

分布するだ円孔群, 介在物群, き裂群をもつ弾性体の 応力と変形

井川, 秀信

<https://doi.org/10.11501/3106971>

出版情報 : 九州大学, 1995, 博士 (工学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :

分布するだ円孔群、介在物群、き裂群をもつ
弾性体の応力と変形

井 川 秀 信

①

分布するだ円孔群，介在物群，き裂群をもつ
弾性体の応力と変形

平成 7 年

井川 秀 信

目次

第1章 序論	1
1.1 まえがき	1
1.2 これまでの研究	1
1.3 本論文の目的と内容	2
参考文献	5
第2章 一列に分布するだ円孔群・き裂群や介在物群をもつ無限体	6
2.1 緒言	6
2.2 孔列に直角方向の引張りの解析と応力の計算式	7
2.2.1 解析方法	7
2.2.1.1 応力関数	7
2.2.1.2 座標変換とだ円孔縁の境界条件	9
2.2.1.3 孔縁の応力	11
2.2.1.4 $N \rightarrow \infty$ の場合	12
2.2.2 解析結果	13
2.2.3 最大応力, 最大応力拡大係数の計算式	19
2.2.3.1 任意形のだ円孔	19
2.2.3.2 特別な場合	20
2.3 孔列方向の引張りの解析と応力の計算式	22
2.3.1 解析方法	22
2.3.1.1 応力関数とだ円孔縁の境界条件	22
2.3.1.2 孔縁の応力	24
2.3.2 解析結果	25
2.3.3 最大応力, 最大応力拡大係数の計算式	29
2.3.3.1 任意形のだ円孔	29
2.3.3.2 特別な場合	29

2.4	一列に分布する孔群, 介在物群, き裂群の問題に成立つ	
	応力の漸近特性	31
2.5	種々の荷重を受ける共線き裂群および平行き裂群における	
	応力拡大係数の漸近特性とそれらの計算式	35
2.5.1	取扱った問題と内容の概要	35
2.5.2	種々の問題の最大応力拡大係数の結果と計算式	36
	(a) 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断 と古典曲げ	36
	(b) 無限板の平行き裂群の引張り	38
	(c) 半無限板の平行き裂群の引張り	40
	(d) 無限板の平行き裂群の面内せん断	40
	(e) 無限体の平行き裂群の面外せん断	43
	(f) 無限板の平行き裂群の古典曲げ	43
2.6	結論	46
	参考文献	48
第3章	長方形配置及び千鳥配置の円孔群や円形介在物群をもつ	
	無限体の引張り	49
3.1	緒言	49
3.2	解析方法	50
3.2.1	複素応力関数	50
3.2.2	介在物周縁の境界条件	53
3.2.3	解析領域外周の境界条件と未知係数の決定	54
	3.2.3.1 長方形配置の円形介在物群 (問題(a))	54
	3.2.3.2 千鳥配置の円形介在物群 (問題(b))	56
3.2.4	介在物が非常に小さい場合	57
3.3	円孔群の場合 ($r = 0$) の応力, 引張剛性とそれらの計算式	58
3.3.1	計算した物理量と結果の精度	58

3.3.2	円孔縁応力, 応力集中係数とその計算式	60
3.3.2.1	円孔縁応力	60
3.3.2.2	応力集中係数とその計算式	65
3.3.3	円孔による引張剛性の低下とその計算式	70
3.4	円形介在物群の結果と応力・引張剛性の計算式	77
3.4.1	解析の概要と結果の精度	77
3.4.2	応力と引張剛性に及ぼすパラメータの影響	79
3.4.3	応力と引張剛性の計算式	94
3.5	結論	98
	参考文献	99
第4章	長方形配置及び千鳥配置のき裂群をもつ無限体の引張り	100
4.1	緒言	100
4.2	解析方法	101
4.3	数値計算結果と検討	103
4.3.1	計算した物理量と結果の精度	103
4.3.2	数値計算結果	104
4.3.3	F_I , Φ / Φ_0 , E^* / E_0 の計算式	113
4.4	結論	116
	参考文献	117
第5章	長方形配置及び千鳥配置のだ円孔群やだ円形介在物群をもつ無限体の引張り	118
5.1	緒言	118
5.2	だ円孔群の場合	119
5.2.1	解析方法	119
5.2.2	計算結果	122
5.2.2.1	精度の検討	122

5.2.2.2	だ円孔無次元応力とその計算式	-----	123
5.2.2.3	引張剛性係数とその計算式	-----	129
5.3	だ円形介在物群の場合	-----	135
5.3.1	解析方法	-----	135
5.3.2	だ円形介在物群の結果と引張剛性の計算式	-----	139
5.3.2.1	精度の検討と引張剛性	-----	139
5.3.2.2	引張剛性係数とその計算式	-----	140
5.4	結論	-----	149
	参考文献	-----	150
	第6章 結言	-----	151
	謝辞	-----	153

第1章 序 論

1.1 まえがき

近年、複合材料に代表されるように高比強度、高比剛性等の優れた機能を有する材料が各種機械や構造物に多く利用され、軽量化が進む一方、設計上の強度評価はますます厳しいものが要求されている。一般に、構造物中に存在する穴や介在物等の欠陥、複合材料の母材中に分散する粒子や強化繊維は材料の強度・剛性に多大な影響を及ぼす。設計で特に問題となるのは、穴や介在物による応力集中とそれらの存在による材料の弾性係数の評価である。

穴や介在物は応力集中の要因であり、材料の破損、破壊はその部分から起こることが多い。このため構造物を安全に使用するためには、それらの応力を求め、応力集中の度合を調べる必要がある。また弾性係数は材料の機械的特性を判断する上で、評価すべき重要な基本特性の一つである。複合材料等の材料設計では、介在物の体積含有率等をパラメータとして材料の弾性係数を近似的に求める手法が用いられている。しかし複数個の穴や介在物の場合は、単独の場合に比べ解析困難なものが多く、いまだ未解決なものが数多く残されている。従って、これらの問題を解析し、材料の強度・剛性評価を行なうことは設計上の重要課題の一つである。

1.2 これまでの研究

弾性体における穴や介在物に関する解析は、種々の解析法によって数多くの研究が行なわれている。その中でも複数個の穴や介在物に関する解析例についてのみ概観する。

先ず、二円孔をもつ無限板の引張りについては Jeffery⁽¹⁾、Weinel⁽²⁾、鶴戸口⁽³⁾、Ling⁽⁴⁾らによる解析があり、一列円孔群あるいは二列円孔群をもつ無限体の引張りについては Howland⁽⁵⁾、⁽⁶⁾、Schulz⁽⁷⁾らによる解析がある。

石田は、Laurent 展開法によるだ円孔の一般表示式を与え、これと摂動法を併用することにより、一列円孔群や任意個の一列き裂群および平行き裂群をもつ無限体の引張りを解析した^{(8)~(11)}。

西谷は、だ円孔群やだ円形剛体介在物群について応力集中の近似計算法を開発し、穴や介在物の応力を求めている⁽¹²⁾。また後に体積法を用いて一列だ円孔群の引張りを解析し、だ円孔の種々の形状・大きさに対する応力集中係数の資料を与えている⁽¹³⁾。

Saito は正方形配置の円孔群をもつ無限体の任意方向引張りを解析した⁽¹⁴⁾。R. Bailey・R. Hicks は正方形配置および千鳥正方形配置円孔群をもつ無限体の引張りについて適当な単位領域から解析し、孔縁の応力や板の剛性について比較的精度の高い結果を与えている⁽¹⁵⁾。W. R. Delameter・G. Herrmann・D. M. Barnett は積分方程式による解法を用いて長方形配置のき裂群を持つ無限体の引張りを解析し、応力拡大係数と剛性に関する結果を与えている⁽¹⁶⁾。

八田・村上・石田は体積法を用いて任意に配置する二個のだ円形介在物をもつ無限体の引張りを解析し、だ円形介在物の形状・大きさ、母材と介在物の剛性比が異なる場合の応力干渉を明らかにしている⁽¹⁷⁾。

内山・八田・村上は体積法を用いて正方形配置および千鳥正方形配置だ円形介在物群をもつ無限体の引張りを近似的に解析し、だ円形介在物の形状・大きさ、母材と介在物の剛性比を系統的に変えたときの材料の弾性係数の変化に対する結果と実用的な近似式を与えている⁽¹⁸⁾。

1.3 本論文の目的と内容

前述のように円孔群やき裂群の場合を除いてはだ円孔や介在物の数が小数あるいは規則的に配列された無限個の場合が解かれているにすぎず、それら以外の場合の応力や変形はまだ明らかにされていない。

本論文は、複数個のだ円孔、介在物あるいはき裂が典型的な分布をする場合を考え、これらを解析して結果を考察することにより材料の強度・剛性評価のための指針を与えることを目的とする。

本論文は6章から構成されている。

第2章では、穴が一方向に分布する簡単なモデルとして一列等間隔に分布する等しいだ円孔群をもつ無限体が孔列方向あるいは孔列に直角方向の引張りを取扱った。

解析には だ円孔縁自由条件を満たす Laurent 展開法と摂動法を組合せ、他の解法の難点を克服し任意の孔数の問題の解析を可能にした。そして き裂から円孔までを含む だ円孔の種々の形状・大きさと種々の個数に対する解を示し、孔の形状、寸法、配置のパラメータが各孔縁の応力に及ぼす影響を調べる。また、解析結果の実用化を考慮し、本章の だ円孔群の結果や従来のき裂群の多くの場合の結果をもとに孔数が2個から無限個までの場合の最大応力・最大応力拡大係数を精度良く求めることができる計算式を与える。

第3章から第5章までは、穴、介在物や き裂が各方向に分布する典型的なモデルとして長方形配置及び千鳥配置の穴群、介在物群、き裂群をもつ無限体の引張りを取扱った。これらの問題では応力状態の二方向周期性を厳密に満たす単位領域法を用いて高精度に解析し、数値結果に精度良く当てはまる計算式を実用に便利な形で与える。

第3章では、円孔群や円形介在物群の場合を取扱った。解析には、一個の穴あるいは介在物を含む適当な単位領域を考え、その縁の境界条件を完全に満たす複素応力関数の Laurent 展開を導いた。そして、単位領域外周の境界条件を合力と変位を用いて応力状態の二方向周期性を満足する形で表わし、これらによって展開の未知係数を定める方法をとった。幾何的および力学的パラメータが穴や介在物の周縁の各応力成分の最大値とそれらの位置に及ぼす影響や弾性体の引張剛性に及ぼす介在物の影響を検討する。

第4章では、き裂群の場合を取扱った。解析には、適当な単位領域を考え、前章の Laurent 展開の代わりに き裂縁の境界条件を厳密に満たす固有関数展開を用い、前章と同様の合力と変位による境界条件から未知係数を定めた。そして応力拡大係数、き裂開口変位、き裂の存在による引張剛性の低下を詳細に調べる。

第5章では、だ円孔群、だ円形介在物群の場合について、だ円孔縁応力および、弾性体の引張剛性に及ぼす だ円孔や だ円形介在物の影響について検討する。だ円孔群の解析には、だ円孔縁自由条件を満たす Laurent 展開法と第3章で用いたと同じ合力と変位に基づく境界分割法を組合せて行なった。また だ円形介在物群の解析には体積力法を用いた。

第6章は結言であり、本研究の成果を総括して述べた。

[1] Jeffrey, G. G., *Phil Trans Roy Soc Lond. Ser. A*, 251 (1952), 267.
[2] Woinowski, E., *ZAMM*, 11 (1931), 238.
[3] Woinowski, E., *ZAMM*, 11 (1931), 244-245.
[4] Inge, G. R., *J. Appl. Phys.*, 19 (1918), 57.
[5] Inghed, R. C. E., *Proc. Roy Soc Lond. Ser. A*, 144 (1934), 471.
[6] Inghed, R. C. E., *Phil Mag. Ser. 7*, 1 (1926), 107.
[7] Sells, R. L., *Advanced Applied Mechanics*, 1 (1959), 111-147, Academic Press.
[8] *ZAMM*, 24 (1944), 32.
[9] Inghed, R. C. E., *Mechanics of Fracture I*, 2 (1971), 15, North-Holland.
[10] *ZAMM*, 25 (1945), 13.
[11] *ZAMM*, 27 (1947), 205.
[12] *ZAMM*, 31 (1951), 200.
[13] Inghed, R. C. E., *Mechanics of Fracture I*, 2 (1971), 15, North-Holland.
[14] Sells, R. L., *ZAMM*, 27 (1947), 111.
[15] Inghed, R. C. E., *J. Appl. Phys.*, 61 (1997), 143.
[16] DeGroot, W. R., Housner, G. and Burton, D. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 41 (1973), 74.
[17] *ZAMM*, 28 (1948), 144.
[18] *ZAMM*, 31 (1951), 215.

参考文献

- (1) Jeffery, G. B., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **221** (1921), 265.
- (2) Weinel, E., *Z. AMM*, **17** (1937), 276.
- (3) 鶴戸口, *応用数学力学*, **1-1** (1947), 14 ; **1-2** (1947), 61.
- (4) Ling, C. B., *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 77.
- (5) Howland, R. C. J., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **148** (1935), 471.
- (6) Howland, R. C. J. and Knight R. C., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **238** (1939), 357.
- (7) Schulz, K. J., *Advances in Applied Mechanics*, **I** (1939), 121 および 167, Academic Press.
- (8) 石田, *日本機械学会論文集*, **21** (1955), 502.
- (9) Isida, M., *Mechanics of Fracture 1*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1973), 56.
- (10) 石田, *日本機械学会論文集*, **25** (1959), 118.
- (11) 石田, *日本機械学会論文集*, **43** (1977), 825.
- (12) 西谷, *日本機械学会誌*, **71** (1968), 209.
- (13) Nisitani, H., *Mechanics of Fracture 5*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1978), 1.
- (14) Saito, H., *ZAMM*, **37** (1957), 111.
- (15) Bailey, R. and Hicks, R., *J. Mech. Engng. Sci.*, **2** (1960), 143.
- (16) Delameter, W. R., Herrmann, G. and Barnett, D. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **42** (1975), 74.
- (17) 八田・村上・石田, *日本機械学会論文集*, **51A** (1985), 1057.
- (18) 内山・八田・村上, *日本複合材料学会誌*, **11-6** (1985), 275.

第2章 一列に分布するだ円孔群・き裂群や介在物群をもつ無限体

2.1 緒言

本章では一列等間隔に分布する等しいだ円孔をもつ無限体が孔列に直角方向あるいは孔列方向の引張りを受ける場合を解析した。これらの問題は円孔やき裂の場合を除いては、孔数が2個あるいは無限個（周期だ円孔群）の場合が解かれているにすぎない。そして後者の周期だ円孔の解析は孔数が非常に多い場合の中央の穴の応力だけを与える。従って最大応力が中央の穴に生ずる孔列に直角方向の引張りでは、最大応力は孔数が増すとともに増大するので、周期だ円孔群の結果は穴の形と大きさを固定した場合の最大応力の上限值を与えることになる。しかし孔列方向の引張りでは、最大応力が孔列の両端の穴に生ずるので、従来の結果は穴が3個以上の場合の最大応力に対して何等の情報も提供していない。

本章では、まず、き裂から円孔までを含むだ円孔の種々の形状・大きさと種々の個数に対する結果を与え、これらのパラメータが各孔縁の応力、特に最大応力、き裂の場合は最大応力拡大係数に及ぼす影響を調べた。さらに中央の穴の応力が孔数 N の逆数 $1/N$ とほぼ直線関係にあり、最外側の穴の応力が $1/(N-0.5)$ とほぼ直線関係にあることを見出した。そしてこれを理論的に証明し、この性質が一般に無限体内に一列等間隔に分布する任意形の穴や介在物周縁の応力にも成立つことを示した。さらにこれらの法則を用いることにより、本章のだ円孔群の結果や従来なき裂群の多くの場合の結果に精度よく当てはまる計算式を与えた。

2.2 孔列に直角方向の引張りの解析と応力の計算式

2.2.1 解析方法

2.2.1.1 応力関数

図2.1に示すように、広い板の中に主軸長 $2a$, $2b$ の N 個の等しいだ円孔が主軸 $2a$ の方向に等間隔に一系列に配列しており、遠方で主軸 $2b$ の方向に一様応力 σ が作用する問題を考える。ただし応力集中が大きい場合が特に重要なので $a \geq b$ と仮定する。また解析はだ円孔だけでなく $b \rightarrow 0$ の場合に相当するき裂にも有効な形で行なった。

本問題では左から数えて穴に番号 $1, 2, \dots, N$ を付し、基準座標系 $O X_0 Y_0$ および、各穴の中心に原点をもつ局所座標系 $O_k X_k Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) を図のように定める。基準座標系 $O X_0 Y_0$ は他の座標系と平行であれば原点をどこにとってもよい。

隣接するだ円孔間の距離を $2d$ とし、無次元直角座標系 (x_k, y_k) と無次元複素座標系 z_k を次のように定める。

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{X_k}{d}, \quad y_k = \frac{Y_k}{d} \\ z_k &= x_k + iy_k \\ &(k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \tag{2.1}$$

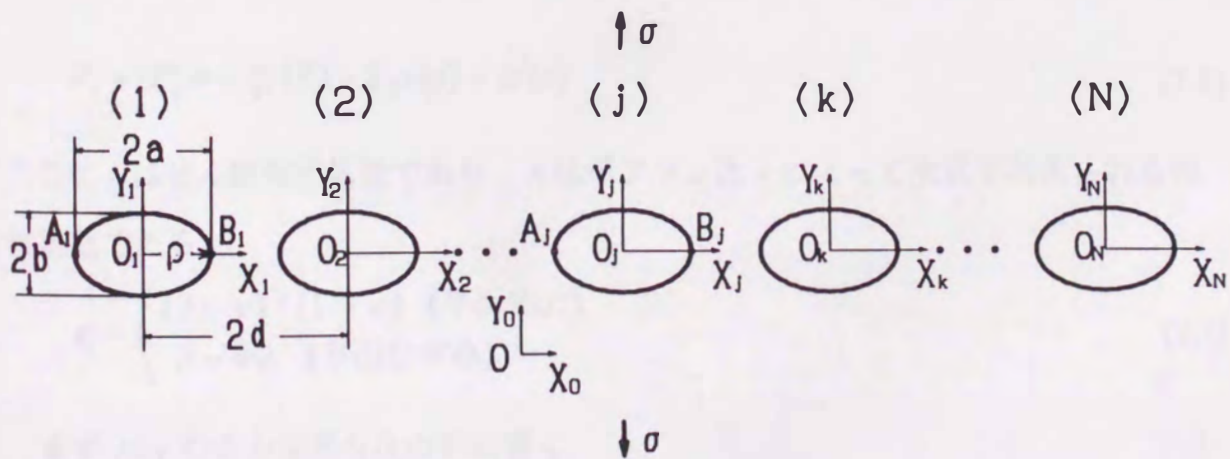


図2.1 だ円孔列に直角方向の引張り

穴の形を表わすパラメータ ε , R と穴の大きさを表すパラメータ λ を次式で定義する.

$$\varepsilon = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\rho}{a}}, \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\lambda = \frac{a}{d} \tag{2.2}$$

ここに ρ は穴の長軸端における曲率半径で, $\rho/a = 1$ は円孔, $\rho/a \rightarrow 0$ はき裂に相当する.

解析には Laurent 展開法を用いた^(2,3).

一般に Airy の応力関数は2つの複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ によって次の形に書くことができる.

$$F(x,y) = \text{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \psi(z)]$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \tag{2.3}$$

これによる応力, 変位, 合力の成分は次のように与えられる.

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \text{Re} [\varphi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi''(z)] \tag{2.4}$$

$$2G(u - iv) = \kappa \bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z} \varphi'(z) - \psi'(z) \tag{2.5}$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z} \varphi'(z) - \psi'(z) \tag{2.6}$$

ここに G はせん断弾性係数であり, κ はポアソン比 ν によって次式で与えられる弾性定数である.

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \tag{2.7}$$

まず Airy の応力関数を次の形に書く.

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^N F_k \tag{2.8}$$

F_0 は遠方の応力状態に対応するもので, 複素関数 $\varphi_0(z_0)$, $\psi_0(z_0)$ を用いて次の形に

書かれる。

$$F_0 = \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_0 \varphi_0(z_0) + \psi_0(z_0)] \quad (2.9)$$

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{4} z_0, \quad \psi_0(z_0) = \frac{1}{4} z_0^2$$

また $F_k (k \geq 1)$ は だ円孔 (k) の内部だけに特異性をもち遠方では応力を与えない応力関数で、 x_k 軸に関する対称性を考えて次の展開で表わす。

$$F_k = \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_k \varphi_k(z_k) + \psi_k(z_k)]$$

$$\varphi_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,k} \bar{z}_k^{-(n+1)}$$

$$\psi_k(z_k) = -D_{0,k} \log z_k + \sum_{n=1}^{\infty} D_{n,k} z_k^n$$

$$(k=1, 2, \dots, N) \quad (2.10)$$

2.2.1.2 座標変換と だ円孔縁の境界条件

次に、(2.10) における未知係数を境界条件から定めることになる。まず前述の F_0 と $F_k (k \geq 1)$ の形を仮定した経過によって、全応力関数 F は遠方の応力条件を自動的に満たしている。従って残る境界条件として、すべての だ円孔の縁が自由縁となるための条件だけを考えればよい。

さて全応力関数 F の各要素 $F_k (k \geq 1)$ はそれぞれ異なる座標 z_k で表わされている。従って、特定の穴 (j) の境界条件を考えるためには、これらのすべてを穴の中心 O_j に原点をもつ座標 z_j だけで表わす必要がある。その手順と結果は次のようになる。

まず遠方の応力を与える応力関数 F_0 は基準座標系 $O X_0 Y_0$ に平行な座標系 $O_j X_j Y_j$ についても同じ形をもつ筈であり、 z_j によって次の形に書かれる。

$$F_0 = \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_j \varphi_{0,j}(z_j) + \psi_{0,j}(z_j)]$$

$$\varphi_{0,j}(z_j) = \frac{1}{4} z_j, \quad \psi_{0,j}(z_j) = \frac{1}{4} z_j^2 \quad (2.11)$$

また $F_k (k \geq 1)$ については局所座標の関係

$$z_k = z_j - 2(k-j)$$

を用いて, z_j で表わす. その結果を (2.11) とともに (2.8) に用いれば全応力関数 F は z_j による次の Laurent 展開に書き直すことができる.

$$\begin{aligned}
 F &= \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_j \Phi_j(z_j) + \Psi_j(z_j)] \\
 \Phi_j(z_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_{n,j} \bar{z}_j^{-(n+1)} + M_{n,j} z_j^{n+1}) \\
 \Psi_j(z_j) &= -D_{0,j} \log z_j + \sum_{n=1}^{\infty} D_{n,j} \bar{z}_j^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} K_{n,j} z_j^{n+2}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

上式には z_j の正べき項が新たに現われるが, それらの係数 $M_{n,j}$, $K_{n,j}$ は最初に仮定した関数 (2.10) の係数 $G_{n,k}$, $D_{n,k}$ と次の関係がある.

$$\begin{aligned}
 M_{n,j} &= \frac{\delta_0^n}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N e_{n,j}^{p,k} G_{p,k} \\
 K_{n,j} &= \frac{\delta_0^n}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (a_{n,j}^{p,k} D_{p,k} + c_{n,j}^{p,k} G_{p,k})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここに記号 $\sum_{k \neq j}^N$ は $k = j$ の場合を除き $k = 1$ から N まで総和することを意味する. そして δ_0^n はクロネッカのデルタであり, 右辺の係数 $a_{n,j}^{p,k}$ 等は次式で与えられる定数である.

$$\begin{aligned}
 a_{n,j}^{0,k} &= \frac{1}{(n+2)(2k-2j)^{n+2}} \\
 a_{n,j}^{p,k} &= (-1)^p \binom{n+p+1}{n+2} \frac{1}{(2k-2j)^{n+p+2}} \quad (p \geq 1) \\
 c_{n,j}^{p,k} &= (-1)^p \binom{n+p+2}{n+2} \frac{1}{(2k-2j)^{n+p+2}} \\
 e_{n,j}^{p,k} &= (-1)^{p+1} \binom{n+p+1}{n+1} \frac{1}{(2k-2j)^{n+p+2}}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

さて応力関数の Laurent 展開が だ円孔を自由縁とする場合に, 係数間に成立すべき関係が石田によって求められた^(2,3). z_j で表わされた上の表示(2.12) についてこの条件を書くと次のようになる.

$$\begin{aligned}
D_{2n, j} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (P_{2p}^{2n} K_{2p, j} + R_{2p}^{2n} M_{2p, j}) \\
G_{2n, j} &= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (Q_{2p}^{2n} K_{2p, j} + S_{2p}^{2n} M_{2p, j}) \\
D_{2n+1, j} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+4} (P_{2p+1}^{2n+1} K_{2p+1, j} + R_{2p+1}^{2n+1} M_{2p+1, j}) \\
G_{2n+1, j} &= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+4} (Q_{2p+1}^{2n+1} K_{2p+1, j} + S_{2p+1}^{2n+1} M_{2p+1, j})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ここに右辺の係数 P_{2p}^{2n} 等は だ円の形 ε の関数である。

2.2.1.3 孔縁の応力

前項の議論はすべての穴について成立つ必要があるから、(2.13) と (2.15) で $j = 1, 2, \dots, N$; $n = 0, 1, \dots$ とおいた諸式を連立に解いて、Laurent 展開 (2.12) の未知係数を定める。その際摂動法を用いた⁽⁴⁻⁶⁾。すなわち全ての未知係数を $\lambda = a/d$ のべき級数として仮定し、これらを上述の条件式に代入して得た関係式を適当な順序で用いることにより、仮定したべき級数の展開係数を低次から高次へと逐次求めた。

さて穴 (j) の縁の接線応力を $\sigma_{t, j}$ 、法線応力 $\sigma_{n, j}$ とすれば

$$\frac{\sigma_{t, j} + \sigma_{n, j}}{\sigma} = \frac{\sigma_{x, j} + \sigma_{y, j}}{\sigma} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_j'(z_j)] \tag{2.16}$$

となる。ただし、 z_j としては だ円孔 (j) の縁上の値をとるものとする。本解析では法線応力 $\sigma_{n, j} = 0$ の条件が厳密に満たされているので、上式はまた孔縁の接線応力 $\sigma_{t, j}/\sigma$ を与えることになる。そして (2.12) で与えられる $\Phi_j'(z_j)$ における係数に上で求めた λ による級数表示を代入して整理すれば、 $\sigma_{t, j}/\sigma$ も λ のべき級数として表わされ、各係数は再び無限級数となるが、これらは厳密に総和することができて、各孔縁上の任意点の接線応力は次のような λ のべき級数として求められる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{t, j}(\beta)}{\sigma} &= D_{j,0}(\beta) + D_{j,2}(\beta)\lambda^2 + D_{j,3}(\beta)\lambda^3 + \dots + D_{j,m}(\beta)\lambda^m \\
& \quad (j = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

ここに β は孔縁上の点を表わすパラメータで、右辺の係数 $D_{j,0}(\beta)$ 等は閉じた形で与えられる。また (2.17) の次数 m は必要なだけいくらでも大きくできるが、ここでは最も収束が悪い円孔の場合でも $\lambda \leq 0.8$ の範囲で信頼できる値を得ることを目

安として、 λ^{43} の項まで求めた。

さて本解析では、自由だ円孔縁の条件と摂動法の使用によって、連立方程式を解くことなく応力の級数表示 (2.17) を与えた。しかもそれらの係数 $D_{j,0}$ 等は閉じた形で厳密に求められる。従って他の解法よりはるかに多くの穴まで有効で、ここでは $N = 14$ まで解析した。

2.2.1.4 $N \rightarrow \infty$ の場合

孔数 N が増すに従って、孔列の両端付近にないすべての穴の応力状態は中央の穴の応力状態に限りなく近づく。従って孔列の両端付近を問題としない限り、 $N \rightarrow \infty$ の極限の場合は (2.12) の展開係数が j に無関係となり、周期だ円孔群として容易に取り扱うことができる。この場合については特別な穴に対する西谷の解析⁽⁷⁾があるが、本解析による同じ場合の応力集中係数 α は、西谷の計算値と有効数字 3 ~ 4 桁まで一致した。

2.2.2 解析結果

この問題では、図2.1に示すように引張方向に直交する孔軸端の点 $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_N, B_N$ に生ずる応力 $\sigma_{A_j}, \sigma_{B_j}$ ($j = 1, 2, \dots, N$)が重要である。

これらの無次元表示としては $\sigma_{A_j}/\sigma, \sigma_{B_j}/\sigma$ を用いるのが簡単であるが、これらはき裂の場合に無限大に発散して不都合である。そこで、き裂までを含む穴の形の全範囲で有限確定値を与える次の S_{A_j}, S_{B_j} を用いた。

$$S_{A_j} = \frac{\sigma_{A_j}}{\sigma_0}, \quad S_{B_j} = \frac{\sigma_{B_j}}{\sigma_0} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\sigma_0 = \text{無限板にだ円孔が一個の場合の最大応力}$$

$$= \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2.18)$$

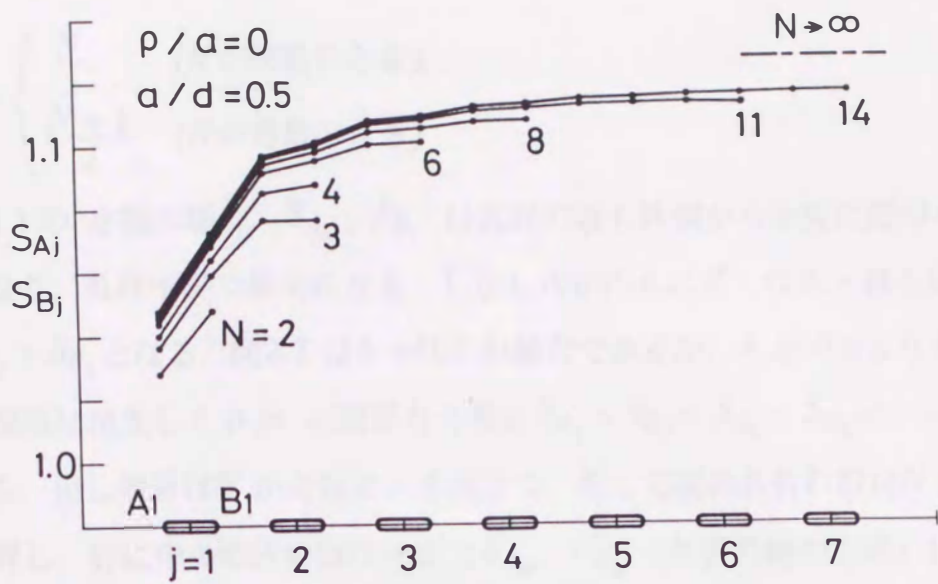
物理的に S_{A_j}, S_{B_j} は $\sigma_{A_j}, \sigma_{B_j}$ が他の穴の存在によって1個の場合の何倍となるかを示す干渉効果係数に相当する。

穴が細長くなった極限にあたるき裂の場合は $\sigma_{A_j}, \sigma_{B_j}$ が σ_0 と同位の無限大となるので S_{A_j}, S_{B_j} は有限確定値となる。そして、これらの無次元応力は次式のように、き裂先端 A_j, B_j における無次元応力拡大係数に一致する⁽¹⁾。

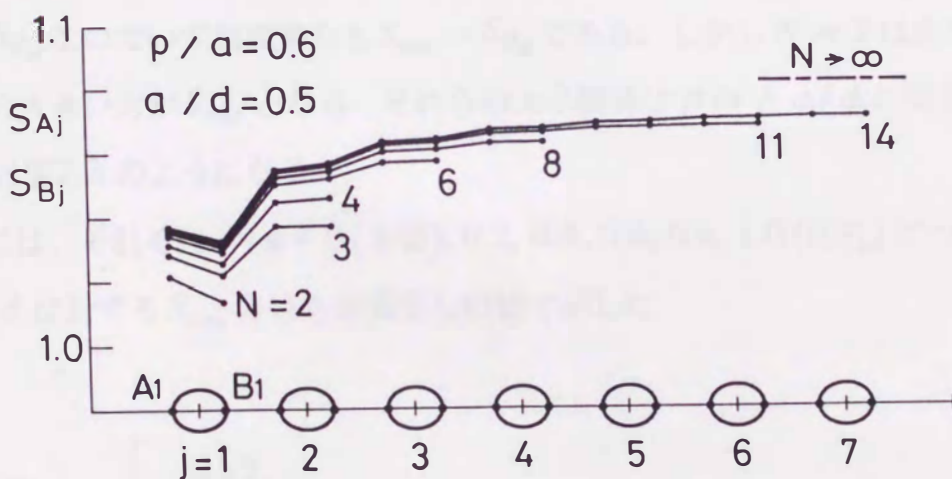
$$(S_{A_j})_{\rho \rightarrow 0} = \frac{K_{I, A_j}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \quad (S_{B_j})_{\rho \rightarrow 0} = \frac{K_{I, B_j}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.19)$$

前項で述べた理論に従って数値計算を行なった。孔数 $N = 2, 3, \dots, 14$ と $N \rightarrow \infty$ のそれぞれについて $\rho/a = 0$ (き裂), 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔)として計算し、各場合について S_{A_j}, S_{B_j} を(2.17)の形のべき級数として与え、これらによって $N, \rho/a$ のそれぞれの場合について $\lambda \leq 0.8$ の範囲で値を求めた。

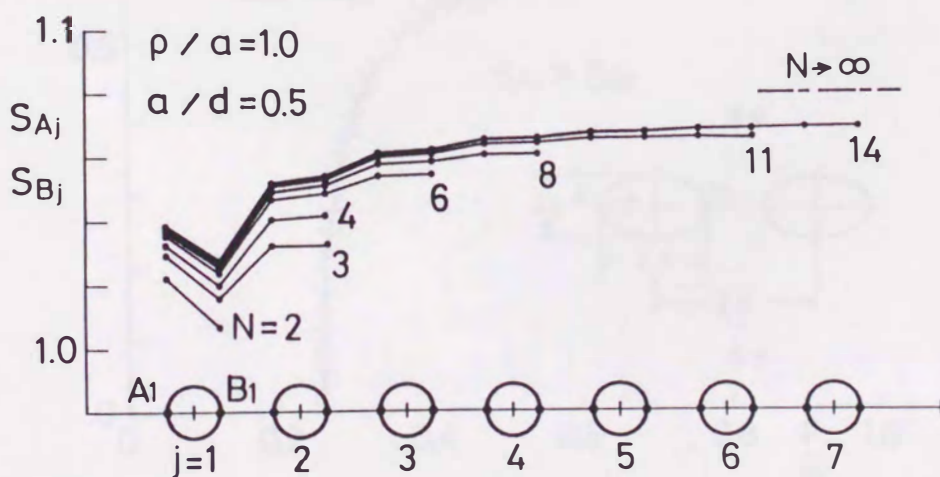
まず、穴の位置と応力の関係を調べるため、代表的な穴の形として $\rho/a = 0$ (き裂), 0.6, 1.0 (円孔)を考え、穴の大きさ $\lambda = a/d = 0.5$ として種々の N に対する各穴の無次元応力 S_{A_j}, S_{B_j} を図2.2に示した。なお、応力状態は孔列中央について左右対称なので、中央から左半分の穴の無次元応力 $S_{A_1}, S_{B_1}, S_{A_2}, S_{B_2}, \dots, S_{A_M}, S_{B_M}$ を示してある。ここで、 S_{A_M}, S_{B_M} は、中央の穴の無次元応力であり、 M は次式で与えられる。



(i) $\rho/a=0$ (き裂), $a/d=0.5$



(ii) $\rho/a=0.6$, $a/d=0.5$



(iii) $\rho/a=1$ (円孔), $a/d=0.5$

図2.2 S_{A_j} , S_{B_j} の N, j による変動

$$M = \begin{cases} \frac{N}{2} & (N \text{が偶数のとき}) \\ \frac{N+1}{2} & (N \text{が奇数のとき}) \end{cases} \quad (2.20)$$

図2.2(i)のき裂の場合、 S_{A_j} 、 S_{B_j} は孔列の最も外側から中央に近づくに従って大きくなり、孔列中央で最大になる。しかし穴が円孔に近くなると最も外側の穴に限り $S_{A_1} > S_{B_1}$ となる。図2.2は $\lambda = 0.5$ の場合であるが、 λ が0.6より大きくなると上の傾向は消失して ρ/a に関係なく常に $S_{A_1} < S_{B_1} < S_{A_2} < S_{B_2} < \dots < S_{A_M} \leq S_{B_M}$ となる。但し等号は N が奇数のとき成立つ。そして図の各折れ線は N が増すとともに上昇し、特に中央の穴の無次元応力 S_{A_M} 、 S_{B_M} (各折れ線の右端)は、2.2.1.4項で述べた解析で求めた $N \rightarrow \infty$ の場合の値(一点鎖線)に漸近する。そして $N \geq 3$ ならば S_{\max} は必ず中央の穴に生ずる。 N が偶数のときは $S_{A_M} < S_{B_M}$ 、奇数のときか $S_{A_M} = S_{B_M}$ なのでいずれの場合も $S_{\max} = S_{B_M}$ である。しかし $N = 2$ は例外で、 S_{A_1} 、 S_{B_1} の大きい方が S_{\max} となる。それらの大小関係は ρ/a と a/d に関係し、詳細な結果は図2.3のようになる。

表2.1には、それぞれ $\rho/a = 0$ (き裂)、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0(円孔)について種々の N 、 a/d に対する S_{\max} の値を括弧なしの値で示した。

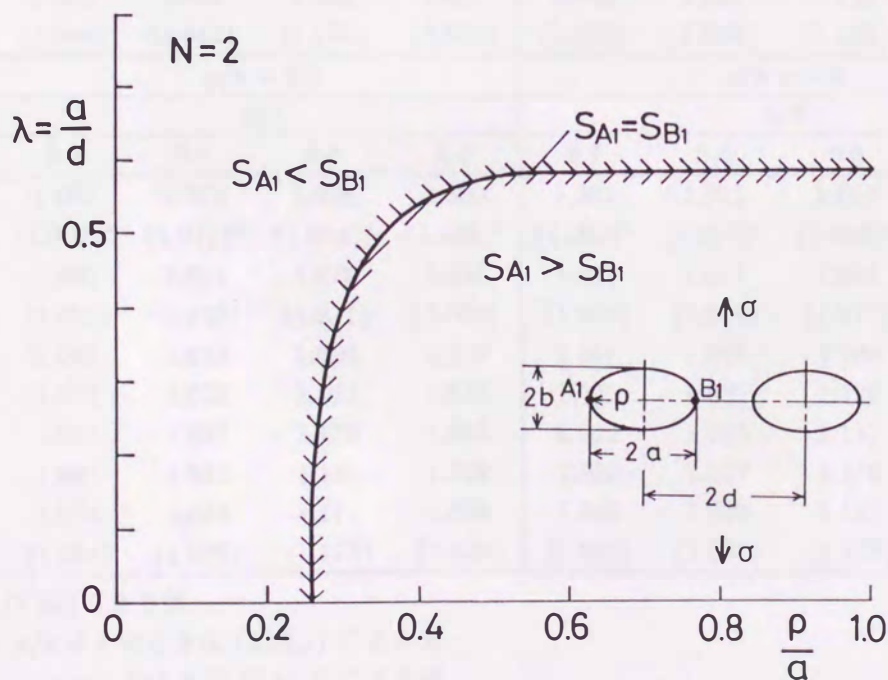


図2.3 $N = 2$ の場合の S_{A_1} と S_{B_1} の大小関係

表2.1 $S_{\max} = \begin{cases} K_{I, \max} / \sigma \sqrt{\pi a} & (\rho = 0, \text{き裂}) \\ \sigma_{\max} / \sigma_0 & (\rho \neq 0), \sigma_0 = \sigma(1 + 2\sqrt{a/\rho}) \end{cases}$

N	$\rho/a = 0$				$\rho/a = 0.2$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	1.006	1.027	1.080	1.229	1.003	1.016	1.051	1.194
	[1.006]	[1.029]	[1.076]	[1.194]	(1.003)*	(1.016)*	(1.050)*	(1.195)*
3	1.010	1.045	1.123	1.321	1.007	1.030	1.088	1.288
	[1.010]	[1.045]	[1.120]	[1.318]	(1.007)	(1.029)	(1.079)	(1.290)
4	1.012	1.052	1.142	1.378	1.008	1.035	1.104	1.347
6	1.013	1.060	1.164	1.438	1.009	1.041	1.124	1.410
9	1.015	1.065	1.179	1.479	1.010	1.045	1.137	1.456
13	1.015	1.068	1.188	1.506	1.010	1.048	1.145	1.485
∞	1.017	1.075	1.208	1.565	1.011	1.053	1.163	1.551
	[1.017]	[1.075]	[1.208]	[1.565]	(1.011)	(1.052)	(1.163)	(1.561)
N	$\rho/a = 0.4$				$\rho/a = 0.6$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	1.003	1.013	1.041	1.228	1.002	1.012	1.037	1.269
	(1.003)*	(1.013)*	(1.045)*	(1.224)*	(1.002)*	(1.011)*	(1.043)*	(1.264)*
3	1.005	1.023	1.079	1.333	1.003	1.018	1.077	1.386
	(1.005)	(1.022)	(1.071)	(1.318)	(1.003)	(1.017)	(1.070)	(1.353)
4	1.005	1.027	1.096	1.401	1.004	1.022	1.095	1.461
6	1.006	1.033	1.116	1.475	1.004	1.027	1.117	1.546
9	1.007	1.037	1.130	1.529	1.005	1.031	1.132	1.608
13	1.007	1.039	1.139	1.565	1.005	1.033	1.141	1.649
∞	1.008	1.044	1.158	1.644	1.006	1.038	1.162	1.742
	(1.008)	(1.044)	(1.160)	(1.642)	(1.006)	(1.039)	(1.165)	(1.732)
N	$\rho/a = 0.8$				$\rho/a = 1.0$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	1.002	1.012	1.036	1.309	1.001	1.011	1.039	1.345
	(1.002)*	(1.011)*	(1.044)*	(1.308)*	(1.002)*	(1.010)*	(1.046)*	(1.352)*
3	1.002	1.014	1.079	1.435	1.001	1.011	1.084	1.478
	(1.002)	(1.013)	(1.071)	(1.392)	(1.000)	(1.010)	(1.077)	(1.442)
4	1.002	1.018	1.098	1.518	1.001	1.015	1.104	1.569
6	1.003	1.023	1.121	1.612	1.001	1.021	1.129	1.671
9	1.003	1.027	1.138	1.682	1.002	1.025	1.147	1.749
13	1.003	1.030	1.148	1.728	1.002	1.027	1.158	1.800
∞	1.004	1.035	1.171	1.834	1.002	1.032	1.182	1.918
	(1.004)	(1.035)	(1.173)	(1.829)	(1.002)	(1.032)	(1.183)	(1.916)

[] : (2.23) による値.

()* : $\rho/a \neq 1$ のときは (2.22.1) による値.

$\rho/a = 1$ のときは (2.24.1) による値.

() : $\rho/a \neq 1$ のときは (2.22.2) による値.

$\rho/a = 1$ のときは (2.24.2) による値.

次に穴の形と大きさを固定し孔数 N を増すときの S_{\max} ($N \geq 3$ の場合は S_{B_M}) の挙動を調べる. 代表的な穴の形として $\rho/a = 0.6$ の場合について $\lambda (=a/d) = 0, 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ に対する S_{\max} の結果を $1/N$ を横軸にとって示すと図2.4 を得る. 図中の縦軸上の値 (白丸) は一列周期だ円孔群 ($N \rightarrow \infty$) の解析値であり, その値は表2.1 に示してある.

これによれば, 同じ λ に対する無次元応力 S_{\max} は, λ が大きくないときは全範囲でほぼ直線上に並ぶ. λ が増すに従って直線性は悪くなるが $\lambda = 0.8$ でも $N \geq 4$ の範囲では実用的な意味で十分直線性が満たされている. さらに, $N \rightarrow \infty$ の S_{\max} に対する縦軸上の値もこれらの直線のほぼ延長上にあることは重要である. 従って, 計算してない $N \geq 15$ に対する S_{\max} も $N = 14$ と ∞ に対する点を結ぶ直線上の点から求めることができる.

図2.4 は $\rho/a = 0.6$ の特別な場合であるが S_{\max} と $1/N$ の直線性は き裂から円孔までを含む全ての ρ/a について成立つ. 図2.5 は $\rho/a = 0, 0.6, 1.0$ の三つについて $\lambda = 0.5$ と 0.8 の場合の S_{\max} と $1/N$ の関係を示す. $\lambda = 0.8$ でも $N \geq 4$ の範囲では, 実用的な意味で直線性があると考えてよい. この S_{\max} と $1/N$ の直線性は λ が小さく N が大きい場合について証明することができる (2.4節). しかし図2.4, 2.5 のように, λ, N のさらに広い範囲にまで直線性が良いことは重要である.

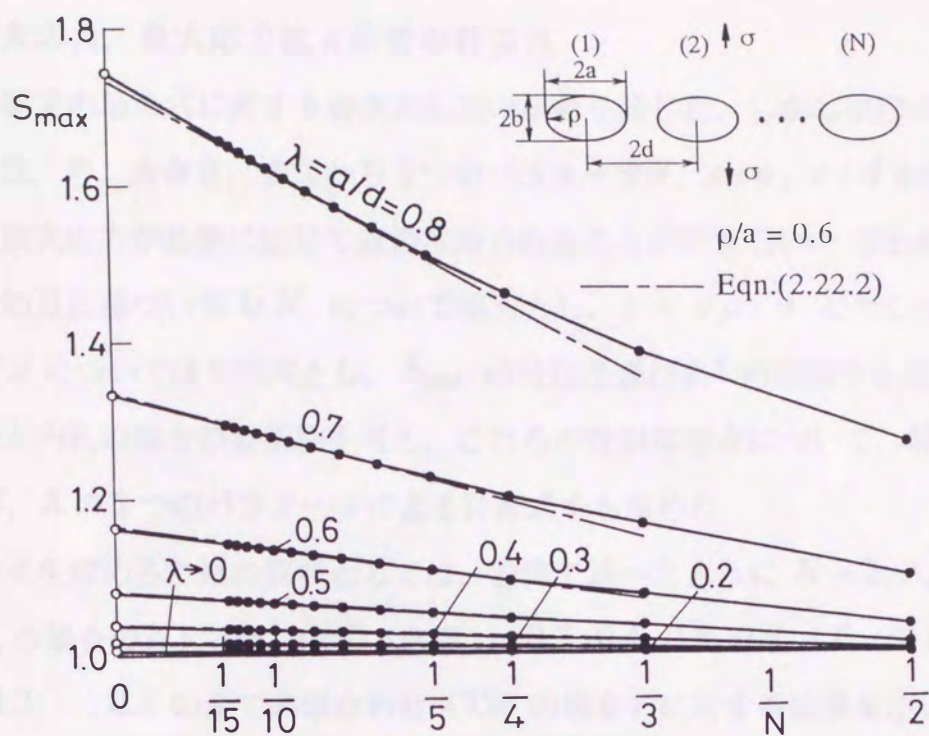


図2.4 $\rho/a = 0.6$ に対する S_{\max} と $1/N$ の関係

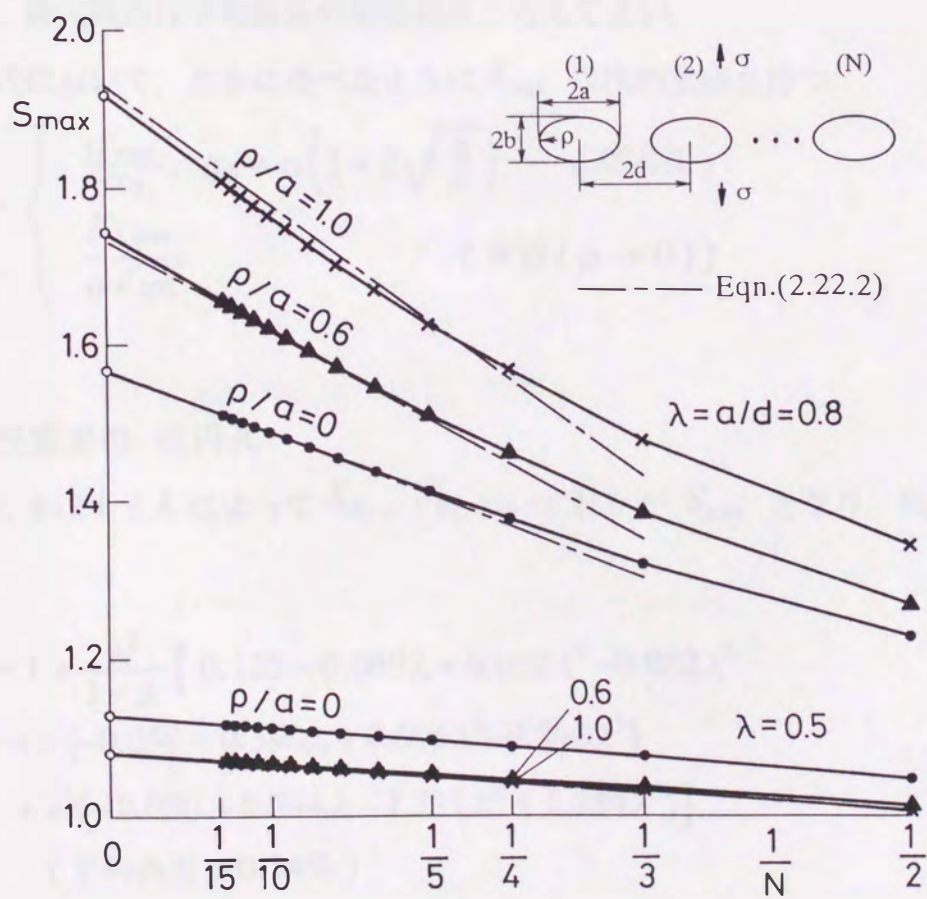


図2.5 3つの ρ/a に対する S_{\max} と $1/N$ の関係

2.2.3 最大応力，最大応力拡大係数の計算式

前節では特定の形の穴に対する無次元応力の挙動を論じた。しかし実際の問題では、穴の個数，形，大きさ，すなわち3つのパラメータ N ， ρ/a ， a/d が任意の場合の無次元最大応力が必要に応じて直接求められることが望ましい。求めた計算式は、前節の知見に基づいて $1/N$ について線形とし、 $\varepsilon = \sqrt{\rho/a}$ については2次式、 $\lambda = a/d$ については5次式とし、 S_{\max} の特性を表わす λ の関数をも追加した。また、き裂と円孔の場合の重要性を考え、これらの特別な場合について、精度がさらに高い N ， λ の2つのパラメータによる計算式をも求めた。

これらの式を求めるための資料としては、前節で述べたように $N=2, 3, \dots, 14$ と ∞ (S_{B_M} の場合のみ)； $\rho/a=0$ (き裂)，0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔)； $\lambda=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.8$ の全ての組み合わせ (756の場合) に対する結果を用い、これらに最小二乗法の意味で良く適合するように、仮定した係数を定めた。なお各式の末尾括弧内に解析値と式による値の差の平均値を付記してあり、それらは大体0.1%程度である。最大誤差は平均誤差の数倍程度と考えてよい。

以下の諸式において、さきに述べたように S_{\max} は次の意味を持つ。

$$S_{\max} = \begin{cases} \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}, \sigma_0 = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) & (\text{だ円孔}) \\ \frac{K_{I, \max}}{\sigma\sqrt{\pi a}} & (\text{き裂} (\rho \rightarrow 0)) \end{cases} \quad (2.21)$$

2.2.3.1 任意形の だ円孔

$N=2$ のときは ε と λ によって S_{A_1} ， S_{B_1} のいずれかが S_{\max} となり、次式が適用される。

$$S_{\max} = 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left[0.125 - 0.069\lambda + 0.052\lambda^2 - 0.062\lambda^3 \right. \\ \left. + \varepsilon (-0.059 - 0.390\lambda + 0.696\lambda^2 - 0.290\lambda^3) \right. \\ \left. + \varepsilon^2 (-0.080 + 0.844\lambda - 1.731\lambda^2 + 1.224\lambda^3) \right] \\ (\text{平均誤差} = 0.14\%) \quad (2.22.1)$$

$N \geq 3$ のときは常に $S_{\max} = S_{B_M}$ で次のようになる。

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left\{ 0.412 - 0.410\lambda + 0.303\lambda^2 - 0.197\lambda^3 \right. \\
 & + \varepsilon (-0.253 + 0.234\lambda - 0.683\lambda^2 + 0.797\lambda^3) \\
 & + \varepsilon^2 (-0.169 + 0.363\lambda + 0.802\lambda^2 - 0.832\lambda^3) \\
 & + \frac{1}{N} \left[-0.507 + 0.490\lambda - 0.310\lambda^2 + 0.131\lambda^3 \right. \\
 & + \varepsilon (0.068 + 2.546\lambda - 7.141\lambda^2 + 5.074\lambda^3) \\
 & \left. \left. + \varepsilon^2 (0.486 - 3.995\lambda + 8.092\lambda^2 - 5.511\lambda^3) \right] \right\} \\
 & \text{(平均誤差} = 0.14\%) \qquad \qquad \qquad (2.22.2)
 \end{aligned}$$

(2.22.1), (2.22.2) による結果は表2.1 に括弧書きで、また後者は図2.4, 図2.5 に鎖線で示してある。

2.2.3.2 特別な場合

(i) き裂 ($\rho/a \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & \left(\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{1}{N} \lambda^2 (-0.469 - 0.615\lambda + 2.081\lambda^2 - 2.986\lambda^3) \\
 & \text{(平均誤差} = 0.08\%) \qquad \qquad \qquad (2.23)
 \end{aligned}$$

(2.23) の第1項は $N \rightarrow \infty$ の場合の厳密解である^(8, 1)。この式による結果は表2.1 に大括弧書きしてあり、解析値と極めて良い一致を示す。

(ii) 円孔 ($\rho/a = 1$)

$N = 2$ について

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} (-0.012 + 0.370\lambda - 0.944\lambda^2 + 0.840\lambda^3) \\
 & \text{(平均誤差} = 0.2\%) \qquad \qquad \qquad (2.24.1)
 \end{aligned}$$

$N \geq 3$ について

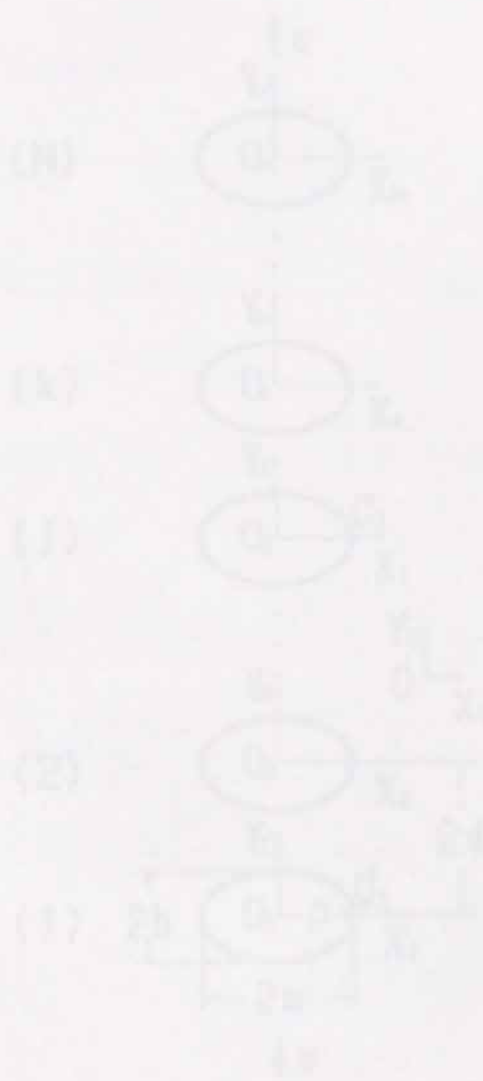
$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \left[-0.010 + 0.188\lambda + 0.435\lambda^2 - 0.260\lambda^3 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{N} (0.046 - 0.815\lambda + 0.234\lambda^2 + 0.026\lambda^3) \right] \\
 & \text{(平均誤差} = 0.1\%) \qquad \qquad \qquad (2.24.2)
 \end{aligned}$$

(2.24.1), (2.24.2) による値は表2.1 に括弧書きしてあり, 解析値と良く一致している.

2.2.1.3 基本解法と一般化された解法

図2.2.1.3のように、 z 平面上に注目して、 $z = \rho e^{i\theta}$ とおいて、 ρ と θ をそれぞれ z の極座標と見做す。このとき、 z の極座標 (ρ, θ) は、 z の極座標 (ρ, θ) と見做す。

このとき、 z の極座標 (ρ, θ) は、 z の極座標 (ρ, θ) と見做す。



2.3 孔列方向の引張りの解析と応力の計算式

2.3.1 解析方法

2.3.1.1 応力関数と だ円孔縁の境界条件

図2.6 に示すように、広い板の中に主軸長 $2a$, $2b$ の N 個の等しい だ円孔が主軸 $2b$ の方向に等間隔に一系列に配列しており、遠方で主軸 $2b$ の方向に一様応力 σ が作用する問題を考える。

本問題では下から数えて穴に番号 $1, 2, \dots, N$ を付し、基準座標系 $O X_0 Y_0$ および局所座標系 $O_k X_k Y_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) を図のように定める。

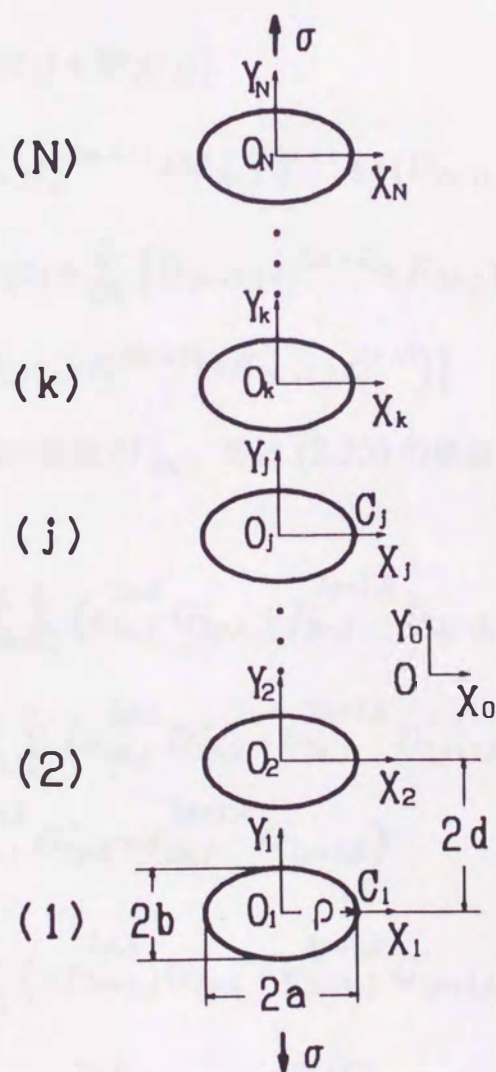


図2.6 だ円孔列方向の引張り

解析には、前節と同様にAiryの応力関数を(2.8)のように仮定し、 F_0 は(2.9)を用いた。また F_k ($k \geq 1$)は y_k 軸に関する対称性を考えて次の展開で表わす。

$$\begin{aligned}
 F_k &= \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_k \varphi_k(z_k) + \psi_k(z_k)] \\
 \varphi_k(z_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_{2n,k} \dot{z}_k^{-(2n+1)} + i G'_{2n+1,k} \bar{z}_k^{-(2n+2)}) \\
 \psi_k(z_k) &= -D_{0,k} \dot{\log} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} (D_{2n,k} \dot{z}_k^{-2n} + i D'_{2n-1,k} \bar{z}_k^{-(2n-1)}) \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

以下の手順は2.2.1節とほぼ同様である。

まず z_k と z_j の関係を用いて O_j に原点をもつ座標 z_j だけで表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 F &= \sigma d^2 \operatorname{Re} [\bar{z}_j \Phi_j(z_j) + \Psi_j(z_j)] \\
 \Phi_j(z_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} [G_{2n,j} \dot{z}_j^{-(2n+1)} + M_{2n,j} \dot{z}_j^{2n+1} + i (G'_{2n+1,j} \bar{z}_j^{-(2n+2)} + M'_{2n+1,j} \bar{z}_j^{2n+2})] \\
 \Psi_j(z_j) &= -D_{0,j} \dot{\log} z_j + \sum_{n=0}^{\infty} [D_{2n+2,j} \dot{z}_j^{-(2n+2)} + K_{2n,j} \dot{z}_j^{2n+2} \\
 &\quad + i (D'_{2n+1,j} \bar{z}_j^{-(2n+1)} + K'_{2n+1,j} \bar{z}_j^{2n+3})]
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

ここに右辺の正べき項の係数 $M_{2n,j}$ 等は(2.25)の係数によって次の形で表わされる。

$$\begin{aligned}
 M_{2n,j} &= \frac{\delta_0^n}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (e_{2n,j}^{2p,k} G_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+1} + f_{2n,j}^{2p+1,k} G'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+2}) \\
 K_{2n,j} &= \frac{\delta_0^n}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (a_{2n,j}^{2p,k} D_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+2} + b_{2n,j}^{2p+1,k} D'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+3} \\
 &\quad + c_{2n,j}^{2p,k} G_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+1} + d_{2n,j}^{2p+1,k} G'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+2}) \\
 M'_{2n+1,j} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (-f_{2n+1,j}^{2p,k} G_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+1} + e_{2n+1,j}^{2p+1,k} G'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+2}) \\
 K'_{2n+1,j} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k \neq j}^N (-b_{2n+1,j}^{2p,k} D_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+2} + a_{2n+1,j}^{2p+1,k} D'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+3} \\
 &\quad - d_{2n+1,j}^{2p,k} G_{2p,k} \dot{z}_k^{2p+1} + c_{2n+1,j}^{2p+1,k} G'_{2p+1,k} \bar{z}_k^{2p+2})
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

右辺の係数 $e_{2n, j}^{2p, k}$ 等は (2.14) と類似の幾何量である。

そして z_j で表わされた応力関数 (2.26) が だ円孔 (j) を自由縁とするための条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 D_{2n, j} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (P_{2p}^{2n} K_{2p, j} + R_{2p}^{2n} M_{2p, j}) \\
 G_{2n, j} &= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (Q_{2p}^{2n} K_{2p, j} + S_{2p}^{2n} M_{2p, j}) \\
 D'_{2n+1, j} &= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+4} (T_{2p+1}^{2n+1} K'_{2p+1, j} + V_{2p+1}^{2n+1} M'_{2p+1, j}) \\
 G'_{2n+1, j} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+4} (Q_{2p+1}^{2n+1} K'_{2p+1, j} + W_{2p+1}^{2n+1} M'_{2p+1, j})
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

ここに右辺の係数 P_{2p}^{2n} 等は だ円の形 ε の関数として与えられている^(2,3)。

2.3.1.2 孔縁の応力

(2.27) と (2.28) で $j=1, 2, \dots, N$; $n=0, 1, \dots$ とおいた諸式を摂動法を用いて連立に解いて (2.26) の未知係数を定める。そして各孔縁の接線応力 $\sigma_{t, j} / \sigma$ を次の形の λ のべき級数として求めた。

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{t, j}(\beta)}{\sigma} &= D_{j,0}(\beta) + D_{j,2}(\beta)\lambda^2 + D_{j,3}(\beta)\lambda^3 + \dots + D_{j,m}(\beta)\lambda^m \\
 &\quad (j=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

N が非常に大きい場合の孔列中央付近の応力は周期だ円孔群として容易に解析できる。この場合には、西谷の結果⁽⁷⁾があるので、本解析による値と比較したところ有効数字 3~4 桁まで一致した。しかしこれらの結果は両端の穴に生ずる最大応力については何の情報も提供していない。

2.3.2 解析結果

この問題では各孔縁応力の最大値 $\sigma_{j,\max}$ は荷重に直交する長軸端 C_j (図2.6) から僅か孔列外側方向にそれた位置に生ずる. この $\sigma_{j,\max}$ と点 C_j の応力 σ_{C_j} の差は長軸に関する応力状態の非対称性によって生ずるものである.

これらの応力 σ_{C_j} , $\sigma_{j,\max}$ の無次元表示としては, 前節の問題と同様に, 円孔からき裂を含む穴の形の全範囲で有限確定値を与える次の S_{C_j} , $S_{j,\max}$ を用いた.

$$S_{C_j} = \frac{\sigma_{C_j}}{\sigma_0}, \quad S_{j,\max} = \frac{\sigma_{j,\max}}{\sigma_0} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$\sigma_0 =$ 無限板にだ円孔が一個の場合の最大応力

$$= \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2.30)$$

S_{C_j} や $S_{j,\max}$ は応力 σ_{C_j} や $\sigma_{j,\max}$ が (j) 以外の穴の存在によって1個の場合の何倍となるかを表わす干渉効果係数に相当する.

穴が細長くなった極限にあたるき裂の場合 σ_{C_j} , $\sigma_{j,\max}$ と σ_0 は同位の無限大となるので, S_{C_j} , $S_{j,\max}$ は有限確定値となる. そして, これらはき裂先端 C_j における次の無次元応力拡大係数に一致する⁽¹⁾.

$$(S_{C_j})_{\rho \rightarrow 0} = (S_{j,\max})_{\rho \rightarrow 0} = \frac{K_{I,C_j}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.31)$$

数値計算は孔数 $N = 2, 3, \dots, 14$ と $N \rightarrow \infty$ のそれぞれについて, $\rho/a = 0$ (き裂), 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔) として行なった. その結果, 各場合について各孔縁上の任意点の応力が (2.29) のように $\lambda = a/d$ のべき級数として与えられる. これによって, N , ρ/a のそれぞれの場合について $\lambda \leq 0.8$ の範囲で任意の λ に対する各孔縁の S_{C_j} および $S_{j,\max}$ の値が求められる. なお, $S_{j,\max}$ は角度パラメータ $\beta = \tan^{-1}(a\eta/b\xi)$ (ξ, η は孔縁上の点の座標) について 1° 間隔で無次元応力を計算し, その最大値として近似的に求めた.

S_{C_j} と $S_{j,\max}$ の差は最外側の穴 ($j = 1, N$) について僅かにあるだけで, 内側の穴については無視できる. その相対誤差 $e_1 = (S_{1,\max} - S_{C_1}) / S_{1,\max}$ は ρ/a や N が大きいほど大きい, それが最大となる $\rho/a = 1, N \rightarrow \infty$ の場合, $\lambda = 0.5, 0.7, 0.$

8 についてそれぞれ 0.6%, 1.4%, 1.8% である。

さてこの問題では ρ/a に関係なく $S_{1,\max} > S_{2,\max} > \dots > S_{M,\max}$ の関係があり, $S_{j,\max}$ は最外側の穴で最大, 中央の穴で最小となる. 例として $\rho/a=0.2$, $a/d=0.5$ の場合の結果を図2.7 に示す. 各折線は N が増すとともに下降し, 中央の穴の無次元応力 $S_{M,\max}$ (各折線の右端) は $N \rightarrow \infty$ として一点鎖線で示した一列周期だ円孔群の解析値に漸近する.

次に穴の形と大きさを固定して孔数 N を増すときの $S_{\max} (= S_{1,\max})$ の挙動を調べる. $\rho/a=0.2$ の場合を例にとり, $\lambda=0, 0.1, \dots, 0.8$ に対する S_{\max} の結果を $1/N$ を横軸にとって示すと図2.8 が得られ, S_{\max} は $N \geq 4$ の範囲で $1/N$ と良い直線関係を示す. しかし, この場合 S_{\max} は最外側の穴に生じ, この穴の応力は中央の穴と異なり, $1/N$ より $1/(N-0.5)$ との間により良い直線関係があることが証明される (2.4節). そこで同じ $\rho/a=0.2$ の場合の結果を $1/(N-0.5)$ に対して描くと図2.9 となり, 図2.8 より広い N の全範囲で直線性が得られた. また, この問題では $N \rightarrow \infty$ の S_{\max} を解析で求めることはできないが, $N \leq 14$ に対する結果を破線のように延長推定して $N \geq 15$ に対する S_{\max} および $N \rightarrow \infty$ における極限值を精度良く求めることができる. 図2.9 は $\rho/a=0.2$ の特別な場合であるが, S_{\max} と $1/(N-0.5)$ の間の直線性は き裂から円孔を含む全ての ρ/a について成立つ.

表2.2 は, それぞれ $\rho/a=0$ (き裂), 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔) の場合について種々の $N, a/d$ に対する S_{\max} を括弧なしの値で示している. 表中の $N \rightarrow \infty$

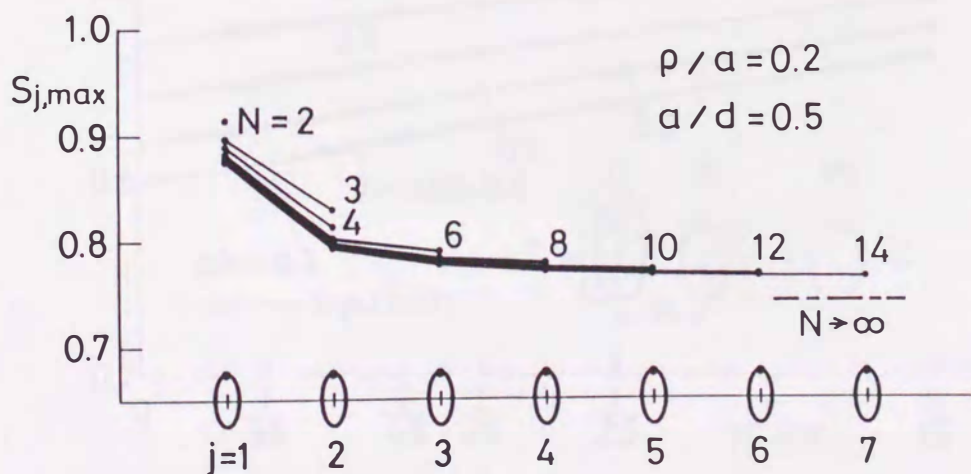


図2.7 $S_{j,\max}$ の N, j による変動 ($\rho/a=0.2, a/d=0.5$)

に対する値（*を付す）は、 $1/(N-0.5)$ との直線性を用いて $N=11$ と 13 に対する値から外挿推定したものである。

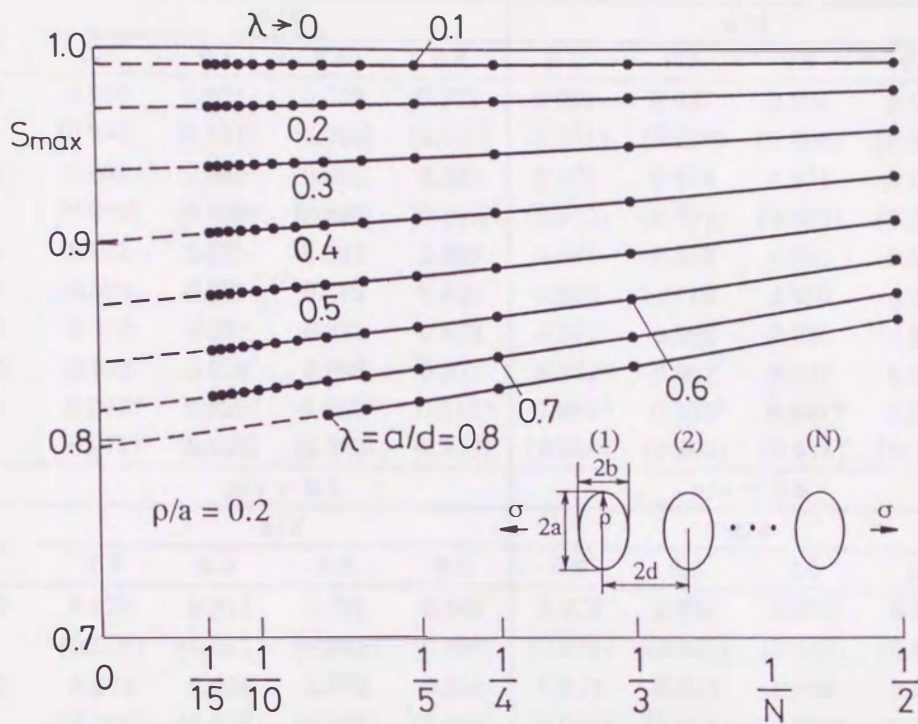


図2.8 $\rho/a = 0.2$ に対する S_{max} と $1/N$ の関係

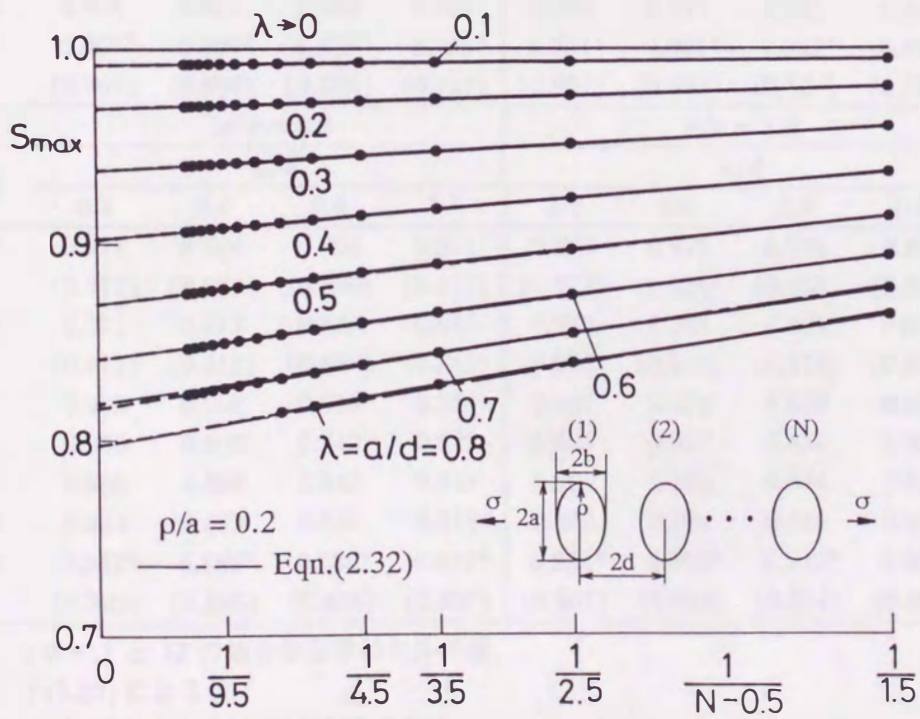


図2.9 $\rho/a = 0.2$ に対する S_{max} と $1/(N-0.5)$ の関係

表2.2 $S_{\max} = \begin{cases} K_{I, \max} / \sigma \sqrt{\pi a} & (\rho = 0, \text{き裂}) \\ \sigma_{\max} / \sigma_0 & (\rho \neq 0), \sigma_0 = \sigma(1 + 2\sqrt{a/\rho}) \end{cases}$

N	$\rho/a = 0$				$\rho/a = 0.2$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	0.986 [0.986]	0.951 [0.951]	0.909 [0.909]	0.872 [0.875]	0.981 (0.981)	0.937 (0.938)	0.894 (0.894)	0.864 (0.865)
3	0.982 [0.982]	0.940 [0.939]	0.891 [0.890]	0.849 [0.849]	0.976 (0.976)	0.924 (0.924)	0.874 (0.873)	0.839 (0.838)
4	0.981	0.935	0.883	0.839	0.974	0.918	0.865	0.828
6	0.979	0.930	0.876	0.829	0.973	0.912	0.856	0.817
9	0.979	0.927	0.871	0.822	0.971	0.909	0.850	0.809
13	0.978	0.926	0.868	0.818	0.971	0.907	0.847	0.807
∞	0.977* [0.977]	0.922* [0.922]	0.862* [0.863]	0.810* [0.810]	0.969* (0.969)	0.902* (0.903)	0.841* (0.841)	0.800* (0.797)
N	$\rho/a = 0.4$				$\rho/a = 0.6$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	0.979 (0.979)	0.933 (0.933)	0.891 (0.891)	0.865 (0.866)	0.978 (0.978)	0.930 (0.930)	0.890 (0.890)	0.868 (0.868)
3	0.974 (0.974)	0.919 (0.918)	0.870 (0.869)	0.840 (0.838)	0.972 (0.972)	0.915 (0.915)	0.869 (0.868)	0.843 (0.840)
4	0.972	0.913	0.861	0.829	0.970	0.909	0.859	0.831
6	0.970	0.907	0.852	0.818	0.968	0.903	0.850	0.819
9	0.969	0.903	0.846	0.811	0.967	0.899	0.844	0.812
13	0.968	0.901	0.843	0.804	0.966	0.897	0.841	0.811
∞	0.966* (0.967)	0.896* (0.896)	0.835* (0.836)	0.796* (0.797)	0.964* (0.964)	0.891* (0.892)	0.832* (0.834)	0.809* (0.799)
N	$\rho/a = 0.8$				$\rho/a = 1.0$			
	a/d				a/d			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
2	0.977 (0.977)	0.928 (0.928)	0.890 (0.890)	0.871 (0.871)	0.976 (0.976)	0.926 (0.926)	0.890 (0.891)	0.874 (0.875)
3	0.971 (0.971)	0.913 (0.912)	0.868 (0.867)	0.846 (0.843)	0.970 (0.970)	0.911 (0.910)	0.869 (0.868)	0.849 (0.847)
4	0.969	0.906	0.859	0.834	0.967	0.904	0.859	0.837
6	0.966	0.900	0.849	0.822	0.965	0.897	0.850	0.826
9	0.965	0.896	0.843	0.814	0.964	0.893	0.844	0.819
13	0.964	0.893	0.840	0.815	0.963	0.891	0.840	0.815
∞	0.962* (0.963)	0.888* (0.888)	0.832* (0.834)	0.807* (0.802)	0.961* (0.961)	0.886* (0.886)	0.832* (0.834)	0.806* (0.805)

* : N=11 と 13 の場合から求めた外挿値.

[] : (2.33) による値.

() : $\rho/a \neq 1$ のときは (2.32) による値.

$\rho/a = 1$ のときは (2.34) による値.

2.3.3 最大応力，最大応力拡大係数の計算式

孔列に直角方向の引張りの場合と同様に N ， ρ/a ， a/d が任意の場合の無次元最大応力 S_{\max} の計算式を求めた。これらの計算式の形と用いた解析値のパラメータの組合せは2.2.3節で述べたと同じである。なお各式の末尾括弧内に解析値と式による値の差の平均値を付記してあり，それらは大体0.1%程度である。最大誤差は平均誤差の数倍程度と考えてよい。

2.3.3.1 任意形の だ円孔

この場合は常に $S_{\max} = S_{1, \max}$ であり，次式が用いられる。

全範囲 $N \geq 2$ について

$$\begin{aligned} S_{\max} = & 1 + \lambda^2 \left\{ -0.611 - 0.038\lambda + 1.210\lambda^2 - 0.841\lambda^3 \right. \\ & + \varepsilon (-0.531 + 0.371\lambda + 0.650\lambda^2 - 0.495\lambda^3) \\ & + \varepsilon^2 (0.009 + 0.096\lambda + 0.464\lambda^2 - 0.621\lambda^3) \\ & + \frac{1}{N-0.5} \left[0.335 + 0.290\lambda - 1.614\lambda^2 + 1.209\lambda^3 \right. \\ & + \varepsilon (0.358 - 0.979\lambda + 1.558\lambda^2 - 1.087\lambda^3) \\ & \left. \left. + \varepsilon^2 (0.009 + 0.024\lambda - 0.686\lambda^2 + 0.791\lambda^3) \right] \right\} \\ & \text{(平均誤差 = 0.08\%)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

(2.32)による結果は表2.2に括弧書きで，また図2.9に鎖線で示してあり，精度は極めて良い。

2.3.3.2 特別な場合

(i) き裂 ($\rho/a \rightarrow 0$)

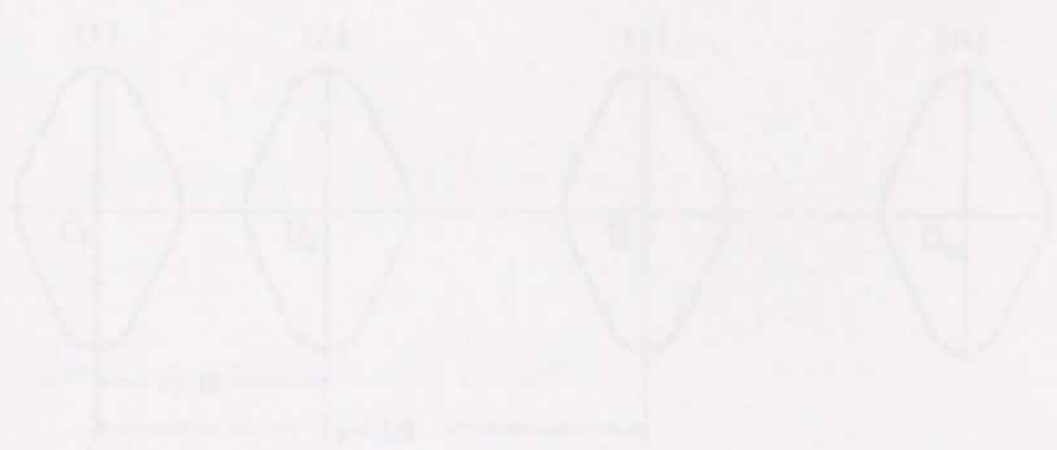
$$\begin{aligned} S_{\max} = & 1 + \lambda^2 \left[-0.611 - 0.038\lambda + 1.210\lambda^2 - 0.841\lambda^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{N-0.5} (0.335 + 0.290\lambda - 1.614\lambda^2 + 1.209\lambda^3) \right] \\ & \text{(平均誤差 = 0.04\%)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

(2.33)による結果は表2.2に大括弧書きしてあり，解析値と極めて良い一致を示す。

(ii) 円孔 ($\rho/a = 1$)

$$S_{\max} = 1 + \lambda^2 \left[-1.120 + 0.252\lambda + 3.074\lambda^2 - 3.176\lambda^3 + 0.666\lambda^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{N-0.5} (0.691 - 0.541\lambda - 1.265\lambda^2 + 1.870\lambda^3 - 0.591\lambda^4) \right] \\ \text{(平均誤差} = 0.08\%) \tag{2.34}$$

(2.34) による値は表2.2 に括弧書きしてあり、解析値と良く一致している。



2.4 一列に分布する孔群，介在物群，き裂群の問題に成立つ応力の漸近特性

2.2節において，穴の形と大きさ，すなわち ε と λ を固定して N を増すとき， λ があまり大きくなければ，中央の穴に生ずる最大応力は $1/N$ とほぼ直線関係にあることがわかった（図2.4，図2.5）．また 2.3節では，最外側の穴に生ずる最大応力も中央の穴と同様に $1/N$ とほぼ直線関係にあるが，それ以上に良い精度で $1/(N-0.5)$ との間の直線関係が認められた（図2.8，図2.9）．以下にこれらの性質に対する理論的根拠を与える．この定性的議論はだ円孔やき裂に限らず，一般に無限体内に一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物周縁の応力にも成立つものである．

無限体内に，一列等間隔に任意形の等しい N 個の穴が分布しており，これが遠方で面内力を受ける場合を考える（図2.10）．これらの穴を端から (1)，(2)， \dots ，(N) と番号を付ける．各穴は荷重を受けない，いわゆる自由孔である必要はなく，一般に等しい任意の自平衡の荷重を縁に受けてもよいとする．これは本節の結論が自由孔だけでなく，介在物にも適用できるようにするための一般的な仮定である．しかし以下の議論では煩雑さを避けるため穴または介在物を単に穴としている．

いま穴間隔を d ，穴の主半径を a とし， λ を次式で定義する．

$$\lambda = \frac{a}{d} \quad (2.35)$$

まず穴(1)の縁の応力 σ_1 について考える．

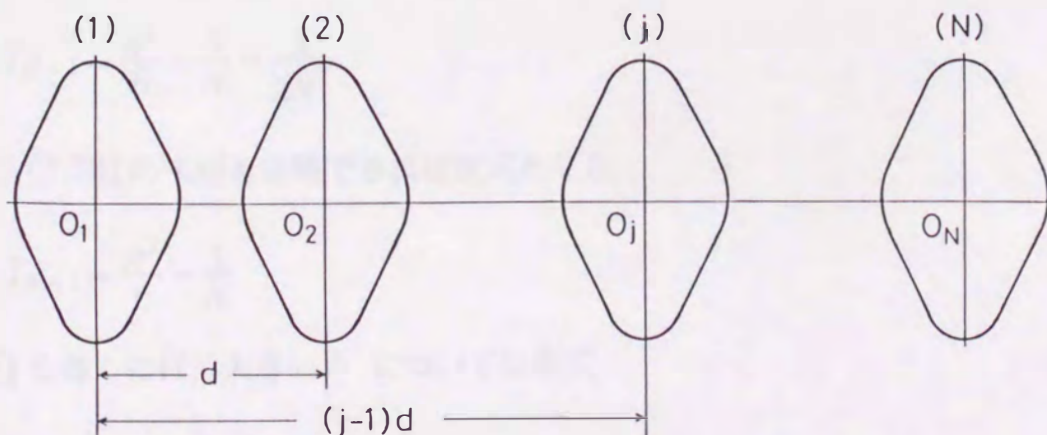


図2.10

はじめに、遠方で応力を受ける広い板内に穴(j)だけが存在する場合を考える。無限板に穴(j)を実現するには孔縁における法線応力、せん断応力の境界条件を満たさせるために自平衡の特異性、例えば自平衡の物体力をその内部に分布させればよい。その場合、穴(j)だけがあるとき、穴(1)の位置には上の自平衡物体力による応力が付加され、 a/d が小さいならば、その大きさは $[a/(j-1)d]^2 = [\lambda/(j-1)]^2$ のオーダーとなる。従って穴(j)以外に穴(1)もあるときは、その縁にあった応力に穴(j)によって生ずる応力が加わって孔縁の境界条件を満たす必要があり、そのための σ_1 への付加分はほぼ $C[\lambda^2/(j-1)^2]$ となる筈である。ここに係数 C は穴の形と遠方の作用応力によって定まる。

以上は穴(j)だけによる付加応力であるが、穴(2)~(N)の全てによる付加応力 $\Delta\sigma_1$ は λ が小さいときは、それぞれの穴による付加応力の単純和で近似することができる。穴の形が同じならば C は全ての穴についても同じである。従って

$$\Delta\sigma_1 \approx C \sum_{j=2}^N \left[\frac{\lambda^2}{(j-1)^2} \right] = C\lambda^2 T_{N-1}$$

$$T_{N-1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(N-1)^2}$$

$$(N = 2, 3, 4, \dots) \quad (2.36)$$

ところで N が大きいとき T_{N-1} は次の両式で近似することができる。

$$T_{N-1} \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N-0.5} \quad (2.37)$$

$$T_{N-1} \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} \quad (2.38)$$

さらに(2.38)の末項も省略できれば次式となる。

$$T_{N-1} \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} \quad (2.39)$$

(2.37)を導くには、大きい N について恒等式

$$\int_N^\infty \frac{dx}{(x-1/2)^2} = \frac{1}{N-1/2} \quad (2.40.1)$$

を考える。左辺を区間 $\Delta x = 1$ として中点則で数値積分すれば $(T_\infty - T_{N-1})$ となり、 $T_\infty = \pi^2/6$ を用いれば直ちに得られる。また (2.38) は恒等式

$$\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N} \quad (2.40.2)$$

の左辺を $\Delta x = 1$ として台形則で数値積分し、これが $(T_\infty - T_{N-1} - 1/2N^2)$ となることから証明される。

表2.3 は $N \leq 10$ について、上の近似式の誤差[%] を比較してある。(2.37)、(2.38) は N が大きいとして得たにかかわらず、 N の全範囲で精度が良い。(2.39) は当然これらに劣るが、 $N \geq 4$ では誤差3%以下である。以上により穴の形と大きさを固定するとき、 λ が小さい限り N の全範囲で、 $\Delta\sigma_1$ すなわち σ_1 と $1/(N-0.5)$ あるいは $(1/N + 1/2N^2)$ の間に直線関係が成立つことが証明された。また $N \geq 4$ の範囲ならば、より簡単に σ_1 は $1/N$ と直線関係にあるとしても差しつかえない。

次に中央の穴の応力 σ_M について考える。はじめに N を奇数と仮定する。この場合は中央の穴の両側に $(N-1)/2$ 個の穴があるので、 λ が小さいとき、これらの穴による σ_M への付加分は (2.36) と同様に

$$\Delta\sigma_M \approx 2C \sum_{j=2}^{(N+1)/2} \left[\frac{\lambda^2}{(j-1)^2} \right] = 2C\lambda^2 T_{(N-1)/2}$$

$$T_{(N-1)/2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \left[\frac{1}{(N-1)/2} \right]^2$$

$$(N = 3, 5, 7, \dots) \quad (2.41)$$

そして (2.37) を用いると

$$T_{(N-1)/2} \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\frac{N-1}{2} + 0.5} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{N}$$

$$(N = 3, 5, 7, \dots) \quad (2.42)$$

表2.3 T_{N-1} の近似式の誤差

N	誤差 [%]						
	2	3	4	5	6	8	10
(2.37)	2.17	0.41	0.14	0.06	0.03	0.01	0.01
(2.38)	1.99	0.48	0.19	0.09	0.05	0.02	0.01
(2.39)	14.49	4.93	2.48	1.50	1.00	0.54	0.34

従って N が大きくなると σ_M は $1/N$ と直線関係にあることがわかる。

また N が偶数の場合は、二つある中央の穴の一方の側に $(N/2 - 1)$ 個の穴が存在するので、中央の穴の応力 σ_M に対する他の穴の寄与は、(2.36) と同様に次式で与えられる。

$$\Delta\sigma_M \approx C\lambda^2(T_{(N-2)/2} + T_{N/2}) \quad (2.43)$$

そして (2.38) を用いれば次の関係を得る。

$$T_{(N-2)/2} + T_{N/2} \approx \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{N-1} - \frac{2}{N+1} = 2\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \quad (2.44)$$

$(N = 4, 6, 8, \dots)$

(2.43), (2.44) から N が偶数の場合も奇数の場合と同様に、 σ_M は大きい N に対して $1/N$ と直線関係にあることがわかる。

上に述べた σ_1 や σ_M と N の間の関係は λ が小さく N が大きい場合の関係である。しかし図2.4, 2.5, 2.8, 2.9 からわかるように、 $\lambda \leq 0.8$ の範囲で、また N についてはその全範囲あるいは $N \geq 4$ の広い範囲で直線性が成立つことは実用上重要である。

以上によって、一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物をもつ無限体が面内力を受ける場合、最外側の穴の応力 σ_1 は $1/(N-0.5)$ あるいは $(1/N + 1/2N^2)$ とほぼ直線関係にあり、中央の穴の応力 σ_M は $1/N$ とほぼ直線的に変化することがわかった。

さらに上の証明は平面問題として行なったが、面外せん断や古典曲げの場合も、応力は平面問題と同じ形の複素応力関数で与えられ、その拡散特性は平面問題と定性的に同じである⁽¹⁾。従って以上の議論は同様に成立ち、同じ結論が得られる。このことは次節で述べる種々のき裂問題で有効に使われている。

2.5 種々の荷重を受ける共線き裂群および平行き裂群における応力拡大係数の漸近特性とそれらの計算式

2.4節で一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物をもつ無限体が面内力・面外せん断力や古典曲げを受ける場合、最外側の穴の応力 σ_1 は $1/(N-0.5)$ あるいは $(1/N + 1/2N^2)$ とほぼ直線関係にあり、中央の穴の応力 σ_M は $1/N$ とほぼ直線関係に変化することを証明した。本節では、既に取り扱われている従来の共線き裂群と平行き裂群の平面応力・面外せん断・古典曲げの6つの場合について系統的な再計算を行ない、解析値に上の法則に基づく表示にあてはめて、各場合の最大応力拡大係数に対する高精度の計算式を与えた。

2.5.1 取扱った問題と内容の概要

さきに一列に等間隔で分布する等長の共線き裂群や平行き裂群が種々の荷重を受ける場合の解析が石田によって行なわれた^(3, 9-14)。そして三つの基本破壊モードと古典曲げに対する応力拡大係数 $K_I, K_{II}, K_{III}, K_b$ が無次元量 $F_I, F_{II}, F_{III}, F_b$ によって次のように表わされている。

$$\begin{aligned}
 \text{引張り} & : F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a} \\
 \text{面内せん断} & : F_{II} = K_{II} / \tau \sqrt{\pi a} \\
 \text{面外せん断} & : F_{III} = K_{III} / \tau_l \sqrt{\pi a} \\
 \text{古典曲げ} & : F_b = K_b / \sigma_b \sqrt{\pi a} \quad (\sigma_b = 6M_b / h^2)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

ここに a は内部き裂の半長、あるいは縁き裂の長さであり、 h は板厚、 M_b は板断面に作用する表面単位長さ当たりの曲げモーメントである。

また、き裂数を N 、き裂間隔を d として、次のパラメータを定義する。

$$\lambda = \begin{cases} \frac{2a}{d} & (\text{内部き裂}) \\ \frac{a}{d} & (\text{縁き裂}) \end{cases} \tag{2.46}$$

上の諸問題では、最大応力拡大係数は中央のき裂(M)または最外側のき裂(1)に生ずる。そして以前の解析では、 λ を固定するとき無次元応力拡大係数 $F^{(M)}, F^{(1)}$ が $1/N$ とほぼ直線的に変化することが認められた。しかし2.4節の理論的考察によっ

て、より正確な関係が明らかとなった。これによれば、中央き裂の $F^{(M)}$ は既報のように $1/N$ とほぼ直線関係にあるが、最外側き裂の $F^{(1)}$ は $1/N$ よりむしろ $1/(N-0.5)$ や $(1/N + 1/2N^2)$ との間により良い直線関係が成立つことがわかった。

以下に種々の荷重を受ける共線き裂群や平行き裂群について、 F と N の間の上記の関係に基づく高精度の計算式を与える。式の形としては λ について5次式とし、また原則的に $F^{(M)}$ は $1/N$ に対して線形、 $F^{(1)}$ は $(1/N + 1/2N^2)$ に対して線形とした。これらの式を精度良く求めるために、既に取り扱われたこれらの問題を再解析して数値結果に上の形の式を当てはめた。そして係数の決定には最小二乗法を用いた。

2.5.2 種々の問題の最大応力拡大係数の結果と計算式

提案する諸式は N , λ の広い範囲で精度が良い。各式の精度の程度を示すために、その式を求めるに用いた解析値における N , λ の組合せと平均誤差および最大誤差を式の後に明記した。ここに平均誤差は N , λ の各場合の解析値と式による値の差の平均値であり、最大誤差はその差の最大値である。以下に6つの問題について解析値と計算式を示し、それらの比較を行なう。

(a) 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断と古典曲げ^(3, 9-11)

共線き裂群の場合、 $F_I, F_{II}, F_{III}, F_b$ は一致するので、これらを共通の記号 F で表わす。この場合、 F_{\max} は中央のき裂 (M) に生ずる。そして λ を固定するとき F_{\max} は $1/N$ とほぼ直線関係にあり、次式で近似される。

$$F_{\max} = F^{(M)} = \left(\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N} (-0.469\lambda^2 - 0.615\lambda^3 + 2.081\lambda^4 - 2.986\lambda^5) \quad (2.47)$$

右辺の第1項は $N \rightarrow \infty$ に対応する周期共線き裂群に対する厳密解である^(8, 1)。他の項は $N = 2, 3, \dots, 14$; $\lambda = 0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ (208の場合) に対する解析値に適合するように定めた。そして (2.47) による値の解析値からの誤差の平均は0.08%, その最大値は2.81%である。図2.11 は $\lambda = 0, 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ に対

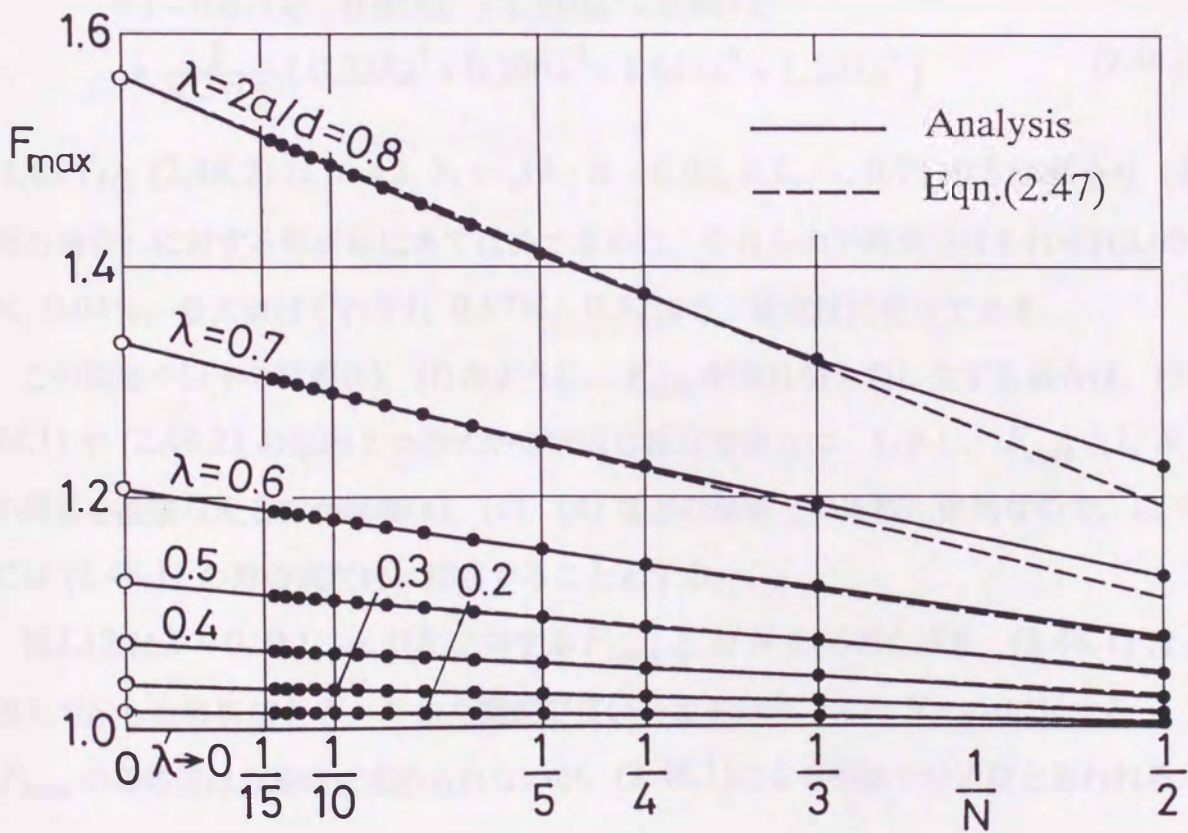
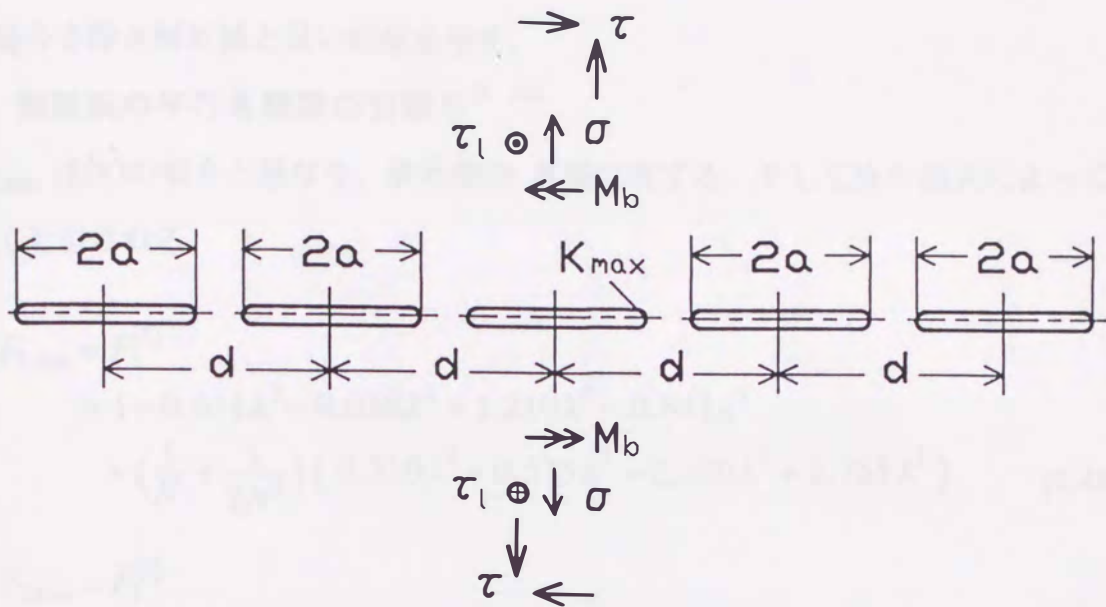


図2.11 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断と古典曲げ
に対する F_{max} と $1/N$ の関係

する F_{\max} と $1/N$ の関係を示す。黒丸で示した解析値は $N \rightarrow \infty$ に対する厳密値（白丸）とともにほぼ一直線上にならび、(2.47)による結果（破線）は $N=2$ で λ が大きい場合を除き解析値と良い近似を示す。

(b) 無限板の平行き裂群の引張り^(3, 14)

$F_{I,\max}$ は(a)の場合と異なり、最外側のき裂に生ずる。そして次の両式によって精度良く近似される。

$$\begin{aligned} F_{I,\max} &= F_I^{(1)} \\ &= 1 - 0.611\lambda^2 - 0.038\lambda^3 + 1.210\lambda^4 - 0.841\lambda^5 \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) (0.310\lambda^2 + 0.575\lambda^3 - 2.369\lambda^4 + 1.765\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.48.1)$$

$$\begin{aligned} F_{I,\max} &= F_I^{(1)} \\ &= 1 - 0.611\lambda^2 - 0.038\lambda^3 + 1.210\lambda^4 - 0.841\lambda^5 \\ &\quad + \frac{1}{N-0.5} (0.335\lambda^2 + 0.290\lambda^3 - 1.614\lambda^4 + 1.209\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.48.2)$$

(2.48.1)と(2.48.2)は $N=2, 3, \dots, 14$; $\lambda=0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ(208の場合)に対する解析値にあてはめて求めた。それらの平均誤差はそれぞれ0.05%, 0.04%, 最大値はそれぞれ0.57%, 0.32%で、精度は同程度である。

この問題や以下の問題(e), (f)のように、 F_{\max} が最外側き裂に生ずる場合は、(2.48.1)や(2.48.2)の形の2つの式がほぼ同じ精度で成立つ。しかし、 F_{\max} と $1/N$ の関係を直接与える方が問題(a), (c), (d)などの結果との比較に便利なので、以下には(2.48.1)の形の式だけに注目することとする。

図2.12は $\lambda=0, 0.1, \dots, 0.8$ に対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係を示す。(2.48.1)は黒丸で示した解析値と N, λ の全範囲で良い一致を示す。また $N \rightarrow \infty$ に対する $F_{I,\max}$ の極限值は理論的に求められないが、(2.48.1)による値は十分正確と思われる。

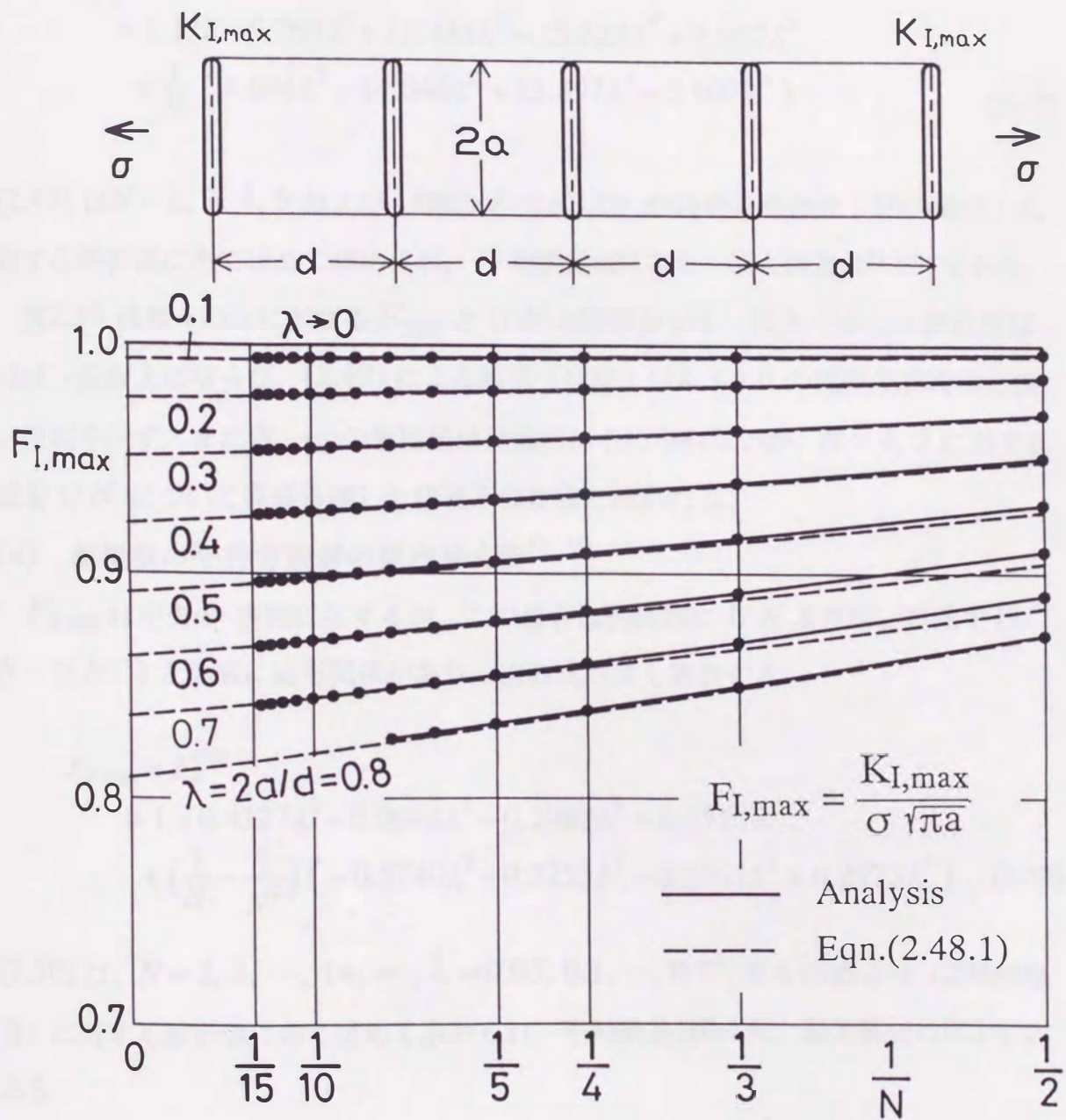


図2.12 無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,max}$ と $1/N$ の関係

(c) 半無限板の平行き裂群の引張り^(12, 13)

$F_{I,\max}$ は最外側き裂に生ずる。しかし、自由縁の存在によって、無限板の平行き裂群(b)と異なり、 $F_{I,\max}$ は $(1/N + 1/2N^2)$ よりむしろ $1/N$ に対して線形であり、次式が当てはめられる。

$$\begin{aligned} F_{I,\max} &= F_I^{(1)} \\ &= 1.122 - 5.760\lambda^2 + 15.433\lambda^3 - 15.628\lambda^4 + 5.567\lambda^5 \\ &\quad + \frac{1}{N} (4.694\lambda^2 - 14.044\lambda^3 + 15.497\lambda^4 - 5.907\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.49)$$

(2.49) は $N=2, 3, 4, 5$ および 14 個の λ (≤ 1.0) の場合の組合せ (56 の場合) に対する解析値にあてはめて求められ、平均誤差は 0.2%、最大誤差は 0.8% である。

図 2.13 は種々の λ に対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係を示す。黒丸で示した解析値はほぼ一直線上にならび、(2.49) による結果 (破線) は $\lambda \leq 1.0$ の範囲で解析値と良い近似を示す。また $N \rightarrow \infty$ の極限值は理論的に求められないが、 $N=4, 5$ に対する値を $1/N$ について直線外挿した値は十分正確と思われる。

(d) 無限板の平行き裂群の面内せん断^(3, 14)

$F_{II,\max}$ は中央のき裂に生ずるが、この場合は例外的に $1/N$ より広い範囲で $(1/N - 1/N^2)$ との間に線形関係があり、次の式が良く適合する。

$$\begin{aligned} F_{II,\max} &= F_{II}^{(M)} \\ &= 1 + 0.4127\lambda^2 - 0.0098\lambda^3 - 0.2988\lambda^4 + 0.1551\lambda^5 \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) (-0.5740\lambda^2 - 0.3255\lambda^3 - 0.2361\lambda^4 + 0.2973\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.50)$$

(2.50) は、 $N=2, 3, \dots, 14, \infty$; $\lambda=0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ (208 の場合) に対する解析値にあてはめて求められ、平均誤差は 0.1%、最大誤差は 0.4% である。

図 2.14 は $\lambda=0, 0.1, \dots, 0.8$ に対する $F_{II,\max}$ と $1/N$ の関係を示す。黒丸で示した解析値は $N \rightarrow \infty$ に対する厳密値 (白丸) とともにほぼ一直線上にならび、(2.50) による結果 (破線) は $N \geq 3$ で解析値と良く近似する。

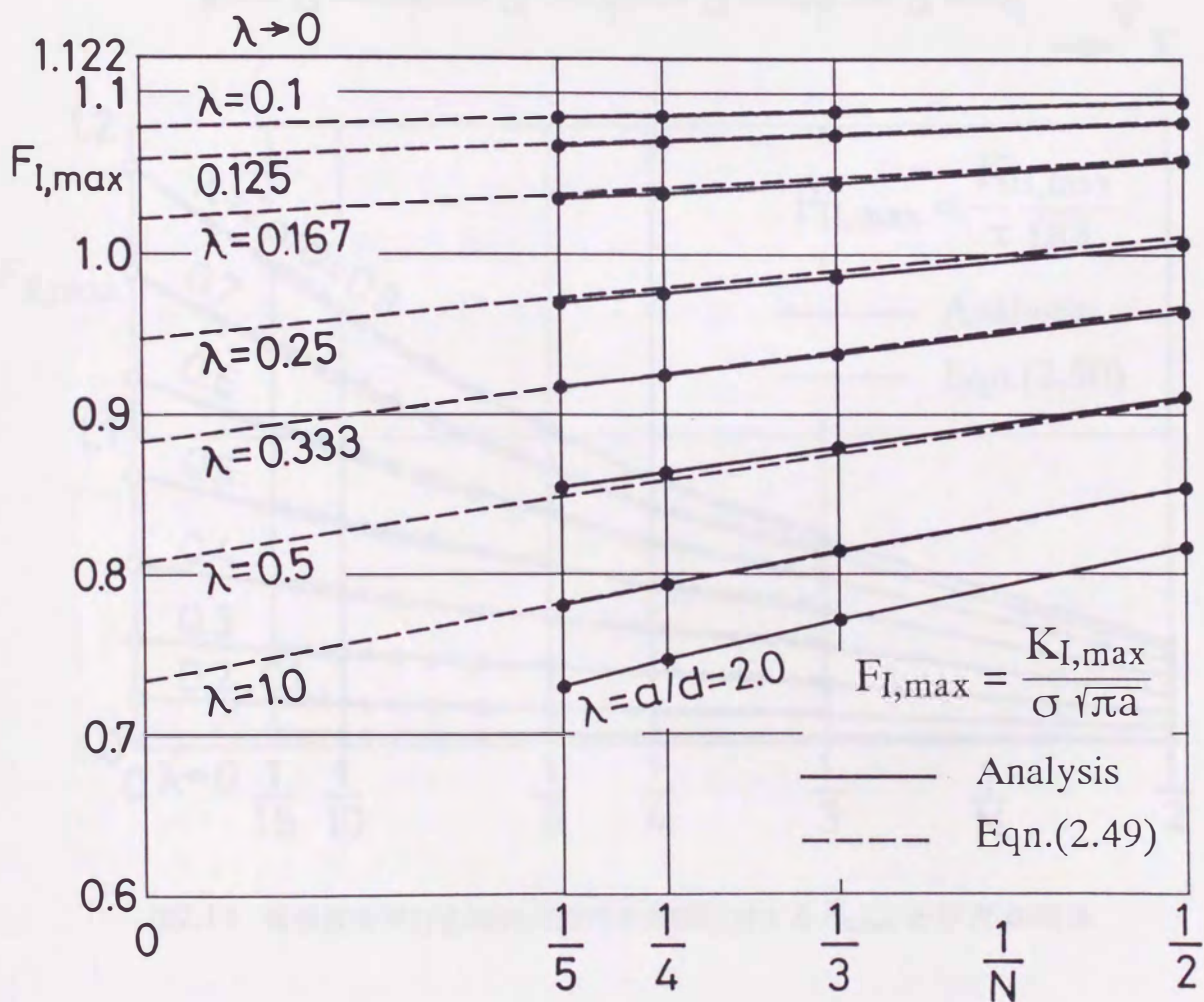
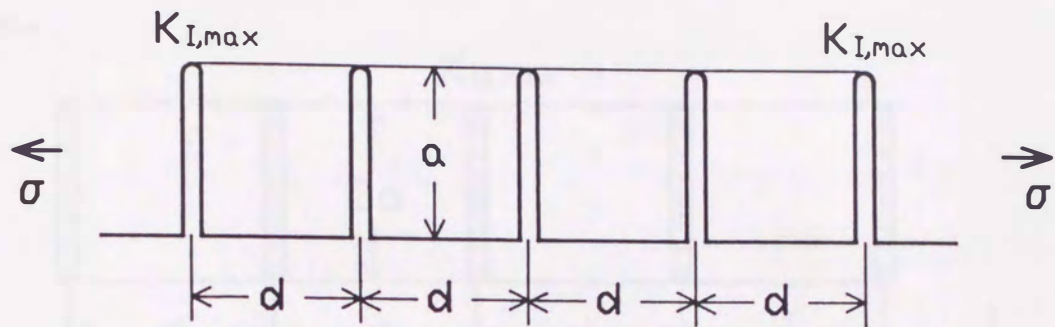


図2.13 半無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,max}$ と $1/N$ の関係

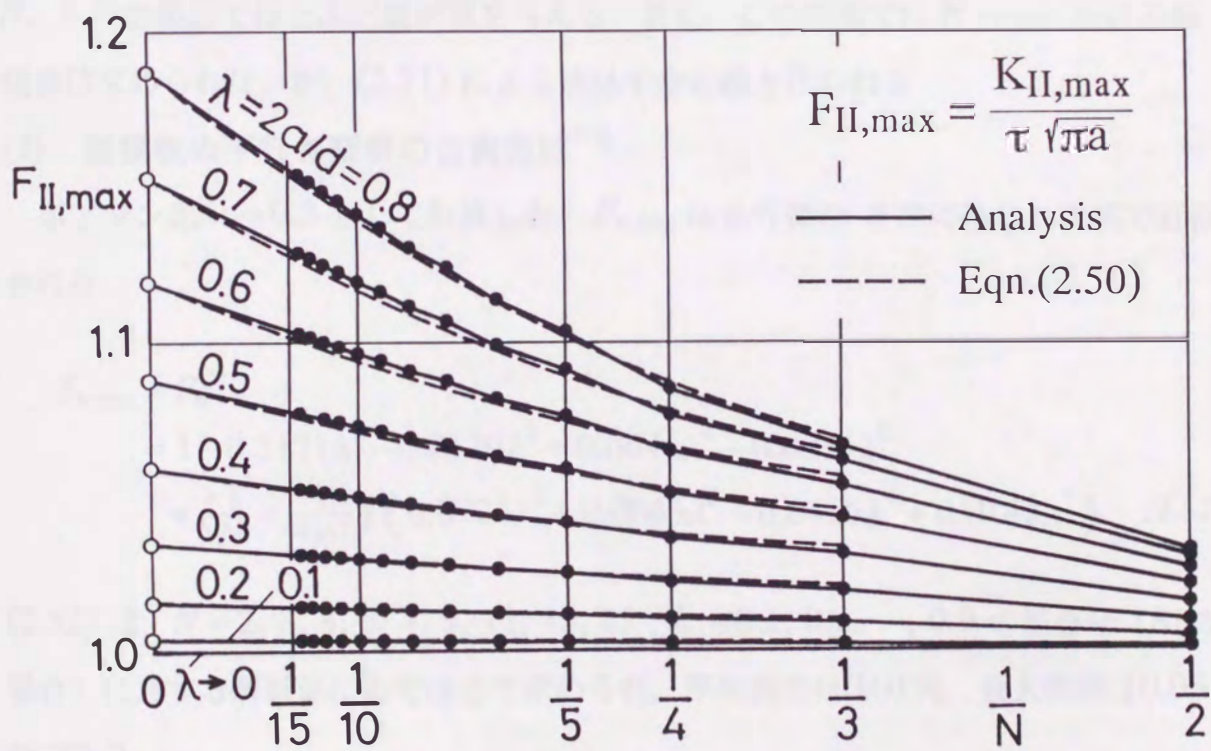
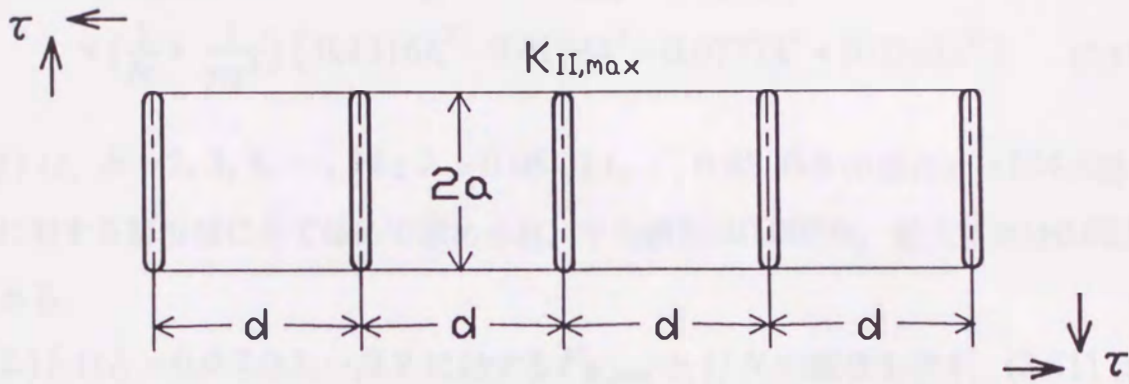


図2.14 無限板の平行き裂群の面内せん断に対する $F_{II,max}$ と $1/N$ の関係

(e) 無限体の平行き裂群の面外せん断⁽¹⁰⁾

$F_{III,max}$ は最外側のき裂に生じ、次式が良くあてはまる。

$$\begin{aligned} F_{III,max} &= F_{III}^{(1)} \\ &= 1 - 0.2067\lambda^2 + 0.0027\lambda^3 + 0.1622\lambda^4 - 0.0818\lambda^5 \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) (0.1316\lambda^2 - 0.0173\lambda^3 - 0.0777\lambda^4 + 0.0382\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.51)$$

(2.51) は、 $N=2, 3, 4, \dots, 14$; $\lambda=0.05, 0.1, \dots, 0.85, 0.9$ の組合せ (234の場合) に対する解析値にあてはめて求められ、平均誤差は0.003%、最大誤差は0.022%である。

図2.15 は $\lambda=0, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ に対する $F_{III,max}$ と $1/N$ の関係を示す。(2.51) は N, λ の全範囲でほとんど厳密値を与える。また、この問題では $N \rightarrow \infty$ における極限值は求められないが、(2.51) による値は十分正確と思われる。

(f) 無限板の平行き裂群の古典曲げ⁽¹¹⁾

ポアソン比 $\nu=0.3$ として計算した。 $F_{b,max}$ は最外側のき裂に生じ、次式で近似される。

$$\begin{aligned} F_{b,max} &= F_b^{(1)} \\ &= 1 - 0.1171\lambda^2 - 0.0120\lambda^3 + 0.0646\lambda^4 - 0.0234\lambda^5 \\ &\quad + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) (0.0726\lambda^2 + 0.0065\lambda^3 - 0.0416\lambda^4 + 0.0142\lambda^5) \end{aligned} \quad (2.52)$$

(2.52) は、 $N=2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15$; $\lambda=0.1, 0.2, \dots, 0.9$ の組合せ (81の場合) に対する解析値にあてはめて求められ、平均誤差は0.01%、最大誤差は0.05%である。

図2.16 は $\lambda=0, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ に対する $F_{b,max}$ と $1/N$ の関係を示す。(2.52) は N, λ の全範囲で解析値と極めて良い近似を示す。また、この問題では $N \rightarrow \infty$ における極限值は解析的に求められないが、(2.52) による値は十分正確と思われる。

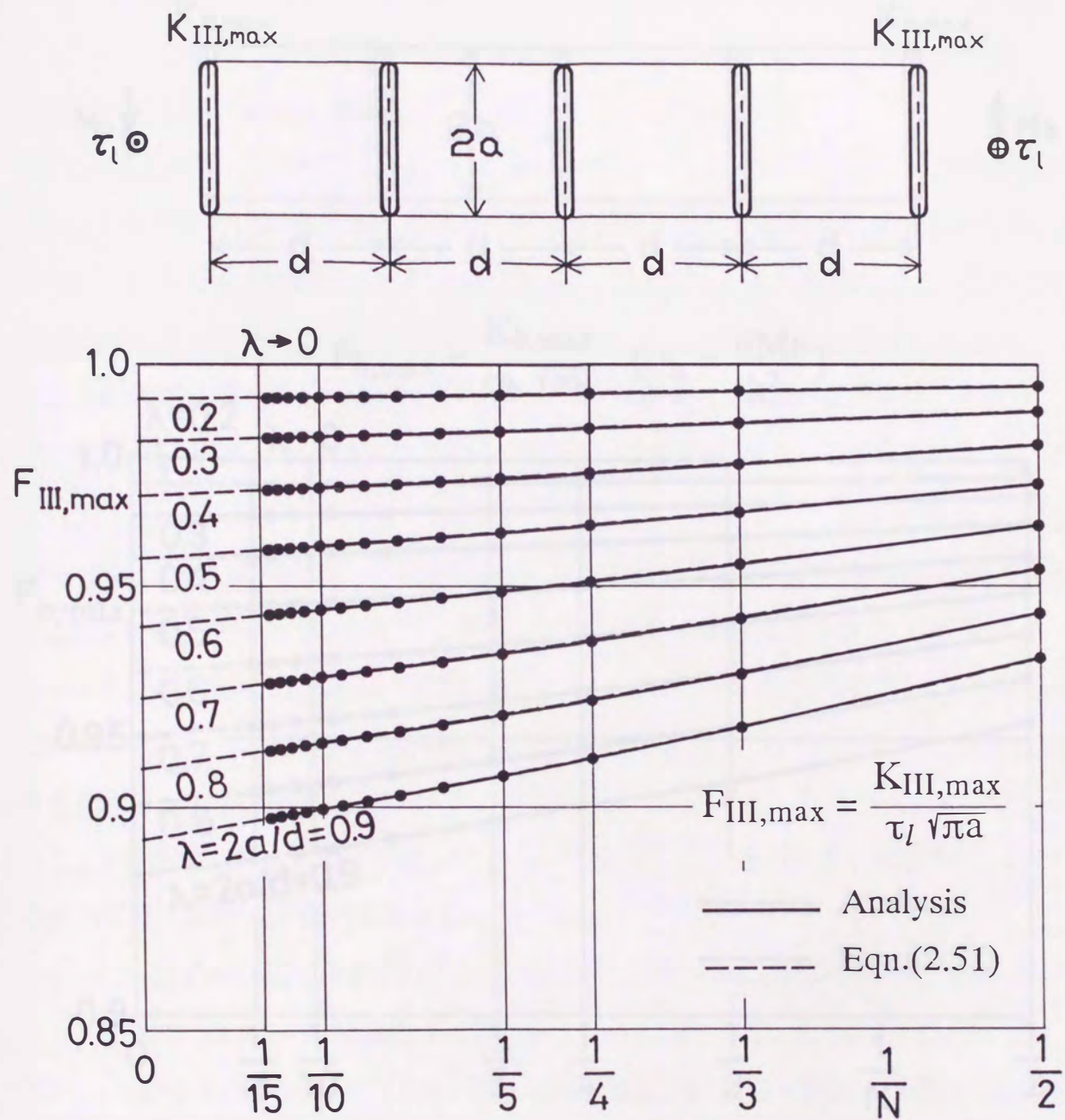
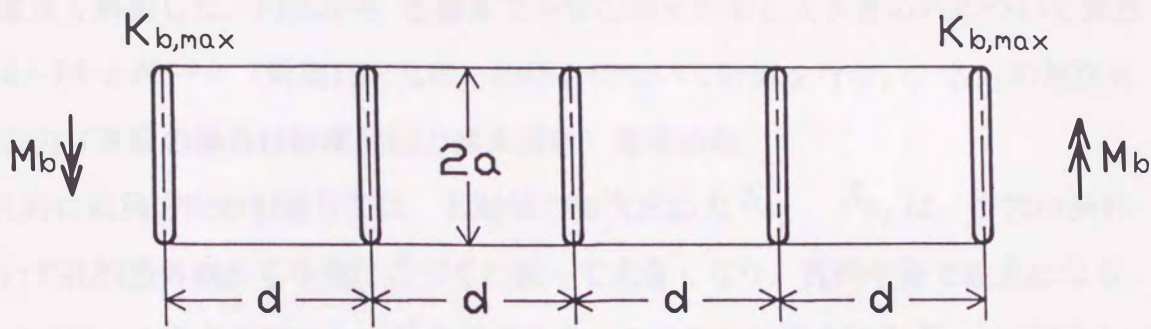


図2.15 無限体の平行き裂群の面外せん断に対する $F_{III,max}$ と $1/N$ の関係



$$F_{b,max} = \frac{K_{b,max}}{\sigma_b \sqrt{\pi a}} \quad \left(\sigma_b = \frac{6Mb}{h^2} \right)$$

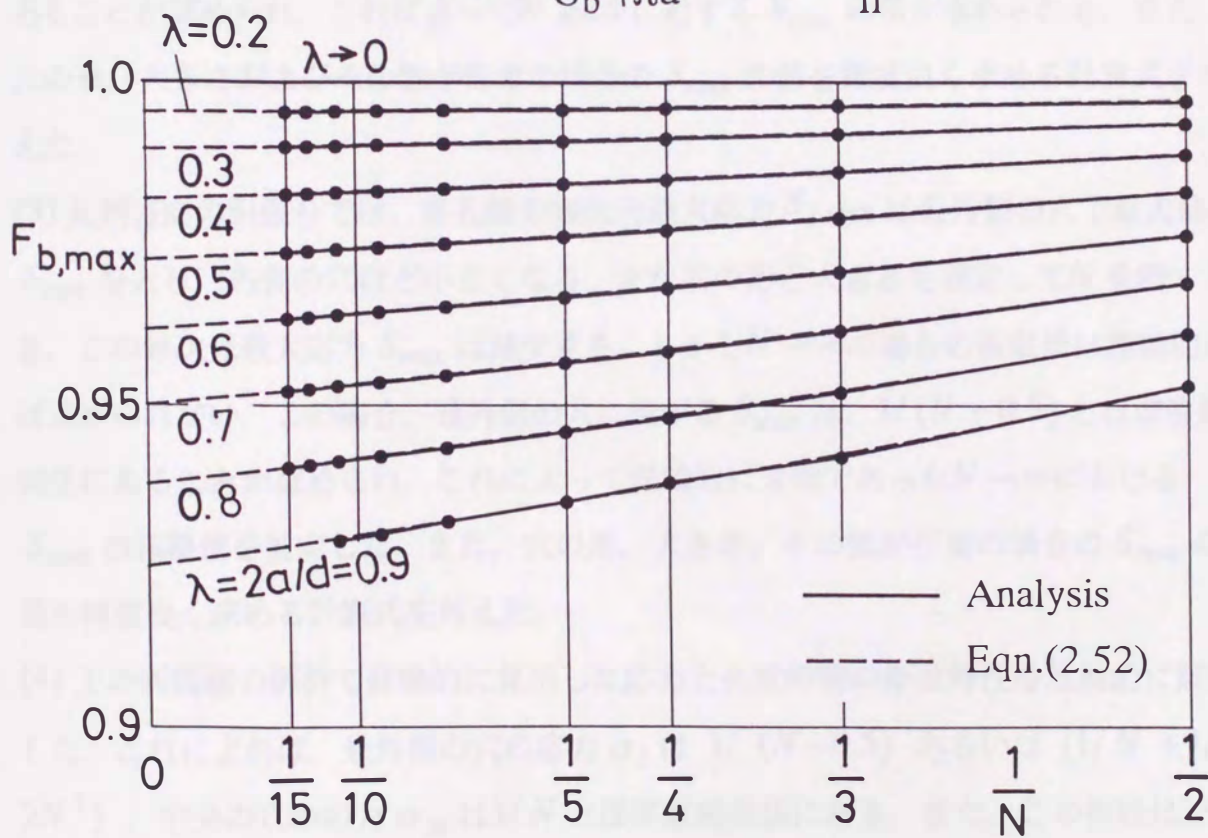


図2.16 無限板の平行き裂群の古典曲げに対する $F_{b,max}$ と $1/N$ の関係

2.6 結 論

(1) 無限板に等しい だ円孔が等間隔で一列にならんでおり、これが孔列に直角方向あるいは孔列方向の引張りを受ける場合を Laurent 展開法と摂動法の組合せによって精度良く解析した。円孔から き裂までを含む種々の形と大きさの穴について個数 $N = 2 \sim 14$ と $N \rightarrow \infty$ (周期だ円孔群) の場合について計算を行ない、各穴の無次元最大応力 (き裂の場合は無次元応力拡大係数) を求めた。

(2) 孔列に直角方向の引張りでは、孔軸端の無次元応力 S_{A_j} , S_{B_j} は、少数の例外を除いて孔列最外側から中央に近づくに従って大きくなり、孔列中央で最大になる。また穴の形と大きさを固定して N を増すとき、この無次元最大応力 S_{\max} は増大して周期だ円孔群の場合の値に漸近する。この場合の S_{\max} は、 $1/N$ とほぼ直線関係にあることが認められ、これによって $N \geq 15$ に対する S_{\max} の値が求められる。また、穴の形、大きさおよびその数が任意の場合の S_{\max} の値を精度良く求める計算式を与えた。

(3) 孔列方向の引張りでは、各孔縁の無次元最大応力 $S_{j,\max}$ は最外側の穴で最大値 S_{\max} をとり、内側の穴ほど小さくなる。また穴の形と大きさを固定して N を増すとき、この無次元最大応力 S_{\max} は減少する。しかし $N \rightarrow \infty$ の場合の極限值は理論的には求められない。この場合、最外側の穴に生ずる S_{\max} は、 $1/(N - 0.5)$ とほぼ直線関係にあることが認められ、これによって理論的に未知であった $N \rightarrow \infty$ における S_{\max} の極限值を推定した。また、穴の形、大きさ、その数が任意の場合の S_{\max} の値を精度良く求める計算式を与えた。

(4) 上の両問題の解析で経験的に見出した応力と孔数の間の漸近特性を理論的に証明した。これによれば、最外側の穴の応力 σ_1 は $1/(N - 0.5)$ あるいは $(1/N + 1/2N^2)$ 、中央の穴の応力 σ_M は $1/N$ とほぼ直線関係にある。また、この特性は だ円孔だけでなく、無限体内に一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物周縁の応力についても成立し、さらに面内力だけでなく面外せん断力や古典曲げを受ける場合にも成立つ一般的関係である。

(5) 一列に分布する共線き裂群や平行き裂群の平面応力・面外せん断・古典曲げの 6 つの問題を系統的に再計算し、それらの結果に 2.4 節に述べた法則から得られる式を

あてはめて最大応力拡大係数に対する高精度の計算式を与えた。

(1) 石川 誠, 機械工学論文集, 45 (1979), 305.
(2) 石川 誠, 機械工学論文集, 47 (1981), 305.
(3) Murakami, H., *Mechanics of Fracture 1*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1977, 1-100.
(4) 石川 誠, 機械工学論文集, 41 (1975), 305.
(5) 石川 誠, 機械工学論文集, 47 (1981), 305.
(6) 石川 誠, 機械工学論文集, 44 (1978), 183.
(7) Murakami, H., *Mechanics of Fracture 1*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1977, 1-100.
(8) Washiguchi, H. M., *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 36 (1969), 441.
(9) Dally, M., *Exptl. Fract. Mech.*, 1 (1974), 447.
(10) 石川 誠, 機械工学論文集, 47A (1981), 178.
(11) Murakami, H., *Mechanics of Fracture 1*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1977, 1-100.
(12) Ishikawa, M., *Proc. 3rd Int. Conf. New Mater. Exptl. Mech. Symp.*, 1979, 91.
(13) 石川 誠, 機械工学論文集, 45A (1979), 305.
(14) 石川 誠, 機械工学論文集, 48A (1982), 437.

参考文献

- (1) 石田 誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数, 培風館(1976).
- (2) 石田 誠, 日本機械学会論文集, **21** (1955), 502.
- (3) Isida, M., *Mechanics of Fracture 1*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1973), 56.
- (4) 石田, 日本機械学会論文集, **21** (1955), 507.
- (5) 石田, 日本機械学会論文集, **25** (1959), 1118.
- (6) 石田, 日本機械学会論文集, **35** (1969), 1815.
- (7) Nisitani, H., *Mechanics of Fracture 5*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1978), 1.
- (8) Westergaard, H. M., *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, **66** (1939), A49.
- (9) Isida, M., *Engng. Frac. Mech.*, **5** (1973), 647.
- (10) 石田・鶴, 日本機械学会論文集, **47A** (1981), 158.
- (11) Isida, M., *Mechanics of Fracture 3*, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1977), 1.
- (12) Isida, M., *Proc. 1st Int. Conf. Num. Meth. Frac. Mech., Swansea* (1978), 81.
- (13) 石田, 日本機械学会論文集, **45A** (1979), 306.
- (14) 石田・向野, 日本機械学会論文集, **48A** (1982), 423.