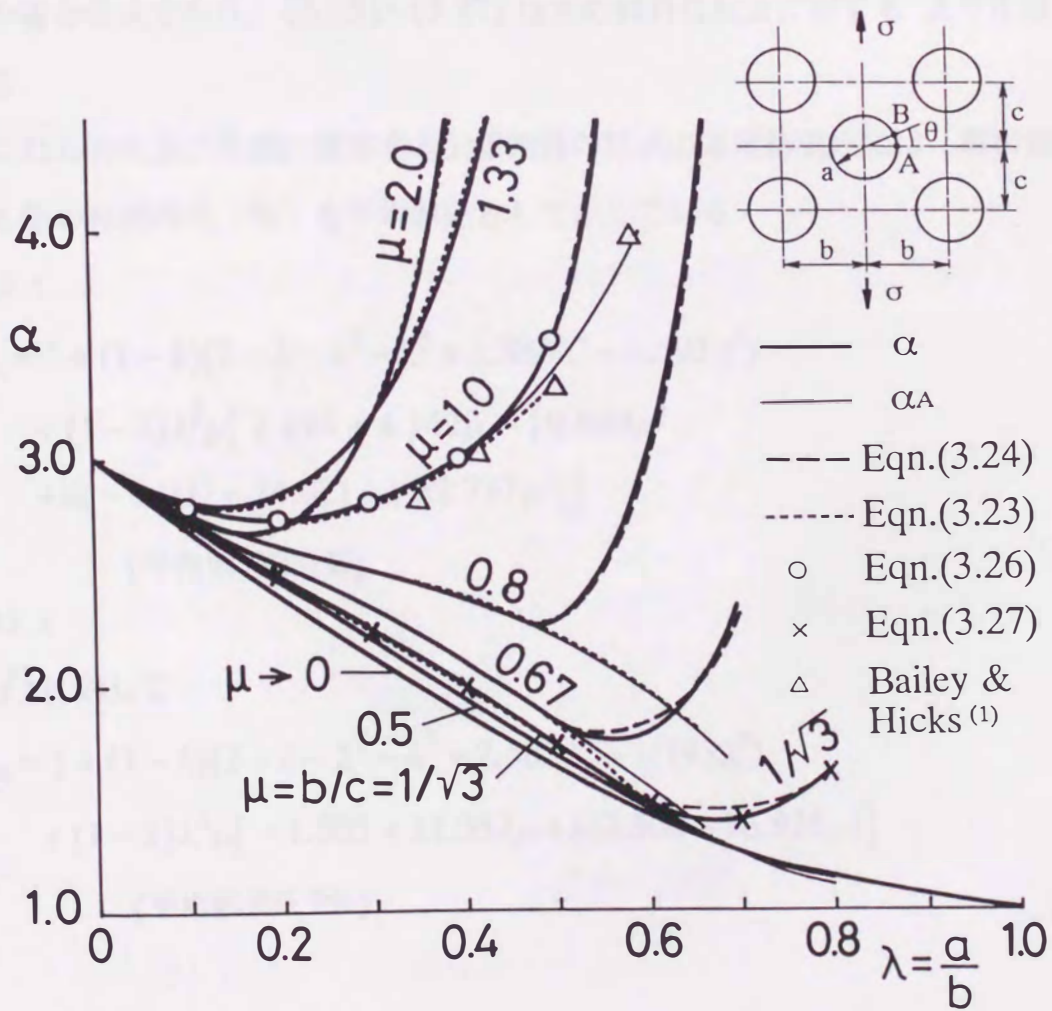


图3.9(b) 应力集中系数 α (千鳥配置円孔群)

と、二変数について内挿をせねばならず、結果の精度も低下する。そこで最小二乗法を用いて、 α の解析値に良く適合するべき級数表示を求めた。その際、次のことを考慮した。

(i) 問題(a), 問題(b)ともに α_A については $\lambda \rightarrow 0$ で $\alpha \rightarrow 3$ となること及び、前述のように μ の範囲によってその挙動が異なることを考慮した。また、提案する式が $\mu \rightarrow 0$ の極限で特別に求めた一列円孔群に対する式と一致するようにした。

(ii) 問題(b)ではパラメータの全範囲にわたって、 $\alpha = \max(\alpha_A, \alpha_B)$ を一つの式で表わすことは精度上無理があるので、 α_A, α_B に分けて数式表示を行なった。また α_B の式は表3.5(b)の値に適合させるほか、図3.6(ii)の場合、すなわち $\lambda \rightarrow \sqrt{1 + \mu^2} / (2\mu)$ のとき α_B が発散する形とした。

上の方針に基づいて次の諸式(3.21)~(3.27)を得た。(3.21)~(3.24)は μ, λ が一般の場合の式であり、(3.25)~(3.27)は穴の特別な配置に対するより正確な式である。

なおこれらの式及び次節に提案する引張剛性の諸式の末尾括弧内には、解析値と式による値の相対誤差(%)を平均誤差として示している。

問題(a) :

$$\begin{aligned} \alpha_A = & 1 + (1 - \lambda)(2 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 2.583\lambda^4 - 1.193\lambda^5) \\ & + (1 - \lambda)\lambda^2\mu[2.214 + 4.142\mu - 19.880\mu^2 \\ & + \lambda(-0.007 - 24.021\mu + 52.737\mu^2)] \\ & \text{(平均誤差0.6\%)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

問題(b) :

$\mu \leq 1/\sqrt{3}$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_A = & 1 + (1 - \lambda)(2 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 2.583\lambda^4 - 1.193\lambda^5) \\ & + (1 - \lambda)\lambda^2\mu[-1.503 + 11.352\mu + \lambda(2.308 - 16.935\mu)] \\ & \text{(平均誤差0.7\%)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\mu \geq 1/\sqrt{3}$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_A = (1 - \lambda) & \left[3 + \lambda^2(-2.874 + 2.996 \mu + 18.353 \mu^2 - 8.817 \mu^3) \right. \\ & + \lambda^3(-144.56 + 425.70 \mu - 386.37 \mu^2 + 101.76 \mu^3) \\ & \left. + \lambda^4(463.16 - 1469.3 \mu + 1395.0 \mu^2 - 362.57 \mu^3) \right] \\ & \text{(平均誤差1.0\%)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

表3.4 の μ , λ の範囲に対して

$$\begin{aligned} \alpha_B = \frac{1 - \lambda}{1 - \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}} & \left[19.866 - 84.068 \mu + 139.51 \mu^2 - 67.482 \mu^3 \right. \\ & + \lambda(-78.877 + 385.05 \mu - 638.91 \mu^2 + 308.61 \mu^3) \\ & \left. + \lambda^2(104.01 - 504.07 \mu + 800.52 \mu^2 - 375.33 \mu^3) \right] \\ & \text{(平均誤差1.3\%)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

穴の配置が特別な場合

問題(a) の正方形配置 (図3.10) :

$$\begin{aligned} (\alpha)_{\mu=0.5} = (1 - \lambda) & \left[3 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (0.019 - 0.590\lambda + 3.195\lambda^2 - 2.333\lambda^3 \right. \\ & \left. + 0.718\lambda^4) \right] \quad \text{(平均誤差0.05\%)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

問題(b) について

正方形配置 (図3.11) :

$$\begin{aligned} (\alpha)_{\mu=1} = (1 - \lambda) & \left[3 + \frac{\lambda}{1 - \sqrt{2}\lambda} (0.206 + 3.970\lambda + 33.006\lambda^2 - 125.91\lambda^3 \right. \\ & \left. + 122.91\lambda^4) \right] \quad \text{(平均誤差0.3\%)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

正三角形配置 (図3.12) :

$$\begin{aligned} (\alpha)_{\mu=1/\sqrt{3}} = (1 - \lambda) & \left[3 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (-0.009 + 2.801\lambda - 2.160\lambda^2 - 10.633\lambda^3 \right. \\ & \left. + 14.404\lambda^4) \right] \quad \text{(平均誤差0.4\%)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

各式の末尾括弧内に示した平均誤差からわかるようにすべて精度は十分である。

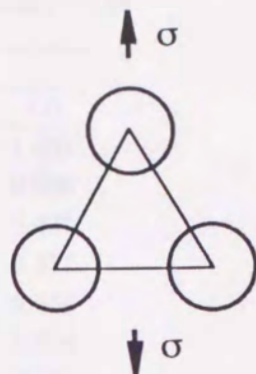
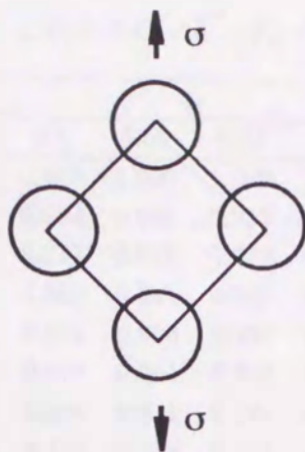
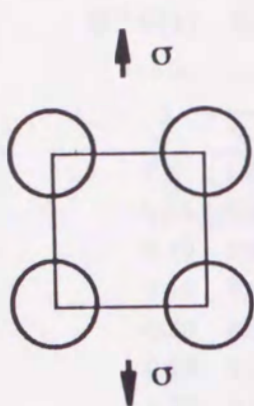


図3.10 問題(a) : 円孔の正方形配置 ($\mu=0.5$)

図3.11 問題(b) : 円孔の正方形配置 ($\mu=1$)

図3.12 問題(b) : 円孔の正三角形配置 ($\mu=1/\sqrt{3}$)

問題(a), 問題(b) に対する図3.9(a), (b) には (3.21), (3.23) ~ (3.27) による結果を実線の解析値と比較しておいた. 図3.9(a) では, α_A の式 (3.21) による値を破線で描いている. 図3.9(b) では, α_B の式 (3.24) による値は破線で, $\mu \geq 1/\sqrt{3}$ に対する α_A の式 (3.23) による結果は点線で描いてある. なお $\mu \leq 1/\sqrt{3}$ に対する α_A の式 (3.22) による値は解析曲線と判別し難いので図には現われていない. 問題(a), 問題(b) のいずれの計算式も精度は十分で, 実用上有用と考えられる. また, 問題(a), 問題(b) の穴の正方形配置, 正三角形配置に対する α の式 (3.25) ~ (3.27) による結果はほとんど解析曲線上にあり, 精度が極めて高いことがわかる.

3.3.3 円孔による引張剛性の低下とその計算式

単位領域として長方形 $ODHKO$ を用いる場合は辺 HK の中点 M の y 方向変位から, 三角形 $ODFO$ を用いる場合は点 F の y 方向変位から有孔弾性体の見かけの縦弾性係数 E^* が定まり, 引張剛性係数 C が求められる.

問題(a), 問題(b) について種々の μ と λ に対する C の計算結果をそれぞれ表3.6(a), (b) および図3.13(a), (b) に示す. 両図中の破線は Bailey 等による正方形配置の結果⁽¹⁾ であり, 本解析値と良い一致が認められる. また問題(a), 問題(b) とともに $\mu \rightarrow 0$ (一列円孔群) では λ に関係なく $C = 1$ であり, μ が増すほど, また λ が大きいほど C が著しく低下する.

表3.6(a) 種々の μ , λ に対する $C = E^*/E_0$ の値 (長方形配置円孔群)

λ	μ							
	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.997	0.996	0.994	0.994	0.993	0.992	0.990	0.989
0.10	0.988	0.985	0.977	0.975	0.972	0.968	0.963	0.957
0.15	0.974	0.966	0.950	0.945	0.939	0.931	0.922	0.911
0.20	0.955	0.940	0.914	0.906	0.897	0.886	0.873	0.859
0.25	0.931	0.910	0.872	0.861	0.848	0.835	0.820	0.804
0.30	0.902	0.874	0.824	0.811	0.796	0.781	0.766	0.751
0.35	0.870	0.834	0.774	0.759	0.743	0.727	0.712	0.698
0.40	0.835	0.791	0.722	0.706	0.689	0.673	0.659	0.645
0.45	0.796	0.746	0.670	0.653	0.636	0.620	0.606	
0.50	0.755	0.698	0.617	0.600	0.583	0.568	0.554	
0.55	0.710	0.648	0.564	0.547	0.531	0.516		
0.60	0.663	0.597	0.512	0.495	0.479	0.465		
0.65	0.613	0.543	0.459	0.443	0.428			
0.70	0.559	0.489	0.407	0.391	0.376			
0.75	0.502	0.432	0.354	0.339				
0.80	0.441	0.373	0.300					

$\mu = 0.5$: 正方形配置 (図 3.10).

表3.6(b) 種々の μ , λ に対する $C = E^*/E_0$ の値 (千鳥配置円孔群)

λ	μ								
	0.25	0.33	0.5	$1/\sqrt{3}$	0.67	0.8	1.0	1.33	2.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.997	0.996	0.994	0.993	0.992	0.991	0.988	0.984	0.977
0.10	0.988	0.985	0.977	0.973	0.969	0.963	0.954	0.939	0.913
0.15	0.974	0.966	0.949	0.941	0.932	0.918	0.898	0.867	0.820
0.20	0.955	0.940	0.912	0.899	0.883	0.858	0.823	0.773	0.712
0.25	0.931	0.909	0.867	0.847	0.823	0.786	0.732	0.664	0.599
0.30	0.902	0.873	0.817	0.790	0.756	0.704	0.631	0.548	0.487
0.35	0.870	0.833	0.762	0.727	0.684	0.616	0.523	0.430	0.375
0.40	0.835	0.790	0.705	0.662	0.609	0.525	0.414	0.317	0.263
0.45	0.796	0.744	0.646	0.596	0.533	0.434	0.311	0.213	
0.50	0.755	0.696	0.586	0.529	0.457	0.345	0.216	0.124	
0.55	0.710	0.646	0.526	0.463	0.381	0.260	0.136		
0.60	0.663	0.594	0.466	0.397	0.308	0.182	0.072		
0.65	0.613	0.540	0.406	0.332	0.236	0.114			
0.70	0.559	0.485	0.347	0.268	0.168	0.059			
0.75	0.502	0.427	0.289	0.205					
0.80	0.440	0.368	0.232	0.146					

$\mu = 1.0$: 正方形配置 (図 3.11).

$\mu = 1/\sqrt{3}$: 正三角形配置 (図 3.12).

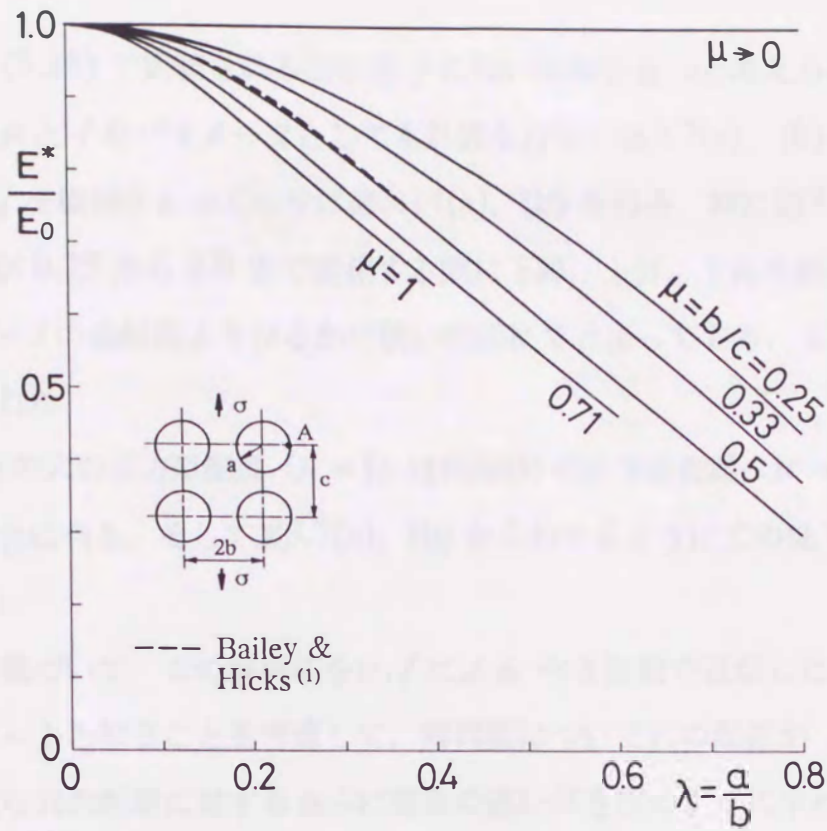


図3.13(a) $C = E^*/E_0$ と μ, λ の関係 (長方形配置円孔群)

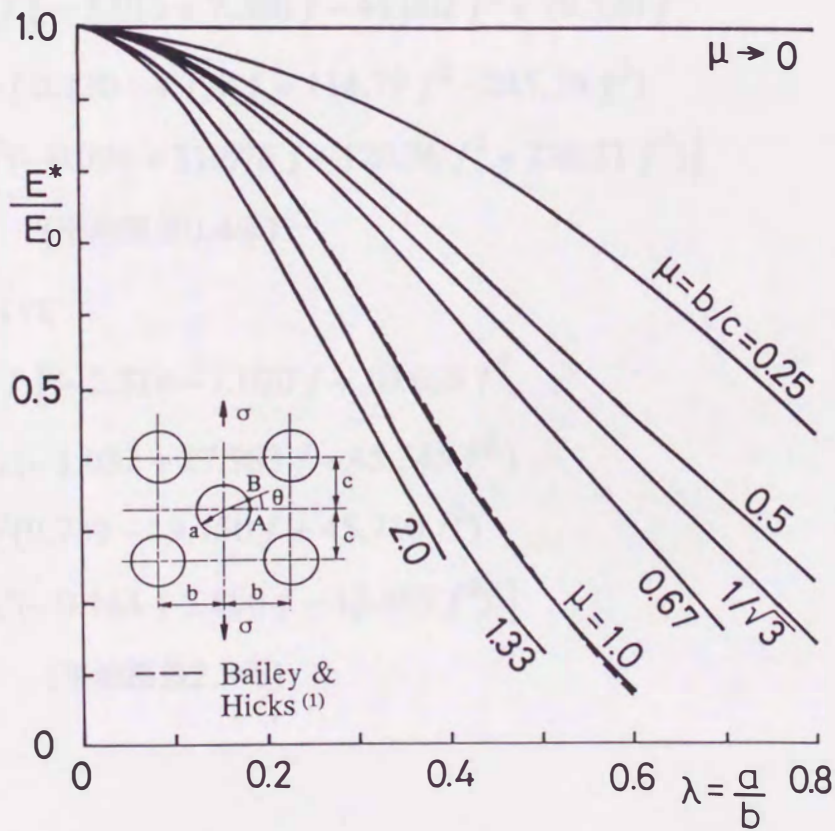


図3.13(b) $C = E^*/E_0$ と μ, λ の関係 (千鳥配置円孔群)

一方、 C は(3.18)で定義される面積率 f に強い相関をもつと考えられるので、 μ と λ の代りに μ と f をパラメータとしても計算を行ない表3.7(a), (b)を得た。これらの結果を f を横軸をとって示せば図3.14(a), (b)を得る。特に図3.14(b)で $C-f$ 曲線は μ が 0.25 から 2.0 まで変化する間に下降、上昇、下降を繰り返すため、図3.13(b)の $C-\lambda$ の曲線群よりはるかに狭い範囲にまとまっており、 C と f との強い相関が認められた。

特に問題(b)の穴の正方形配置 ($\mu=1$) は問題(a)の正方形配置 ($\mu=0.5$) を 45° 回転させた場合に当る。そして表3.7(a), (b)からわかるように C の低下量は問題(b)の方が著しい。

上の所見に基づいて、 C の解析値を μ, f によるべき級数で近似した。その際、 $f=0$ のとき $C=1$ となることを考慮して、両問題について穴の配置が一般の場合の式、及び特別な穴の配置に対するさらに精度の高い式を次のように求めた。

穴の配置が一般の場合

問題(a)について

$$\begin{aligned}
 C = 1 + f [& -3.015 + 7.380 f - 44.002 f^2 + 79.520 f^3 \\
 & + \mu (0.130 - 4.792 f + 114.79 f^2 - 245.25 f^3) \\
 & + \mu^2 (-0.098 + 11.876 f - 120.36 f^2 + 230.21 f^3)] \\
 & \text{(平均誤差0.4\%)}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

問題(b)について

$$\begin{aligned}
 C = 1 + f [& -2.518 - 1.020 f + 10.656 f^2 \\
 & + \mu (-1.082 + 17.983 f - 45.345 f^2) \\
 & + \mu^2 (0.739 - 19.150 f + 45.710 f^2) \\
 & + \mu^3 (-0.144 + 5.856 f - 13.455 f^2)] \\
 & \text{(平均誤差2.9\%)}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

表3.7(a) 種々の μ, f に対する $C = E^* / E_0$ の値 (長方形配置円孔群)

f	μ							
	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.866	0.867	0.869	0.871	0.872	0.875	0.878	0.882
0.10	0.751	0.758	0.767	0.771	0.776	0.783	0.791	0.802
0.15	0.645	0.663	0.683	0.690	0.699	0.710	0.724	0.741
0.20	0.544	0.578	0.612	0.622	0.635	0.650	0.668	0.691
0.25	0.443	0.499	0.549	0.563	0.578	0.597	0.620	0.646
0.30		0.424	0.493	0.509	0.528	0.550	0.576	
0.35			0.441	0.461	0.482	0.507		
0.40			0.393	0.415	0.440			
0.45			0.347	0.372				
0.50			0.302					

$\mu = 0.5$: 正方形配置 (図 3.10).

表3.7(b) 種々の μ, f に対する $C = E^* / E_0$ の値 (千鳥配置円孔群)

f	μ								
	0.25	0.33	0.5	$1/\sqrt{3}$	0.67	0.8	1.0	1.33	2.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.866	0.866	0.865	0.864	0.862	0.859	0.857	0.859	0.867
0.10	0.751	0.756	0.754	0.750	0.744	0.734	0.728	0.734	0.759
0.15	0.645	0.661	0.661	0.653	0.642	0.624	0.611	0.624	0.670
0.20	0.544	0.575	0.580	0.570	0.553	0.527	0.508	0.527	0.594
0.25	0.443	0.495	0.509	0.496	0.474	0.441	0.417	0.441	0.527
0.30		0.419	0.444	0.430	0.404	0.365	0.337	0.365	0.467
0.35			0.385	0.369	0.340	0.297	0.268	0.298	0.411
0.40			0.331	0.313	0.281	0.237	0.208	0.239	0.360
0.45			0.281	0.262	0.228	0.185	0.158	0.187	0.311
0.50			0.235	0.214	0.180	0.139	0.116	0.143	0.266

$\mu = 1.0$: 正方形配置 (図 3.11).

$\mu = 1/\sqrt{3}$: 正三角形配置 (図 3.12).

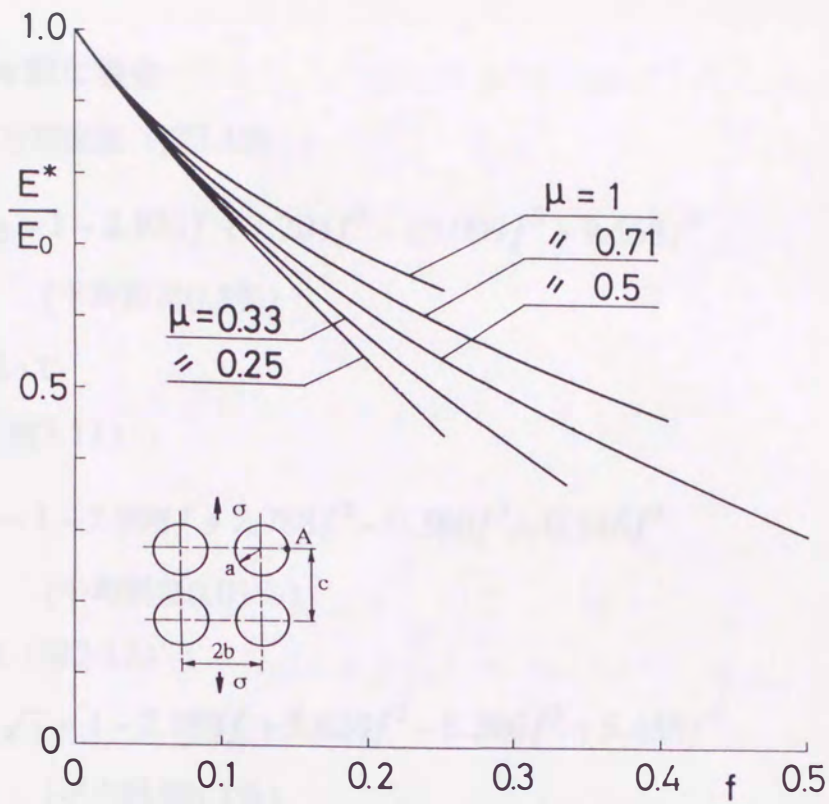


図3.14(a) $C = E^*/E_0$ と μ, f の関係 (長方形配置円孔群)

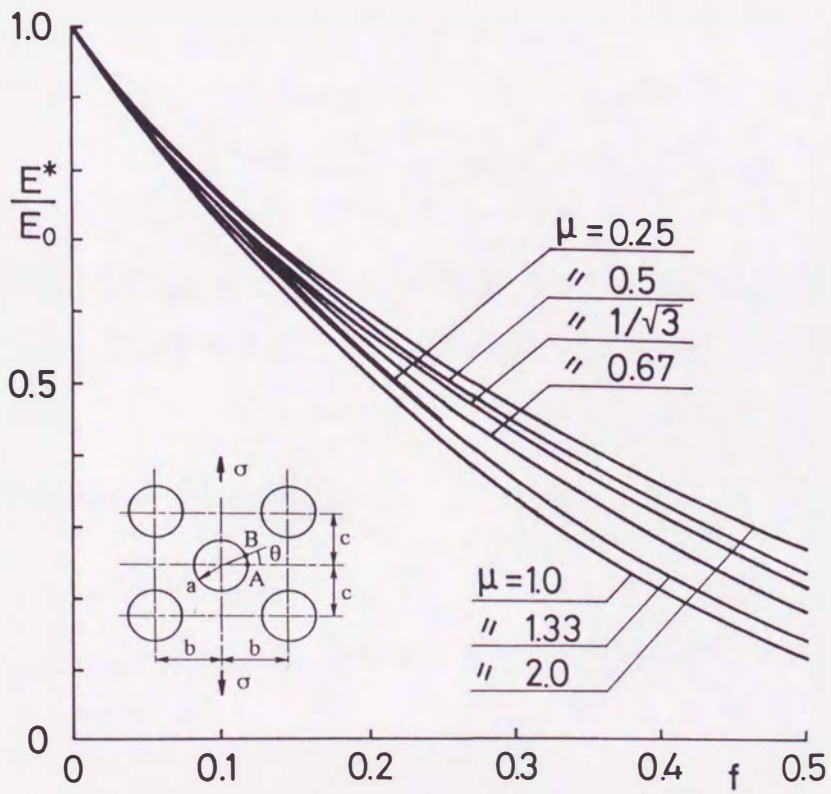


図3.14(b) $C = E^*/E_0$ と μ, f の関係 (千鳥配置円孔群)

穴の配置が特別な場合

問題(a) の正方形配置 (図3.10) :

$$(C)_{\mu=0.5} = 1 - 2.935f + 7.204f^2 - 13.009f^3 + 9.553f^4$$

(平均誤差0.3%)

(3.30)

問題(b) について

正方形配置 (図3.11) :

$$(C)_{\mu=1} = 1 - 2.998f + 2.788f^2 - 0.380f^3 - 0.546f^4$$

(平均誤差0.01%)

(3.31)

正三角形配置 (図3.12) :

$$(C)_{\mu=1/\sqrt{3}} = 1 - 2.988f + 5.624f^2 - 8.306f^3 + 5.455f^4$$

(平均誤差0.1%)

(3.32)

3.4 円形介在物群の結果と応力・引張剛性の計算式

3.4.1 解析の概要と結果の精度

数値計算は平面ひずみ問題として行ない、 ν_I , ν_{II} が結果にあまり関係しないことを考慮して、便宜上、 ν_I , $\nu_{II} = 0.3$ とした（平面応力問題で ν_I , $\nu_{II} = 0.43$ にあたる）。これらは(2.7)により $\kappa_I = \kappa_{II} = 1.8$ の場合である。

数値結果には次の三つのパラメータが関係する。

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b}{c}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \\ \Gamma &= \frac{G_{II}}{G_I} = \frac{E_{II}}{E_I} \quad (\nu_I = \nu_{II}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

これらのパラメータの種々の組合せについて計算を行ない、各場合について、介在物境界における全ての極座標応力成分の最大値及び介在物の存在による引張剛性の変化を表わす係数 C を求めた。この C は、円孔の場合の(3.19)と同形の次式で定義される。

$$\begin{aligned} C &= \frac{E^*}{E_0} = \text{引張剛性係数} \\ E^* &= \text{介在物群がある場合の見かけの縦弾性係数} \\ E_0 &= \text{母材の見かけの縦弾性係数} \\ &= \begin{cases} E_I & \text{(平面応力)} \\ E_I / (1 - \nu_I^2) & \text{(平面ひずみ)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.34)$$

この C は介在物が全領域に占める割合（面積率） f に強く依存すると思われるので、結果の整理にはこのことを考慮した。ここで f は、円孔の場合の(3.18)と同形の次式で与えられる。

$$f = \text{介在物面積率} = \frac{\pi a^2}{2bc} = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \mu \quad (3.35)$$

また、実用に便利のため、数値計算結果によくあてはまるべき級数表示を与えたが、このさい次節に述べる理由で、介在物と母材の横弾性係数の比 Γ の代わりに次で定義される β を用いた。

$$\beta = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} = \frac{G_{II} - G_I}{G_{II} + G_I} = \frac{E_{II} - E_I}{E_{II} + E_I} \quad (\nu_I = \nu_{II} \text{ の場合}) \quad (3.36)$$

さて本問題における経済性を考えた λ の解析範囲は、円孔群の場合と同様に図3.5, 3.6 に示される物理的な λ の上限の8割までとした。

パラメータの組合せについて、介在物境界における領域 (I), (II) の応力成分 $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ の最大値を調べ、それらを $\sigma_{\theta I, \max}, \sigma_{\theta II, \max}, \sigma_{r, \max} (= \sigma_{r I, \max} = \sigma_{r II, \max}), \tau_{r\theta, \max} (= \tau_{r\theta I, \max} = \tau_{r\theta II, \max})$ で表わす。これらの最大値は $\theta = 0^\circ$ あるいは 90° に生ずることが多いが、そうでない場合、 $\theta = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ \dots$ と1度間隔で $\sigma_{\theta I}, \sigma_{\theta II}, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ を計算し、それぞれの最大値をとることによって実用上十分な精度で求めた。また、 $\lambda \rightarrow 0$ の場合の応力成分は (3.15) に与えてある。それらの最大値は解析的に求められ、生ずる位置 θ とともに (3.16) に与えられている。

本解析による結果の精度は、分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定できるが、表3.8(a), (b) に示すように N の増大による値の収束性は極めて良い。以下に述べる数値結果は、すべてこのような検討によって十分正しいことを確かめてある。

表3.8(a) 計算精度の検討例 (長方形配置円形介在物群 ;
 $\Gamma = 0.5, \mu = 0.5, \lambda = 0.5$, 長方形単位領域使用)

N	$\sigma_{\theta I, \max} / \sigma$	$\sigma_{\theta II, \max} / \sigma$	$\sigma_{r, \max} / \sigma$	$\tau_{r\theta, \max} / \sigma$	E^* / E_0
4	1.53718	0.77898	0.75822	0.36821	0.87727
8	1.54228	0.78067	0.76252	0.36945	0.87123
12	1.54229	0.78068	0.76252	0.36946	0.87122
16	1.54229	0.78068	0.76252	0.36946	0.87122

表3.8(b) 計算精度の検討例 (千鳥配置円形介在物群 ;
 $\Gamma = 0.5, \mu = 1, \lambda = 0.5$, 三角形単位領域使用)

N	$\sigma_{\theta I, \max} / \sigma$	$\sigma_{\theta II, \max} / \sigma$	$\sigma_{r, \max} / \sigma$	$\tau_{r\theta, \max} / \sigma$	E^* / E_0
4	1.63259	0.81242	0.89456	0.45560	0.74053
8	1.63451	0.81360	0.89328	0.45597	0.74002
12	1.63450	0.81360	0.89323	0.45597	0.74001
16	1.63450	0.81360	0.89323	0.45597	0.74001

3.4.2 応力と引張剛性に及ぼすパラメータの影響

数値計算は平面ひずみ問題で $\nu_I = \nu_{II} = 0.3$ ($\kappa_I = \kappa_{II} = 1.8$) として行なった。

まず、 $\lambda \rightarrow 0$ の場合の各応力成分の最大値とそれらを生ずる位置について検討する。図3.15は、(3.16)から求めた各応力成分の最大値と $\Gamma (=G_{II}/G_I)$ の関係を示したものである。 $\kappa_I = \kappa_{II} = 1.8$ の今の場合は $\Gamma < 3.33$ のとき $\sigma_{\theta I, \max}$ は $\theta = 0^\circ$ で生じ、 Γ の増加とともに減少する。しかし $\Gamma > 3.33$ では、 $\sigma_{\theta I, \max}$ は $\theta = 90^\circ$ で生じ、 Γ の増加とともに増大して $\Gamma \rightarrow \infty$ で図中の一点鎖線で示した極限值に収束する。すなわち $\sigma_{\theta I, \max} - \Gamma$ 曲線は $\Gamma = 3.33$ で折れ曲がりを示す。特に $\Gamma = 3.33$ では、 $\sigma_{\theta I, \max}$ は (3.16) に示すように θ に関係なく介在物境界上で一定になる。

$\sigma_{\theta II, \max}$ と σ_r, \max は Γ に関係なく互いに等しいが、それらを生ずる位置は異なり、それぞれ $\theta = 0^\circ$ 及び $\theta = 90^\circ$ である。 $\tau_{r\theta, \max}$ を生ずる位置は Γ の全範囲で $\theta = 45^\circ$ である。 $\sigma_{\theta II, \max}$, σ_r, \max , $\tau_{r\theta, \max}$ は Γ の増加とともに単調に増大し、 $\Gamma \rightarrow \infty$ のとき図中の一点鎖線で示した極限值に収束する。

介在物境界の各応力成分の最大値の大小関係は Γ によって異なり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta I, \max} &> \sigma_{\theta II, \max} = \sigma_r, \max > \tau_{r\theta, \max} & (0 < \Gamma < 1) \\ \sigma_{\theta II, \max} = \sigma_r, \max &> \sigma_{\theta I, \max} > \tau_{r\theta, \max} & (1 < \Gamma < 1.94) \\ \sigma_{\theta II, \max} = \sigma_r, \max &> \tau_{r\theta, \max} > \sigma_{\theta I, \max} & (1.94 < \Gamma) \end{aligned} \quad (3.37)$$

さて問題(a)では $\Gamma = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1.5, 2, 3.33, 5, 10, \infty$; $\mu = 0.5, 0.71, 1.0$ と 0.1 間隔の λ の 216 の組合せについて解析し、問題(b)では $\Gamma = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1.5, 2, 3.33, 5, 10, \infty$; $\mu = 0.5, 1/\sqrt{3}, 1.0, 2.0$ と 0.1 間隔の λ の 312 の組合せについて計算を行なった。

図3.16(a) ~ 図3.19(b) は、パラメータの典型的な場合に対する介在物境界の各応力成分の最大値を示したものである。各図番に付した(a), (b)はそれぞれ長方形配置円形介在物群、千鳥配置円形介在物群を示す。

図3.16(a), (b)に示す $\sigma_{\theta I, \max}$ はいずれの場合も介在物の同じ配列 (同じ μ, λ) に対して、その剛性すなわち Γ が増すとともに減少するが、 $\Gamma = 3.33$ 付近で傾向が反転して増大し、 $\Gamma \rightarrow \infty$ の曲線に収束する。図3.17(a) ~ 3.19(b) に示す他の応力成

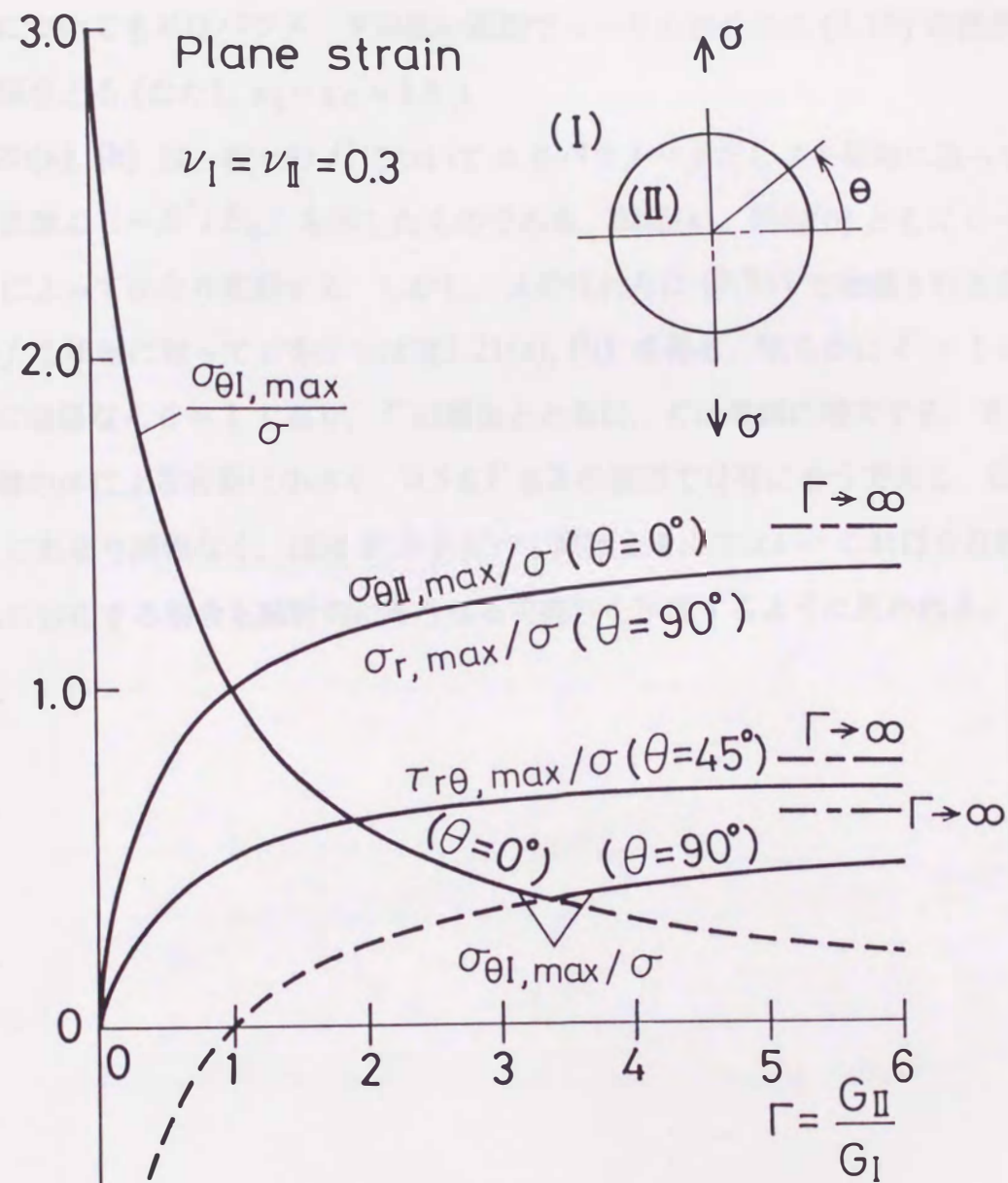
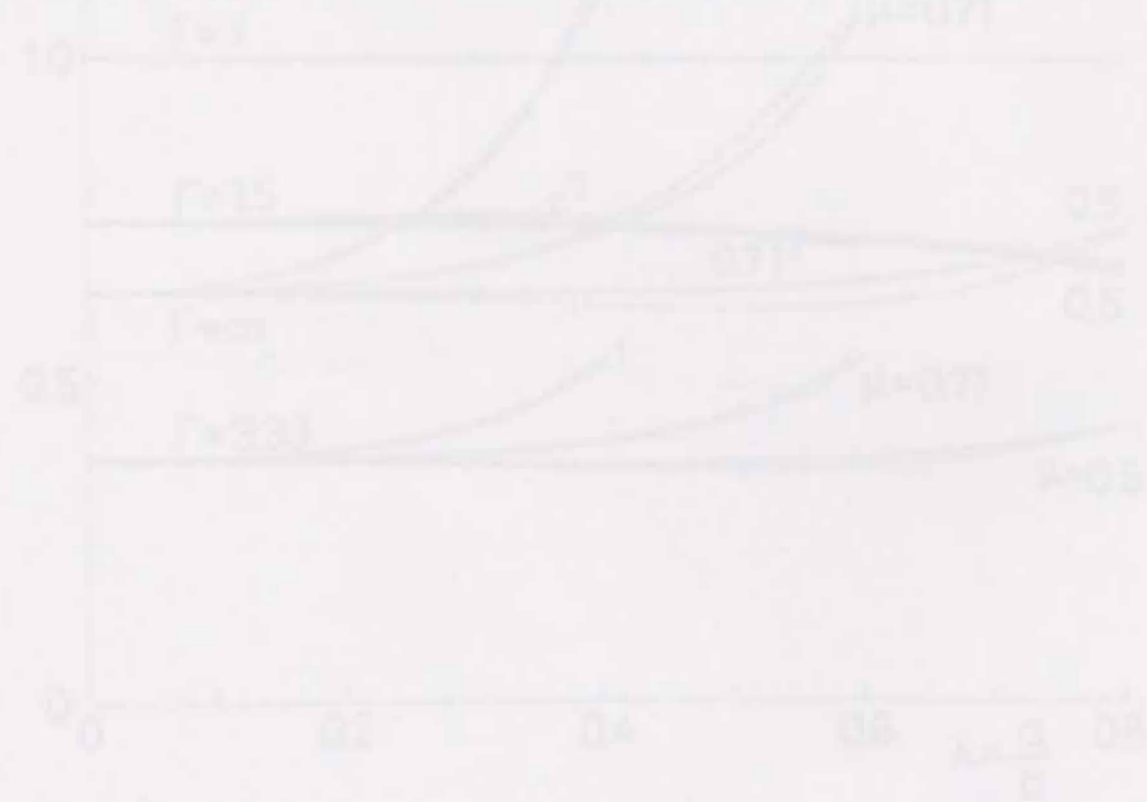


図3.15 一個の円形介在物をもつ無限体の引張りにおける
 介在物境界の各応力成分最大値と Γ の関係

分最大値は Γ が増すとともに増す傾向がある。一方 μ の影響は、各応力成分とも Γ の値によって異なり、かなり複雑である。さらにこれらの応力成分最大値を生ずる位置 θ も介在物の剥離や破壊を考える上で重要である。問題(a), (b) のいずれの応力成分についても θ はパラメータの広い範囲で $\lambda \rightarrow 0$ の場合の式 (3.16) の括弧内に示した値をとる (ただし $\kappa_I = \kappa_{II} = 1.8$)。

図3.20(a), (b) は、種々の Γ について μ をパラメータとし λ を横軸に取って引張剛性係数 $C (= E^* / E_0)$ を示したものである。問題(a), 問題(b) ともに $C - \lambda$ 曲線は μ によってかなり変動する。しかし、 λ の代わりに (3.35) で定義される介在物面積率 f を横軸に取って C を示せば図3.21(a), (b) を得る。明らかに $\Gamma = 1$ のとき μ, f に関係なく $C = 1$ であり、 Γ の増加とともに、 C は単調に増大する。また $C - f$ 曲線の μ による変動は小さく、 $0.5 \leq \Gamma \leq 2$ の範囲では特にそうである。従って C は μ にあまり関係なく、ほぼ Γ と f だけの関数と考えてよい。これは介在物がランダムに分布する場合も統計的にそうなる可能性を示唆するように思われる。



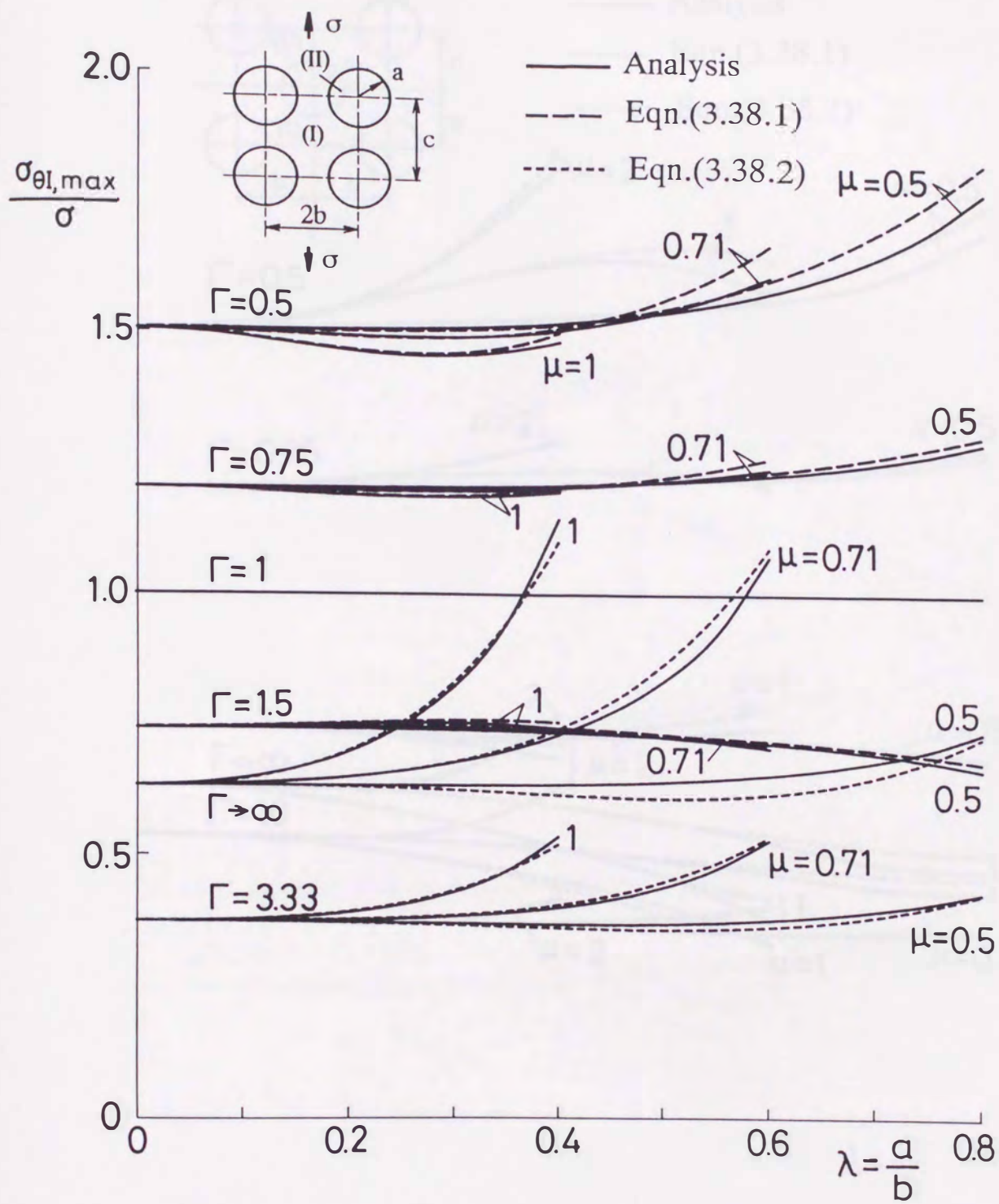


图3.16(a) $\sigma_{\theta I, \max} / \sigma$ (长方形配置円形介在物群)

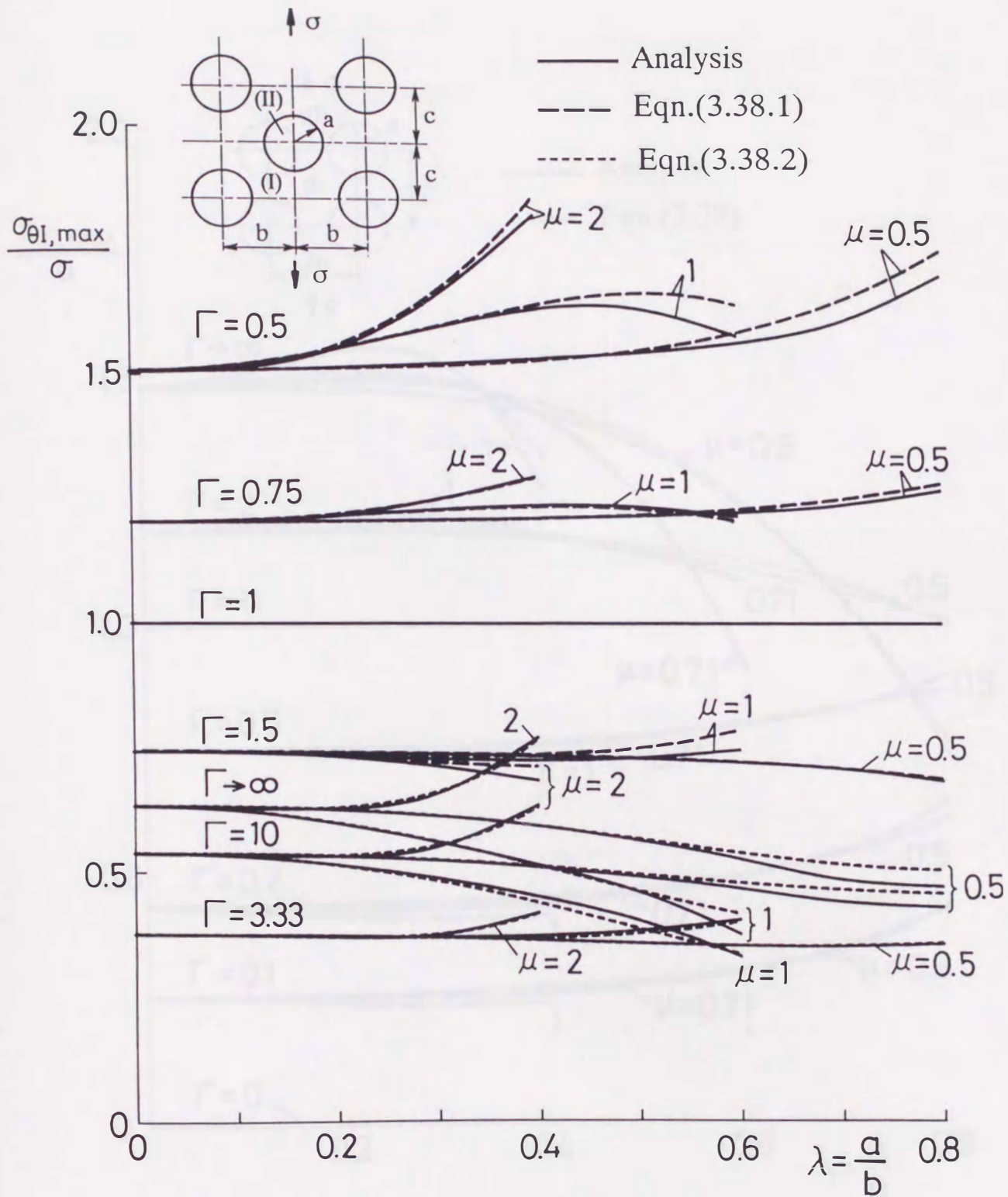


图3.16(b) $\sigma_{\theta I, \max} / \sigma$ (千鳥配置円形介在物群)

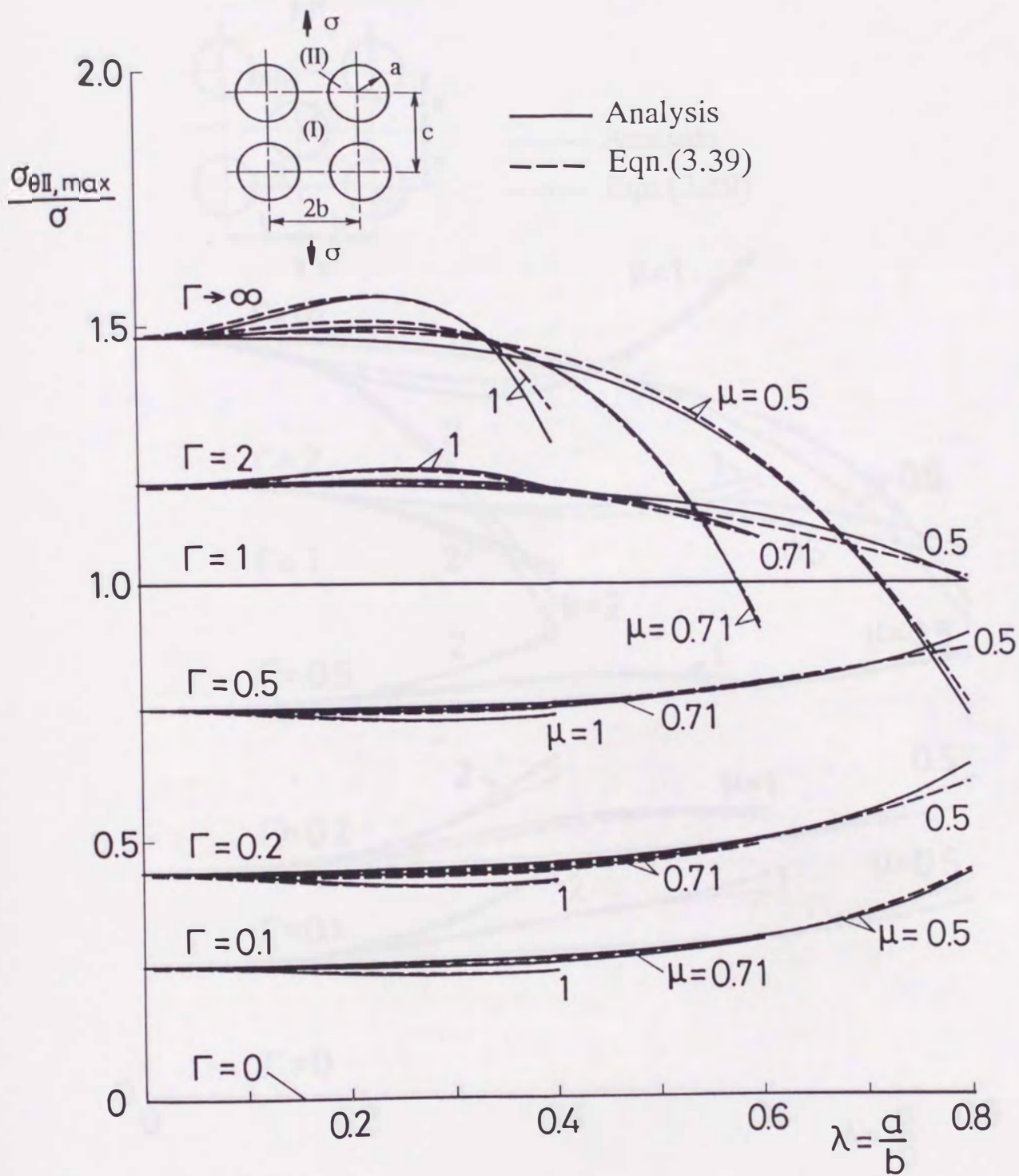


图3.17(a) $\sigma_{\theta II, \max} / \sigma$ (长方形配置圆形介在物群)

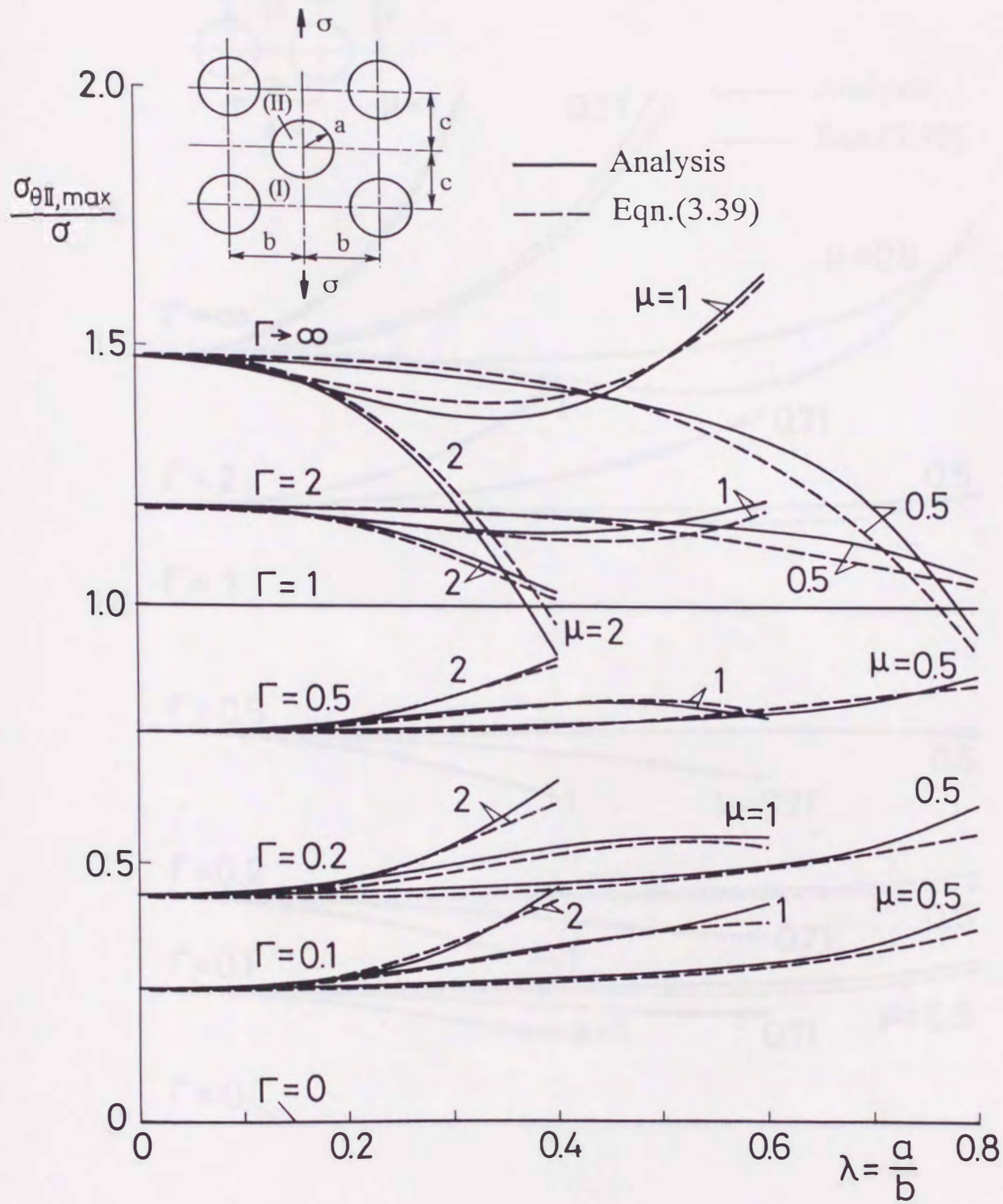


図3.17(b) $\sigma_{\theta II, \max} / \sigma$ (千鳥配置円形介在物群)

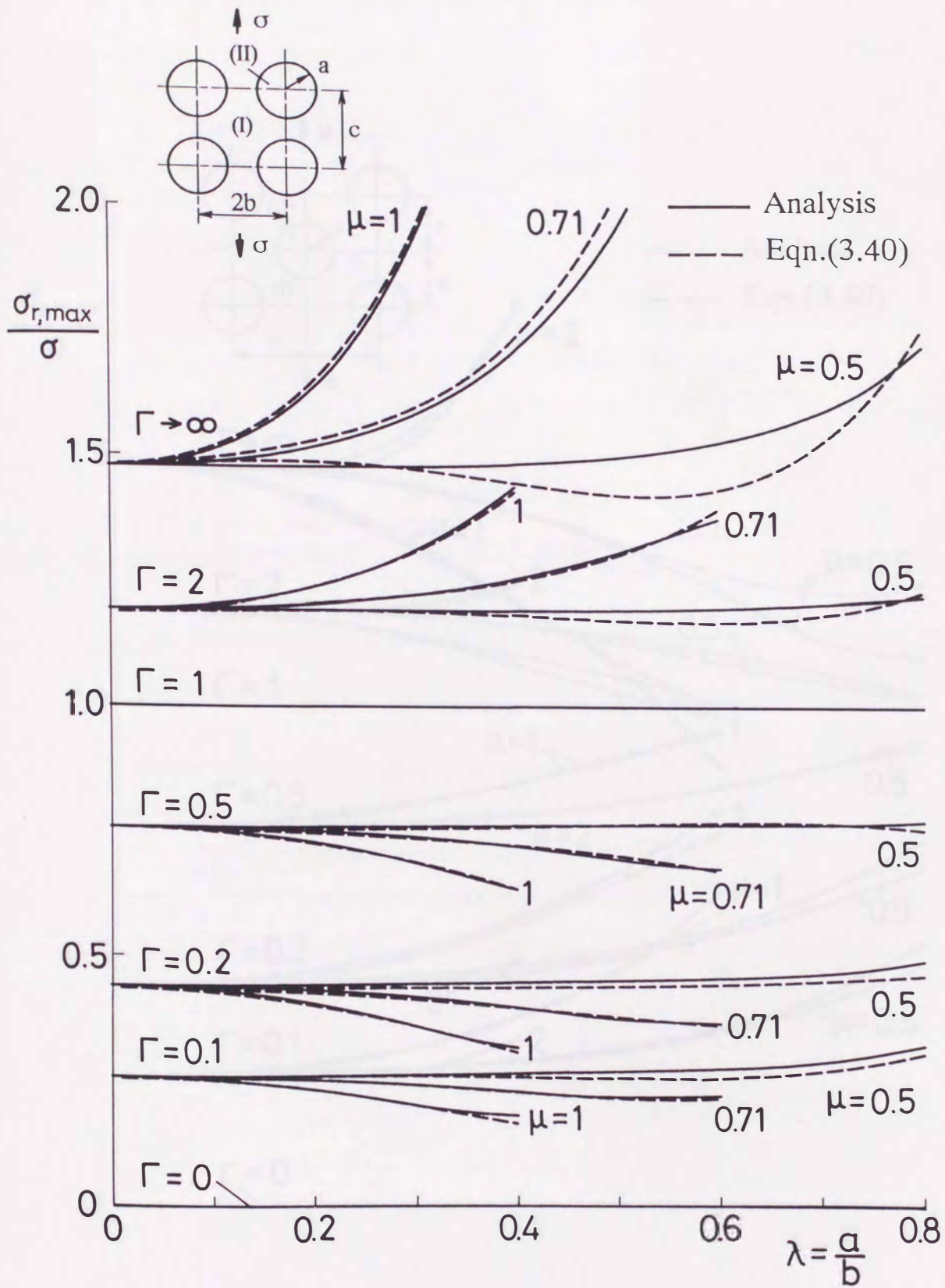


图3.18(a) $\sigma_{r,\max} / \sigma$ (长方形配置圆形介在物群)

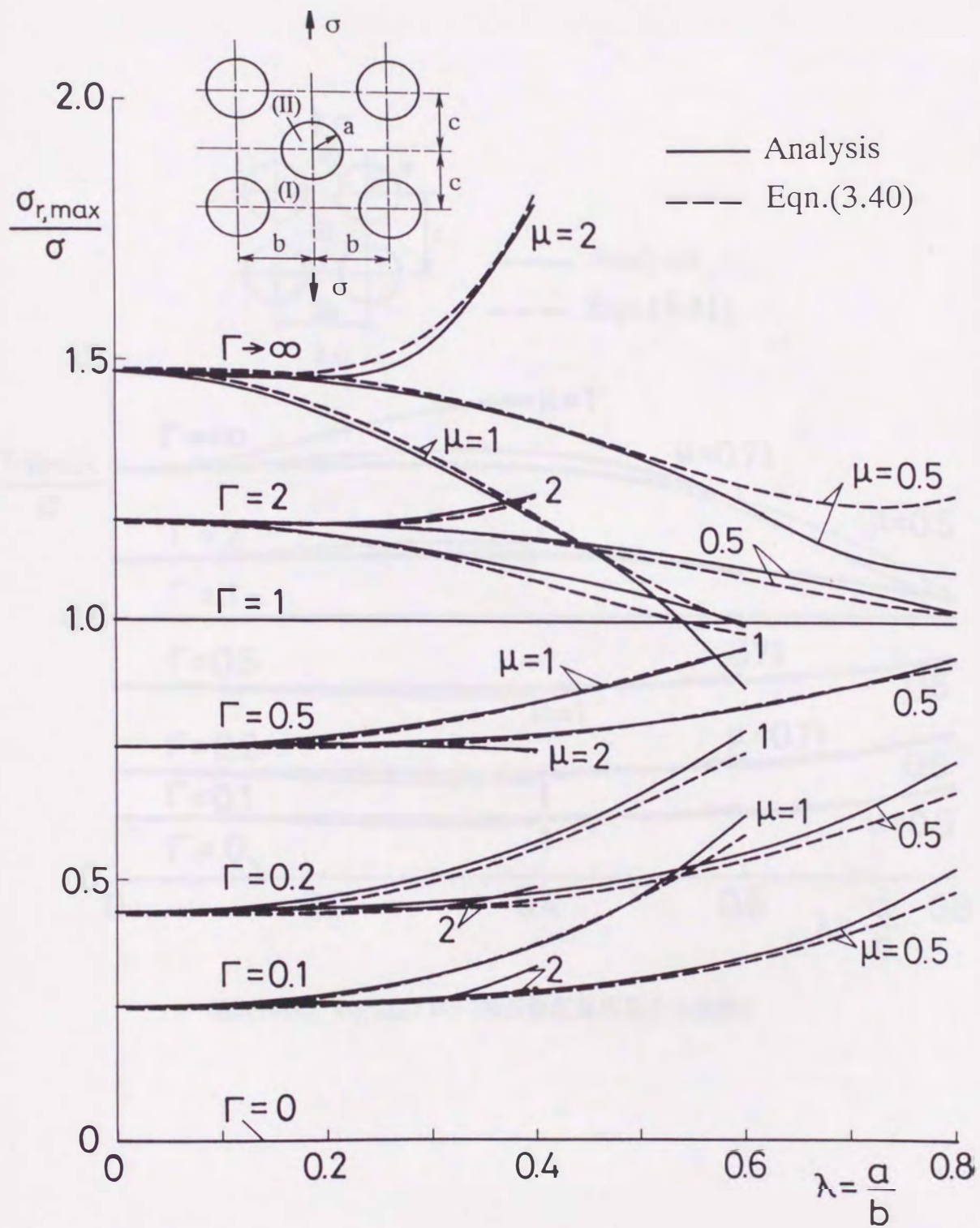


图3.18(b) $\sigma_{r,max}/\sigma$ (千鳥配置円形介在物群)

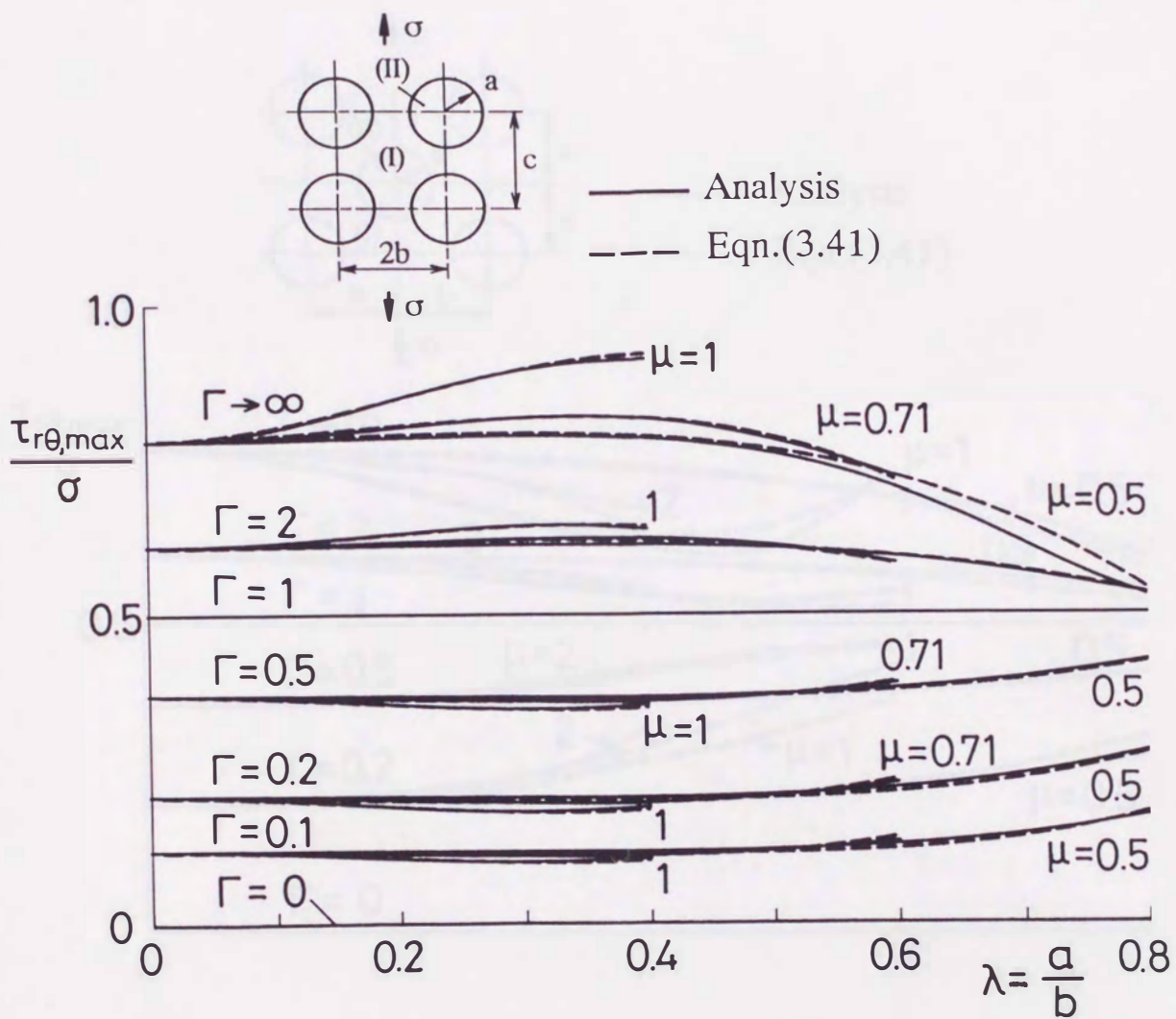


图3.19(a) $\tau_{r\theta, \max} / \sigma$ (长方形配置円形介在物群)

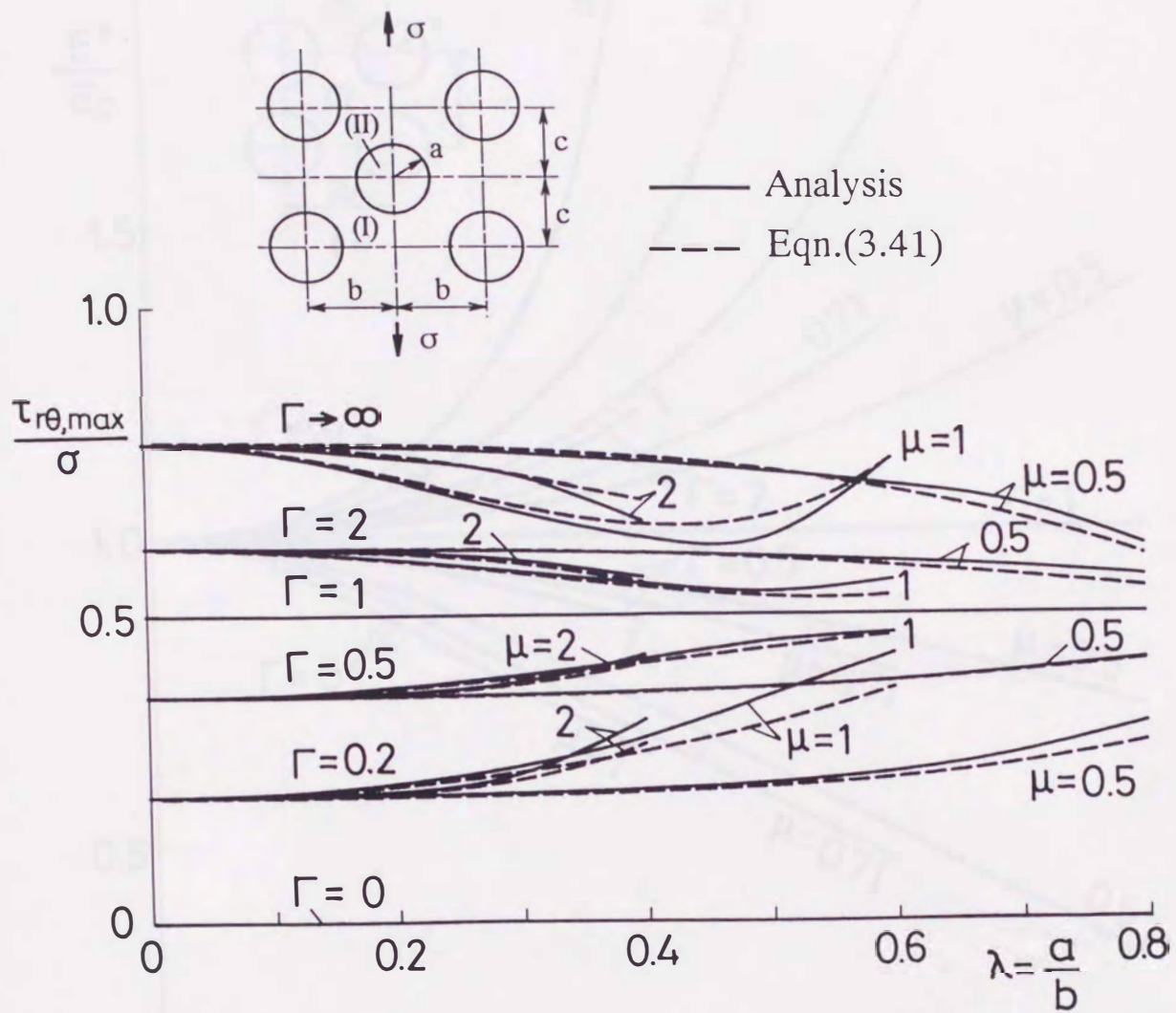


図3.19(b) $\tau_{r\theta, \max} / \sigma$ (千鳥配置円形介在物群)

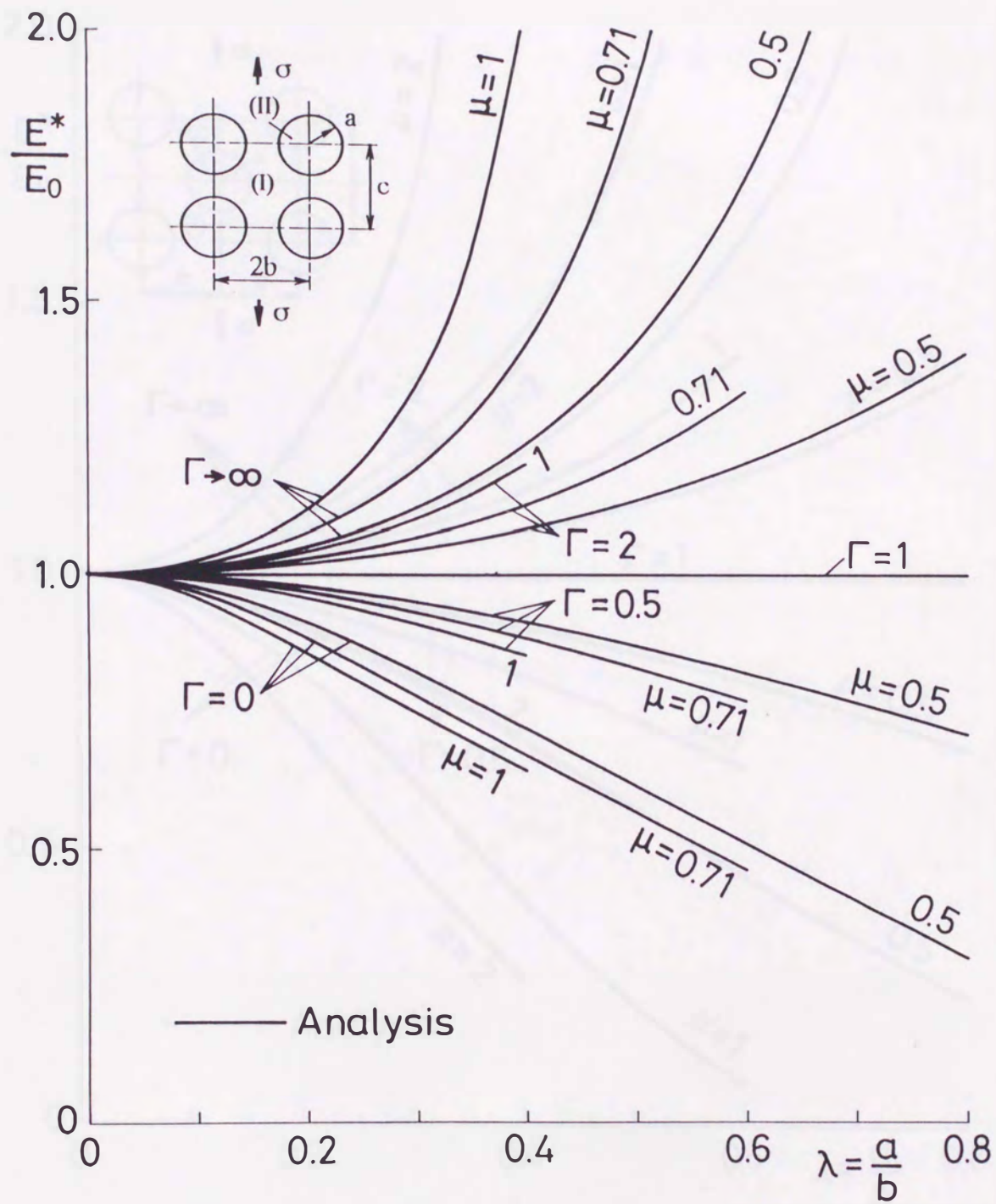


図3.20(a) 種々の Γ, μ に対する E^*/E_0 と λ の関係
(長方形配置円形介在物群)

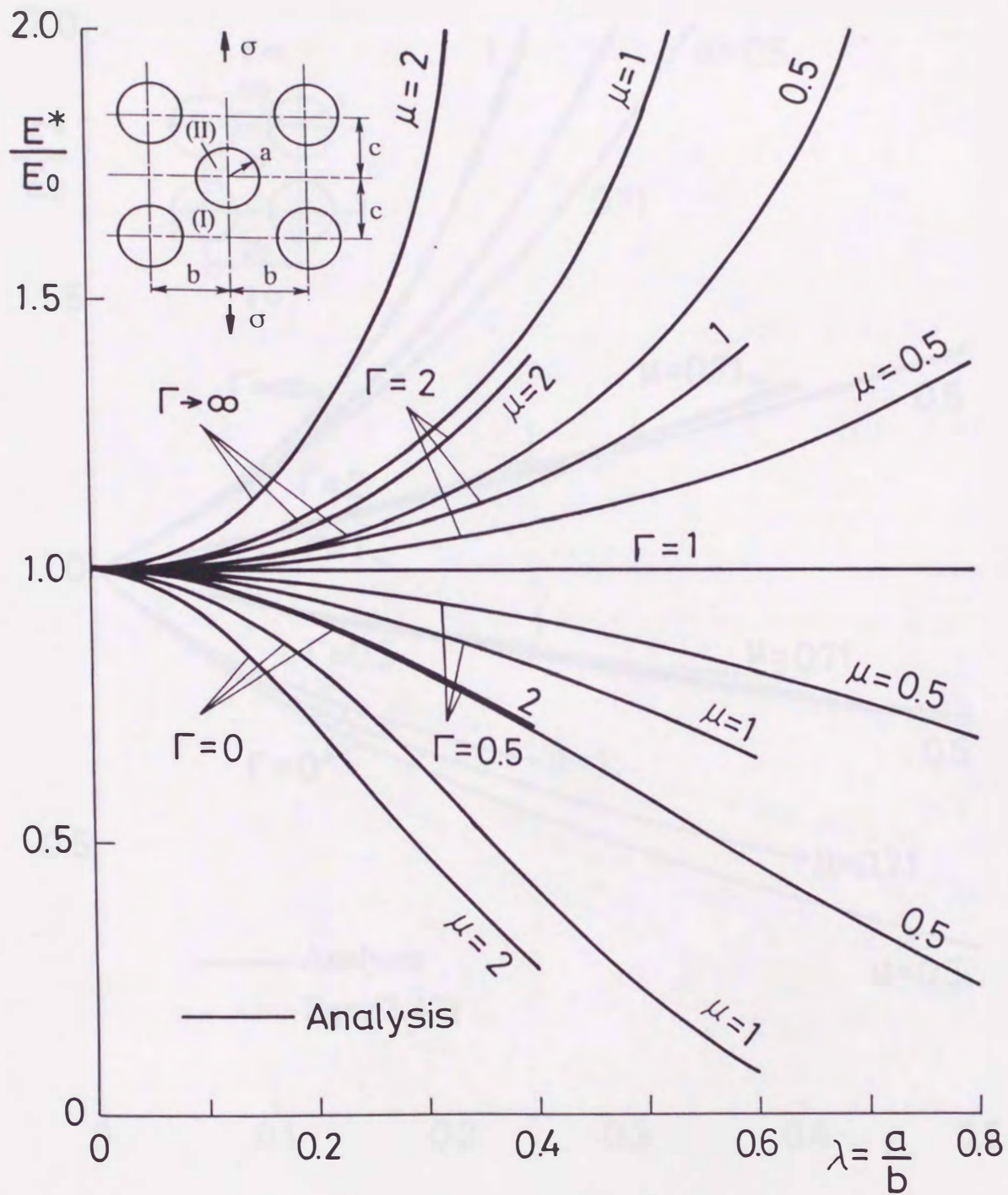


図3.20(b) 種々の Γ , μ に対する E^*/E_0 と λ の関係
(千鳥配置円形介在物群)

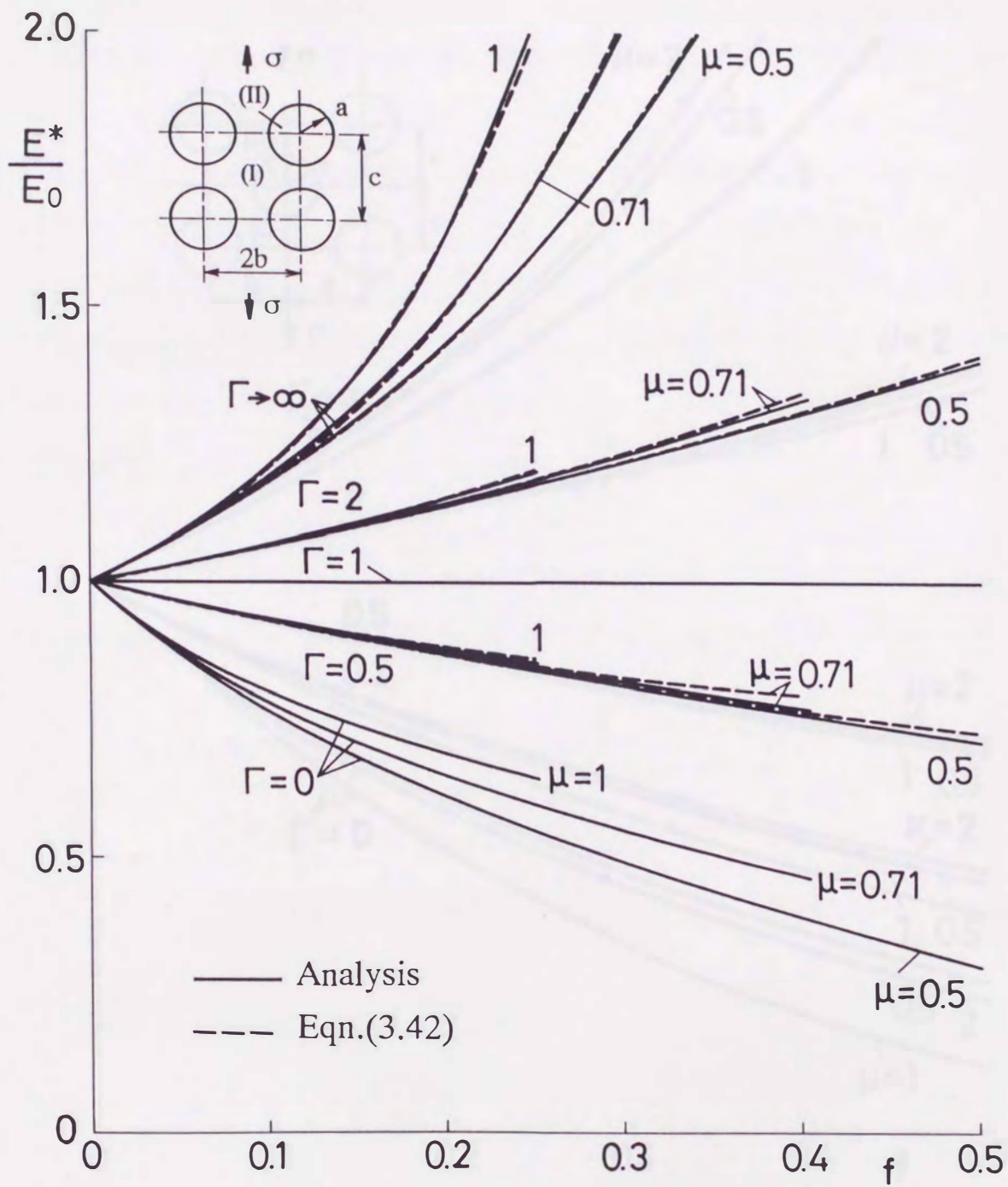


図3.21(a) 種々の Γ, μ に対する E^*/E_0 と f の関係
(長方形配置円形介在物群)

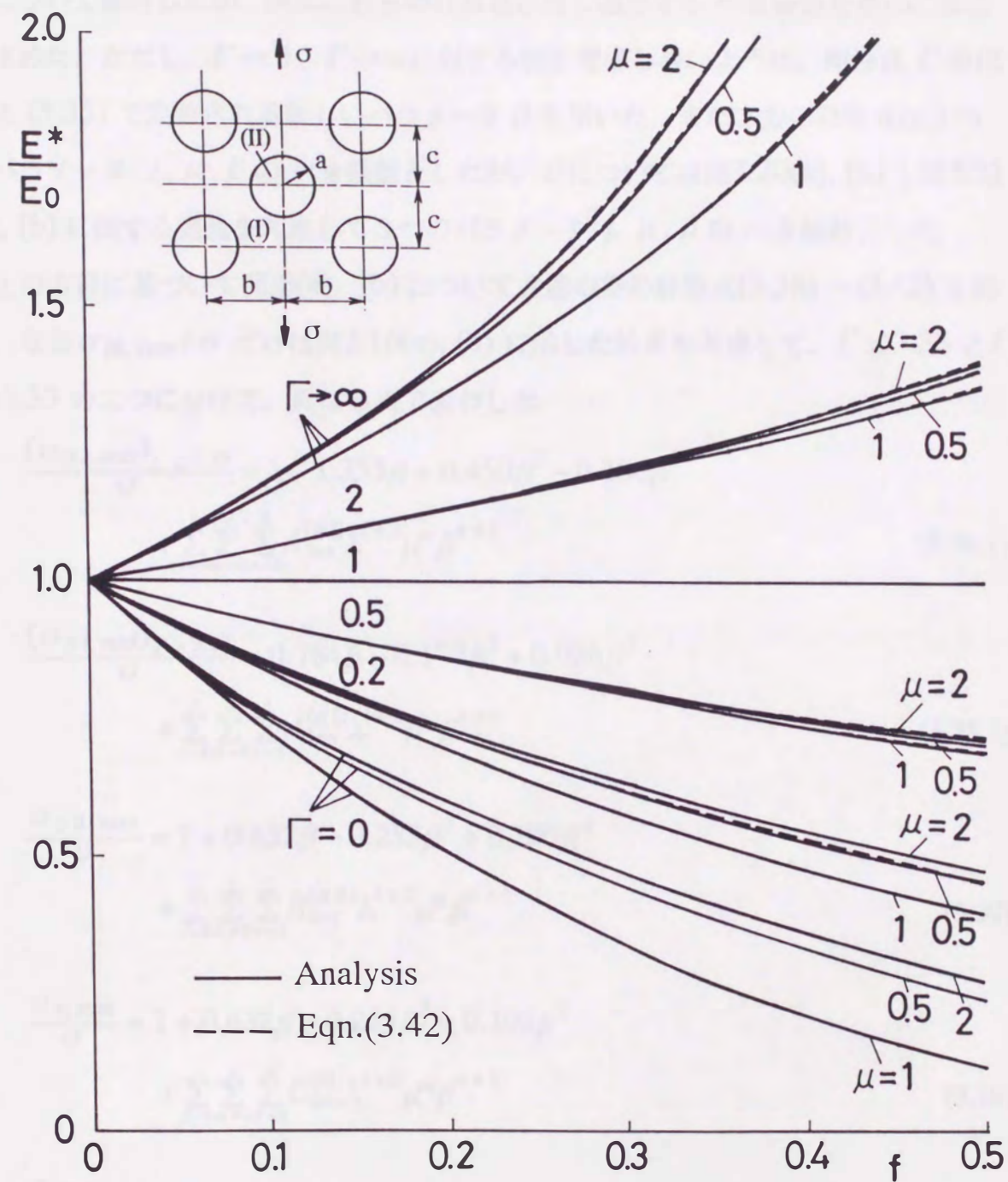


図3.21(b) 種々の Γ, μ に対する E^*/E_0 と f の関係
(千鳥配置円形介在物群)

3.4.3 応力と引張剛性の計算式

前節で述べたように問題(a)では216組、問題(b)では312組のパラメータの組合せについて解析したが、次にこれらの計算値に良く適合するべき級数を最小二乗法で求めた。ただし、 $\Gamma \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow \infty$ に対する値を考慮し易いように、剛性比 Γ の代わりに (3.35) で定義される新しいパラメータ β を用いた。また応力の計算式は3つのパラメータ λ, μ, β のべき級数としたが、 C については図3.20(a), (b)と図3.21(a), (b)に関する議論を考慮して3つのパラメータ f, μ, β のべき級数とした。

上の方針に基づいて問題(a), (b)について共通の型の計算式(3.38) ~ (3.42)を得た。なお $\sigma_{\theta I, \max} / \sigma$ だけは図3.16(a), (b)に示した結果を考慮して、 $\Gamma \leq 3.33$ と $\Gamma \geq 3.33$ の二つに分けて、異なる式で表わした。

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_{\theta I, \max})_{\Gamma \leq 3.33}}{\sigma} &= 1 - 1.353\beta + 0.450\beta^2 - 0.186\beta^3 \\ &+ \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 A_{lmn}^{(\theta I)} \lambda^{l+2} \mu^m \beta^{n+1} \end{aligned} \quad (3.38.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_{\theta I, \max})_{\Gamma \geq 3.33}}{\sigma} &= 0.784\beta - 0.177\beta^2 + 0.026\beta^3 \\ &+ \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 A_{lmn}^{(\theta I)} \lambda^{l+2} \mu^m \beta^{n+1} \end{aligned} \quad (3.38.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta II, \max}}{\sigma} &= 1 + 0.632\beta - 0.255\beta^2 + 0.105\beta^3 \\ &+ \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 B_{lmn}^{(\theta II)} \lambda^{l+2} \mu^m \beta^{n+1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{r, \max}}{\sigma} &= 1 + 0.632\beta - 0.255\beta^2 + 0.105\beta^3 \\ &+ \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 C_{lmn}^{(r)} \lambda^{l+2} \mu^m \beta^{n+1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{r\theta, \max}}{\sigma} &= 0.5 + 0.355\beta - 0.110\beta^2 + 0.034\beta^3 \\ &+ \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 D_{lmn}^{(r\theta)} \lambda^{l+2} \mu^m \beta^{n+1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$C = \frac{E^*}{E_0} = 1 + \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 E_{lmn} f^{l+1} \mu^m \beta^{n+1} \quad (3.42)$$

問題(a), (b)における (3.38.1) ~ (3.42) の係数値をそれぞれ表3.9(a), 表3.9(b)に示す.

問題(a)では (3.38.1) ~ (3.41) は $\Gamma \geq 0.1$ ($1 \geq \beta \geq -0.82$), $0.5 \leq \mu \leq 1$ および $\lambda \leq 0.8 \lambda_0$ (λ_0 は図3.5 の場合の λ) の範囲で, (3.42) は上と同じ Γ, μ の範囲で $f \leq 0.5$ について十分正確な値を与える. 問題(b) では (3.38.1) ~ (3.41) は $\Gamma \geq 0.1$ ($\beta \geq 0.82$), $0.5 \leq \mu \leq 2$ および $\lambda \leq 0.8 \lambda_0$ (λ_0 は図3.6 の場合の λ) の範囲で, (3.42) は上と同じ Γ, μ の範囲で $f \leq 0.5$ について十分正確な値を与える. また, これらの式による値と解析値の差の平均値を表3.9(a) および表3.9(b) の最下行に与えておいた. すなわち平均誤差は, 応力の式について問題(a) で 0.5%~1.6%, 問題(b) で 1.6%~4.0%, C の式については問題(a) で 0.7%, 問題(b) で 0.2%程度に過ぎない.

また, 図3.16(a)~3.19(b), 図3.21(a), (b) に (3.38) ~ (3.42) による値を破線あるいは点線 (図3.16 (a), (b) のみ) で示し, 解析値と比較してある. 問題(a), (b) とも C の (3.42) は特に精度が良く, 実用上の厳密値を与えると考えてよい.

問題	式	平均誤差 (%)		最大誤差 (%)	
		問題(a)	問題(b)	問題(a)	問題(b)
問題(a)	(3.38.1)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.2)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.3)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.4)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.5)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.6)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.7)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.8)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.9)	0.5	1.6	1.5	3.2
	(3.38.10)	0.5	1.6	1.5	3.2
問題(b)	(3.38.1)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.2)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.3)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.4)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.5)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.6)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.7)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.8)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.9)	1.6	4.0	3.2	8.0
	(3.38.10)	1.6	4.0	3.2	8.0
平均誤差		0.7	0.2	1.5	0.2

表3.9(a) (3.38.1) ~ (3.42) の係数値 (長方形配置円形介在物群)

$l m n$	$A_{lmn}^{(\theta I)}$		$B_{lmn}^{(\theta II)}$	$C_{lmn}^{(r)}$	$D_{lmn}^{(r, \theta)}$	E_{lmn}
	$\Gamma \leq 3.33$	$\Gamma \geq 3.33$				
0 0 0	1.2948	-1.2854	1.4546	1.4450	1.1117	2.0589
0 0 1	-1.6104	2.0518	1.1522	0.5909	0.6242	-0.8024
0 0 2	-0.5625	-0.8790	-1.1405	-1.6122	-0.7172	0.0943
0 1 0	-4.7716	3.6089	-4.8532	-3.9715	-4.1178	-0.2307
0 1 1	6.0359	-7.3948	-3.1357	-0.1315	-1.8006	0.3997
0 1 2	-12.412	3.6284	1.8258	3.6060	2.1257	0.4611
0 2 0	5.9693	-3.0149	8.1232	6.3844	5.3214	0.1698
0 2 1	-12.134	7.7954	4.6377	1.6585	2.4801	-0.2563
0 2 2	17.484	-3.4218	-3.5688	-4.6452	-2.6551	-0.2848
1 0 0	-4.8397	2.0349	-5.9514	-4.0919	-2.7323	-1.2596
1 0 1	4.8402	-1.5647	-4.1905	0.8589	-0.8574	6.9545
1 0 2	4.7696	2.6416	4.7999	7.8027	2.7775	3.3552
1 1 0	12.036	-7.3672	17.715	0.2741	10.098	4.3904
1 1 1	-23.215	1.5483	10.490	-16.344	1.0640	-12.319
1 1 2	36.004	-9.8864	-8.7380	-17.952	-8.9310	-14.805
1 2 0	-10.399	2.6796	-28.196	-1.4401	-11.570	-2.9091
1 2 1	43.370	7.9188	-14.671	11.867	-2.6520	12.054
1 2 2	-53.111	3.3136	16.310	17.464	9.5186	5.5577
2 0 0	1.2503	0.6806	4.6826	4.4106	1.4482	4.0085
2 0 1	0.4800	-1.0021	1.9275	2.1925	0.3735	-17.935
2 0 2	-3.1575	-0.5814	-5.9325	-5.7180	-2.1866	-6.2726
2 1 0	2.8909	-5.7271	-16.859	-8.0530	-5.0538	-12.784
2 1 1	8.1863	8.8925	-1.6926	-5.4908	0.0261	51.634
2 1 2	-48.548	-2.2813	19.112	9.4985	6.7061	18.974
2 2 0	-11.434	15.976	24.825	14.080	2.8519	7.2670
2 2 1	-17.320	-21.414	1.4852	19.816	0.2498	-30.743
2 2 2	73.360	13.605	-30.127	-5.7475	-5.5296	18.910
平均誤差 [%]	1.6	1.1	0.8	1.0	0.5	0.7

表3.9(b) (3.38.1) ~ (3.42) の係数値 (千鳥配置円形介在物群)

$l m n$	$A_{lmn}^{(\theta I)}$		$B_{lmn}^{(\theta II)}$	$C_{lmn}^{(r)}$	$D_{lmn}^{(r, \theta)}$	E_{lmn}
	$\Gamma \leq 3.33$	$\Gamma \geq 3.33$				
0 0 0	2.7966	0.4610	3.8340	3.4215	2.7997	1.9864
0 0 1	-6.5293	-2.6378	2.4196	2.2530	1.6458	-0.5765
0 0 2	2.8987	3.7098	-1.9422	-2.0473	-1.2223	0.1901
0 1 0	-8.3745	-1.4372	-7.6861	-5.9277	-6.5033	0.0253
0 1 1	17.043	6.3568	-5.5481	-4.6422	-3.8809	-0.1984
0 1 2	-5.3930	-8.7575	1.9154	2.1717	2.1915	0.1166
0 2 0	3.4580	0.7992	3.4727	2.3062	2.5866	-0.0113
0 2 1	-6.9820	-3.1490	2.2454	1.8060	1.5569	0.0854
0 2 2	1.6925	3.7658	-1.1000	-1.0221	-0.9276	-0.0392
1 0 0	-4.9090	-28.840	-7.1113	-1.1239	-1.0084	0.2097
1 0 1	-4.9648	79.324	-8.2287	-5.7733	-2.3346	6.3089
1 0 2	24.091	-52.771	1.5921	1.2293	-0.3467	-3.7038
1 1 0	17.778	72.011	12.503	-10.019	0.2411	-0.3669
1 1 1	5.9390	-196.16	19.098	8.2334	4.6514	-8.5739
1 1 2	-66.171	127.40	5.5063	7.2224	4.1210	3.8481
1 2 0	-11.023	-32.372	-11.655	3.3090	-0.6153	0.1656
1 2 1	3.4860	85.618	-9.0956	-3.5912	-2.4721	3.4263
1 2 2	30.372	-54.150	2.2548	-0.9319	-0.9292	-1.7020
2 0 0	-6.1295	21.943	-2.4017	-1.6509	-5.1140	-0.5777
2 0 1	32.099	-56.474	1.4665	6.2413	-2.1625	-2.9757
2 0 2	-34.277	37.641	2.3009	3.0762	2.8980	11.646
2 1 0	7.4438	-55.636	6.2100	11.008	14.245	1.0053
2 1 1	-73.724	139.18	-3.9891	-11.603	5.7197	7.7313
2 1 2	100.39	-90.200	-11.265	-13.027	-9.7360	-16.160
2 2 0	2.6645	29.981	7.1805	-0.5461	-5.8939	-0.4554
2 2 1	30.636	-68.245	3.2633	8.2207	-0.7596	-2.8784
2 2 2	-64.172	42.509	-3.0784	1.5834	3.2589	7.0315
平均誤差 [%]	4.0	1.6	1.8	1.7	1.9	0.2

3.5 結 論

(1) 長方形配置 (問題(a)) および千鳥配置 (問題(b)) の円孔群や円形介在物群をもつ無限体の引張りを適当な単位領域を考え、合力と変位による境界条件を用いて精度良く解析した。介在物の剛性と配列をあらわすパラメータの種々の組合せについて計算を行ない、介在物 (穴) の周縁の各応力成分の最大値とそれらの位置、および介在物をもつこれらの弾性体の引張剛性係数 $C = E^* / E_0$ を求めた。

(2) 円孔群の場合、問題(a) の σ_{\max} は引張方向に直角な直径の端 A ($\theta = 0^\circ$) に生ずる。問題(b) の σ_{\max} は引張方向に直角な直径の端 A ($\theta = 0^\circ$) に生ずることが多いが、斜め方向の穴との干渉が大きい場合には σ_{\max} はその穴に近い点 B ($\theta \neq 0^\circ$) に移動する。穴の存在は弾性体の引張剛性を低下させる。特に問題(b) の場合の引張剛性係数 C は穴の面積率 f に強く依存し、荷重方向の穴の間隔にはあまり関係しないことを明らかにした。さらに、 σ_{\max} 、応力集中係数 α と C の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。以上の円孔群の場合の結果は平面応力と平面ひずみに関係なく、 E_1 、 ν_1 などの弾性定数にも無関係である。

(3) 円形介在物群の場合については、介在物境界における各応力成分の最大値とそれらの位置に及ぼす介在物の剛性や配列の影響を詳細に調べた。また介在物の存在が弾性体の引張剛性に及ぼす影響を検討し、引張剛性係数 C が介在物の剛性と介在物の面積率によってほぼ定まることを示した。さらに、各応力成分最大値と引張剛性の解析値に良く適合する計算式をべき級数表示の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。

参考文献

- (1) Bailey, R. and Hicks, R., J. Mech. Engng. Sci., 2 (1960), 143.
- (2) Isida, M., Int. J. Frac. Mech., 7 (1971), 301.
- (3) 石田・野口, 日本機械学会論文集, 48A (1972), 888.
- (4) 石田, 日本機械学会論文集, 48A (1972), 1239.